UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401).

Lunes 12 de Julio de 2004 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H.

   a) Sea $y \in H$ y suponga que existe $\tilde{y} \in H$ tal que
   $$\langle A(x), y \rangle \, = \, \langle x, \tilde{y} \rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\,.$$
   Demuestre que dicho $\tilde{y}$ es único.

   b) Considere el conjunto
   $$\mathcal{D}(\tilde{A}) := \{ y \in H : \text{ existe } \tilde{y} \in H \text{ tal que } \langle A(x), y \rangle \, = \, \langle x, \tilde{y} \rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A) \}\,,$$
   y defina el operador $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ dado por $\tilde{A}(y) \, := \, \tilde{y} \quad \forall\, y \in H$. Demuestre que $\tilde{A}$ es lineal y cerrado.

2. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert y sea $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(H, H)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : H \to H$, y tal que $\mathbf{P}^2 \, = \, \mathbf{P}$. El objetivo de este ejercicio es probar que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \, = \, \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$, para cuyo efecto se pide proceder como se indica a continuación.

   a) Sea S un subespacio de dimensión 2 de H y sea $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, no trivial, distinto del operador identidad $\mathbf{I} : S \to S$, y tal que $\mathbf{Q}^2 \, = \, \mathbf{Q}$. Pruebe que $S \, = \, R(\mathbf{Q}) \oplus R(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$ y concluya que existen vectores no nulos p, q, r, $s \, \in \, S$ que satisfacen $\langle p, q \rangle = \langle r, s \rangle = 1$, tales que
   $$\mathbf{Q}(v) \, = \, \langle q, v \rangle \, p \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \, = \, \langle s, v \rangle \, r \qquad \forall\, v \in S\,.$$

   b) A partir de la identidad $v \, = \, \mathbf{Q}(v) \, + \, (\mathbf{I} - \mathbf{Q})(v) \quad \forall\, v \in S$, deduzca que $\|p\|^2 \, \|q\|^2 \, = \, \|r\|^2 \, \|s\|^2 \, = \, 1 \, - \, \langle p, r \rangle \, \langle q, s \rangle$ y concluya así que
   $$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)} \, = \, \|\mathbf{I} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}(S,S)}.$$

   c) Dado $x \in H$ tal que $\|x\| \, = \, 1$, considere el subespacio S generado por los vectores x y $\mathbf{P}(x)$ y defina $\mathbf{Q} \, := \, \mathbf{P}|_S$. Demuestre que $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(S, S)$, observe que la dimensión de S es $\leq \, 2$, y luego pruebe, usando b), que $\|(\mathbf{I} - \mathbf{P})(x)\| \, \leq \, \|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

   d) Concluya, a partir de c), que $\|\mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \, = \, \|\mathbf{I} - \mathbf{P}\|_{\mathcal{L}(H,H)}$.

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ.

   a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

   $$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\Omega v\,dx \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

   y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

   $$C_1\,|||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C_2\,|||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

   Ind.: Para la segunda desigualdad proceda por contradicción, es decir, suponga, en particular, que $\forall\, k \in \mathbb{N}$ existe $v_k \in H^1(\Omega)$ tal que $\|v_k\|_{H^1(\Omega)} > k\,|||v_k|||$. Recuerde que la inclusión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, y que si $w \in L^2(\Omega)$ es tal que $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}$, entonces necesariamente w es constante en Ω.

   b) Considere el problema de valores de contorno:

   $$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u\,dx \,=\, 0\,,$$

   donde $f \in L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f\,dx = 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

   $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx \,+\, \lambda \int_\Omega v\,dx \,=\, \int_\Omega f v\,dx \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

   $$\mu \int_\Omega u\,dx \,=\, 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

   Utilice la teoría de Babuška-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de un subespacio U de X.

   a) Demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \in X'$ tales que $F_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}$.

   b) Pruebe que $X = U \oplus V$, donde $V := {}^\circ\{F_1, F_2, ..., F_n\}$.

5. Dado $p \geq 1$, considere el espacio vectorial normado

   $$\ell_p(\mathbb{C}) := \{\, \mathbf{x} := \{x_n\}_{n \in N} : \quad x_n \in \mathbb{C} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \,<\, +\infty \,\}\,,$$

   provisto de la suma y multiplicación por escalar usuales, y cuya norma está dada por $\quad \|\mathbf{x}\| := \left\{ \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right\}^{1/p}$. Demuestre que $\ell_p(\mathbb{C})$ es separable.

6. Sea $(V, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach y sea $J : V \to \mathbb{R}$ un funcional NO-LINEAL. Se dice que J es CONTINUO (resp. DÉBILMENTE CONTINUO) si para toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ tal que $v_n \to v \in V$ (resp. $v_n \stackrel{w}{\to} v \in V$) se tiene que

$$J(v_n) \to J(v) \in \mathbb{R}\,.$$

   a) Determine cual de estos dos conceptos de continuidad implica al otro.

   Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE COMPACTO si toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de U posee una subsucesión débilmente convergente en U.

   b) Pruebe que si U es un subconjunto compacto de V y $J : V \to \mathbb{R}$ es continuo (o bien si U es un subconjunto débilmente compacto de V y $J : V \to \mathbb{R}$ es débilmente continuo), entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v\in U} J(v)\,.$$

   Un subconjunto U de V se dice DÉBILMENTE CERRADO si el límite de toda sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de U que converge débilmente, pertenece a U.

   c) Demuestre que si V es reflexivo, U es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de V, y $J : V \to \mathbb{R}$ es débilmente continuo, entonces existe $u \in U$ tal que

$$J(u) = \min_{v\in U} J(v)\,.$$

7. a) Sean X e Y espacios de Banach tal que X es reflexivo. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto sí y sólo sí A transforma sucesiones débilmente convergentes de X en sucesiones convergentes de Y.

   b) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $N(T) = \{0\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es reflexivo (separable) sí y sólo sí Y es reflexivo (separable).

   c) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también lo es.

PROBLEMA	1	2	3	4	5	6	7
PUNTAJE	1.0	2.0	2.0	1.5	1.5	1.5	1.5

CONTESTE TODOS LOS PROBLEMAS QUE DESEE. SU NOTA SE CALCULARÁ CONSIDERANDO SÓLO AQUELLOS 4 EN QUE OBTIENE MAYOR PUNTAJE.

GGP/ggp