UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE RECUPERACION

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401).

Viernes 16 de Julio de 2004 — *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio W de X' se dice SATURADO si para todo $F \in X' - W$ existe $x \in {}^oW$ tal que $F(x) \neq 0$.

   a) Pruebe que si X es reflexivo y W es un subespacio cerrado de X', entonces W es saturado.

   b) Pruebe que un subespacio W de X' es saturado sí y sólo sí $W = ({}^oW)^o$.

   Un subconjunto W de X' se dice DÉBILMENTE* CERRADO si el límite de toda sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de W que converge débilmente *, pertenece a W.

   c) Pruebe que si un subespacio W de X' es saturado entonces él es débilmente* cerrado.

2. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{L}(H,H)$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un VALOR PROPIO de A si existe $x \neq \theta$ tal que $Ax = \lambda\, x$.

   a) Pruebe que $|\lambda| \le \|A\|$.

   b) Pruebe que si A es autoadjunto, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

   c) Pruebe que si A es autoadjunto, y $\mu \neq \lambda$ es otro valor propio de A, entonces $N(\lambda\mathbf{I} - A) \perp N(\mu\mathbf{I} - A)$.

3. a) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que K transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y. Pruebe que K es compacto.

   b) Sea X un espacio de Hilbert y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$, tales que $x_n \stackrel{w}{\to} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Pruebe que $x_n \to x$.

   c) Sean X e Y espacios de Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador compacto. Aplique a) y b) para probar que $K^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ también es compacto.

4. Sea $\Omega := (a,b)$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y dado $m \in \mathbb{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1,...,m\}\,\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también lo es.

5. Sean X, Y espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{R}(A) = Y$, y sea $V = N(A)$. Dado el operador de proyección ortogonal $P : X \to V$, considere $B : Y \to X$ tal que $B(y) = x - P(x)$ para todo $y \in Y$, donde $x \in X$ es tal que $A(x) = y$.

   a) Demuestre que B está bien definido y que B es una biyección lineal y acotada de Y en $V^\perp$. Pruebe, además, que B es un *inverso a derecha* de A, esto es $AB(y) = y$ para todo $y \in Y$.

   b) Defina $A_0 : V^\perp \to Y$ como $A_0(x) = A(x)$ para todo $x \in V^\perp$, es decir $A_0 = A|_{V^\perp}$, y pruebe que $A_0^{-1} = B$.

   c) Extienda los resultados anteriores al caso en que $\mathcal{R}(A)$ es un subespacio cerrado propio de Y.

6. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle \quad \forall\, x,\, y \in H$. Pruebe que A es acotado.

CADA PROBLEMA VALE 1.0 PUNTO

GGP/ggp