UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA DE RECUPERACION

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Miércoles, 16 de Diciembre de 2015 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. [3 PUNTOS] Dado un triángulo K de $\mathbb{R}^2$, se define el espacio de Raviart-Thomas de orden 0 sobre K como $\mathrm{RT}_0(K) := [P_0(K)]^2 \oplus P_0(K)\,\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^{\mathrm{t}}$ denota un vector genérico de K. En lo que sigue, $\boldsymbol{\nu}_K$ es el vector normal en ∂K, y los lados de K se denotan por F_j, $j \in \{1,2,3\}$, de modo que $\boldsymbol{\nu}_K|_{F_j}$ es un vector constante de $\mathbb{R}^2$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$.

   a) Pruebe que para cada $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ se tiene que $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in P_0(K)$ y $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K|_{F_j} \in P_0(F_j)$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$.

   b) Demuestre que si $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{RT}_0(K)$ es tal que $\int_{F_j} \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K = 0$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$, entonces necesariamente $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{0}$. Use primero integración por partes para probar que $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0$, y luego concluya utilizando el hecho que los vectores normales sobre los lados de K son l.i. dos a dos.

   c) Para cada $i \in \{1,2,3\}$ defina el funcional $m_i(\boldsymbol{\tau}) := \int_{F_i} \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K$ $\forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, y deduzca, a partir de b), que existen únicos $\boldsymbol{\tau}_j \in \mathrm{RT}_0(K)$, $j \in \{1,2,3\}$, tales que $m_i(\boldsymbol{\tau}_j) = \delta_{ij}$ $\forall\, i, j \in \{1,2,3\}$. A su vez, defina el operador de interpolación $\Pi_K : [H^1(K)]^2 \to \mathrm{RT}_0(K)$ por $\Pi_K(\boldsymbol{\tau}) := \displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_i(\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\tau}_i$ $\forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2$, y muestre que $\Pi_K(\boldsymbol{\tau})$ es el único elemento en $\mathrm{RT}_0(K)$ tal que $m_j(\Pi_K(\boldsymbol{\tau})) = m_j(\boldsymbol{\tau})$ $\forall\, j \in \{1,2,3\}$.

   d) Sea $\widehat{K}$ el triángulo canónico de $\mathbb{R}^2$, y sea $F_K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación afín invertible dada por $F_K(\widehat{\mathbf{x}}) := B_K\,\widehat{\mathbf{x}} + b_K$ $\forall\, \widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, con $B_K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $b_K \in \mathbb{R}^2$, tal que $K = F_K(\widehat{K})$. Luego, dado $\boldsymbol{\tau} \in [H^m(K)]^2$, $m \in \{0,1\}$, defina $\widehat{\boldsymbol{\tau}} := |\det B_K|\, B_K^{-1}\,\boldsymbol{\tau}\circ F_K$, pruebe que $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, y concluya que existe $C > 0$, independiente de K, tal que

   $$|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,\widehat{K}} \,\le\, C\,\|B_K^{-1}\|\,\|B_K\|^m\,|\det B_K|^{1/2}\,|\boldsymbol{\tau}|_{m,K}\,.$$

   Inversamente, si $\widehat{\boldsymbol{\tau}} \in [H^m(\widehat{K})]^2$, muestre que $\boldsymbol{\tau} := |\det B_K|^{-1}\,B_K\,\widehat{\boldsymbol{\tau}}\circ F_K^{-1} \in [H^m(K)]^2$ y que existe $C > 0$, independiente de K, tal que

   $$|\boldsymbol{\tau}|_{m,K} \,\le\, C\,\|B_K\|\,\|B_K^{-1}\|^m\,|\det B_K|^{-1/2}\,|\widehat{\boldsymbol{\tau}}|_{m,\widehat{K}}\,.$$

   e) Suponga que K es parte de una triangulación $\mathcal{T}_h$ perteneciente a una familia regular, y utilice la identidad $\Pi_{\widehat{K}}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}) = \widehat{\Pi_K(\boldsymbol{\tau})}$ para demostrar que, dado $m \in \{0,1\}$, existe $C := C(\widehat{K}, \Pi_{\widehat{K}}, m) > 0$, tal que

   $$|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K(\boldsymbol{\tau})|_{m,K} \,\le\, C\,h_K^{1-m}\,|\boldsymbol{\tau}|_{1,K} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(K)]^2\,.$$

2. (3 PUNTOS) Sea Ω un abierto acotado, conexo, pero no necesariamente convexo, de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Hilbert $H(\mathrm{div};\Omega)$ de vectores en $[L^2(\Omega)]^n$ con divergencia en $L^2(\Omega)$, cuya norma inducida se denota por $\|\cdot\|_{\mathrm{div};\Omega}$. Se dice que $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ admite una DESCOMPOSICIÓN DE HELMHOLTZ ESTABLE si existen $z \in H^2(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega \varphi = 0$ cuando $n = 2$ (resp. $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$ con $\int_\Omega \varphi = \mathbf{0}$ cuando $n = 3$), y una constante $C > 0$, independiente de las variables anteriores, tales que

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla z + \mathbf{curl}\,\varphi \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{y} \qquad \|\nabla z\|_{1,\Omega} + \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div};\Omega}\,, \tag{1}$$

donde $\mathbf{curl}\,\varphi := \begin{cases} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{\mathtt{t}} & \text{si} \quad n = 2 \\ \nabla \times \varphi & \text{si} \quad n = 3 \end{cases}$.

a) En esta parte se pide deducir (1) para el caso $n = 2$, procediendo de la siguiente manera. Introduzca primero un abierto acotado y **convexo** G de clase $C^{0,1}$ y suficientemente grande tal que $\overline{\Omega} \subset G$. Luego, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, defina $f_{\boldsymbol{\tau}} := \begin{cases} \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} & \text{en} \quad \Omega \\ 0 & \text{en} \quad G \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$, y considere el problema de valores de contorno:

$$\Delta w = f_{\boldsymbol{\tau}} \quad \text{en} \quad G\,, \quad w = 0 \quad \text{en} \quad \partial G\,. \tag{2}$$

Pruebe que (2) está bien propuesto, observe que $\mathrm{div}\big(\nabla w\big) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, y entonces concluya utilizando el resultado que dice que "$\boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^2$ satisface $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\zeta} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{curl}\,\phi$ en Ω", y notando que para $n = 2$ se tiene que $\|\mathbf{curl}\,\phi\|_{0,\Omega} = |\phi|_{1,\Omega}$.

b) Cuando $n = 3$ se puede proceder de la misma manera anterior, utilizando ahora que "$\boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^3$ satisface $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\zeta} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$ tal que $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{curl}\,\phi$ en Ω", pero en tal caso no es verdad que $\|\mathbf{curl}\,\phi\|_{0,\Omega} = |\phi|_{1,\Omega}$, y por lo tanto la cota de estabilidad (desigualdad al lado derecho de (1)) sólo resulta válida si el dominio original Ω es convexo. Con el objeto de subsanar esta dificultad, se propone el siguiente procedimiento, el cual hace uso de la misma geometría ya descrita para definir una extensión apropiada desde Ω hacia todo G. Más precisamente, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, denote por $\mathbf{n}$ el vector normal interior en $\partial\Omega$, y considere el siguiente problema de valores de contorno en $G \setminus \overline{\Omega}$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad G \setminus \overline{\Omega}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en} \quad \partial\Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial G\,. \tag{3}$$

Pruebe que (3) está bien propuesto, defina $\widetilde{\boldsymbol{\tau}} := \begin{cases} \boldsymbol{\tau} & \text{en} \quad \Omega \\ \nabla u & \text{en} \quad G \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$, muestre que $\widetilde{\boldsymbol{\tau}} \in H(\mathrm{div};G)$, y concluya el resultado requerido haciendo uso primero de (1) para $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$ y el dominio convexo G, y luego restringiendo lo obtenido a Ω.

GGP/ggp