UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Martes, 19 de Diciembre de 2006 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea $\Omega :=]a,b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Además, denote $h := \max\Big\{ x_j - x_{j-1} : \quad j \in \{1,2,...,n\}\Big\}$, defina el espacio

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbf{P}_0([x_{j-1},x_j]) \quad \forall\, j \in \{1,2,...,n\}\Big\},$$

y considere el operador $\Pi_h : L^2(\Omega) \to V_h$ que a cada $v \in L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \in V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h, tal que

$$\| v - \Pi_h(v) \|_{L^2(\Omega)} \leq C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

(15 Puntos)

2. Sean $\hat{K} = [0,1]$, $K = [x_{j-1},x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \to K$ definida por

$$F(\hat{x}) = h_j\, \hat{x} + x_{j-1} \qquad \forall\, \hat{x} \in \hat{K}\,.$$

(a) Dado un entero $r \geq 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que

$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} = h_j^{r-1/2}\, |v|_{H^r(K)}\,.$$

(b) Sean m, k enteros tal que $0 \leq m \leq k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall\, \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\leq k$. Además, sea Π el operador definido por

$$\Pi v = (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \qquad \forall\, v \in H^{k+1}(K)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que

$$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \leq C\, h_j^{k+1-m}\, |v|_{H^{k+1}(K)}\,.$$

(15 Puntos)

3. Sea Ω un dominio poligonal convexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ, y dado $f \in L^2(\Omega)$, considere la ecuación de Helmholtz con datos de Dirichlet:

$$\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{1}$$

i) Introduzca la incógnita auxiliar $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y pruebe que una formulación variacional mixta de (1) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} \,-\, \int_\Omega \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \,=\, -\int_\Omega f\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,. \tag{2}$$

ii) Defina el operador $P : H(\mathrm{div};\Omega) \to [L^2(\Omega)]^2$ que a cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ le asigna $P(\boldsymbol{\tau}) := \nabla\, z$, donde $z \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución del problema de valores de contorno: $\Delta\, z \,=\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau})$ en $\Omega\,,$ $z \,=\, 0$ en $\Gamma\,.$ Pruebe que P es compacto y que $H(\mathrm{div};\Omega) = P(H(\mathrm{div};\Omega)) \oplus (I-P)(H(\mathrm{div};\Omega))$.

iii) Utilice la descomposición anterior de $H(\mathrm{div};\Omega)$ para demostrar que (2) se reduce, equivalentemente, a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,+\, K(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)\,, \tag{3}$$

donde A y B son formas bilineales acotadas cuyos operadores inducidos $\mathbf{A} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ y $\mathbf{K} : H(\mathrm{div};\Omega) \to H(\mathrm{div};\Omega)$ son biyectivo y compacto, respectivamente, y F es el funcional dado a la derecha de (2).

Ind. Defina el operador $S(\boldsymbol{\tau}) := (I \,-\, 2\,P)(\boldsymbol{\tau})$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup continuas.

(15 Puntos)

4. i) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de $H(\mathrm{div};\Omega)$ tal que $\lim\limits_{h\to 0}\,\mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\tau}, H_h) \,=\, 0$ para todo $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, y considere el esquema de Galerkin perturbado: Hallar $\boldsymbol{\sigma}_h \in H_h$ tal que

$$A(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\tau}_h) \,=\, F(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau}_h \in H_h\,. \tag{4}$$

Suponga que existen operadores lineales $\mathcal{E}_h : [H^1(\Omega)]^2 \to H_h$ tales que

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{E}_h\,P(\boldsymbol{\tau}_h)) \,=\, \mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau}_h) \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau}_h \,\in\, H_h\,,$$

y

$$\|\boldsymbol{\tau} - \mathcal{E}_h(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega)]^2} \,\le\, C\,h\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau} \,\in\, [H^1(\Omega)]^2\,.$$

Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que $\forall\,h \le h_0$ el problema (4) tiene solución única, la cual es estable y convergente con constantes independientes de h.

Ind. Defina el operador $S_h(\boldsymbol{\tau}) := (I \,-\, 2\,\mathcal{E}_h\,P)(\boldsymbol{\tau}_h)$ y considere la expresión $A(\boldsymbol{\tau}, S_h(\boldsymbol{\tau})) = A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau})) - A(\boldsymbol{\tau}, S(\boldsymbol{\tau}) - S_h(\boldsymbol{\tau}))$ para probar que A satisface las condiciones inf-sup discretas.

ii) Qué se puede decir del esquema de Galerkin respectivo para (3)?.

(20 Puntos)

5. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;\geq\; \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\mathbf{v}\,\in\,[H^1_0(\Omega)]^2\,, \tag{5}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) \,:=\, \frac{1}{2}\left\{\nabla\mathbf{v} \,+\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\right\}$. Para tal efecto, proceda como sigue.

i) Dados $\boldsymbol{\sigma} \,:=\, (\sigma_{ij})$ y $\boldsymbol{\tau} \,:=\, (\tau_{ij})$ en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, se define el producto tensorial $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,:=\, \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}\,\tau_{ij}$ y se introducen los subespacios

$$\mathbf{R}^{2\times 2}_{sim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = \boldsymbol{\tau}\} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^{2\times 2}_{asim} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{t}} = -\boldsymbol{\tau}\}\,.$$

Pruebe que $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \,=\, 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\sigma}\,\in\,\mathbf{R}^{2\times 2}_{sim}, \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\,\in\,\mathbf{R}^{2\times 2}_{asim}$.

ii) Note que $\nabla\mathbf{v} \,=\, \mathbf{e}(\mathbf{v}) \,+\, \mathbf{w}(\mathbf{v})\,,$ con $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \,:=\, \frac{1}{2}\left\{\nabla\mathbf{v} \,-\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\right\}$, y recuerde que $\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\,\in\,[L^2(\Omega)]^{2\times 2}$, para probar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,-\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,+\, \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \,=\, \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\,.$$

iii) Deduzca la identidad $\nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}} \,=\, \mathrm{div}\,\left\{\nabla\mathbf{v}\,\mathbf{v} \,-\, \mathrm{div}\,(\mathbf{v})\,\mathbf{v}\right\} \,+\, (\mathrm{div}\,(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (5).

(15 Puntos)

6. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ poligonal y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. El problema de elasticidad lineal plana asociado a un sólido que ocupa Ω, y que está sometido a la fuerza $\mathbf{f}$, consiste en encontrar el desplazamiento $\mathbf{u}$ tal que:

$$\mathrm{div}\left\{\lambda\,\mathrm{tr}\,\mathbf{e}(\mathbf{u})\,\mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u})\right\} \,=\, -\,\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \,=\, \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma\,, \tag{6}$$

donde $\lambda\,,\,\mu \,>\, 0$ son las constantes de Lamé, tr denota el operador de trazas matricial, $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ es el tensor de deformaciones (definido en el problema anterior), e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$. Demuestre que la formulación variacional de (6) se reduce a: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1_0(\Omega)]^2$ tal que

$$\int_\Omega \left\{\lambda\,\mathrm{div}\,(\mathbf{u})\,\mathrm{div}\,(\mathbf{v}) \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v})\right\} \,=\, \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad \forall\,\mathbf{v} \in [H^1_0(\Omega)]^2\,,$$

y pruebe que ella tiene solución única, la cual depende continuamente del dato $\mathbf{f}$. Utilice triángulos de tipo (1) para definir detalladamente un esquema de Galerkin asociado, pruebe que tiene solución única, establezca su convergencia e indique la razón de convergencia respectiva.

(20 Puntos)

GGP/ggp