

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA**



**Aspectos Dinámicos de algunas Máquinas de un Cabezal  
y Máquinas con 0, 1 y 2 Piedras**

Memoria para optar al Título de Ingeniero Matemático

**Camilo Alejandro Lacalle Glena**

**Marzo 2012**

Concepción - Chile



# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi directora guía: Dra. Anahí Gajardo Schulz, por la confianza que depositó en mi, la paciencia que tuvo en entender mis ideas, el buen consejo a la hora de ordenar y complementar los conceptos, y por supuesto por la buena voluntad y dedicación con la leyó incansables veces cada capítulo de mi memoria. Ella propició un ambiente de trabajo y confianza en el que pudimos discutir variados temas, tanto de matemáticas como de la vida en general. Puedo decir por cierto que es una excelente matemático y por sobre todo excelente persona.

A la comisión evaluadora por su interés en leer esta memoria.

Quiero agradecer a Conicyt por el proyecto Fondecyt número 1090568, que facilitó mi trabajo. También agradezco al Centro de Investigación en Ingeniería Matemática CI<sup>2</sup>MA por la oficina y hospitalidad brindada mientras trabajé en mi tesis.

A mi pareja, Patricia Soto, por todo el apoyo que me brindó cuando lo necesité y cuando no, por mostrarme la luz en momentos en que solo veía oscuridad, y por supuesto, por las numerosas noches que me soportó trabajando.

También quiero agradecer a mis tíos, Fernando González y Camila Glena quienes son mi familia en concepción, por los buenos consejos, la compañía y el cariño que siempre recibí de su hermosa familia, realmente cada vez que estoy cerca de ustedes me siento en casa.

A mi tía Daniela Glena y a la profesora Griselda Gallegos que me apoyaron durante toda mi carrera.

Gracias a todos mis amigos, en particular a Viviana Mercado, Arturo Fernandez, Arturo Gomez, Ronald Cruces y Jorge Clarke, por los buenos y malos momentos que pasamos en esta etapa, pues de ambos lados se aprende. También les agradezco la preocupación y seriedad con la que conversamos los temas que son trascendentales.

No quiero olvidarme de agradecer a las tías de la parroquia de Barrio norte, donde almorcé casi toda mi carrera y recibí su cariño y apoyo.

Finalmente quiero agradecer a mis padres y hermanas quienes siempre confiaron en mi y mis capacidades, incluso más que yo; sin ellos no sería quien soy. Agradezco la fuerza que mis padres

pusieron en sacarme a mi y a mis hermanas adelante, sé que tenían razones fuertes para impedir que me separara de ustedes tan joven e inmaduro, pero eso también me hizo quien soy ahora; por todo esto gracias.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
Definiciones previas . . . . .	6
<b>1. Abejas en 2D, una generalización de la Hormiga de Langton</b>	<b>11</b>
1.1. Definiciones . . . . .	12
1.2. Construcción del grafo . . . . .	13
1.3. Construcción de ciclos de largo arbitrario . . . . .	16
1.4. Una regla diferente . . . . .	20
1.5. Relación entre las dos reglas . . . . .	24
<b>2. Máquina a piedras</b>	<b>27</b>
2.1. Definiciones previas . . . . .	27
2.2. Restricciones en el caso, $\varphi_M < 2$ . . . . .	31
<b>3. Máquina con 2 piedras</b>	<b>47</b>
3.1. Resultados preliminares . . . . .	48
3.2. Lenguajes y subshifts . . . . .	54
3.2.1. Definiciones . . . . .	54
3.2.2. Una máquina con un $t$ -shift complejo . . . . .	56
3.3. Construcción de un $PDA$ que reconoce el $t$ -shift de una máquina con 2 piedras	62
3.3.1. Parámetros de los movimientos repetitivos . . . . .	66
3.3.2. Un lema técnico . . . . .	69
3.3.3. Descripción de los estados de $Q_0$ . . . . .	73
3.3.4. Transiciones para los estados de $Q_0$ . . . . .	76
3.3.5. Descripción de los estados de $Q_1$ (4ª etapa) . . . . .	93
3.3.6. Transiciones para los estados de $Q_1$ (4ª etapa) . . . . .	95
3.4. Movimiento paralelo . . . . .	102
<b>Conclusión</b>	<b>105</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>



# Introducción

A mediados del siglo 20, el inglés *Alan Turing (1912-1954)* y *John Von Neumann (1903-1957)* fueron los pioneros en el estudio abstracto de la computación contribuyendo separadamente en el diseño de las primeras máquinas programables; este último exploró el área de la computación motivado por sus estudios en dinámica de fluidos, la que es modelada matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, *Von Neumann* vislumbró la estrecha relación que tendrían las computadoras y los métodos no analíticos para resolver tales ecuaciones. Su característica interdisciplinaria lo llevó a finales de la década del 40 a desarrollar la teoría de los autómatas, motivado por entender los límites de la lógica y la esencia de los sistemas naturales. Lamentablemente, su prematura muerte impidió que pudiera terminar sus trabajos en teoría de autómatas, sin embargo, estos sistemas fueron presentados dentro del campo de la física computacional en el año 1966 en el libro póstumo *Theory of Self-reproducing Automata* [13], editado y completado por *Arthur Burks*, un matemático del área de las ciencias computacionales quien trabajó en la construcción de ENIAC, una de las primeras computadoras.

Un autómata celular, puede ser pensado como una colección de celdas coloreadas en una grilla de forma específica, esta configuración evoluciona a pasos discretos de acuerdo a un conjunto de reglas bien definidas, estas reglas se aplican de manera iterativa tantas veces como se quiera. Sus aplicaciones se encuentran en el área de la biología, donde son útiles modelando dinámica de poblaciones bacterianas, o en general modelando el funcionamiento de sistemas biológicos. También en el área de la física, química, computación donde se busca construir un autómata que sea capaz de desarrollar un proceso en especial, por ejemplo la creación de fondos para diseños artísticos, procesamiento de imágenes, encriptación de datos, etc.

Los autómatas tratados aquí son una clase particular llamados máquinas con un cabezal, pues cuentan con un cabezal capaz de leer la información almacenada en la casilla en la que se encuentra y recorrer la grilla leyendo la información de cada casilla. Estas máquinas son capaces de modificar la configuración de la grilla, cambiando solamente el color de la celda por la que pasó el cabezal, así la configuración va cambiando celda por celda en cada iteración (esto a diferencia de autómatas que actualizan todas la celdas en cada iteración) estas máquinas son útiles para la exploración de grafos en forma automática, en la programación interna de

robots, y junto con los sensores son indispensables para procesos como contadores, detectores de presencia, detectores de objetos, búsqueda de patrones; en esta última aplicación, juega un rol preponderante el reconocimiento de figuras, labor que puede ser llevada a cabo por autómatas con cabezal, los que con la capacidad extra de marcar las casillas de la grilla son más poderosos a la hora de buscar patrones.

En el primer capítulo trabajamos con dos autómatas que se mueven en una grilla bidimensional, más específicamente, dos reglas distintas en una clase particular de autómatas con un cabezal que denominaremos abejas. Estos autómatas fueron introducidos por *Gajardo y Dorbec* [4] y son una generalización a la hormiga de Langton, sistema discreto que fue definido por *Christopher Langton* en el año 1986 en el contexto de la vida artificial con una regla muy sencilla: si lee blanco dobla a la derecha y si lee negro dobla a la izquierda cambiando el color de la celda. De forma similar, en 1985 *Gunn y Ortuño* [8] definieron una versión discreta del *gas de Lorentz*, en donde una partícula se mueve por un ambiente con obstáculos. Luego *Cohen* tomó este modelo y le dio a la partícula la capacidad de modificar el ambiente en el que se mueve, dándole una complejidad distinta y resultando en la hormiga de Langton.

La simplicidad en la definición de la hormiga no la hace limitada ni sencilla de abordar, el año 2000 *Gajardo, Moreira y Goles* demostraron una construcción capaz de calcular cualquier fórmula booleana mediante el uso de circuitos lógicos recorridos por sólo una hormiga, dotándola con esto de la capacidad de hacer cómputo universal. Por otra parte se puede ver en las simulaciones de esta regla en un espacio celular monocolorado, que la dinámica es muy compleja en las primeras 10.000 iteraciones, para luego de esto comenzar un movimiento repetitivo acotado a una banda; se cree que esta secuencia de estados es un atractor para la hormiga lo que aún no ha sido probado, pero sí se probó que independiente de la configuración inicial, la trayectoria de la hormiga en  $\mathbb{Z}^2$  es no acotada, esto fue probado por *Bunimovich y Troubetzkoy* [2].

El funcionamiento de estos sistemas dinámicos, para el caso particular de las abejas, consiste en un cabezal que se mueve en la grilla, el cuál lee el color de la celda en la que se encuentra y toma una decisión dependiendo de cuál sea este color. Al igual que la hormiga, luego de tomada la decisión según una regla determinista, se mueve y cambia el color de la casilla que dejó atrás, modificando así el ambiente en el que se mueve. Aunque los estados a los que una abeja puede acceder, a diferencia de los de la hormiga de Langton que hacen que su izquierda y derecha sean invariantes, le dan a la abeja la capacidad de voltearse, cambiando así la noción de derecha e izquierda, proporcionándole una complejidad, en principio, distinta a la de la hormiga.

En el segundo capítulo trataremos con otra clase de autómatas, similares en el sentido que se mueven en la misma grilla y tienen un cabezal, pero que no son capaces de modificar los colores del plano, aunque sí son capaces de leer tales colores y tomar decisiones influenciadas por esta información, además cuentan con un stock de marcadores, a los que denominaremos piedras. Estas piedras pueden ser depositadas en la grilla y recogidas de esta, además están enumeradas o coloreadas, es decir son piedras diferenciables una de otra.

Estos autómatas fueron introducidos por *Blum* y *Hewitt* [1] en el año 1967 con la motivación de reconocimiento de figuras en una parte finita de la grilla, se introdujeron así, los autómatas con piedras abstractas, que pueden hacer uso de sus piedras cuando quieran sin importar en que posición estas se encuentren, es decir, si una piedra está en alguna celda de la grilla, distinta de la celda en la que el autómata se encuentra, en el momento que este necesite usar la piedra ya sea para ponerla en otra posición o simplemente recogerla, esta desaparece de la posición en la que estaba para ahora cumplir la labor que la regla del autómata dicte. También se definieron los autómatas con piedras físicas o reales, que sólo pueden usar una piedra si esta fue antes recogida por el autómata, teniendo que, para realizar esta labor, ir a la posición en donde estaba la piedra. Ellos prueban que ambos autómatas tienen el mismo poder y que hay una jerarquía entre las figuras acotadas, relacionada con la cantidad de piedras necesaria para reconocerla. En esta memoria se trabajará con piedras reales.

En el año 1999, *Delorme* y *Mazoyer* [3] retomaron estos autómatas, pero ahora moviéndose en el plano infinito, probando que en este caso la jerarquía colapsa con 3 piedras, es decir, que una figura reconocida por un autómata con más de tres piedras puede ser reconocida por un autómata con exactamente 3 piedras, resultado que está estrechamente conectado con la existencia de un autómata con tres piedras que es capaz de hacer el cómputo universal; sin embargo, si el autómata cuenta con dos piedras, se observa que su movimiento es bastante restringido, aunque tiene más libertades que un autómata con una o sin piedras.

Dado que estos autómatas con un cabezal sólo pueden cambiar los colores de las celdas por las que pasan, la dinámica de coloración de la grilla puede ser estudiada desde la perspectiva de la dinámica del movimiento que seguirá el cabezal. En esta memoria abordaremos un concepto introducido por *Gajardo* y *Mazoyer* [7], llamado  $t$ -shift. Consiste en seguir la trayectoria de una máquina registrando la secuencia de estados y símbolos leídos; tal secuencia está ligada a las transiciones de la máquina, así podemos entender el  $t$ -shift como el conjunto de secuencias asociadas a trayectorias válidas para el autómata.

Por otra parte, se han realizado estudios con máquinas en  $n$  dimensiones, los que han conseguido tipificar las máquinas cuyo lenguaje, en el contexto de la dinámica simbólica, es regular. También en dimensión 1 se han caracterizado las máquinas cuyo lenguaje es reconocido por un autómata con una pila. El objeto de estudio en el tercer capítulo será la máquina con 2 piedras en dos dimensiones y vamos a tipificar en detalle su  $t$ -shift.

## Definiciones previas

**Definición 1** Diremos que un grafo finito es un par  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito llamado conjunto de vértices y  $E \subseteq V \times V$ , es llamado conjunto de aristas. Un camino de  $G$ , es una secuencia  $\{s_i\}_{i \in \{0,1,2,\dots,n\}}$  de vértices de  $V$  de largo mayor a uno tal que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $(s_{i-1}, s_i) \in E$ , y diremos que un ciclo, es un camino de  $G$  tal que  $s_0 = s_n$ .

Aclaremos que de la misma forma se puede definir un grafo no finito en el que  $V$  no sea un conjunto finito.

**Definición 2** Diremos que un grafo etiquetado  $G$ , es una tupla  $(V, E, h, X)$ , donde  $(V, E)$  es un grafo,  $X$  es el conjunto de etiquetas y  $h : E \rightarrow X$ , es la función que a cada arista le asigna una etiqueta. A  $h$  se le denomina etiquetado.

**Definición 3** Sea  $G = (V, E, h, X)$  un grafo etiquetado. Si denotamos por  $v_0$  a un nodo especial de  $V$  llamado nodo inicial, decimos que  $(x_i)_{i \in I}$  es secuencia válida para el grafo si existe una secuencia de vértices  $(v_i)_{i \in \{0\} \cup I}$ , satisfaciendo que para cada  $i \in \{0\} \cup I$ ,  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  y  $h(v_{i-1}, v_i) = x_i$  (donde  $I = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$  es un intervalo de  $\mathbb{N}$ , o  $I$  el conjunto  $\mathbb{N}$ , resultando en una secuencia finita o infinita respectivamente).

Si queremos analizar la dinámica simbólica de cierta máquina, debemos poner atención en los autómatas que son capaces de definir “secuencias de símbolos”, veremos que la noción de grafo nos ayudará cuando se trate de clarificar como es que estos autómatas trabajan, esto será explicado luego de definir bien qué son estas “secuencias de símbolos” y algunos objetos relacionados con ellas.

**Definición 4** Un alfabeto es un conjunto finito,  $\Sigma$ ; para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define  $\Sigma^n$  como el conjunto de todas las secuencias de largo  $n$  de elementos de  $\Sigma$ .

**Definición 5** Se define la operación  $*$  sobre algún alfabeto  $\Sigma$ , denominada estrella de Kleene de la siguiente forma:

$$\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n.$$

Donde  $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$  y  $\varepsilon$  representa la secuencia vacía.

**Definición 6** Una palabra o cadena sobre el alfabeto  $\Sigma$  es un elemento  $w$  de  $\Sigma^*$ , y un lenguaje sobre el alfabeto  $\Sigma$  es un subconjunto  $L$  de  $\Sigma^*$ .

**Definición 7** Dadas  $u, v \in \Sigma^*$ , con  $u = u_1v_2 \dots u_j$   $v = v_1v_2 \dots v_k$ , se define la concatenación de  $u$  con  $v$ , por:

$$uv = u_1u_2 \dots u_jv_1v_2 \dots v_k$$

Asimismo, dado  $i \in \mathbb{N}$ , se define  $u^i$  como la concatenación de  $u$  consigo misma  $i$  veces.

**Definición 8** Dados  $a \in \Sigma$  y  $L \subseteq \Sigma^*$ , se define la concatenación de  $a$  con  $L$ , por:

$$aL = \{w \in \Sigma^* / \exists v \in L, w = av\}$$

**Definición 9** Un autómata finito determinista es una tupla  $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ , donde:

- $Q$  es un conjunto finito llamado conjunto de estados.
- $\Sigma$  es un conjunto finito llamado alfabeto de entrada.
- $q_0 \in Q$  se denomina estado inicial.
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$  es denominada función de transición.
- $F \subseteq Q$  es el conjunto de estados de aceptación.

Esto puede ser visto como un grafo etiquetado,  $(Q, E, h, \Sigma)$ , donde  $E = \{(p, q) \in Q^2 / \exists a \in \Sigma, \delta(p, a) = q\}$  y para cada  $(p, q) \in E$ ,  $h(p, q) = a \Leftrightarrow \delta(p, a) = q$ .

**Definición 10** *Un autómata a pilas es una tupla  $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F, Z_0)$ , donde:*

- $Q$  es un conjunto finito llamado conjunto de estados.
- $\Sigma$  es un conjunto finito llamado alfabeto de entrada.
- $\Gamma$  es un conjunto finito, en donde se encuentran los símbolos de pila.
- $q_0 \in Q$  se denomina estado inicial.
- $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \longrightarrow Q \times (\{\varepsilon\} \times \Gamma \times \Gamma^2)$  es denominada función de transición.
- $F \subseteq Q$  es el conjunto de estados de aceptación.
- $Z_0 \in \Gamma$  se denomina símbolo de fondo de pila.

Los autómatas recién definidos, funcionan leyendo una palabra sobre el alfabeto de entrada, en cada iteración leen un caracter  $a$  de  $\Sigma$  y cambia de estado interno  $q$ , esto forma parte del argumento ingresado a la función  $\delta$  para calcular la siguiente transición, en la siguiente iteración leerá el siguiente caracter de la palabra y así hasta terminar de leerla. Estos autómatas aceptan o rechazan estas palabras de entrada si al terminar de leer la palabra lo hace concluyendo en un estado de aceptación, o no; dado un autómata  $\mathbf{A}$ , el conjunto de todas las palabras aceptadas por él, se denota  $L(\mathbf{A})$  y es llamado el lenguaje de  $\mathbf{A}$ . Para el caso de un autómata finito determinista esto puede ser visualizado desde el grafo etiquetado que lo representa, de la siguiente forma:

Una palabra  $w$  será aceptada si y sólo si, es una secuencia finita válida para el grafo, y la secuencia de vértices asociada a esta comienza en  $q_0$  y concluye en un nodo de aceptación.

**Definición 11**  $\tilde{D} = \{ \hat{i}, -\hat{i}, \hat{j}, -\hat{j} \}$ .

**Definición 12** *Se define el espacio celular como el grafo infinito  $G = (V, E)$ , donde  $V = \mathbb{Z}^2$  y  $E = \{(x, x + d) \mid x \in V, d \in \tilde{D}\}$ .*

- *Se define el subgrafo inducido por un subconjunto  $V_A$  de  $\mathbb{Z}^2$ , como  $G_{V_A} = (V_A, E_{V_A})$ , donde  $V_A \subseteq V$ ,  $E_{V_A} = \{(x, x + d) \mid x \in V_A, x + d \in V_A, d \in \tilde{D}\}$ .*

- Diremos que un subconjunto  $V_A$  del espacio celular está conectado, si cada casilla de  $V_A$  puede ser alcanzada desde cualquier otra casilla de  $V_A$  mediante un camino totalmente contenido en  $G_{V_A}$ .
- En otro caso, un subconjunto  $V_A$  del espacio celular está desconectado.

**Definición 13** Dado  $C$  un conjunto finito, llamado el conjunto de colores, diremos que una coloración de  $V$ , es una función  $c : V \rightarrow C$ , cualquiera.



# Capítulo 1

## Abejas en 2D, una generalización de la Hormiga de Langton

En este capítulo estudiaremos ciertas reglas particulares dentro de una clase de autómatas con cabezal denominados abejas y en general definidos sobre un espacio  $n$ -dimensional, coloreado en blanco y negro; las reglas que estudiaremos se definen en un espacio bidimensional.

En la hormiga de Langton, el estado (cuerpo) puede ser entendido como una flecha apuntando en alguna de las direcciones canónicas, si pensamos a la hormiga con su cabeza en la punta de la flecha y la cola donde comienza la flecha, se podrá distinguir una dirección derecha y una izquierda. En virtud de esto la regla se define dependiendo del estado (hacia donde mira el cuerpo) y el color que se lea, como girar a la izquierda si se lee blanco y a la derecha si lee negro, además en la trayectoria de la hormiga, ésta va cambiando los colores de las casillas que visita.

Las abejas tienen un estado que guarda más información, este estado tiene la forma de un par ordenado que contiene una flecha en cada componente. En la primera componente está la flecha que dictará hacia donde será el movimiento en la iteración y en la segunda hay una flecha perpendicular a la anterior, la que al efectuar la transición, pasará a la primera componente con algún signo que dependerá del color que esté viendo y será reemplazada por la flecha de la primera componente con algún signo que también dependerá del color que esté viendo; de este modo podemos deducir que el movimiento descrito por estos autómatas es de tipo zig-zag, en el sentido que nunca se mueve por la misma dirección en dos iteraciones seguidas.

Puede ser muy difícil determinar la trayectoria que un autómata como la abeja, es capaz de seguir; dado que puede pasar por casillas que ya han sido visitadas en el pasado, es decir, que es posible que pase por casillas que no tengan el mismo color que en la coloración inicial, sin embargo, en las simulaciones experimentales con coloraciones al azar estas abejas exhiben un comportamiento bastante simple con ciclos no muy largos.

Este capítulo estudiaremos que restricciones tienen estas abejas en su movimiento y, dado que se abordan dos reglas bastante parecidas, estudiamos si hay alguna relación entre ellas o si son realmente dos reglas diferentes, es decir que una no simula a la otra.

## 1.1. Definiciones

**Definición 1.1** *El conjunto de estados estará dado por:*

$$Q = \{(q_1, q_2) \in \tilde{D}^2 \mid \{q_1, q_2\} \text{ es una base de } \mathbb{Z}^2\}.$$

**Definición 1.2** *Definamos el sistema dinámico de la siguiente manera. Sea  $C = \{B, N\}$ , la transición de una abeja estará definida por su posición en la grilla,  $x \in \mathbb{Z}^2$ , su estado interno,  $q \in Q$  y la coloración  $c \in C^{\mathbb{Z}^2}$  del espacio celular. El espacio de fase, será  $X = C^{\mathbb{Z}^2} \times \mathbb{Z}^2 \times Q$ . Así, un elemento de este conjunto,  $(c, x, q)$ , será llamado estado del sistema. La dinámica estará definida por la función de transición de estados  $F : X \rightarrow X$ .*

**Definición 1.3** *La función de transición de estados actúa de la siguiente forma:*

$F(c, x, q) = (c', x', q')$ , donde  $q = (q_1, q_2)$ ,  $q' = (q'_1, q'_2)$  y

1.  $x' = x + q_1$ ,
2.  $q'_1 = \sigma_{c(x')}(1)q_2$ ,
3.  $q'_2 = \sigma_{c(x')}(2)q_1$ ,
4.  $c'(x') \neq c(x')$ ,
5.  $\forall y \neq x', c'(y) = c(y)$ .

Donde  $\sigma_B$  y  $\sigma_N$ , son funciones, cuyo dominio y recorrido son respectivamente los conjuntos  $\{1, 2\}$  y  $\{-1, 1\}$ , y  $q_1$  es la velocidad asumida por la abeja.

**Observación 1.1** *Cada par,  $(\sigma_B, \sigma_N)$  de funciones, define una regla.*

**Definición 1.4** Definamos la **regla 1** con las funciones  $\sigma_B$  y  $\sigma_N$  siguientes:

- $(\sigma_B(1), \sigma_B(2)) = (1, 1)$
- $(\sigma_N(1), \sigma_N(2)) = (1, -1)$

Y la **regla 2** con las funciones  $\sigma_B$  y  $\sigma_N$  siguientes:

- $(\sigma_B(1), \sigma_B(2)) = (1, 1)$
- $(\sigma_N(1), \sigma_N(2)) = (-1, 1)$

**Observación 1.2** Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , nos referiremos al autómata de regla  $i$ , por el nombre **abeja  $i$** . En un abuso de notación, cuando nos referimos a la posición de la **abeja  $i$** , nos referimos a la posición del cabezal del autómata de regla  $i$ .

## 1.2. Construcción del grafo

La regla de la **abeja 1** y  $q \in Q$ , definirán un estado sucesor  $q'$  el que dependerá del color de la casilla visitada por la **abeja 1**; para este efecto definiremos  $B(q)$  y  $N(q)$ , como el estado alcanzado por la **abeja 1** luego de una transición en el caso que la casilla visitada por la **abeja 1** sea de color blanco y negro respectivamente. En adelante, nos referiremos al estado  $q = (p, r)$ , con la notación de subíndice  $q = p_r$ .

Esta notación se presenta en el cuadro 1.1 donde aparece en notación de subíndice y en la representación de flechas. La representación de flechas para los estados, se introduce en el cuadro 1.1.

Dadas las funciones  $N(\cdot)$  y  $B(\cdot)$  que fueron definidas al comienzo de la sección y se presentan tabuladas en el cuadro 1.2, se define el grafo de interacción,  $G = (V, E, \zeta, \{B, N\})$  de la figura 1.1, del siguiente modo:

$$V = Q \qquad E = \{(a_b, d_e) \mid a_b = q \wedge (d_e = B(q) \vee d_e = N(q))\}$$

La función  $\zeta$  es de la siguiente forma:

$$\zeta(a_b, d_e) = \begin{cases} B & \text{si } q = a_b \wedge B(q) = d_e, \\ N & \text{si } q = a_b \wedge N(q) = d_e. \end{cases}$$

$q = (q_1, q_2)$	Notación de flechas	Notación de subíndice
$(\hat{i}, \hat{j})$	$\lrcorner$	$\hat{i}_{\hat{j}}$
$(-\hat{i}, \hat{j})$	$\llcorner$	$-\hat{i}_{\hat{j}}$
$(-\hat{i}, -\hat{j})$	$\ulcorner$	$-\hat{i}_{-\hat{j}}$
$(\hat{i}, -\hat{j})$	$\lrcorner$	$\hat{i}_{-\hat{j}}$
$(\hat{j}, \hat{i})$	$\ulcorner$	$\hat{j}_{\hat{i}}$
$(-\hat{j}, \hat{i})$	$\llcorner$	$-\hat{j}_{\hat{i}}$
$(-\hat{j}, -\hat{i})$	$\ulcorner$	$-\hat{j}_{-\hat{i}}$
$(\hat{j}, -\hat{i})$	$\lrcorner$	$\hat{j}_{-\hat{i}}$

**Cuadro 1.1:** Representaciones del estado interno.

Una secuencia finita de estados conectados (camino en  $G$ ) será denotada por:  $(a_{bi}^i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ .

**Proposición 1.1** Sea  $S = (s^0, s^1, s^2, \dots, s^n)$ , una secuencia que alterna elementos de los conjuntos  $I = \{-\hat{i}, \hat{i}\}$ ,  $J = \{-\hat{j}, \hat{j}\}$ , entonces las secuencias,  $S^+ = (s_{s^1}^0, s_{s^2}^1, s_{s^3}^2, \dots, s_{s^n}^{n-1}, s_{s^\bullet}^n)$  y  $S^- = (s_{s^1}^0, s_{s^2}^1, s_{s^3}^2, \dots, s_{s^{n-1}}^n, s_{-s^\bullet}^n)$ , donde  $s^\bullet \in I \Leftrightarrow s^{n-1} \in I$ , son caminos de  $G$  y son los únicos con los que la **abeja** accede a la secuencia de velocidades  $S$ .

$q = (q_1, q_2)$	$B(q) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$	$N(q) = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$

**Cuadro 1.2:** *Transiciones posibles para el estado.*

**Demostración.**

Digamos que,  $\widehat{i}/ = / - \widehat{i}/ = \widehat{i}$ ,  $\widehat{j}/ = / - \widehat{j}/ = \widehat{j}$ , notemos que:

$$(a_b, d_e) \in E \Leftrightarrow d = b \text{ y } /a/ = /e/$$

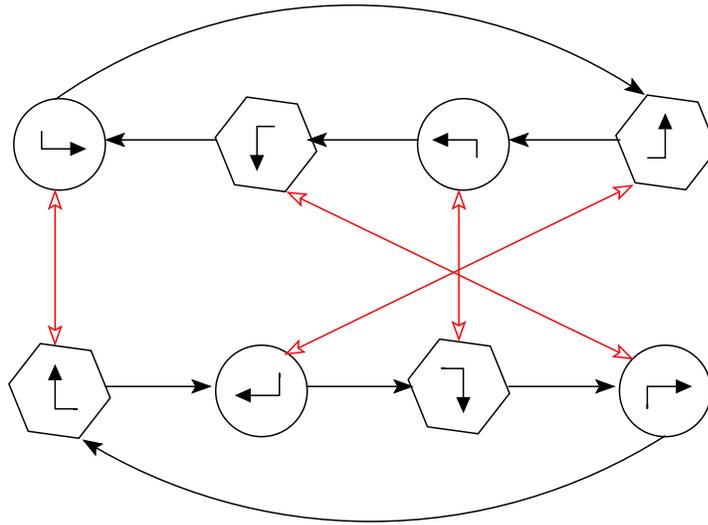
Entonces, puesto que  $S$  alterna elementos de  $I$  y  $J$ , para cada  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , podemos escribir que  $/s^{k-2}/ = /s^k/$  y con esto verificar que el arco  $s_{s^{k-1}}^{k-2}, s_{s^k}^{k-1}$  pertenece a  $E$ , además, como  $/s^{k-1}/ = /s^\bullet/ = /-s^\bullet/$ , los arcos  $(s_{s^k}^{k-1}, s_{s^\bullet}^k)$  y  $(s_{s^k}^{k-1}, s_{-s^\bullet}^k)$  también pertenecen al conjunto de arcos de  $G$ .

En conclusión, las secuencias  $S^-$  y  $S^+$  son caminos de  $G$  y son los únicos de los que se obtiene la secuencia de direcciones  $S$ .

En efecto, la única forma de obtener la dirección  $s^0$  seguida de la dirección  $s^1$  es con el estado  $s_{s^1}^0$ .

Sea ahora  $0 < k < n$ ; los únicos estados con los que la **abeja** toma la dirección  $s^k$  luego de haber asumido la dirección  $s^{k-1}$  en la iteración anterior, son  $s_{s^{k+1}}^k$  y  $s_{-s^{k+1}}^k$ , donde  $|s^{k+1}| = |s^{k-1}|$ . Además, para tomar la dirección  $s^{k+1}$  en el siguiente paso, el estado no puede ser  $s_{-s^{k+1}}^k$ , con lo que nos queda sólo la posibilidad de acceder a la velocidad  $s^k$  con el estado  $s_{s^{k+1}}^k$ . Por último, los únicos estados con los que la **abeja** puede acceder a la dirección  $s^n$  luego de haber asumido la dirección  $s^{n-1}$  en la iteración anterior son  $s_{s^n}^{n-1}$  y  $s_{-s^n}^{n-1}$ , donde  $|s^n| = |s^{n-1}|$ , o dicho de otra forma  $s^\bullet \in I \Leftrightarrow s^{n-1} \in I$ .

■



**Figura 1.1:** Grafo de interacción.

En la figura 1.1, los arcos con etiqueta  $B$  tienen la punta de flecha con color blanco y los arcos con etiqueta  $N$  tienen la punta de flecha con color negro, además se encapsularon los vértices en círculos y hexágonos, lo que nos permite visualizar claramente que el grafo es bipartito.

### 1.3. Construcción de ciclos de largo arbitrario

Con el grafo construido en la sección anterior, daremos a  $\mathbb{Z}^2$  una coloración tal que las velocidades (dependientes del estado) a las que la **abeja 1** accede, hacen que siga el camino deseado.

```

INPUT:  $\{a_{b^i}^i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ 

Hacer  $x = (0, 0)$ ,  $i = 1$ , y  $\tilde{c}$  la coloración blanca.

Mientras  $i < n$ 

    Si  $\zeta(a_{b^i}^i, a_{b^{i+1}}^{i+1}) = B$ , hacer  $\tilde{c}(x + a^i) = B$ .

    Si  $\zeta(a_{b^i}^i, a_{b^{i+1}}^{i+1}) = N$ , hacer  $\tilde{c}(x + a^i) = N$ .

     $x = x + a^i$ 

     $i = i + 1$ 

Fin.

OUTPUT:  $\tilde{c}$ 

```

**Cuadro 1.3:** Esquema de coloración para el espacio celular, a este procedimiento le llamaremos rutina  $\star$ .

**Proposición 1.2** Sea  $(a_{b^i}^i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  un camino de  $G$ , tal que para todo par  $(k, t)$  con  $k < t < n$  se cumple:

$$\sum_{i=k}^t a^i \neq 0 \tag{1.1}$$

Entonces la rutina  $\star$  definida en el cuadro 1.3 con entrada  $(a_{b^i}^i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ , entrega una coloración  $\tilde{c}$  tal que la abeja de regla 1 con la configuración inicial  $(\tilde{c}, (0, 0), a^1)$ , seguirá la secuencia de direcciones  $(a^i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ .

## Demostración.

Sea  $(a^i)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$  un camino de  $G$  usado como entrada para la rutina  $\star$ . Vemos que la variable  $x$  de este procedimiento, representa la posición del autómata, relativa a la posición inicial, en cada tiempo. Si  $\zeta(a_{b^i}^i, a_{b^{i+1}}^{i+1}) = B$ , quiere decir que el autómata con estado interno  $a_{b^i}^i$  debe leer blanco para pasar al estado  $a_{b^{i+1}}^{i+1}$  y si  $\zeta(a_{b^i}^i, a_{b^{i+1}}^{i+1}) = N$ , quiere decir que el autómata con estado interno  $a_{b^i}^i$  debe leer negro para pasar al estado  $a_{b^{i+1}}^{i+1}$ .

Como de la ecuación 1.1, la abeja no visita una casilla dos veces durante este itinerario, si  $x = \sum_{i=1}^{k-1} a^i$  y  $\tilde{c}$  es la coloración de la salida de la rutina  $\star$ , cuando se llegue a la casilla  $x + a^k$ , esta tendrá el color  $\tilde{c}(x + a^k)$  pues es la primera vez que la abeja la visita, es decir fue escogido de la siguiente manera:

El color de la posición  $x + a^k$  será blanco si  $\zeta(a_{b^k}^k, a_{b^{k+1}}^{k+1})$  es  $B$  y negro en otro caso. Lo que justamente lleva a la **abeja 1** al estado  $a_{b^{k+1}}^{k+1}$ . Entonces la **abeja 1** seguirá la secuencia de estados  $(a_{b^i}^i)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$  y en consecuencia, la secuencia de direcciones  $(a^i)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$ .

■

**Corolario 1.1** *Dada una secuencia de velocidades que alterna elementos de los conjuntos  $I = \{-\hat{i}, \hat{i}\}$  y  $J = \{-\hat{j}, \hat{j}\}$  y no repite casillas; entonces existe una coloración para el espacio celular y un estado, con la cual la **abeja 1** recorre tal camino.*

## Demostración.

Es directo de combinar el resultado de la proposición 1.1 con la proposición 1.2.

■

Sean los caminos  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , de largo  $n$  en el grafo  $G$  (cada uno, un ciclo de largo 2 repetido):

1.  $P_1 = (\hat{j} \hat{i}, \hat{i} \hat{j}, \hat{j} \hat{i}, \hat{i} \hat{j}, \dots, \hat{j} \hat{i}, \hat{i} \hat{j})$
2.  $P_2 = (-\hat{i} \hat{j}, \hat{j} \hat{-i}, -\hat{i} \hat{j}, \hat{j} \hat{-i}, \dots, -\hat{i} \hat{j}, \hat{j} \hat{-i})$
3.  $P_3 = (-\hat{j} \hat{-i}, -\hat{i} \hat{-j}, -\hat{j} \hat{-i}, -\hat{i} \hat{-j}, \dots, -\hat{j} \hat{-i}, -\hat{i} \hat{-j})$
4.  $P_4 = (\hat{i} \hat{-j}, -\hat{j} \hat{i}, \hat{i} \hat{-j}, -\hat{j} \hat{i}, \dots, \hat{i} \hat{-j}, -\hat{j} \hat{i})$

Sea  $P$  construido a partir de  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  de la siguiente forma:

$$P = ( P_1, \widehat{j}_{-\widehat{i}}, P_2, -\widehat{i}_{-\widehat{j}}, P_3, -\widehat{j}_{\widehat{i}}, P_4, \widehat{i}_{\widehat{j}} )$$

Escribamos  $P = \{p_{q^i}^i\}_{i \in \{1, \dots, 4(n+1)\}}$ . Notar que  $p^i$  es la velocidad (dirección) que asumirá la **abeja 1** en la iteración  $i$ .

**Proposición 1.3** *Sea  $P$  la entrada para la rutina  $\star$  y  $\tilde{c}$  su salida, entonces dada la configuración inicial  $(\tilde{c}, (0, 0), \widehat{j}_{\widehat{i}})$ , luego de  $4(n + 1)$  iteraciones, la **abeja 1** volverá a la casilla  $(0, 0)$  sin antes haber visitado alguna casilla dos veces.*

### Demostración.

Como la secuencia  $P$  es de largo  $4(n + 1)$ , la rutina  $\star$  realizará esta cantidad de iteraciones examinando la secuencia  $P$ , además es fácil ver que para cada par  $(k, t)$  con  $k < t < 4(n + 1)$  se cumple:

$$\sum_{i=k}^t p^i \neq 0, \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{4(n+1)} p^i = 0$$

En efecto, la secuencia  $P_1$  sólo agrega  $\widehat{i}'s$  y  $\widehat{j}'s$ , luego, en esa parte de la secuencia no se puede anular la suma. En la siguiente porción de  $P$ ,  $(\widehat{j}_{-\widehat{i}}, P_2, -\widehat{i}_{-\widehat{j}})$ , tampoco se puede anular la suma, pues se restan  $\widehat{i}'s$  pero se siguen sumando  $\widehat{j}'s$ . Hasta aquí, tenemos  $n + 1$   $\widehat{j}'s$  y  $-\widehat{i}$ , finalmente, examinando la secuencia  $P_3, -\widehat{j}_{\widehat{i}}, P_4$  vemos que sólo se restan  $n + 1$   $\widehat{j}'s$  y no cambia la cantidad de  $\widehat{i}'s$ , entonces sólo al final de esto, se anuló la suma de  $\widehat{j}'s$ , pero aún la suma no es nula pues es  $-\widehat{i}$ , lo que con el último estado se anula.

Por esto, de la proposición 1.2, al final de la rutina  $\star$ , la variable  $x$  de éste vuelve a ser  $(0, 0)$  y es la primera vez que esto sucede durante la rutina; así, la máquina vuelve a la casilla donde comenzó. ■

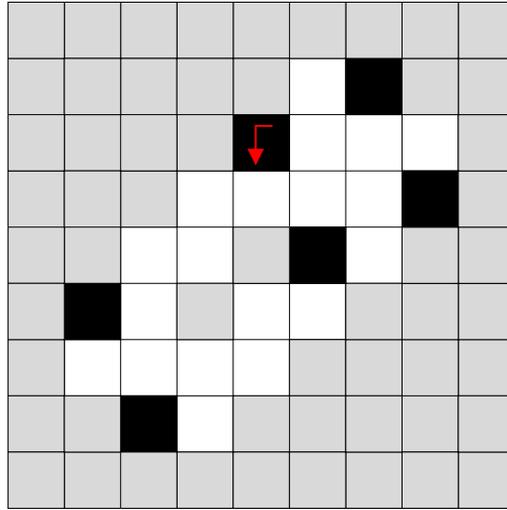
De esta proposición se concluye el siguiente teorema de forma directa.

**Teorema 1.1** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $c \in \{B, N\}^{\mathbb{Z}^2}$  y  $q \in Q$ , tal que la **abeja 1**, desde la casilla  $(0, 0)$ , con la coloración inicial  $c$  y estado inicial  $q$ , hace un ciclo de largo mayor que  $n$ .*

En conclusión, la **abeja 1** puede hacer ciclos de largo arbitrario mientras no repita casillas.

## 1.4. Una regla diferente

El resto de las reglas de esta clase de autómatas ya ha sido estudiada en [4], obteniendo en  $3D$  que la mayoría de ellas tiene un movimiento restringido a un plano y de tales reglas en  $2D$ , la mayoría resultaron ser isomorfas a la Hormiga de Langton, a excepción de la **abeja 1** y **abeja 2**. Nos interesamos en estudiar que relación hay entre la **abeja 1**, trabajada en las secciones anteriores y la **abeja 2**, pues son las únicas reglas bidimensionales que en las simulaciones experimentales mostraron comportamientos distintos de la Hormiga de Langton. Nos concentraremos en saber si son isomorfas en algún sentido; es decir, si dada una configuración  $c$  cualquiera para la **abeja 1**, existe alguna coloración  $c_1$  de  $\mathbb{Z}^2$ , posición y estado iniciales  $(x, q) \in \mathbb{Z}^2 \times Q$ , de modo que la **abeja 2** sea capaz de efectuar los mismos movimientos que la **abeja 1** con la configuración  $c$ ; veremos que no es posible.



**Figura 1.2:** Configuración  $C_1$

Sea la configuración  $C_1$  de la figura 1.2, donde los grises pueden ser blanco o negro y esto no afectará la secuencia de los primeros 32 estados que nos interesa. La secuencia de estados a los que accede la **abeja 1** con esta configuración, se divide convenientemente en tres partes,  $s_1, s_2, s_3$ :

$$s_1 = (-\hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{-\hat{j}}, -\hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{\hat{j}}, \hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{\hat{j}}, \hat{j}_{-\hat{i}}, -\hat{i}_{\hat{j}}, \hat{j}_{-\hat{i}}, -\hat{i}_{-\hat{j}}, -\hat{j}_{-\hat{i}}, -\hat{i}_{-\hat{j}})$$

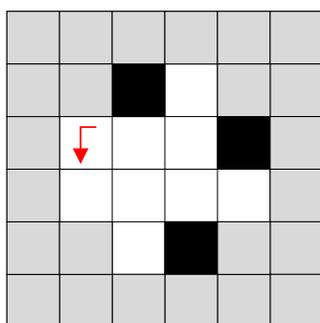
$$s_2 = (-\hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{\hat{j}}, \hat{j}_{-\hat{i}}, -\hat{i}_{-\hat{j}}, -\hat{j}_{-\hat{i}}, -\hat{i}_{-\hat{j}})$$

$$s_3 = (-\hat{j}_{-\hat{i}}, -\hat{i}_{-\hat{j}}, -\hat{j}_{-\hat{i}}, -\hat{i}_{-\hat{j}}, -\hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{-\hat{j}}, -\hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{\hat{j}}, \hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{\hat{j}}, \hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{\hat{j}}, \hat{j}_{\hat{i}}, \hat{i}_{\hat{j}})$$

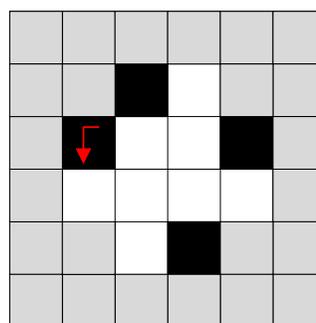
**Proposición 1.4** *No existe configuración inicial, tal que la **abeja 2**, genere la misma secuencia de velocidades generada por la secuencia concatenada  $(s_1, s_2, s_3)$ .*

**Demostración.**

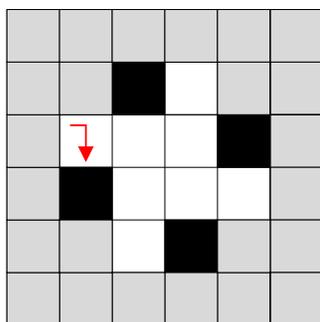
Para probar esto, lo haremos poniéndonos en todos los posibles casos. Para empezar, necesitamos un estado inicial de la forma  $-\hat{j} \hat{i}$ , o  $-\hat{j}_{-\hat{i}}$ , pues de otra forma la velocidad inicial no será  $-\hat{j}$ . En segundo lugar, necesitamos una coloración tal que la secuencia de los primeros 12 estados, genere la misma secuencia de velocidades que genera  $s_1$ , esto se logra con las 4 configuraciones iniciales presentadas en la figura 1.3.



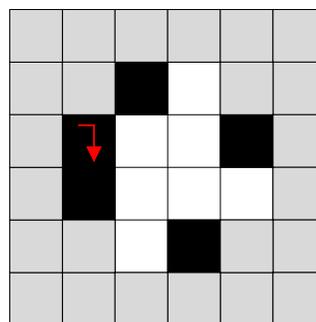
Config. 1



Config. 2



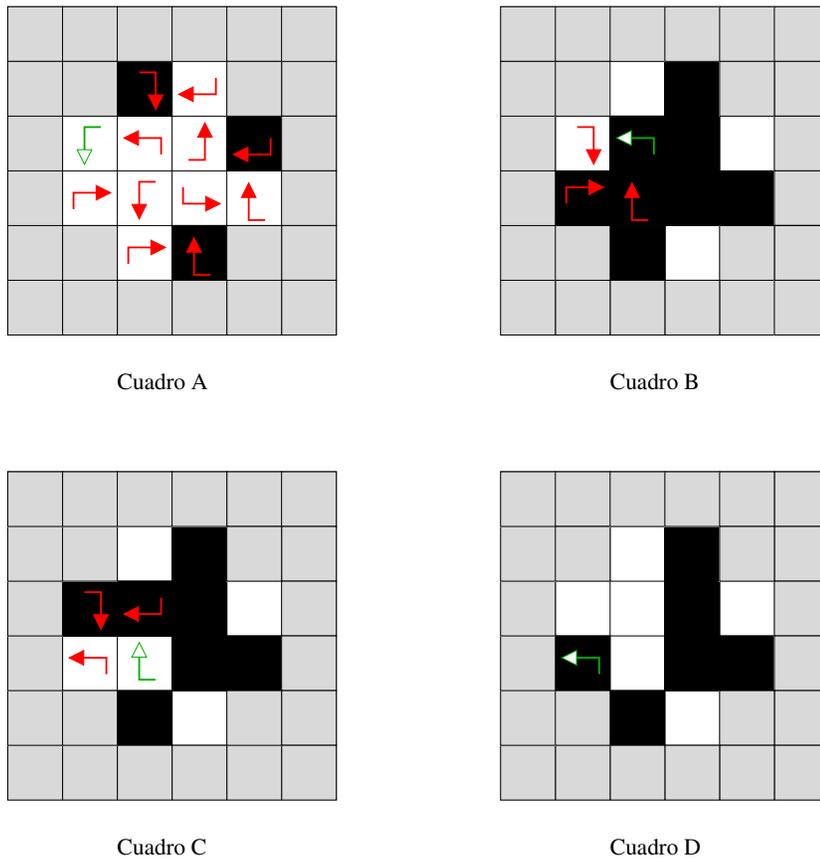
Config. 3



Config. 4

**Figura 1.3:** *Configuraciones para lograr la misma dinámica en las 12 primeras iteraciones.*

Pero sólo la primera de éstas logra hacer que la secuencia de los primeros 18 estados accedidos por la **abeja 2**, genere la misma secuencia de velocidades que genera la secuencia concatenada  $(s_1, s_2)$ . La forma en la que lo hace, queda descrita en la figura 1.4, donde el cuadro A muestra los primeros 12 estados de la secuencia, las posiciones del cabezal y la coloración inicial, el cuadro B muestra la coloración en el tiempo 12 y los siguientes tres estados, el cuadro C muestra los últimos tres estados y la coloración luego de las primeras 15 iteraciones. Finalmente, el cuadro D muestra el estado y configuración en la que queda el autómata luego de concluir la secuencia de 18 estados; aclaremos también, que la flecha de punta blanca marca el punto de partida de la trayectoria.

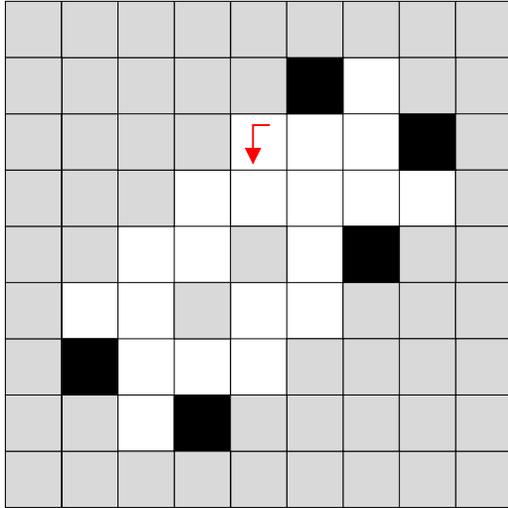


**Figura 1.4:** Aquí se representan los cambios de estado y posición que sufre el autómata.

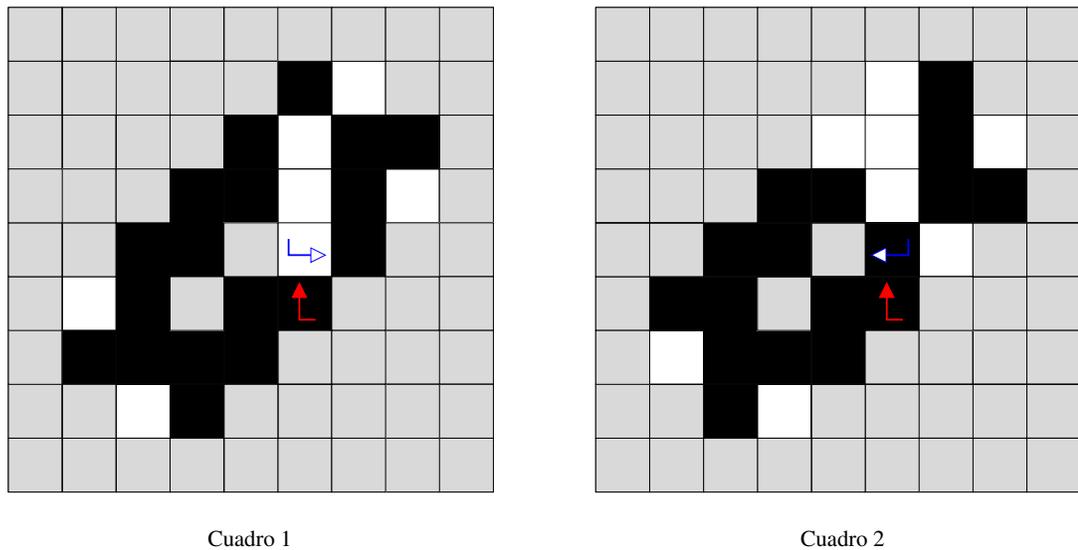
Por último, para lograr la coincidencia con las siguientes 13 velocidades (las de la secuencia  $s_3$  sin contar el último estado) se debe colorear como la figura 1.5, a esta coloración le llamamos  $C_2$ .

En la figura 1.6 se puede ver que el estado número 32 (representado para ambas reglas con la flecha de punta blanca) en la secuencia accedida por la **abeja 2** será necesariamente  $-\hat{i} \hat{j}$ , por lo tanto, la secuencia de velocidades generada por  $(s_1, s_2, s_3)$ , discreparía de la secuencia

generada por la **abeja 2** con la configuración inicial escogida, en su último elemento. Notar que el estado número 31 está representado con una flecha con punta gris.



**Figura 1.5:**  $C_2$ , coloración necesaria para hacer coincidir  $s_1s_2s_3$ .



**Figura 1.6:** En el cuadro 1 se ve la coloración  $C_1$  en la iteración 32 de la **abeja 1**, con sus últimos dos estados representados con flecha de punta gris y flecha de punta blanca respectivamente, en el cuadro 2 se ve la coloración  $C_2$  en la iteración 32 de la **abeja 2**, con sus últimos dos estados representados con flecha de punta gris y flecha de punta blanca respectivamente.

## 1.5. Relación entre las dos reglas

Llamaremos  $F_1$  y  $F_2$  a las funciones de transición global, correspondientes a las **abejas 1** y **2** respectivamente, donde el espacio de estado es  $X = C^{\mathbb{Z}^2} \times \mathbb{Z}^2 \times Q$ .

**Definición 1.5** Sean  $(F, X)$  y  $(G, Y)$  dos sistemas dinámicos, diremos que son conjugados si existe una aplicación biyectiva,  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T \circ F = G \circ T$  [11].

**Definición 1.6** Dado  $c \in \{B, N\}^{\mathbb{Z}^2}$ , se define  $\sim c \in \{B, N\}^{\mathbb{Z}^2}$  como:

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2, \quad \sim c(x) \neq c(x)$$

Para efectos de notación, diremos que  $q = (q_1, q_2)$  y  $q' = (q'_1, q'_2)$ .

**Proposición 1.5**  $(F_1^{-1}, X)$  y  $(F_2, X)$  son conjugados.

**Demostración.**

En efecto, sea  $T$  definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X \\ (q, x, c) &\longrightarrow T((q, x, c)) = (-q, x + q_1, \sim c) \end{aligned}$$

Escribamos lo siguiente:

$$(F_2 \circ T)(q, x, c) = F_2(-q, x + q_1, \sim c) = (\bar{q}, \bar{x}, \bar{c})$$

De la definición de la **abeja 2** tenemos:

$$\bar{x} = x + q_1 - q_1 = x,$$

$$\bar{q} = (-q_2, -q_1), \quad \text{si } \sim c(x) = B, \text{ es decir, si } c(x) = N,$$

$$\bar{q} = (q_2, -q_1), \quad \text{si } \sim c(x) = N, \text{ es decir, si } c(x) = B,$$

$$\bar{c}(u, v) = \sim c(u, v) \Leftrightarrow (u, v) \neq x.$$

Por otra parte:

$$(T \circ F_1^{-1})(q, x, c) = T(F_1^{-1}(q, x, c)) = T(q', x', c'),$$

donde,  $q' = (q'_1, q'_2)$  y  $F_1(q', x', c') = (q, x, c)$ , es decir:

$$x = x' + q'_1, \dots \dots \dots (*)$$

$$q = (q'_2, q'_1), \quad \text{si } c'(x) = B,$$

$$q = (q'_2, -q'_1), \quad \text{si } c'(x) = N,$$

$$c(u, v) = c'(u, v) \Leftrightarrow (u, v) \neq x.$$

Si miramos esto desde otra perspectiva, podemos escribir:

$$x' = x - q'_1,$$

$$q' = (q_2, q_1), \quad \text{si } c'(x) = B, \text{ es decir, si } c(x) = N,$$

$$q' = (-q_2, q_1), \quad \text{si } c'(x) = N, \text{ es decir, si } c(x) = B,$$

$$c'(u, v) = c(u, v) \Leftrightarrow (u, v) \neq x.$$

Por último, calculamos  $T(q', x', c') = (-q', x' + q'_1, \sim c') = (\widehat{q}, \widehat{x}, \widehat{c})$ .

Primero analizamos  $\widehat{c}$ :

$$\widehat{c}(u, v) \neq c'(u, v) = c(u, v), \quad \text{si } (u, v) \neq x, \text{ luego,}$$

$$\widehat{c}(u, v) = \sim c(u, v), \quad \text{si } (u, v) \neq x.$$

$$\widehat{c}(u, v) \neq c'(u, v) \neq c(u, v), \quad \text{si } (u, v) = x, \text{ luego,}$$

$$\widehat{c}(u, v) = c(u, v), \quad \text{si } (u, v) = x \Leftrightarrow \widehat{c}(u, v) \neq \sim c(u, v), \quad \text{si } (u, v) = x.$$

Como consecuencia:

$$\widehat{c}(u, v) = \sim c(u, v), \Leftrightarrow (u, v) \neq x.$$

Además,

$$\widehat{x} = x' + q'_1 = x, \text{ esto es directo de } (*),$$

$$\widehat{q} = -q' = (-q_2, -q_1), \quad \text{si } c'(x) = B \Leftrightarrow c(x) = N,$$

$$\widehat{q} = -q' = (q_2, -q_1), \quad \text{si } c'(x) = N \Leftrightarrow c(x) = B.$$

Así podemos ver que:

$$\bar{x} = \widehat{x},$$

$$\bar{q} = \widehat{q},$$

$$\bar{c} = \widehat{c}.$$

Finalmente,  $T \circ F_1^{-1} = F_2 \circ T$  y los sistemas  $(F_1^{-1}, X)$  y  $(F_2, X)$  son conjugados.

■

En conclusión, la **abeja 1** es capaz de hacer ciclos de largo arbitrario; conectando esto con el hecho que la **abeja 2** es capaz de simular a la inversa de la **abeja 1**, podemos decir que ambas **abejas** son capaces de hacer ciclos de largo arbitrario. Además, presentamos una forma de colorear el espacio celular para conducir a la **abeja 1** por cualquier circuito que no repita casillas, lo que conectado también con el hecho que la **abeja 2** es capaz de simular a la inversa de la **abeja 1**, proporciona un método para configurar el espacio y llevar a la **abeja 2** por cualquier circuito que no repita casillas. Al probar que estas **abejas** son diferentes, en el contexto de la relación de conjugación, se establece que estas **abejas** no son simétricas con respecto al tiempo [6].

# Capítulo 2

## Máquina a piedras

En este capítulo trataremos con un autómata que llamaremos máquina a piedras, esta se mueve en un espacio celular bidimensional y cuenta con una cantidad finita  $\wp_{\mathbf{M}}$  de piedras enumeradas. Estas piedras pueden ser dejadas en diferentes casillas de la grilla para luego, ser o no, recogidas por la máquina. Se ha probado anteriormente que una máquina que cuente con tres piedras es capaz de simular a cualquier máquina con piedras y que es el número mínimo de piedras necesarias para lograrlo [3]. Nuestro objeto principal de estudio es la máquina con 2 piedras, esta tiene fuertes restricciones en su movimiento, por ejemplo, no es capaz de hacer un itinerario que recorra todo el plano, esto fue probado por *Marianne Delorme* y *Jacques Mazoyer* [3]. En este capítulo presentaremos estas máquinas y haremos un recuento de algunos resultados previos.

Una máquina moviéndose en el plano monocromático puede ser influenciada de formas distintas por el hecho de encontrarse con alguna de las piedras en su camino dependiendo de la carga que lleve. En general, una máquina con cabezal puede tener un comportamiento muy complejo ya que el cabezal le permite interactuar con la información que hay en el espacio celular, en cambio, en el contexto de un plano monocromático, el comportamiento está determinado exclusivamente por los estados internos y las posiciones de las piedras, así podríamos imaginar que el comportamiento es más simple. En este capítulo estudiaremos que tan complicada puede ser la dinámica en este contexto. En un abuso de notación nos referiremos indistintamente al cabezal y a la regla del autómata, como la máquina  $\mathbf{M}$ .

### 2.1. Definiciones previas

La máquina a piedras fue introducida por *Blum* y *Hewitt* [1], pero en una porción finita de la grilla. Las siguientes definiciones le dan a la máquina la libertad de moverse en la grilla infinita y fueron introducidas por *Marianne Delorme* y *Jacques Mazoyer* [3].

**Definición 2.1** Una máquina con piedras es una 5-tupla

$$\mathbf{M} = (Q, \Sigma, \delta, \lambda, \wp_M)$$

Donde:

1.  $Q$  es el conjunto finito de estados.
2.  $\Sigma$  es el conjunto de letras o colores que rellenan la grilla, también es finito.
3.  $\wp_M$  es la cantidad de piedras con las que cuenta la máquina.
4.  $\delta : \tilde{Q} \times \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{Q}$ , función local de transición de estados,

$$\lambda : \tilde{Q} \times \tilde{\Sigma} \rightarrow \{0, 1\}^{\wp_M} \times \tilde{D}, \text{ función local de transición de casillas,}$$

$$\text{donde } \tilde{Q} = Q \times \{0, 1\}^{\wp_M}, \tilde{\Sigma} = \Sigma \times \{0, 1\}^{\wp_M}.$$

Estas funciones deben satisfacer una condición de conservación:

Para todo  $q \in Q, (r_1, \dots, r_{\wp_M}) \in \{0, 1\}^{\wp_M}, a \in \Sigma, (\eta_1, \dots, \eta_{\wp_M}) \in \{0, 1\}^{\wp_M}$ , si

$$\delta(q, r_1, \dots, r_{\wp_M}, a, \eta_1, \dots, \eta_{\wp_M}) = (q^*, r_1^*, \dots, r_{\wp_M}^*)$$

y

$$\lambda(q, r_1, \dots, r_{\wp_M}, a, \eta_1, \dots, \eta_{\wp_M}) = (\eta_1^*, \dots, \eta_{\wp_M}^*, m),$$

entonces para todo  $i \in \{1, \dots, \wp_M\}$ ,  $r_i^* + \eta_i^* = r_i + \eta_i \leq 1$ .

Es decir, una piedra no puede ser acarreada por la máquina y a la vez estar en el plano, y si una piedra está en la casilla que se encuentra el cabezal o es acarreada por la máquina, entonces en la siguiente iteración, tal piedra será acarreada por la máquina o habrá quedado en la casilla recién visitada.

El par  $(\delta, \lambda)$  es llamado función de transición local.

**Definición 2.2** Sea  $\mathbf{M} = (Q, \Sigma, \delta, \lambda, \wp_M)$  una máquina con piedras y  $\sigma : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Sigma$  una coloración de la grilla bidimensional.

1. Una configuración de la máquina  $(\mathbf{M}, \sigma)$ , es un elemento

$((\bar{x}, \bar{y}), (r_1, \dots, r_{\wp_M}), q, s)$ , perteneciente a  $\mathfrak{J}_{\wp_M} = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}^{\wp_M} \times Q \times (\{0, 1\}^{\wp_M})^{\mathbb{Z}^2}$ , tal que:

- a)  $(\bar{x}, \bar{y})$  es la posición de la máquina  $\mathbf{M}$ ,
- b)  $(r_1, \dots, r_{\wp_M})$  representa la reserva de piedras que posee  $\mathbf{M}$ ,
- c)  $q$  es el estado interno de  $\mathbf{M}$ ,
- d) para cada  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $s(x, y) = (s(x, y)_1, \dots, s(x, y)_{\wp_M})$  representa la reserva de piedras de la posición  $(x, y)$  y para cada  $i \in \{1, 2, 3, \dots, \wp_M\}$  se cumple  $r_i + \sum_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2} s(x, y)_i \leq 1$ ,
- e) finalmente, para cada  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\sum_{i \in \{1, 2, \dots, \wp_M\}} s(x, y)_i \leq 1$ , es decir, no puede haber más de una piedra en cada casilla.

2. La función de transición global  $G$  para esta máquina es  $G : \mathfrak{J}_{\wp_M} \rightarrow \mathfrak{J}_{\wp_M}$ , definida como sigue:

Si

- $c = ((x_M, y_M), (r_1, \dots, r_{\wp_M}), q, s)$
- $\delta(q, (r_1, \dots, r_{\wp_M}), \sigma(x_M, y_M), (s(x_M, y_M)_1, \dots, s(x_M, y_M)_{\wp_M})) = (q^*, (r_1^*, \dots, r_{\wp_M}^*))$
- $\lambda(q, (r_1, \dots, r_{\wp_M}), \sigma(x_M, y_M), (s(x_M, y_M)_1, \dots, s(x_M, y_M)_{\wp_M})) = ((\eta_1^*, \dots, \eta_{\wp_M}^*), m)$

Entonces:

$G(c) = ((x_M, y_M) + m, (r_1^*, \dots, r_{\wp_M}^*), q^*, s^*)$ , donde  $s^*(x_M, y_M) = (\eta_1^*, \dots, \eta_{\wp_M}^*)$  y  $s^*(x, y) = s(x, y)$ , para cada  $(x, y) \neq (x_M, y_M)$ .

**Observación 2.1** En adelante estudiaremos el caso en que el plano está monocolorado, en consecuencia, en las funciones de transición no se considerará la parte del argumento que involucra el color de la casilla.

**Observación 2.2** En adelante,  $\theta = (0, 0)$  y representa el origen de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Definición 2.3** Diremos que una vecindad de  $x \in \mathbb{Z}^2$  de radio  $r \in \mathbb{N}$ , denotada por  $B(x, r)$ , es el conjunto de puntos  $x + (a, b)$  de  $\mathbb{Z}^2$ , tales que  $\|(a, b)\|_1 = |a| + |b| \leq r$  (ver figura 2.1).

**Definición 2.4** Dada una vecindad de  $x \in \mathbb{Z}^2$  de radio  $r \in \mathbb{N}$ , denotada por  $B(x, r)$ , denotaremos sus bordes como sigue:

- $\mathfrak{B}_{NE} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r, a, b \in \mathbb{Z}_0^+\}$
- $\mathfrak{B}_{NO} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r, a \in \mathbb{Z}_0^-, b \in \mathbb{Z}_0^+\}$
- $\mathfrak{B}_{SO} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r, a, b \in \mathbb{Z}_0^-\}$
- $\mathfrak{B}_{SE} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r, a \in \mathbb{Z}_0^+, b \in \mathbb{Z}_0^-\}$

Además definamos el recubrimiento exterior de cada borde por:

- $\bar{\mathfrak{B}}_{NE} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r + 1, a, b \in \mathbb{Z}_0^+\}$
- $\bar{\mathfrak{B}}_{NO} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r + 1, a \in \mathbb{Z}^-, b \in \mathbb{Z}^+\}$
- $\bar{\mathfrak{B}}_{SO} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r + 1, a, b \in \mathbb{Z}_0^-\}$
- $\bar{\mathfrak{B}}_{SE} = \{x + (a, b) / |a| + |b| = r + 1, a \in \mathbb{Z}^+, b \in \mathbb{Z}^-\}$

(Ver figura 2.1).

**Definición 2.5** Diremos que una vecindad para  $X \subseteq \mathbb{Z}^2$  de radio  $r \in \mathbb{N}$ , denotada por  $B(X, r)$ , es el conjunto de puntos  $\{x + (a, b) \in \mathbb{Z}^2 / \|(a, b)\|_1 \leq r, x \in X\}$  (ver figura 2.2).

Aclaremos que si el grafo inducido por el conjunto de nodos  $X$  está desconectado,  $B(X, r)$  podría también estarlo.

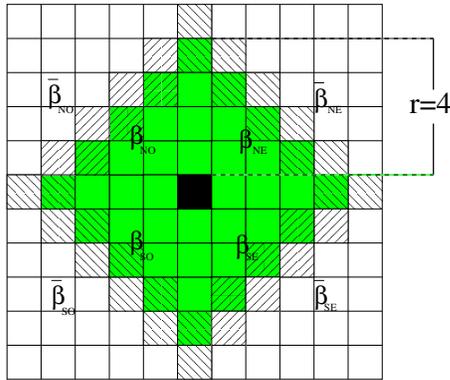


Figura 2.1: Vecindad de radio  $r = 4$  para la posición marcada en color negro

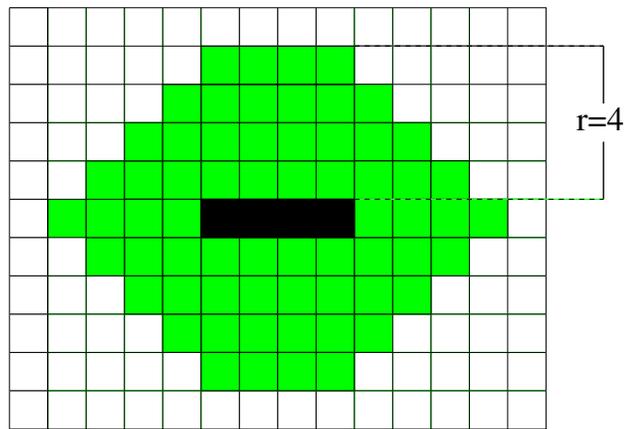


Figura 2.2: Vecindad de radio  $r = 4$  para el conjunto marcado en oscuro

## 2.2. Restricciones en el caso, $\wp_M < 2$

Una máquina que cuente con cero piedras, digamos  $M_0$ , atribuye su dinámica solo a sus estados internos, en consecuencia, las secuencias de estados asociadas a la evolución de esta máquina podrán ser reconocidas por un autómata finito, lo que está estrechamente relacionado con la proposición 2.1. El caso en que agregamos una piedra a la máquina, en principio, es más complicado, pues un estado particular no significará lo mismo dependiendo de las diferentes configuraciones relativas a la piedra. Sin embargo, las secuencias de estados asociadas a la evolución de una máquina con una piedra son, al igual que si no tuviera piedras, reconocibles por un autómata finito.

Con el propósito de introducir al lector en la forma usada en esta memoria para estudiar a las máquinas con piedras, en esta sección presentamos demostraciones más detalladas de algunos resultados de *Delorme* y *Mazoyer*, partiendo con la siguiente proposición que corresponde a la número 6 de [3].

**Proposición 2.1** [3] Sea  $\mathbf{M} = (Q, \delta, \lambda, 0)$  una máquina sin piedras, entonces existen enteros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , tales que:

- La secuencia de velocidades accedidas por la máquina es últimamente periódica, donde el período y el transiente son menores o iguales que  $|Q|$ .
- $|\alpha_1| \leq |Q|$ ,  $|\alpha_2| \leq |Q|$ ,  $|\alpha_3| \leq 2|Q|^2$ ,  $|\alpha_4| \leq 2|Q|^2$
- si  $(x_{\mathbf{M}}, y_{\mathbf{M}})$  denota la posición relativa de la máquina respecto a su punto de partida, entonces:
  - $|\alpha_1 x_{\mathbf{M}} + \alpha_2 y_{\mathbf{M}}| \leq \alpha_3$
  - $\alpha_2 x_{\mathbf{M}} - \alpha_1 y_{\mathbf{M}} \geq \alpha_4$

Además podemos distinguir el vector  $\vartheta = (\alpha_2, -\alpha_1)$  que representa la dirección de la banda  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / |\alpha_1 x_{\mathbf{M}} + \alpha_2 y_{\mathbf{M}}| \leq \alpha_3\}$  y el vector  $\chi$  que representa la dirección neta del movimiento transiente.

### Demostración.

Usaremos  $|\cdot|$  para denotar  $\|\cdot\|_1$ .

Como la máquina no tiene piedras, cada configuración se reduce a un par  $((x_{\mathbf{M}}, y_{\mathbf{M}}), q)$ , posición y estado. Suponiendo que la máquina comienza con la configuración inicial  $c_0 = ((0, 0), q_0)$ , denotamos por  $c_t$  a la configuración  $((x_t, y_t), q_t)$ , donde  $(x_t, y_t)$  es la posición de la máquina luego de  $t$  iteraciones y  $q_t$  es el estado interno en ese mismo momento. Consideremos la secuencia  $\{((x_t - x_{t-1}, y_t - y_{t-1}), q_t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , dado que  $|Q|$  es finito y la máquina es determinista, esta secuencia es últimamente periódica, es decir, existen  $t_0, \pi_0 \leq |Q|$ , tales que luego de  $t_0$  iteraciones, la secuencia es periódica de período  $\pi_0$ .

Denotemos por  $(X_i, Y_i)$ , a la posición de la máquina en el tiempo  $t_0 + i\pi_0$ , puesto que  $((x_t - x_{t-1}, y_t - y_{t-1}), q_t)$  es de período  $\pi_0$ ,  $X_i - X_{i-1}$  y  $Y_i - Y_{i-1}$  son enteros constantes, de magnitud menor que  $\pi_0$ , escojamos  $\alpha_1 = -(Y_i - Y_{i-1})$  y  $\alpha_2 = X_i - X_{i-1}$ .

En un movimiento últimamente periódico las posiciones de la máquina pueden ser escritas como la suma de la parte transiente del movimiento más cierta cantidad de repeticiones del período más una porción de este, así, es fácil ver que para cada  $t$ , existe  $a_t = (a_t^x, a_t^y) \in \mathbb{Z}^2$  con  $\|a_t\|_1 \leq \pi_0$  y  $k_t \in \mathbb{N}$  tales que  $(x_t, y_t) = (x_{t_0} + k_t \alpha_2 + a_t^x, y_{t_0} - k_t \alpha_1 + a_t^y)$ ;  $k_t$  representa la cantidad de repeticiones del período y  $a_t$  representa el movimiento neto de una porción que resta del período. Entonces:

$$\begin{aligned}
|(x_t, y_t)(\alpha_1, \alpha_2)| &= |(x_{t_0} + k_t \alpha_2 + a_t^x) \alpha_1 + (y_{t_0} - k_t \alpha_1 + a_t^y) \alpha_2|, \\
&= |x_{t_0} \alpha_1 + a_t^x \alpha_1 + y_{t_0} \alpha_2 + a_t^y \alpha_2|, \\
&\leq t_0 \pi_0 + \pi_0 \pi_0 + t_0 \pi_0 + \pi_0 \pi_0, \\
&= 2\pi_0^2 + 2t_0 \pi_0, \\
&= 2\pi_0(t_0 + \pi_0), \\
&\leq 2|Q|^2,
\end{aligned}$$

Así, podemos escoger  $\alpha_3 = 2\pi_0(t_0 + \pi_0)$ .

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 x_t - \alpha_1 y_t &= x_{t_0} \alpha_2 + a_t^x \alpha_2 - y_{t_0} \alpha_1 - a_t^y \alpha_1 + k_t(\alpha_1^2 + \alpha_2^2), \\
&\geq x_{t_0} \alpha_2 + a_t^x \alpha_2 - y_{t_0} \alpha_1 - a_t^y \alpha_1,
\end{aligned}$$

Así, podemos escoger:

$$\alpha_4 = x_{t_0} \alpha_2 + a_t^x \alpha_2 - y_{t_0} \alpha_1 - a_t^y \alpha_1,$$

además:

$$\begin{aligned}
|\alpha_4| &= |x_{t_0} \alpha_2 + a_t^x \alpha_2 - y_{t_0} \alpha_1 - a_t^y \alpha_1|, \\
&\leq t_0 \pi_0 + \pi_0 \pi_0 + t_0 \pi_0 + \pi_0 \pi_0, \\
&= 2\pi_0^2 + 2t_0 \pi_0 \leq 2|Q|^2,
\end{aligned}$$

Finalmente  $\vartheta = (\alpha_2, -\alpha_1)$  y  $\chi = (x_{t_0}, y_{t_0})$

■

En la proposición 6 de [3] se proponen las siguientes cotas para  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ ,  $|\alpha_3| \leq |Q|$ ,  $|\alpha_4| \leq |Q|^2$ , estas no son correctas, en particular  $|\alpha_3|$  puede ser mayor que  $|Q|$ , tal como lo muestra el ejemplo de la figura 2.3. Es fácil ver que son necesarios 60 estados para que una máquina sin piedras exhiba un comportamiento como el de la figura 2.3, así  $|Q| = 60$ , además, usando  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  como fueron definidos en la proposición 2.1, obtenemos  $\alpha_1 = 8$  y  $\alpha_2 = 0$ , luego, para la posición  $(16, 0)$  accedida por la máquina y marcada en gris claro,  $|\alpha_1 x_t + \alpha_2 y_t| = 128 > 60 = |Q|$ .

En lo que sigue analizaremos en detalle el movimiento descrito por una máquina sin piedras, con el fin de usar tales resultados en el estudio de la dinámica de una máquina con una piedra para las iteraciones en las que no está usando su piedra.



vectores de  $\tilde{D}$  necesarios para lograr el movimiento neto  $\vartheta$  es  $l_\vartheta$ , notemos que esto coincide con la norma 1, es decir  $\|\vartheta\|_1 = l_\vartheta$ , entonces existen  $n_1 < n_2 < \dots < n_{l_\vartheta} \leq \pi$ , donde:

$$\sum_{i=1}^{l_\vartheta} v_{n_i} = \vartheta$$

Así, es claro que:

$$\sum_{i=1}^{\pi} v_i - \sum_{i=1}^{l_\vartheta} v_{n_i} = 0$$

Ahora podemos definir el conjunto  $M = \{1, 2, \dots, \pi\} - \{n_1, n_2, \dots, n_{l_\vartheta}\}$ , escribirlo como  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{\pi-l_\vartheta}\}$  y luego concluir que:

$$\sum_{i=1}^{\pi-l_\vartheta} v_{m_i} = 0$$

De este modo, como  $\pi \leq |Q| - \tau$ , en una repetición del período el movimiento estará acotado a una vecindad de radio  $\left\lfloor \frac{|Q| - \tau - l_\vartheta}{2} \right\rfloor$  del conjunto de todas las trayectorias de largo  $l_\vartheta$  que unen la posición  $x$  donde comienza la repetición del período con  $x + \vartheta$ , aclaremos que el conjunto de tales trayectorias es el único rectángulo de  $\mathbb{Z}^2$  cuya diagonal está definida por  $x$  y  $x + \vartheta$  (ver figura 2.4).

Finalmente, podemos escribir el rectángulo como:

$$R_j = R_{\chi+j\vartheta, \chi+(j+1)\vartheta}$$

y denotar la vecindad como sigue:

$$\Omega_j = B(R_j, \left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - l_\vartheta}{2} \right\rfloor)$$

(Ver figura 2.4)

Además, de la construcción de  $\Omega_j$ , es fácil ver que  $\Omega_j = \Omega_{j-1} + \vartheta$ . Así, en la  $j$ -ésima repetición del período el movimiento puede ser entendido como avanzar en la dirección  $\vartheta$ , sin poder alejarse más de  $\left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - n_\vartheta}{2} \right\rfloor$  unidades del rectángulo  $R_j$ .

■

**Definición 2.7** Definamos la familia de rectas  $\{r_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , donde  $r_m = \{(t + m, t) \in \mathbb{Z}^2 / t \in \mathbb{Z}\}$

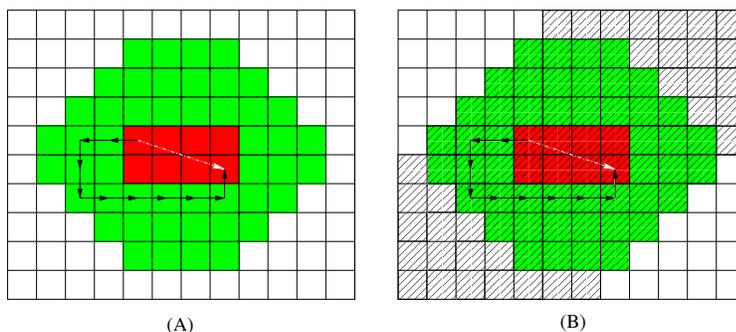
**Observación 2.3**

$$\forall m \forall x \in r_m, d((0, 0), x) \geq |m|. \quad (2.1)$$

Donde  $d$  es la distancia de Manhattan o en norma 1.

**Definición 2.8** Se define la siguiente banda:

$$S_m^n = \bigcup_{i=m}^n r_i$$



**Figura 2.4:** (A) representa la trayectoria de la máquina enmarcada en la vecindad  $\Omega_j$  (gris claro) del rectángulo  $R_j$  (gris oscuro), se distingue en blanco al vector  $\vartheta$ . (B) muestra la vecindad  $\Omega_j$  enmarcada en el conjunto  $S_{a_j}^{b_j}$  representado por las casillas achuradas.

**Proposición 2.2** Sea  $M = (Q, \delta, \lambda, 0)$  una máquina sin piedras en la posición inicial  $(0, 0)$ , entonces si la máquina sale de  $B((0, 0), |Q|)$  por el borde  $\beta_{SE}$ , existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $\Omega_{l-1} \subset S_{-|Q|}^{|Q|}$  y  $\Omega_l \not\subset S_{-|Q|}^{|Q|}$ .

**Demostración.**

La posición de la máquina justo al final del transiente es  $\chi$ , luego  $d(\chi, \beta_{SE}) \geq |Q| - \tau$ . De este modo, la máquina se habrá acercado a  $\beta_{SE}$  a lo sumo  $\tau$  unidades, quedando a una distancia mínima  $|Q| - \tau$ , con respecto a  $\beta_{SE}$ , además la máquina no puede alejarse más de  $\left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - l_\vartheta}{2} \right\rfloor$  unidades de  $R_0$ , así, desde la posición en la que quedó luego del transiente, puede avanzar hacia  $\beta_{SE}$  a lo más  $\left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - l_\vartheta}{2} \right\rfloor + l_\vartheta$  unidades, luego, la mínima distancia con respecto a  $\bar{\beta}_{SE}$  a la que puede acceder la máquina en la primera repetición del período es:

$$|Q| + 1 - \left( \left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - l_\vartheta}{2} \right\rfloor + l_\vartheta + \tau \right) = \left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - l_\vartheta + 2}{2} \right\rfloor > 0$$

Así  $\Omega_0 \subset S_{-|Q|}^{|Q|}$ , además como la máquina sale por  $\mathfrak{b}_{SE}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  y  $\Omega_n - S_{-|Q|}^{|Q|} \neq \emptyset$  en consecuencia, puesto que  $\Omega_n = \Omega_0 + n\vartheta$ , mientras  $j < n$ ,  $\vartheta$  tiene el efecto neto de acercar  $\Omega_j$  a  $r_{|Q|}$  y entonces existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $\Omega_{l-1}$  está totalmente contenida en  $S_{-|Q|}^{|Q|}$  y  $\Omega_l$  intersecta al exterior de  $S_{-|Q|}^{|Q|}$ . ■

**Observación 2.4** Para cada  $\Omega_j$ , existen  $a_j$  y  $b_j$ , donde para todo  $i \in \{a_j, a_j + 1, \dots, b_j - 1, b_j\}$ ,  $r_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$  y se cumple que  $\Omega_j \subset S_{a_j}^{b_j}$  (Ver figura 2.4 (B)).

**Lema 2.2** Sea  $\mathbf{M} = (Q, \delta, \lambda, 0)$  una máquina sin piedras, entonces, en virtud de la observación 2.4,  $b_j - a_j$  es constante y  $b_j - a_j \leq |Q|$ .

### Demostración.

Dado que  $\Omega_j$  es una traslación de  $\Omega_0$ , es evidente que  $b_j - a_j$  es constante.

Aclaremos que  $b_j - a_j$  corresponde a la distancia entre las rectas  $r_{a_j}$  y  $r_{b_j}$ , las que contienen a dos de los lados del polígono  $\Omega_j$ , los que están separados a lo más por 2 veces el radio de  $\Omega_j$  y el largo de una de las trayectorias que definen al rectángulo  $R_j$ , así:

$$b_j - a_j \leq \left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - l_\vartheta}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(|Q| - \tau) - l_\vartheta}{2} \right\rfloor + l_\vartheta \leq (|Q| - \tau) - l_\vartheta + l_\vartheta = |Q| - \tau \leq |Q|$$

■

**Proposición 2.3** Sea  $\mathbf{M} = (Q, \delta, \lambda, 0)$  una máquina sin piedras que parte en el origen. Entonces, si la máquina llega a tomar una distancia mayor que  $|Q|$  con respecto al origen, esta no volverá a pasar por él.

### Demostración.

Sin pérdida de generalidad, pensemos que la máquina sale por primera vez de la vecindad  $B((0, 0), |Q|)$  por  $\mathfrak{b}_{SE}$ .

Como  $R_j$  es conectado,  $\Omega_j$  también lo es y existen  $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$  tales que  $a_j \leq b_j$  y  $\forall i \in \{a_j, \dots, b_j\}$ ,  $\Omega_j \cap r_i \neq \emptyset$  y  $\forall i \in \mathbb{Z} - \{a_j, \dots, b_j\}$ ,  $\Omega_j \cap r_i = \emptyset$ .

Sea  $S_{a_j}^{b_j}$  la banda que naturalmente cada vecindad  $\Omega_j$  tiene asociada, donde del lema 2.2,  $b_j - a_j$  es constante y está acotado superiormente por  $|Q|$  (ver figura 2.4).

De la proposición 2.2, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $\Omega_{l-1}$  está totalmente contenida en  $S_{-|Q|}^{|Q|}$  y  $\Omega_l$  intesecta al exterior de  $S_{-|Q|}^{|Q|}$ , con esto  $b_{l-1} \leq |Q|$  y  $b_l > |Q|$  y así  $a_{l-1} < a_l$ . Definamos con esto  $\vartheta_{-\circ} = a_l - a_{l-1} > 0$ , además  $a_l > 0$  pues  $b_l - a_l \leq |Q|$  y  $b_l > |Q|$ . De esta forma la secuencia  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$  satisface  $a_{j+1} = a_j + \vartheta_{-\circ}$ , con lo que  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$  es creciente. Como de la ecuación 2.1, para todo  $j \geq l$ ,  $d((0,0), \Omega_j) \geq a_j$ , la máquina no volverá a pasar por el origen (ver figura 2.5). ■

**Corolario 2.1** *Sea  $M = (Q, \delta, \lambda, 1)$  una máquina con 1 piedra, entonces, si la máquina llega a tomar una distancia mayor que  $|Q|$  con respecto a la piedra, la máquina no volverá a pasar sobre ella.*

### Demostración.

Supongamos que la máquina llega a tomar distancia  $|Q|$  con respecto a la piedra, claramente antes de que esto ocurra la máquina hizo una última visita a la piedra, esto porque pasó sobre ella o simplemente cuando la dejó. Luego de esa última visita a la piedra, el movimiento de la máquina es como el de una máquina sin piedras con un conjunto de estados de tamaño  $|Q|$ , así podemos concluir el resultado directamente de la proposición 2.3 (Ver figura 2.6). ■

**Proposición 2.4** *Sea  $M = (Q, \delta, \lambda, 1)$  una máquina con 1 piedra y  $|Q| \geq 2$ , entonces en a lo más  $|Q|^3$  iteraciones comenzará con un movimiento periódico.*

### Demostración.

Si la máquina ha pasado por encima de la piedra más de  $|Q|$  veces, como luego de  $|Q|$  veces se repitió alguno de los estados con los que aborda la piedra, la máquina se habrá encontrado con una configuración idéntica a una ya accedida en el pasado. Por el determinismo de la regla la máquina ya habrá comenzado un movimiento periódico en el que nunca se aleja demasiado de su piedra.

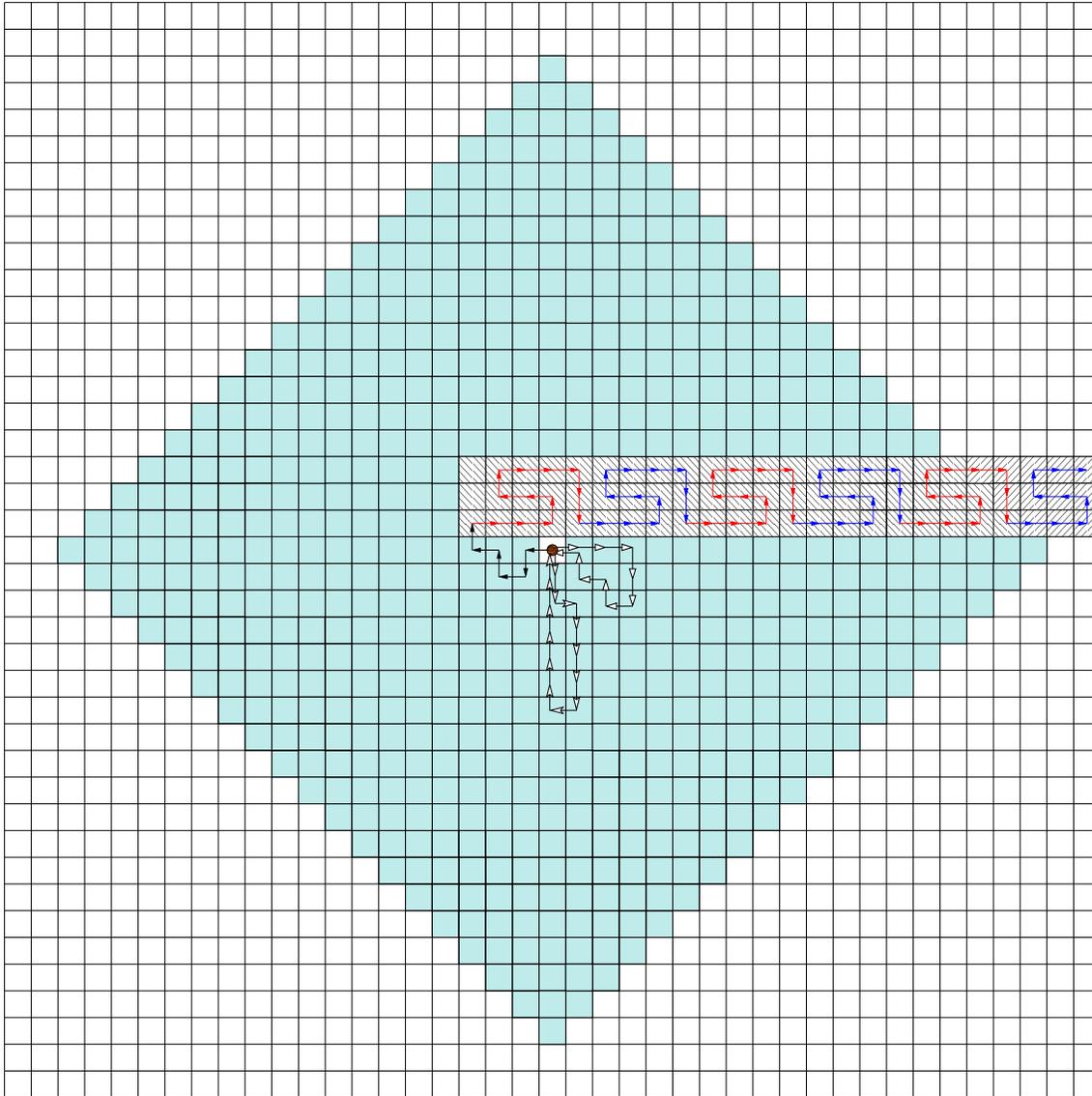
Por otra parte, una vez dejada la piedra en estado  $q$ , en el caso que toma más iteraciones para volver a la piedra, ocurre un movimiento últimamente periódico en cuyo transiente, de tamaño  $\tau_q$ , la máquina se aleja a lo sumo  $\tau_q$  unidades de la piedra. Puesto que solo quedan  $|Q| - \tau_q$  estados para volver a ella y en el peor de los casos este movimiento puede resumirse de forma neta en acercarse una unidad a la piedra, habría que repetirlo  $\tau_q$  veces antes de la siguiente



ya se realizó un período.

Si la máquina pasa por encima de la piedra una cantidad  $N$  menor a  $|Q|$  de veces, entonces se tendrá un movimiento cuyo período es menor que el ya calculado, pues el análisis es el mismo. En consecuencia, se podrán hacer no más de  $N|Q|^2$  iteraciones antes de ya haber realizado un período.

■



**Figura 2.6:** Caso en que la trayectoria de la máquina pasa por la posición de la piedra antes de alcanzar la distancia  $|Q|$ , las flechas de punta blanca representan los ciclos realizados antes del movimiento últimamente periódico representado con flechas de punta negra.

**Definición 2.9** *En el contexto de las máquinas a piedras, dadas las máquinas  $A$  y  $B$ , diremos que  $A$  simula a  $B$  si para cualquier configuración inicial  $c \in \mathfrak{I}_{\varphi_B}$  en un plano monocolorado, existe una configuración  $\tilde{c} \in \mathfrak{I}_{\varphi_A}$  tal que la trayectoria seguida por  $B$  con la configuración inicial  $c$  el plano monocolorado es igual a la trayectoria seguida por  $A$  con la configuración inicial  $\tilde{c}$  en un plano monocolorado.*

A continuación se demuestra la observación 3 de [3], la que enuncia que dada una máquina con una piedra, existe una sin piedras capaz de hacer lo que hace la máquina con piedra. Haremos la construcción propuesta en tal observación, lo que es factible debido a que existe una cota para la distancia relativa de la máquina y su piedra si es que esta la usa de forma indefinida.

**Proposición 2.5** *Sea  $\mathbf{M} = (Q, \delta, \lambda, 1)$  una máquina con 1 piedra, entonces existe una máquina sin piedras  $\mathbf{M}_0 = (Q_0, \delta_0, \lambda_0, 0)$  que es capaz de simular a  $\mathbf{M}$  (en el contexto de la definición 2.9) partiendo de una configuración inicial  $(q_0, (1), (0))$  en un plano monocolorado.*

### **Demostración.**

La evolución de  $\mathbf{M}$  consta de los siguientes pasos en el caso que use su piedra una cantidad arbitraria de veces:

1. Desde el estado inicial  $(q_0, 1, 0)$ , se moverá en el plano con su piedra a cuestras para dejarla en no más de  $|Q|$  iteraciones.
2. Una vez que la piedra está en el plano,  $\mathbf{M}$  se moverá dentro de una bola, de centro la posición de la piedra y radio  $|Q|$ .
3. Luego tomará la piedra para moverse con ella a cuestras, la dejará en no más de  $|Q|$  iteraciones y volverá a 2.

Para que una máquina sin piedras simule a una con una piedra debería tener acceso a una piedra virtual para así poder emular el efecto que tiene esta en las transiciones de la máquina con piedras, para este fin, la máquina debe almacenar en memoria interna la posición de la piedra virtual relativa a la posición de  $\mathbf{M}$ ; esta será denotada por  $d$ . Dado que la memoria interna debe ser finita, el almacenamiento de la información correspondiente a la posición relativa  $d$ , se hará de la siguiente manera:

- si  $d \in B(\theta, |Q|)$ , se guardará el vector  $d$ ,
- si  $d \notin B(\theta, |Q|)$ , se almacenará  $d = \infty$ .

Ya que en virtud de la proposición 2.1, la máquina con piedras no volverá a usar la piedra si se aleja mucho, no será necesario seguir teniéndola en memoria. La siguiente función será de utilidad en la traducción de la información contenida en el estado interno de  $\mathbf{M}_0$ , información que servirá para emular la transición de  $\mathbf{M}$  y tomará el valor uno si y solo si  $\mathbf{M}$  se encuentra sobre la piedra.

$$\eta : \mathbb{Z}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \infty, \\ 1 & \text{si } |x| = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < |x| \leq |Q|. \end{cases}$$

A continuación daremos la construcción de  $\mathbf{M}_0$  a partir de la definición de  $\mathbf{M}$ ; primero construiremos el conjunto de estados  $Q_0$ , el que nos ayudará en la simulación de la piedra virtual.

$$Q_0 = \{[q, d]/q \in Q, d \in B(\theta, |Q|)\} \cup \{[q, \infty]/q \in Q\} \cup Q$$

Hay que entender las siguientes tres posibilidades en términos de los estados de  $Q_0$ .

1. La piedra es llevada por  $\mathbf{M}$  (estado de la forma  $q \in Q$ ),
2. la piedra está en el espacio celular en una posición diferente a la de  $\mathbf{M}$  (estado de la forma  $[q, d]$ ,  $q \in Q$  y  $d \neq \theta$ ),
3. la piedra está en el espacio celular en la misma posición que  $\mathbf{M}$  (estado de la forma  $[q, d]$ ,  $q \in Q$  y  $d = \theta$ ).

En el cuadro 2.1 se presentan las transiciones correspondientes a la máquina sin piedras que simula a la máquina con una piedra.

Probaremos que  $\mathbf{M}_0$  tiene el mismo comportamiento que  $\mathbf{M}$ , antes estableciendo por inducción en la cantidad de iteraciones, que si se corren  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{M}_0$  de forma paralela, en cada iteración se cumplen los siguientes cinco puntos:

1. Dado que la piedra está en la casilla  $p$ ,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[q, d]$ , con  $|d| \neq 0$  si y solo si  $\mathbf{M}$  se encuentra en la posición  $p + d$ , en estado interno  $q$  y nunca estuvo a distancia mayor que  $|Q|$  de la piedra.
2.  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[q, \theta]$  si y solo si  $\mathbf{M}$  está en la misma casilla que la piedra y se encuentra en estado interno  $q$ .

3.  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $q$  si y solo si  $\mathbf{M}$  lleva la piedra y se encuentra en estado interno  $q$ .
4.  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[q, \infty]$  si y solo si  $\mathbf{M}$  dejó la piedra, estuvo o está a una distancia mayor que  $|Q|$  de ella y se encuentra en el estado interno  $q$ .
5. La dirección que toma  $\mathbf{M}_0$ , es la misma que asume  $\mathbf{M}$  en esa iteración.

**Base:**

Si la cantidad de iteraciones es 0, la secuencia de estados accedida por  $\mathbf{M}_0$  es  $\{q_0\}$  y por ser la iteración inicial de  $\mathbf{M}$ , esta lleva su piedra y se encuentra en estado interno  $q_0$ . Los demás puntos se cumplen por vacuidad.

$\delta_0(q) = \bar{q}$ $\lambda_0(q) = m$	$\delta(q, 1, 0) = (\bar{q}, 1),$ $\lambda(q, 1, 0) = (0, m)$
$\delta_0(q) = [\bar{q}, -m]$ $\lambda_0(q) = m$	$\delta(q, 1, 0) = (\bar{q}, 0),$ $\lambda(q, 1, 0) = (1, m)$
$\delta_0([q, d]) = [\bar{q}, d - m]$ $\lambda_0([q, d]) = m$	$\delta(q, 0, \eta(d)) = (\bar{q}, 0),$ $\lambda(q, 0, \eta(d)) = (\eta(d), m),$ $ d - m  \leq  Q $
$\delta_0([q, d]) = \bar{q}$ $\lambda_0([q, d]) = m$	$\delta(q, 0, \eta(d)) = (\bar{q}, 1),$ $\lambda(q, 0, \eta(d)) = (0, m)$
$\delta_0([q, d]) = [\bar{q}, \infty]$ $\lambda_0([q, d]) = m$	$\delta(q, 0, \eta(d)) = (\bar{q}, 0),$ $\lambda(q, 0, \eta(d)) = (0, m),$ $ d - m  >  Q $
$\delta_0([q, \infty]) = [\bar{q}, \infty]$ $\lambda_0([q, \infty]) = m$	$\delta(q, 0, 0) = (\bar{q}, 0),$ $\lambda(q, 0, 0) = (0, m)$

**Cuadro 2.1:** *Transiciones posibles para  $\mathbf{M}_0$ .*

## Hipótesis:

En la iteración  $k$ , se cumplen los cinco puntos.

## Tesis:

En la iteración  $k + 1$ , se cumplen los cinco puntos.

- Si en la iteración  $k + 1$ ,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[\bar{q}, \bar{d}]$  con  $\bar{d} \in (B(\theta, |Q|) - \{\theta\})$ , significa que en la iteración anterior, la máquina pudo haberse encontrado en dos situaciones:
  - Si en la  $k$  –ésima iteración  $\mathbf{M}_0$  estaba en estado  $q$ , la transición se efectuará según el cálculo de  $\delta(q, 1, 0)$  y  $\lambda(q, 1, 0)$  de acuerdo al cuadro 2.1, con lo que tomará la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y obtendremos que en la  $(k + 1)$  –ésima iteración:

$\mathbf{M}_0$  estará en estado  $[\bar{q}, \bar{d}]$  con  $\bar{d} \in (B(\theta, |Q|) - \{\theta\})$ , si y solo si  $\delta(q, 1, 0) = (\bar{q}, 0)$  y  $\lambda(q, 1, 0) = (1, m)$ , así  $\bar{d} = -m$ , de la hipótesis de inducción, en la iteración  $k$  la piedra era llevada por  $\mathbf{M}$ . En consecuencia, en la iteración  $(k+1)$ ,  $\mathbf{M}$  está a distancia relativa  $m$  de la piedra y como  $|-m| = 1 \leq |Q|$ ,  $\mathbf{M}$  se encuentra en una casilla perteneciente a  $B(p, |Q|) - \{p\}$  y se encuentra en estado interno  $\bar{q}$ . Además, del corolario 2.1, la piedra no puede haber estado antes de la iteración  $k$  a distancia mayor que  $|Q|$ , de lo contrario no llevaría la piedra a cuestas, probando así el primer punto para este caso.
  - Si en la  $k$  –ésima iteración,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[q, d]$  con  $d \in B(\theta, |Q|)$ , su transición se efectuará según el cálculo de  $\delta(q, 0, \eta(d))$  y  $\lambda(q, 0, \eta(d))$  de acuerdo al cuadro 2.1, con lo que tomará la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y obtendremos que en la  $(k + 1)$  –ésima iteración:

$\mathbf{M}_0$  estará en estado  $[\bar{q}, \bar{d}]$  con  $0 < |\bar{d}| \leq |Q|$ , si y solo si  $\delta(q, 0, \eta(d)) = (\bar{q}, 0)$ ,  $\lambda(q, 0, \eta(d)) = (\eta(d), m)$  y  $0 < |d - m| \leq |Q|$ , donde  $\bar{d} = d - m$  de la hipótesis de inducción, en la iteración  $k$  la piedra se encontraba a distancia  $d$  relativa a la posición de  $\mathbf{M}$ ; además, la máquina no estuvo antes a distancia mayor que  $|Q|$  de la piedra. En consecuencia, ya que  $|d - m| > 0$ ,  $[\bar{q}, \bar{d}]$  representa que  $\mathbf{M}$  se encuentra en una casilla perteneciente a  $B(p, |Q|) - \{p\}$  y se encuentra en estado interno  $\bar{q}$ , además la máquina no estuvo antes ni en la iteración  $k + 1$  a distancia mayor que  $|Q|$  de la piedra, probando así el primer punto para este caso.
- Si en la iteración  $k + 1$ ,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[\bar{q}, \theta]$ , significa que en la iteración anterior, la máquina pudo haberse encontrado en solo una situación (a distancia 1 de la piedra):
  - Es decir, en la  $k$  –ésima iteración,  $\mathbf{M}_0$  estaba en estado  $[q, d]$  con  $d \in B(\theta, |Q|)$ , entonces su transición se efectuará según el cálculo de  $\delta(q, 0, \eta(d))$  y  $\lambda(q, 0, \eta(d))$  de acuerdo al cuadro 2.1, con lo que tomará la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y obtendremos que en la  $(k + 1)$  –ésima iteración:

$\mathbf{M}_0$  estará en estado  $[\bar{q}, \theta]$ , si y solo si  $\delta(q, 0, \eta(d)) = (\bar{q}, 0)$ ,  $\lambda(q, 0, \eta(d)) = (\eta(d), m)$ ,  $|d - m| = 0 \leq |Q|$ , de la hipótesis de inducción, en la iteración  $k$  la piedra se encontraba a distancia  $d$  relativa a la posición de  $\mathbf{M}$ ; así  $d - m$  representa que  $\mathbf{M}$  se encuentra a una distancia  $d - m$  de la casilla en la que está la piedra, es decir sobre ella, además se encuentra en estado interno  $\bar{q}$ , probando así el segundo punto.

- Si en la iteración  $k + 1$ ,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $\bar{q}$ , significa que en la iteración anterior, la máquina pudo haberse encontrado en dos situaciones:

- Si en la  $k$  –ésima iteración  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $q$ , la transición se efectuará según el cálculo de  $\delta(q, 1, 0)$  y  $\lambda(q, 1, 0)$  de acuerdo al cuadro 2.1, con lo que tomará la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y obtendremos que en la  $(k + 1)$  –ésima iteración:

$\mathbf{M}_0$  estará en estado  $\bar{q}$ , si y solo si  $\delta(q, 1, 0) = (\bar{q}, 1)$  y  $\lambda(q, 1, 0) = (0, m)$ , de la hipótesis de inducción, en la iteración  $k$  la piedra era acarreada por  $\mathbf{M}$ , lo que implica que en la iteración  $k + 1$ ,  $\mathbf{M}$  lleva la piedra y se encuentra en estado interno  $\bar{q}$ , probando así el tercer punto para este caso.

- Si en la  $k$  –ésima iteración,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[q, \theta]$ , su transición se efectuará según el cálculo de  $\delta(q, 0, \eta(\theta))$  y  $\lambda(q, 0, \eta(\theta))$ , de acuerdo al cuadro 2.1, con lo que tomará la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y obtendremos que en la  $(k + 1)$  –ésima iteración:

$\mathbf{M}_0$  estará en estado  $\bar{q}$ , si y solo si  $\delta(q, 0, \eta(\theta)) = (\bar{q}, 1)$ , de la hipótesis de inducción, en la iteración  $k$   $\mathbf{M}$  se encuentra encima de la piedra, en consecuencia,  $\mathbf{M}$  recogió la piedra y se encuentra en estado interno  $\bar{q}$ , probando así el tercer punto para este caso.

- Si en la iteración  $k + 1$ ,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[\bar{q}, \infty]$ , significa que en la iteración anterior, la máquina pudo haberse encontrado en dos situaciones:

- Si en la  $k$  –ésima iteración,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[q, \infty]$ , su transición se efectuará según el cálculo de  $\delta(q, 0, 0)$  y  $\lambda(q, 0, 0)$  de acuerdo al cuadro 2.1, con lo que tomará la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y obtendremos que en la  $(k + 1)$  –ésima iteración:

$\mathbf{M}_0$  estará en estado  $[\bar{q}, \infty]$  si y solo si  $\delta(q, 0, 0) = (\bar{q}, 0)$ ,  $\lambda(q, 0, 0) = (0, m)$ , de la hipótesis de inducción, en la iteración  $k$ ,  $\mathbf{M}$  estuvo, o está a distancia mayor que  $|Q|$  de la piedra; es decir,  $[\bar{q}, \infty]$  significa que en algún momento anterior a la iteración  $k + 1$  pasó de un estado del tipo  $[q^*, d]$  (con  $d \in B(\theta, |Q|)$ ) a un estado  $[q^*, \infty]$ , concluyendo que en algún momento estuvo en una casilla cuya distancia a la piedra, es mayor que  $|Q|$ , probando así el cuarto punto para este caso.

- Si en la  $k$  –ésima iteración,  $\mathbf{M}_0$  está en estado  $[q, d]$  con  $d \in B(\theta, |Q|)$ , su transición se efectuará según el cálculo de  $\delta(q, 0, \eta(d))$  y  $\lambda(q, 0, \eta(d))$ , de acuerdo al cuadro 2.1, con lo que tomará la misma dirección que  $\mathbf{M}$  y obtendremos que en la  $(k + 1)$  –ésima iteración:

$\mathbf{M}_0$  estará en estado  $[\bar{q}, \infty]$ , si y solo si  $\delta(q, 0, \eta(d)) = (\bar{q}, 0)$ ,  $\lambda(q, 0, \eta(d)) = (0, m)$  y  $|d - m| > |Q|$ , de la hipótesis de inducción, en la iteración  $k$   $\mathbf{M}$  estaba a distancia igual a  $|Q|$  de la piedra; es decir,  $[\bar{q}, \infty]$  significa que justamente en la iteración  $k+1$ ,  $\mathbf{M}$  se encuentra en una casilla cuya distancia a la piedra es mayor que  $|Q|$ , además se encuentra en estado interno  $\bar{q}$ , probando así el cuarto punto para este caso.

Con esto quedan demostrados los cinco puntos para cada caso, además en cada iteración la dirección que tomará  $\mathbf{M}_0$  será la misma que asumirá  $\mathbf{M}$  en esa iteración y los estados internos de  $\mathbf{M}_0$  guardan la información necesaria para efectuar las transiciones de  $\mathbf{M}$ , probando así que  $\mathbf{M}_0$  se comporta como  $\mathbf{M}$ . ■

**Corolario 2.2** *Sea  $\mathbf{M} = (Q, \delta, \lambda, 1)$  una máquina con 1 piedra, entonces existen enteros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  y  $p$  tales que:*

- *La secuencia de velocidades accedidas por la máquina es últimamente periódica, donde los largos del período y el transiente son menores o iguales a  $p$ .*
- $|\alpha_1| \leq p, |\alpha_2| \leq p, |\alpha_3| \leq 2p^2, |\alpha_4| \leq 2p^2.$
- *Si  $(x_M, y_M)$  denota la posición relativa de la máquina con respecto a su punto de partida, entonces:*
  - $|\alpha_1 x_M + \alpha_2 y_M| \leq \alpha_3,$
  - $\alpha_2 x_M - \alpha_1 y_M \geq \alpha_4.$

*Además, si la piedra se distancia más de  $|Q|$  unidades de la posición de la máquina, esta no volverá a visitar la piedra.*

**Demostración.** Combinando la proposición 2.1 con la proposición 2.5, se obtiene el resultado directamente, en efecto, la máquina sin piedras que simula a  $\mathbf{M}$  tiene un conjunto de estados  $Q_0$ ; de la demostración de la proposición 2.5,  $Q_0 = \{[q, d]/q \in Q, d \in B(\theta, |Q|)\} \cup \{[q, \infty]/q \in Q\} \cup Q$  además  $|\{[q, d]/q \in Q, d \in B(\theta, |Q|)\}| = 2|Q|^3 + 2|Q|^2 + |Q|$ , con lo que  $|Q_0| = 2|Q|^3 + 2|Q|^2 + 3|Q|$ , así podemos escoger  $p = 2|Q|^3 + 2|Q|^2 + 3|Q|$ .

Notar que estas cotas son superiores a las cotas dadas en la proposición 7 de [3]. Esto se debe a que esta demostración está apoyada en la construcción de la proposición 2.5, la que da cotas más groseras. Haciendo un análisis fino se llega a las mismas cotas. ■

# Capítulo 3

## Máquina con 2 piedras

En el capítulo anterior se abordó el caso de máquinas con 0 o 1 piedra, tal tipo de máquina seguirá siempre un movimiento últimamente periódico. En el presente capítulo estudiaremos en detalle el comportamiento que puede tener una máquina con dos piedras. Si una máquina cuenta con dos piedras y en algún momento deja de usar una de ellas, la máquina caería en uno de los dos casos estudiados en el capítulo anterior. En este capítulo pensaremos que la máquina usa sus dos piedras indefinidamente. Una máquina con dos piedras tiene una evolución que consta de varias etapas, éstas fueron descritas por *Marianne Delorme* y *Jacques Mazoyer* en [3]. En algunas etapas la máquina usa una sola de sus piedras, en otras no usa ninguna, por lo que el desarrollo del presente capítulo se apoyará fuertemente en el trabajo del capítulo anterior.

Tomaremos el enfoque de la dinámica simbólica introducido en [7], el cual asocia un subshift a cada máquina. El trabajo central de este capítulo consistirá en definir un autómata de dos pilas determinista que reconoce este subshift para el caso de las máquinas con dos piedras. Esto tiene interés, puesto que las máquinas en dimensión 2 en general no tienen un subshift reconocible con un autómata de pilas. La idea central consiste en registrar la posición relativa de cada piedra respecto a la cabeza en cada pila, lo cual será posible gracias a que si la máquina ha depositado una de sus piedras en el plano, su movimiento será rectilíneo o estará acotado en un conjunto finito y, por lo tanto, la posición relativa de la piedra abandonada es un múltiplo de un vector conocido. Para concluir, usando el Lema del Bombeo para gramáticas de libre contexto, demostraremos que una pila no es suficiente para reconocer el shift de una máquina de dos piedras, mostrando así que el resultado previo es óptimo.

### 3.1. Resultados preliminares

El siguiente resultado fue establecido en [3], y aquí aparece en detalle, pues es importante para el lector entender que tan compleja puede ser la dinámica de una máquina con dos piedras.

**Proposición 3.1** [3] *Sea  $M = (Q, \delta, \lambda, 2)$  una máquina con 2 piedras, entonces comenzando con una configuración inicial de la forma  $(q, (1, 1), (0, 0))$ :*

- *Se mueve como una máquina sin piedras, o bien*
- *desde un tiempo  $t_0$ ,*
  - *toma la piedra 1 que fue dejada anteriormente y la mueve de la posición en la que se encontraba,*
  - *luego se comporta como una máquina sin piedras, para ir en la búsqueda de la piedra 2,*
  - *toma la piedra 2 que fue dejada anteriormente y la mueve de la posición en la que se encontraba,*
  - *luego se comporta como una máquina sin piedras, para, nuevamente, ir en la búsqueda de la piedra 1,*
  - *y se repite este procedimiento indefinidamente, donde la distancia entre las piedras crece arbitrariamente.*

#### **Demostración.**

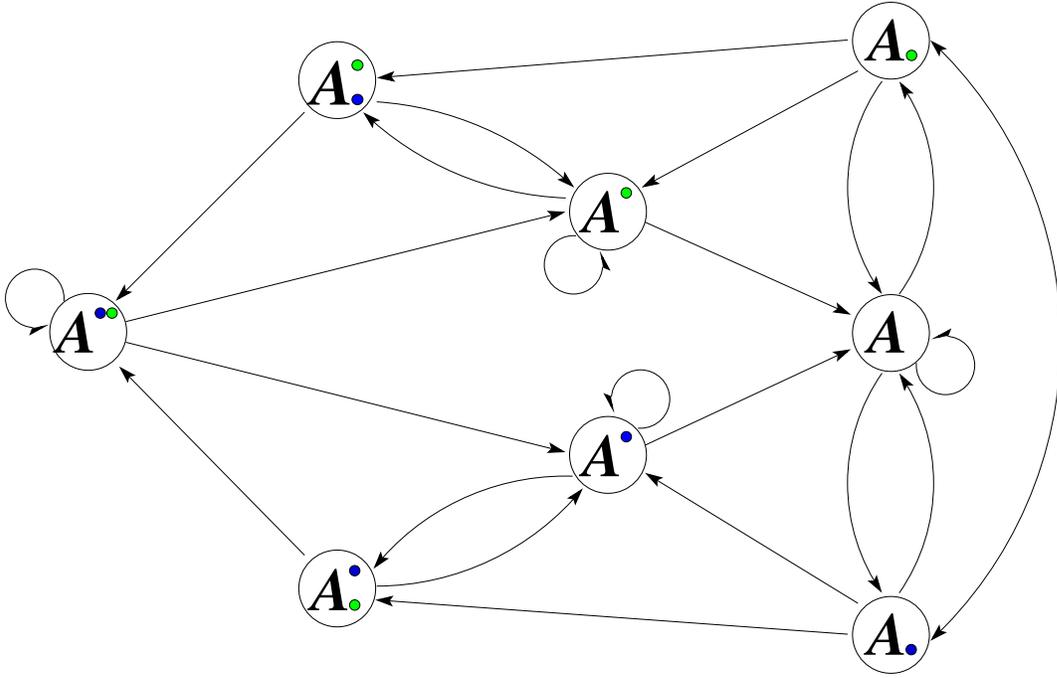
Para probar este resultado debemos ponernos en algunos casos; para entender la naturaleza de estos casos construiremos un grafo que llamaremos grafo de configuraciones, con el que explicaremos los cambios de configuración que tendrá una máquina con dos piedras,  $M$ .

Se define el grafo de configuraciones,  $G_M = (Q_M, E)$ , de la siguiente manera:

- $Q_M = \{a^{(1,2)}, a_1^2, a_2, a^2, a_2^1, a_1, a^1, a\}$ , donde:
  - $a^{(1,2)}$ : representa el estado inicial (con ambas piedras a cuestas).
  - Los superíndices indican que luego de la transición, la o las piedras, son acarreadas por **M**.
  - Los subíndices indican, que luego de la transición, la piedra se encuentra en el lugar en el que está la máquina.
  - Si algún número no está como subíndice ni superíndice, la piedra con esa numeración se encuentra en el plano en alguna posición distinta de la de **M**.
- El conjunto de arcos está representado en la figura 3.1.

Notación de subíndice	Figura representativa
$a$	<b>A</b>
$a^1$	<b>A</b> <sup>•</sup>
$a^2$	<b>A</b> <sup>•</sup>
$a_1$	<b>A</b> <sub>•</sub>
$a_2$	<b>A</b> <sub>•</sub>
$a_2^1$	<b>A</b> <sub>•</sub> <sup>•</sup>
$a_1^2$	<b>A</b> <sub>•</sub> <sup>•</sup>
$a^{(1,2)}$	<b>A</b> <sup>••</sup>

**Cuadro 3.1:** Representación de los posibles escenarios en los que la máquina se puede encontrar.



**Figura 3.1:** Grafo de configuraciones  $G_M$ . Representa los posibles cambios en la configuración interna de  $M$  al hacer la transición (esto dependiendo de la configuración del plano).

Notemos que a la dinámica de la máquina  $M$ , le corresponde un único camino en el grafo  $G_M$ . Por otra parte, si este camino pasa una cantidad infinita de veces por el nodo  $a^{(1,2)}$ , la máquina se comportará como si no tuviera piedras, en efecto:

Sin pérdida de generalidad, digamos que  $M$  acaba de dejar la piedra  $g_1$  en la casilla  $x$  mientras lleva  $g_2$ , entonces, mientras no haga uso de  $g_2$  ni recoja a  $g_1$ , estará confinado a una bola de radio  $|Q|$  y centro  $x$ . En otro caso, puede dejar y tomar una cantidad finita de veces a  $g_1$  antes de dejar a  $g_2$ , esta cantidad no puede exceder  $|Q|$ , pues en ese caso,  $M$  entraría en un ciclo repetitivo, comportándose como una máquina sin piedras y nunca dejaría  $g_2$ .

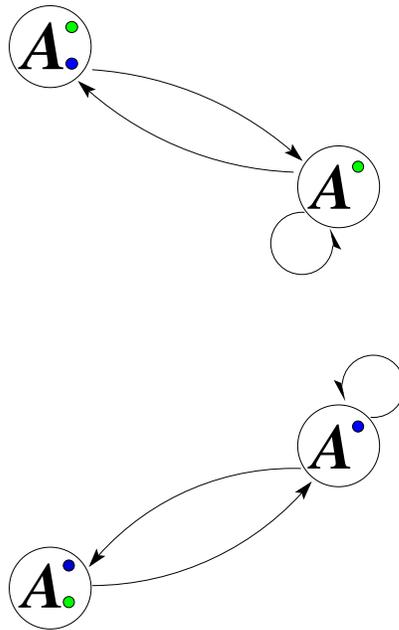
En cambio, si usa  $g_2$  para poder alejarse de  $g_1$ , combinando la proposición 2.5 con la proposición 2.3 y el corolario 2.2 podemos concluir que si queremos que la máquina vuelva a buscar a  $g_1$  no puede alejarse más de  $2|Q|^3 + 2|Q|^2 + 3|Q|$  de la casilla  $x$ , en consecuencia, la distancia entre  $M$  y sus piedras estaría acotada y de forma muy similar a la construcción de  $M_0$  en la proposición 2.5, podríamos construir una máquina sin piedras que simule a  $M$ .

De este modo, si una máquina con dos piedras va a tener una complejidad distinta a una sin piedras, el camino del grafo asociado a su dinámica, deberá pasar una cantidad finita de veces por el nodo  $a^{(1,2)}$ .

Habiendo aclarado esto podemos eliminar el nodo  $a^{(1,2)}$  de  $G_M$ . Quedan dos casos por analizar.

**Caso I** La secuencia pasa una cantidad finita de veces por el nodo  $a$ .

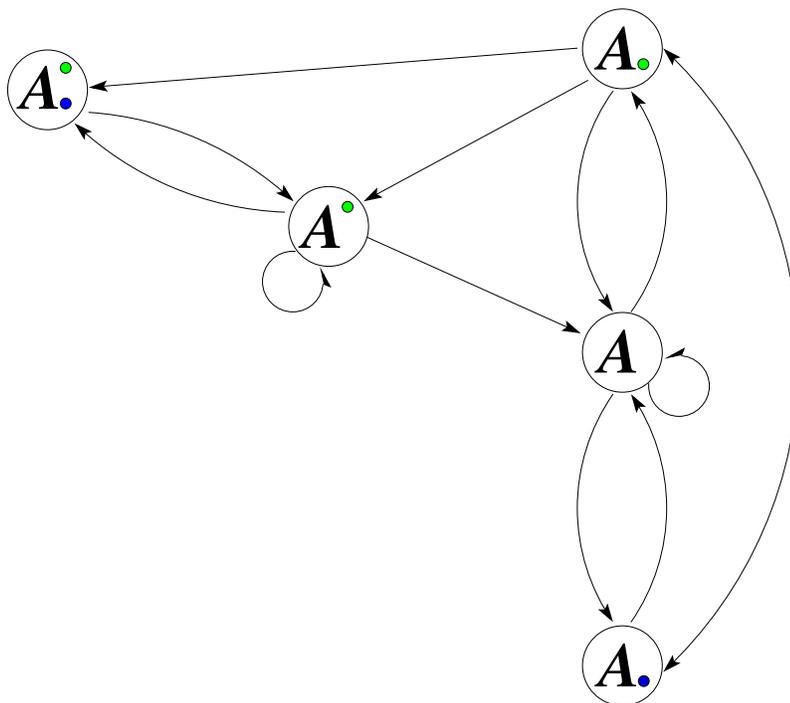
Esto quiere decir que,  $M$ , deja sus dos piedras en el plano una cantidad finita de veces, en consecuencia, luego de un tiempo finito tampoco pasará por los nodos  $a_1$  y  $a_2$ , pues la única forma de llegar a ellos es desde  $a$ . De esta forma, luego de una cantidad finita de iteraciones de la máquina, la secuencia solo pasará por los nodos  $a_1^2$ ,  $a^2$ ,  $a_2^1$  y  $a^1$ , así, luego de un tiempo finito solo se usará la parte del grafo de transición de estados presentada en la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Porción del grafo de transición de estados accedida por  $M$  en caso que pase una cantidad finita de veces por  $a$  y  $a^{(1,2)}$ .

De esta forma, ya que el grafo de la figura 3.2 es desconexo, la máquina usará indefinidamente solo una de sus piedras mientras la otra es acarreada, lo que lo hace equivalente a un máquina con una piedra y en consecuencia, de la proposición 2.5, equivalente a una con cero piedras.

**Caso II** La secuencia pasa una cantidad infinita de veces por el nodo  $a$ .



**Figura 3.3:** Porción del grafo de transición de estados accedida por  $M$  para el caso en que pasa infinitas veces por  $a$  y recoge a  $g_1$  una cantidad finita de veces.

1. a) Si recoge la piedra  $g_1$  una cantidad finita de veces, la secuencia solo pasa por los nodos  $a_1^2, a^2, a_2, a, a_1$ , ver figura 3.3, entonces pueden pasar dos situaciones:
  - Si la máquina pasa infinitas veces sobre  $g_1$ , una vez que  $g_1$  fue depositada en el plano, hay 2 posibilidades:
    - La distancia entre  $M$  y  $g_1$  es no acotada, caso en el que  $M$  se moverá por una banda, alejándose de  $g_1$  y luego de encontrar a  $g_2$  volviendo a  $g_1$ . En cada repetición de este comportamiento,  $g_1$  se aleja de  $g_2$ ,
    - la distancia entre  $M$  y  $g_1$  es acotada, caso en el que quedará confinada a una bola de algún radio y será equivalente a una máquina sin piedras.
  - Si pasa una cantidad finita de veces sobre ella, será una máquina que solo hace uso de una piedra mientras la otra está en el plano sin ser siquiera visitada por  $M$ , es decir, es equivalente a una máquina sin piedras.
- b) Si solo pasa por  $a_2^1, a^1, a_1, a, a_2$ , es análogo.

2. La secuencia pasa infinitas veces por todos los nodos de  $G_M$ , excepto por  $a^{(1,2)}$ .

Notemos que el nodo  $a$  une la parte de arriba con la parte de abajo, así, se tendrá una alternancia de macro-pasos en los que:

- $\mathbf{M}$  lleva  $g_1$  mientras  $g_2$  está en el plano.
- $\mathbf{M}$  deja a  $g_1$  en el plano y se va sin piedras en búsqueda de  $g_2$ .
- $\mathbf{M}$  lleva  $g_2$  mientras  $g_1$  está en el plano.
- $\mathbf{M}$  deja a  $g_2$  en el plano y se va sin piedras en búsqueda de  $g_1$ .
- Luego itera este comportamiento.

Todavía falta un último análisis en esta sucesión de macro pasos.

- Si existe  $m \in \mathbb{N}$  y  $(t_j^m)_{j \in \mathbb{N}}$ , de modo que la distancia entre  $g_1$  y  $g_2$  en el tiempo  $t_j^m$ , es menor que  $m$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Sin pérdida de generalidad, supondremos que los tiempos  $t_j^m$ , son todos los tiempos en los que  $\mathbf{M}$  dejó alguna de sus piedras y la distancia entre  $g_1$  y  $g_2$  en el tiempo  $t_j^m$ , es menor que  $m$ :

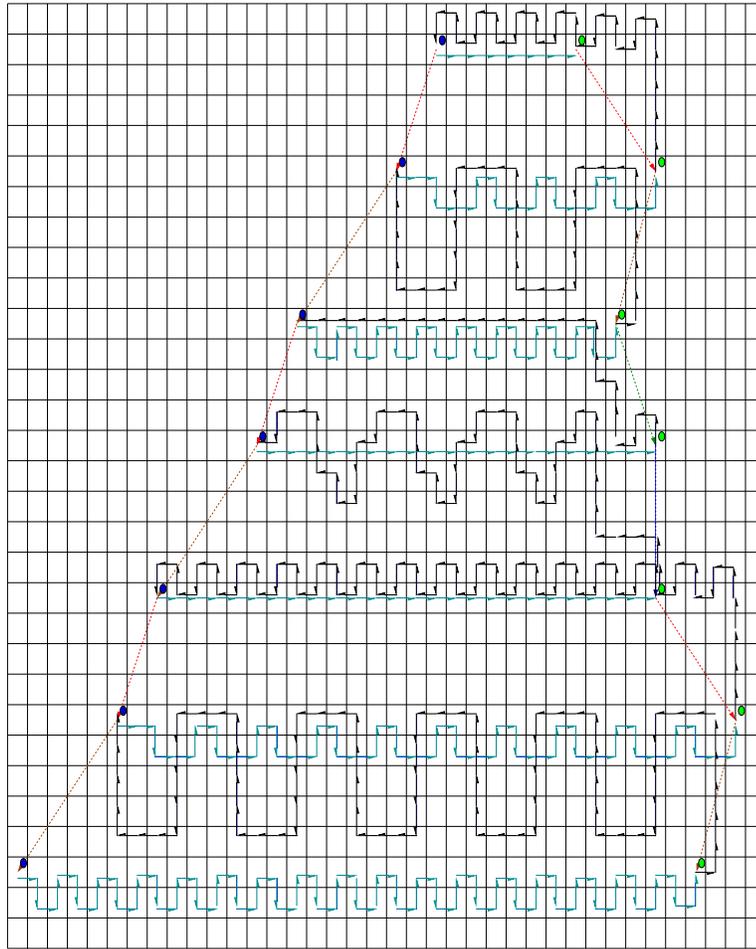
Sea la secuencia  $(t_j^m)_{j \in \mathbb{N}}$ , la de todos los tiempos en los que la máquina deja una piedra y la distancia entre las piedras es menor que  $m$ . Entre los tiempos  $t_j^m$  y  $t_{j+1}^m$ , la evolución de  $\mathbf{M}$  dependerá de cuál fue la piedra  $g_i$  que botó en el instante  $t_j^m$ , del estado  $q$  en el que se encontraba  $\mathbf{M}$  al momento de dejarla y de la distancia  $d$  a la otra piedra; esto, pues el estado con el que  $\mathbf{M}$  llega a la otra piedra depende de la distancia relativa entre las piedras. Ya que las distancias en los tiempos  $t_j^m$  están acotadas por  $m$ , las configuraciones  $(q, d, i)$  donde  $q$  es el estado interno,  $d$  es la distancia a la otra piedra e  $i$  es la piedra encontrada, pertenecen a un conjunto finito, por el determinismo de la regla, el número de posibles situaciones con los que la máquina puede ir de una piedra a otra será menor que una constante que depende de  $m$  y  $|Q|$ .

En consecuencia, luego de un tiempo finito la dinámica será repetitiva y existirán  $j_0, j_\pi, t_\pi$ , tales que para todo  $j \geq j_0$  y  $k \geq 0$  la evolución de  $\mathbf{M}$  entre los tiempos  $t_{j+j_\pi k}^m$  y  $t_{j+j_\pi(k+1)}^m$ , será la misma; además  $t_{j+j_\pi}^m = t_j + t_\pi$ .

Entonces,  $\mathbf{M}$  será equivalente a una máquina sin piedras y estará acotada a una banda.

Entonces, para que la máquina tenga una complejidad distinta a la de una máquina sin piedras, la distancia entre las piedras no puede ser acotada.

■



**Figura 3.4:** Representación del movimiento típico de un máquina que usa sus dos piedras y las bandas por las que se mueven las piedras son no paralelas.

## 3.2. Lenguajes y subshifts

### 3.2.1. Definiciones

La dinámica simbólica ha mostrado ser una herramienta útil en el estudio de los sistemas dinámicos pues permite relacionar propiedades dinámicas con nociones de complejidad y aplicar la teoría de lenguajes formales. En dinámica simbólica se estudian los llamados subshifts. Las siguientes definiciones pueden encontrarse por ejemplo en [10].

**Definición 3.1** Dado un alfabeto  $\Sigma$ , se denota por  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  al conjunto de secuencias infinitas de elementos de  $\Sigma$ . En este conjunto se define la métrica  $d(x, y) = 2^{-\min\{n; x_n \neq y_n\}}$  para  $x \neq y$ , la cual hace compacto al conjunto. La función shift,  $\sigma : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$ , definida por  $\sigma(x)_i = x_{i+1}$  es continua en la métrica considerada y así, el par  $(\Sigma^{\mathbb{N}}, \sigma)$  es el sistema dinámico conocido como full shift.

Un subshift es un conjunto  $S \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$  que es cerrado topológicamente e invariante para  $\sigma$ , es decir, tal que  $\sigma(S) \subset S$ .

Dada una palabra infinita  $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ , una palabra  $v \in \Sigma^*$  se llama factor de  $x$  ( $v \sqsubseteq x$ ) si  $v$  aparece como subsecuencia de  $x$ , es decir, si existen  $w \in \Sigma^*$  y  $z \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  tales que  $x = wvz$ .

Todo subshift  $S$  define un lenguaje:

$$\mathcal{L}(S) = \{v \mid (\exists x \in S) v \sqsubseteq x\}.$$

Recíprocamente, la teoría dice que todo lenguaje  $\mathcal{L}$  define un subshift:

$$S_{\mathcal{L}} = \{x \mid (\forall v \sqsubseteq x) v \in \mathcal{L}\}.$$

La teoría demuestra que  $S_{\mathcal{L}(S)} = S$ , así, el lenguaje asociado a un subshift, lo caracteriza completamente.

A continuación se define un subshift asociado a una máquina  $\mathbf{M}$  con  $\wp_{\mathbf{M}}$  piedras, tal como lo hace Anahí Gajardo para el caso de las máquinas de Turing.

Recordemos que una configuración en una máquina con  $\wp_{\mathbf{M}}$  piedras está dada por

$$((\bar{x}, \bar{y}), r, q, s) \in \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}^{\wp_{\mathbf{M}}} \times Q \times (\{0, 1\}^{\wp_{\mathbf{M}}})^{\mathbb{Z}^2},$$

donde  $\{0, 1\} = \{0, 1\}$ ,  $(\bar{x}, \bar{y})$  es la posición de la cabeza,  $r$  representa el conjunto de piedras que carga,  $q$  es su estado interno y, para cada  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $s(x, y)$  representa el conjunto de piedras que hay en la posición  $(x, y)$ . El conjunto de estados lo llamamos  $\mathfrak{J}$  y la función de transición de estado del sistema la llamamos  $G : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$ .

Una técnica común en el área de sistemas dinámicos es la de proyectar el estado en un conjunto finito (alfabeto) para luego observar la dinámica completa a través de este proyector. En nuestro caso el alfabeto está dado por:

$$\Sigma_{\mathbf{M}} = \{(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2)) \in Q \times \{0, 1\}^2 \times \{0, 1\}^2 / \forall i \in \{1, 2\}, r_i + \eta_i \leq 1\}.$$

Aquí, definimos el proyector  $\pi : \mathfrak{J} \rightarrow \Sigma_{\mathbf{M}}$  por  $\pi((\bar{x}, \bar{y}), r, q, s) = (q, r, s(\bar{x}, \bar{y}))$ , que extrae sólo la información visible desde la cabeza.

Luego, a cada configuración  $c \in \mathbb{J}$  se asocia la secuencia infinita  $(\pi(G^t(c)))_{t \in \mathbb{N}}$ . El conjunto de estas secuencias define un subshift, que llamaremos  $S_M \subseteq Q \times \{0, 1\}^{\mathcal{M}} \times \{0, 1\}^{\mathcal{M}}$ . Consideraremos también su lenguaje asociado:  $L_M = \mathcal{L}(S_M)$ .

Mientras el  $t$ -shift de las máquinas en  $\mathbb{Z}$  puede ser reconocido con un autómata determinista con dos pilas en tiempo real, el  $t$ -shift de las máquinas en  $\mathbb{Z}^2$ , en general, no puede ser reconocido con un autómata determinista con pilas en tiempo real [7]. Por otra parte, según un resultado previo, una máquina  $M$  tiene un subshift reconocido por un autómata finito si y sólo si el tiempo entre dos visitas sucesivas a una celda está acotado por una constante [5], lo cual sólo ocurre cuando la máquina tiene serias limitaciones en su capacidad de movimiento. Las máquinas con 0 o 1 piedra cumplen esta característica, de hecho, su movimiento está siempre acotado a una banda, tal como se demuestra en [3] y se repasa en el capítulo anterior. En este capítulo estudiaremos el  $t$ -shift de las máquinas con 2 piedras avocándonos a precisar su complejidad en la jerarquía de reconocimiento en tiempo real introducida en [12].

### 3.2.2. Una máquina con un $t$ -shift complejo

En esta sección estamos interesados en estudiar la complejidad del lenguaje de una máquina particular, probaremos que el lenguaje asociado a la máquina que se definirá, no es de libre-contexto, o equivalentemente, no se puede construir un autómata determinista con una pila capaz de reconocerlo. Para probar esto, aplicaremos un resultado clásico conocido como el lema del bombeo para lenguajes de libre-contexto (ver por ejemplo [9]), probando así que, en general, no podemos construir un autómata con una pila que reconozca el lenguaje de una máquina con 2 piedras. El Lema del Bombeo se enuncia como sigue.

**Lema 3.1** *Si  $\mathcal{L}$  es un lenguaje reconocido por un autómata con una pila (de libre contexto), entonces existe un entero  $n$  tal que para cualquier palabra  $z \in \mathcal{L}$  de largo mayor o igual que  $p$ , existen palabras  $u, v, w, x$  e  $y$  tales que:*

- $z = uvwxy$
- $|vwx| \leq n$
- $vx \neq \varepsilon$
- $\forall i \geq 0, z_i = uv^iwx^i y \in L$

**Ejemplo 3.1** Para entender a grandes rasgos que significa bombear una palabra veamos el siguiente ejemplo:

Sea  $z \in \{0,1\}^*$ ,  $z = 11011011001010$ , se escogen cualquier  $v$  y  $x$  factores de  $z$ , para este caso escogamos  $v = 11$ , y  $x = 010$  luego, bombear  $v$  y  $x$  consiste en lo siguiente:

Primero separamos  $z$  como se muestra.

$$z = \overbrace{110110}^u \overbrace{11}^v \overbrace{0}^{\bar{w}} \overbrace{010}^x \overbrace{10}^y$$

Bombear la palabra  $z$ , es escoger  $i \geq 0$  y transformar  $z$  en la palabra  $uv^i\bar{w}x^iy$ . A continuación se muestra  $z$  bombeada con  $i = 3$ :

$$z = \overbrace{110110}^u \overbrace{111111}^{v^3} \overbrace{0}^{\bar{w}} \overbrace{010010010}^{x^3} \overbrace{10}^y$$

A continuación se define la máquina con dos piedras cuyo lenguaje no es reconocible por un autómata con una pila, tal como se demostrará más adelante.

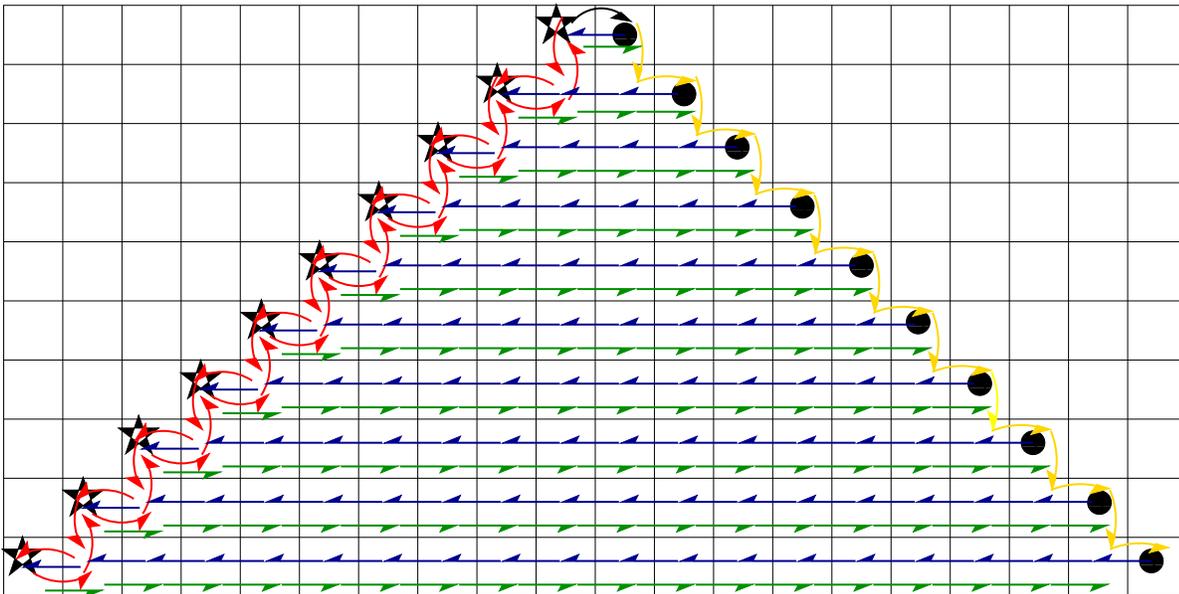
$\mathbf{M}^\bullet = (Q, \Sigma, \delta, \lambda, 2)$ , donde:

1.  $Q = \{q_0, q_2, q_{izq}, q_{drch}\}$ .
2.  $\Sigma = \{\text{blanco}\}$  es el conjunto de colores que rellenan la grilla y solo cuenta con un color.
3.  $\delta$  y  $\lambda$  se presentan en el cuadro 3.2, solo para las configuraciones accedidas cuando se comienza en una configuración del tipo  $(q_0, (1, 1), (0, 0))$ , el resto de las transiciones es irrelevante para la demostración y podemos definir las como:
  - si no se encuentra una piedra, moverse en la dirección  $-\hat{j}$  y conservar el estado,
  - si se encuentra alguna piedra, recojerla, moverse en la dirección  $-\hat{j}$  y conservar el estado.

Haciendo un estudio caso a caso se puede ver que si la máquina se encuentra en una configuración no considerada en el cuadro 3.2, se moverá eternamente hacia abajo, o caerá en alguno de los casos del cuadro 3.2. La figura 3.5 muestra una simulación de la máquina cuando parte con ambas piedras a cuesta y en estado  $q_0$ .

$(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$	$\delta(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$	$\lambda(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$
$(q_0, (1, 1), (0, 0))$	$(q_2, (0, 1))$	$((1, 0), \hat{i})$
$(q_0, (0, 0), (0, 0))$	$(q_{drch}, (0, 0))$	$((0, 0), \hat{i})$
$(q_0, (1, 0), (0, 0))$	$(q_2, (1, 0))$	$((0, 0), -\hat{i})$
$(q_2, (0, 0), (0, 0))$	$(q_0, (0, 0))$	$((0, 0), \hat{j})$
$(q_0, (0, 1), (0, 0))$	$(q_2, (0, 1))$	$((0, 0), \hat{i})$
$(q_2, (0, 1), (0, 0))$	$(q_{izq}, (0, 0))$	$((0, 1), -\hat{i})$
$(q_2, (1, 0), (0, 0))$	$(q_2, (0, 0))$	$((1, 0), \hat{i})$
$(q_{drch}, (0, 0), (0, 0))$	$(q_{drch}, (0, 0))$	$((0, 0), \hat{i})$
$(q_{drch}, (0, 0), (0, 1))$	$(q_0, (0, 1))$	$((0, 0), -\hat{j})$
$(q_{izq}, (0, 0), (0, 0))$	$(q_{izq}, (0, 0))$	$((0, 0), -\hat{i})$
$(q_{izq}, (0, 0), (1, 0))$	$(q_0, (1, 0))$	$((0, 0), -\hat{j})$

**Cuadro 3.2:** *Funciones locales de transición, para  $M^\bullet$*



**Figura 3.5:** *Dinámica de movimiento de  $M^\bullet$ : se observa una alternancia en el movimiento debida al uso de las piedras;  $g_1$  está representada por una estrella y  $g_2$  por un círculo.*

**Proposición 3.2** *El lenguaje asociado a la máquina  $M^\bullet$ ,  $\mathcal{L}_{M^\bullet}$ , no es de libre-contexto.*

**Demostración.**

Vamos a aplicar el Lema del Bombeo a una palabra que parte con el caracter  $(q_0, (1, 1), (0, 0))$ , es decir, parte en estado  $q_0$  con ambas piedras a cuestras. Partiendo de tal situación solo se usan los caracteres del cuadro 3.2. Abreviaremos este conjunto de caracteres mediante letras tal como se indica en el cuadro 3.3. El alfabeto así obtenido es entonces  $\Sigma_\bullet = \{0, a, b, c, d, e, f, l, r, \bar{l}, \bar{r}\}$ .

$(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$	Caracter correspondiente para el alfabeto $\Sigma_\bullet$	Color de la flecha que la máquina seguirá luego de la entrada $(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$
$(q_0, (1, 1), (0, 0))$	0	Negro
$(q_2, (0, 1), (0, 0))$	$f$	Azul
$(q_0, (1, 0), (0, 0))$	$a$	Rojo
$(q_2, (1, 0), (0, 0))$	$b$	Rojo
$(q_2, (0, 0), (0, 0))$	$c$	Rojo
$(q_0, (0, 0), (0, 0))$	$d$	Verde
$(q_0, (0, 1), (0, 0))$	$e$	Amarillo
$(q_{drch}, (0, 0), (0, 0))$	$r$	Verde
$(q_{drch}, (0, 0), (0, 1))$	$\bar{r}$	Amarillo
$(q_{izq}, (0, 0), (0, 0))$	$l$	Azul
$(q_{izq}, (0, 0), (1, 0))$	$\bar{l}$	Rojo

**Cuadro 3.3:** *Esta tabla muestra una abreviación de los caracteres asociados a la dinámica simbólica de  $M^\bullet$ .*

Se puede ver en la figura 3.5 que con respecto al código de colores, el movimiento de la máquina se compone de las siguientes partes:

- 1- Deja la piedra  $g_1$  y se mueve en la dirección de la flecha negra (a la derecha).
- 2- Se mueve en la banda compuesta por las flechas rectas azules hacia la izquierda.
- 3- Encuentra la piedra  $g_1$  y la toma.
- 4- Usa las flechas rojas para moverse hacia abajo e izquierda.
- 5- Deja la piedra  $g_1$  en el plano.
- 6- Usa las flechas rojas para moverse a la derecha y arriba.
- 7- Comienza un movimiento periódico en el que usa las flechas verdes hacia la derecha.
- 8- Encuentra la piedra  $g_2$  y la toma.
- 9- Usa las flechas amarillas para moverse hacia abajo y luego a la derecha.
- 10- Deja la piedra  $g_2$  en el plano.
- 11- Ahora se mueve en la banda compuesta por las flechas azules hacia la izquierda.
- 12- Luego itera este procedimiento desde el paso 2.

Aclaremos, que para asumir las direcciones explicadas en el párrafo anterior, la máquina debe comenzar con una configuración de tipo 0 y luego continuar con la secuencia  $f\bar{l}abcd\bar{r}e\bar{f}l\bar{l}abcd\bar{r}r\bar{r}e\dots$ , donde los caracteres  $l$  y  $r$  están relacionadas con los movimientos hacia la izquierda y derecha respectivamente.

Ahora definamos  $w_i = abcdr^{2(i-1)}\bar{r}e\bar{f}l^{2i}\bar{l}$ , donde para todo  $i \in \mathbb{N}$ , el largo de  $w_i$ ,  $|w_i| = 4i + 6$  y también definamos  $w_0 = \varepsilon$  y  $W$  de la siguiente forma:

$$W = 0\bar{f}\bar{l} \prod_{i=0}^{\infty} w_i \quad (3.1)$$

Entonces, la palabra infinita  $W$  de la ecuación 3.1 es la que le corresponde a  $\mathbf{M}^\bullet$  partiendo de una configuración  $(q_0, (1, 1), (0, 0))$ ; con esto definamos  $L = \{w \in \Sigma_\bullet^* / w \text{ es prefijo de } W\}$ .

Supongamos que  $\mathcal{L}_{\mathbf{M}^\bullet}$  es de libre contexto. Digamos que  $n \in \mathbb{N}$  es el dado por el lema del bombeo, y consideremos la palabra  $z = 0\bar{f}\bar{l} \prod_{i=0}^n w_i$ , entonces existen  $u, v, \bar{w}, x, y$  tales que:

- $z = uv\bar{w}xy$
- $|v\bar{w}x| \leq n$
- $vx \neq \varepsilon$
- $\forall i \geq 0, z_i = uv^i\bar{w}x^i y \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}^\bullet}$

Observamos lo siguiente:

- Como los caracteres  $\bar{l}$  y  $\bar{r}$  alternan su aparición, si tomamos la secuencia que se encuentra entre un  $\bar{l}$  y un  $\bar{r}$  debe contener exactamente la misma cantidad de  $\bar{l}$ 's y  $\bar{r}$ 's.
- El único prefijo de  $W$  que concluye en la secuencia  $w_n$  es  $z$ , en consecuencia, este es el único que termina con la secuencia  $fl^{2n}\bar{l}$ .
- Una palabra que comienza con 0, está en  $\mathcal{L}_{\mathbf{M}^\bullet}$ , si y solo si, está en  $L$ .

Existen 3 casos, dependiendo de la posición que ocupa  $v\bar{w}x$  dentro de  $z$ :

1. La palabra  $x$  no tiene intersección con  $w_n$ .

En este caso  $v$  tampoco interseca a  $w_n$  y entonces  $y$  contiene a  $w_n$  como sufijo. Vemos que  $uv\bar{w}xy \neq uv^2\bar{w}x^2y$ , pero como  $uv^2\bar{w}x^2y$  comienza con 0 y termina con  $y$  (en consecuencia con  $w_n$ )  $uv^2\bar{w}x^2y \notin L \rightarrow \leftarrow$ .

2. La palabra  $x$  tiene intersección con  $w_n$  y  $v$  no está totalmente contenida  $w_n$ .

Entonces  $v$  tiene intersección con  $w_{n-1}$ , dado que  $|v\bar{w}x| \leq n$  y  $|w_{n-1}| = 4n + 2$ , la parte de  $v\bar{w}x$  que interseca a  $w_n$  es de la forma  $abcdr^k$ , con  $k \leq n - 3$ .

Con esto podemos concluir que  $uv\bar{w}xy$  y  $uv^0\bar{w}x^0y$  terminan en la secuencia  $fl^{2n}\bar{l}$ , así, puesto que  $uv\bar{w}xy \neq uv^0\bar{w}x^0y = u\bar{w}y$ ,  $u\bar{w}y \notin L \rightarrow \leftarrow$ .

3. La palabra  $x$  tiene intersección con  $w_n$  y  $v$  está totalmente contenida en  $w_n$ .

Entonces como  $|v\bar{w}x| \leq n \leq 4n + 6 = |w_n|$ , la palabra  $v\bar{w}x$  puede:

- Comenzar con  $a$ , caso en el que nuevamente, la palabra  $v\bar{w}x$  interseca a  $w_n$  en  $abcdr^k$ , con  $k \leq n - 2$ , concluyendo que  $uv^0\bar{w}x^0y \notin L$ .
- No comenzar con  $a$ , caso que se divide en otros dos sub-casos.
  - La palabra  $v\bar{w}x$  termina con el caracter  $\bar{l}$ , caso en el cual existe  $k \leq n - 1$  y  $v\bar{w}x = l^k\bar{l}$ ; así, escogiendo  $i = 2$ ,  $uv^2\bar{w}x^2y \notin L$ , en efecto:
    - Si  $x \neq \varepsilon$ ,  $x$  concluye con el caracter  $\bar{l}$  y la palabra  $uv^2\bar{w}x^2y$  termina con la secuencia  $abcdr^{2(n-1)}\bar{r}efl^{\tilde{k}}\bar{l}\tilde{l}^{\tilde{k}}\bar{l}$ , donde  $\tilde{k} \geq 2n$  y  $\tilde{k} \leq k$ , contradiciendo el hecho de que entre un  $\bar{l}$  y un  $\bar{r}$  debe haber exactamente la misma cantidad de  $\bar{l}$ 's y  $\bar{r}$ 's.
    - Si  $x = \varepsilon$  y  $\bar{w} = \varepsilon$ , la palabra  $uv^2\bar{w}x^2y$  termina con la secuencia  $abcdr^{2(n-1)}\bar{r}efl^{2n-k}l^k\bar{l}l^k\bar{l}$ , contradiciendo el hecho de que entre un  $\bar{l}$  y un  $\bar{r}$  debe haber exactamente la misma cantidad de  $\bar{l}$ 's y  $\bar{r}$ 's.

- Si  $x = \varepsilon$  y  $\bar{w} \neq \varepsilon$  existe  $m < n$  tal que  $v = l^m$ , con lo que  $uv^2\bar{w}x^2y$  concluye con la secuencia  $abcdr^{2(n-1)}\bar{r}elfl^{2n-m}l^{2m}\bar{l}$ , lo que claramente no es un prefijo de  $W$
- La palabra  $v\bar{w}x$  no termina con el caracter  $\bar{l}$ , caso en el que  $uv^2\bar{w}x^2y \notin L$ , en efecto:  
 En  $L$  están solo los prefijos de  $W$ , con esto las palabras de  $L$  solo pueden ser de la forma  $0, 0f, 0f\bar{l}, 0f\bar{l}(\prod_{i=0}^{k-1} w_i)w^{(k,t)}$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ , donde  $|w^{(k,t)}| = t \leq 4k+6$  y  $w^{k_t}$  es un prefijo de  $w_k$ .  
 Escribamos  $w_n = aAv\bar{w}xB\bar{l}$ , donde  $A$  y  $B$  son factores de  $w_n$ , de esta forma, en la secuencia  $Av\bar{w}xB$  no hay  $a$ 's, ni  $\bar{l}$ 's en consecuencia  $Av^2\bar{w}x^2B$  tampoco tendrá  $a$ 's, ni  $\bar{l}$ 's. Así, para que la palabra  $0f\bar{l}(\prod_{i=0}^{n-1} w_i)aAv^2\bar{w}x^2B\bar{l}$  esté en  $L$ ,  $aAv^2\bar{w}x^2B\bar{l}$  deberá ser igual a  $w_n$ ; pero como  $|aAv^2\bar{w}x^2B\bar{l}| > 4n + 6 = |w_n|$ ,  $aAv^2\bar{w}x^2B\bar{l} \neq w_n$   
 Así  $uv^2\bar{w}x^2y \notin L \rightarrow \leftarrow$ .

■

### 3.3. Construcción de un $PDA$ que reconoce el $t - shift$ de una máquina con 2 piedras

En este estudio del lenguaje asociado a una máquina con dos piedras, se construye un  $PDA$  capaz de simular la iteración de la máquina con piedras; la dificultad de esta simulación radica en recordar la información relevante almacenada en el espacio, es decir, la posición de cada piedra relativa a la posición de la máquina. Veremos que la palabra que el  $PDA$  lee puede comenzar en un caracter del tipo  $(q, (1, 1), (0, 0))$ , caso en el que desde un principio el  $PDA$  podrá almacenar la posición de cada piedra. En cambio, si comienza con un caracter del tipo  $(q, (0, 1), (0, 0))$ , o  $(q, (1, 0), (0, 0))$ , o  $(q, (0, 0), (\eta_1, \eta_2))$ , donde  $\eta_i$  puede ser cero o uno, el  $PDA$  no sabrá la posición de las piedras hasta que la palabra leída dicte un encuentro, caso en el que debemos ser muy cuidadosos a la hora de decidir si la posición en la que la piedra finalmente es encontrada es una posición coherente con la información ya recibida, es decir, que estén en una casilla no visitada previamente.

En la construcción del  $PDA$  se construye al conjunto de estados en dos partes, la primera contempla los casos en que el autómata no tiene la información completa de las posiciones de la piedra, y en la segunda parte se construirá un conjunto de estados de modo que se pueda almacenar la información correspondiente a las posiciones relativas de las piedras con respecto a la máquina.

**Definición 3.2** Dada una máquina con 2 piedras  $M = (Q, \Sigma, \delta, \lambda, 2)$ , se define  $L_M$  como el  $t$ -shift asociado a  $M$ , y el siguiente autómata a pilas:

$$PD_2 = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \Delta, Z_0, F)$$

- $\mathcal{Q} = Q_0 \cup Q_1$ ,
- $\Sigma = \Sigma_M$ ,
- $\Gamma = \{-1, 1, Z_0\}$ ,
- $\Delta : \mathcal{Q} \times \Sigma \times \Gamma^{\leq |Q|} \times \Gamma^{\leq |Q|} \longrightarrow \mathcal{Q} \times \Gamma^{\leq |Q|} \times \Gamma^{\leq |Q|}$ , es la función de transición que será descrita luego para los estados de  $Q_1$ ,
- $Z_0$ , es el símbolo de final de pila,
- $F \subseteq \mathcal{Q}$ , son los estados de aceptación  $F = \mathcal{Q} - \{[R]\}$ .

El conjunto de estados y las transiciones de este autómata serán descritas en lo que sigue.

**Observación 3.1** Es bien sabido que el modelo de autómata a pilas en el que se puede agregar o quitar más de un caracter, es equivalente con el modelo usual que solo permite agregar o quitar un elemento; en este caso usamos el modelo más permisivo, lo que se visualiza en la función de transición:

$$\Delta : \mathcal{Q} \times \Sigma \times \Gamma^{\leq |Q|} \times \Gamma^{\leq |Q|} \longrightarrow \mathcal{Q} \times \Gamma^{\leq |Q|} \times \Gamma^{\leq |Q|}$$

El caso en que la máquina parte sin las piedras puede dividirse en tres diferentes situaciones:

1. la máquina no se encuentra con piedras en su trayectoria,
2. la máquina se encuentra con solo una de las piedras durante su trayectoria,
3. la máquina se encuentra finalmente con ambas piedras en su trayectoria.

Aquí se estudiará el tercer caso como un caso general que engloba a los dos anteriores.

Si queremos ser consecuentes con la transición de una máquina con dos piedras, debemos procurar mantener la coherencia del espacio, es decir, si la máquina visita una casilla que ya fue visitada anteriormente, en esta casilla no puede haber algo diferente de lo que quedó la última vez que la visitó. Para verificar esta coherencia, ya que en la trayectoria de una máquina a piedras hay movimientos repetitivos, el autómata a pilas hará uso de ventanas que le permitirán tener en memoria interna las casillas ya visitadas que pueden volver a ser visitadas en un tiempo próximo, lo que complementado con el uso de las pilas le dará el poder de almacenar la trayectoria de la máquina prácticamente completa. Estas ventanas evolucionarán de acuerdo a funciones de shifteo de diferentes tipos; estas funciones se definen a continuación:

**Definición 3.3** Dado  $i \in \{1, 2\}$ , se define  $\neg i$  como  $\neg i = 1$  si  $i = 2$  y  $\neg i = 2$  si  $i = 1$ .

**Definición 3.4** En virtud de la definición 2.4 del capítulo 3, dada una vecindad de  $\theta$  de radio  $R$  en norma 1:  $B(\theta, R)$ , se define la siguiente función:

$$X^R(d) = \begin{cases} \mathbb{B}_{NO} \cup \mathbb{B}_{SO} & \text{si } d = -\hat{i}, \\ \mathbb{B}_{NE} \cup \mathbb{B}_{SE} & \text{si } d = \hat{i}, \\ \mathbb{B}_{NE} \cup \mathbb{B}_{NO} & \text{si } d = \hat{j}, \\ \mathbb{B}_{SE} \cup \mathbb{B}_{SO} & \text{si } d = -\hat{j}, \end{cases}$$

**Definición 3.5** Dados  $R \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \{-\hat{i}, \hat{i}, \hat{j}, -\hat{j}\}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_R^d : \mathcal{P}(B(\theta, R)) &\longrightarrow \mathcal{P}(B(\theta, R)) \\ W &\longrightarrow \sigma_R^d(W) = \{x - d \in B(\theta, R) / x \in W\} \end{aligned}$$

Esta función shiftea el contenido de  $W$  en la dirección  $d$ .

**Definición 3.6** Dados  $R \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \{-\hat{i}, \hat{i}, \hat{j}, -\hat{j}\}$ ,

$$\begin{aligned} H_R^d : \mathcal{P}(B(\theta, R)) &\longrightarrow \mathcal{P}(B(\theta, R)) \\ W &\longrightarrow H_R^d(W) = \{x - d \in B(\theta, R) / x \in W \cup \{\theta\}\} \end{aligned}$$

Esta función shiftea el contenido de  $W$  en la dirección  $d$  y agrega la última casilla visitada.

**Definición 3.7** Dados  $R \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \{-\widehat{i}, \widehat{i}, \widehat{j}, -\widehat{j}\}$ ,  $\mathcal{D} \in B(\theta, |Q|^3)$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{D}\mathcal{F}_R^d} : \mathcal{P}(B(\theta, R)) &\longrightarrow \mathcal{P}(X_d^R) \\ W &\longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{D}\mathcal{F}_R^d}(W) = \{x \in X_d^R / \exists k \in \mathbb{N}, x + d + k\mathcal{D} \in W\} \end{aligned}$$

Esta función hace aparecer las casillas del borde de la ventana, solo en los bordes que el movimiento periódico neto deja atrás.

**Definición 3.8** Dados  $R \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \{-\widehat{i}, \widehat{i}, \widehat{j}, -\widehat{j}\}$ ,  $\mathcal{D} \in B(\theta, |Q|^3)$ ,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\mathcal{D}\mathcal{F}_R^d} : \mathcal{P}(B(\theta, R)) &\longrightarrow \mathcal{P}(X_d^R) \\ W &\longrightarrow \overleftarrow{\mathcal{D}\mathcal{F}_R^d}(W) = \{x \in X_d^R / \exists k \in \mathbb{Z}, x + d + k\mathcal{D} \in W\} \end{aligned}$$

Esta función hace aparecer las casillas del borde de la ventana en ambos sentidos.

**Definición 3.9** Dados  $R \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \{-\widehat{i}, \widehat{i}, \widehat{j}, -\widehat{j}\}$ ,  $\mathcal{D} \in B(\theta, |Q|^3)$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{D}H_R^d} : \mathcal{P}(B(\theta, R)) &\longrightarrow \mathcal{P}(B(\theta, R)) \\ W &\longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{D}H_R^d}(W) = H_R^d(W) \cup \overrightarrow{\mathcal{D}\mathcal{F}_R^d}(W) \end{aligned}$$

Ver figura 3.6.

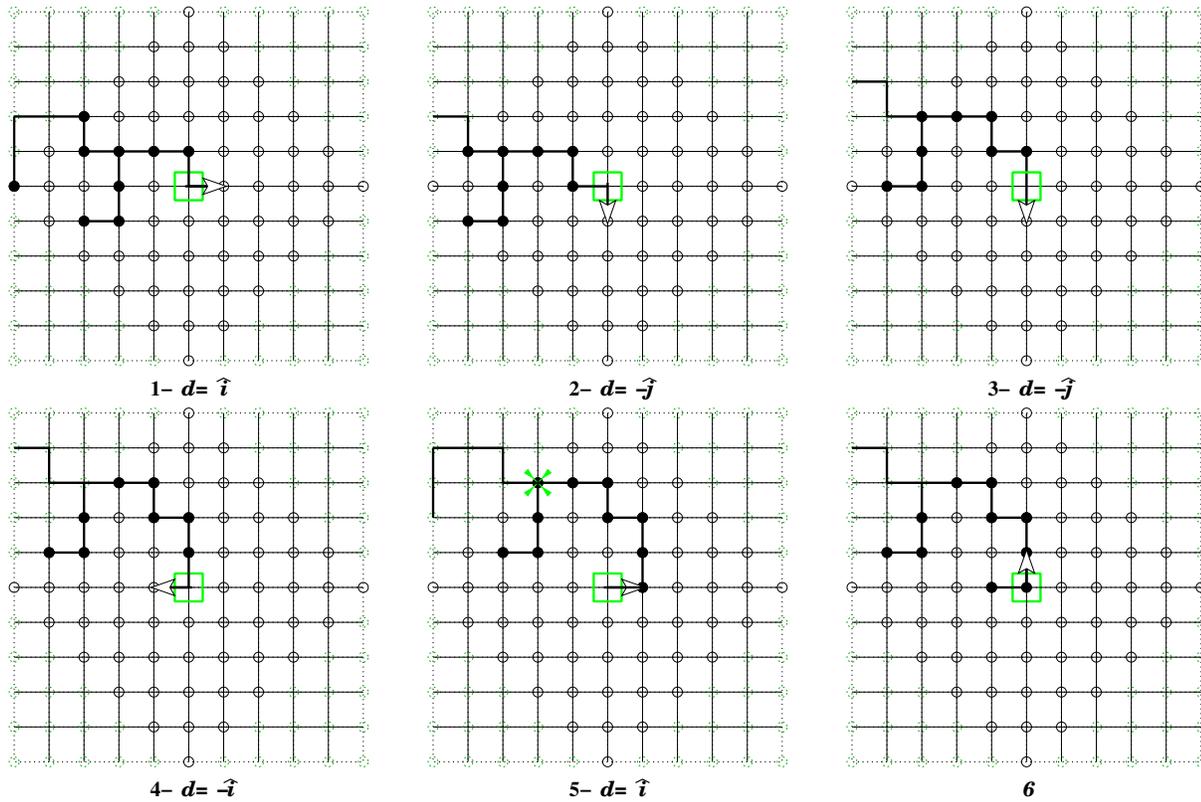
**Definición 3.10** Dados  $R \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \{-\widehat{i}, \widehat{i}, \widehat{j}, -\widehat{j}\}$ ,  $\mathcal{D} \in B(\theta, |Q|^3)$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{D}\sigma_R^d} : \mathcal{P}(B(\theta, R)) &\longrightarrow \mathcal{P}(B(\theta, R)) \\ W &\longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{D}\sigma_R^d}(W) = \sigma_R^d(W) \cup \overrightarrow{\mathcal{D}\mathcal{F}_R^d}(W) \end{aligned}$$

**Definición 3.11** Dados  $R \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \{-\widehat{i}, \widehat{i}, \widehat{j}, -\widehat{j}\}$ ,  $\mathcal{D} \in B(\theta, |Q|^3)$ ,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\mathcal{D}\sigma_R^d} : \mathcal{P}(B(\theta, R)) &\longrightarrow \mathcal{P}(B(\theta, R)) \\ W &\longrightarrow \overleftarrow{\mathcal{D}\sigma_R^d}(W) = \sigma_R^d(W) \cup \overleftarrow{\mathcal{D}\mathcal{F}_R^d}(W) \end{aligned}$$

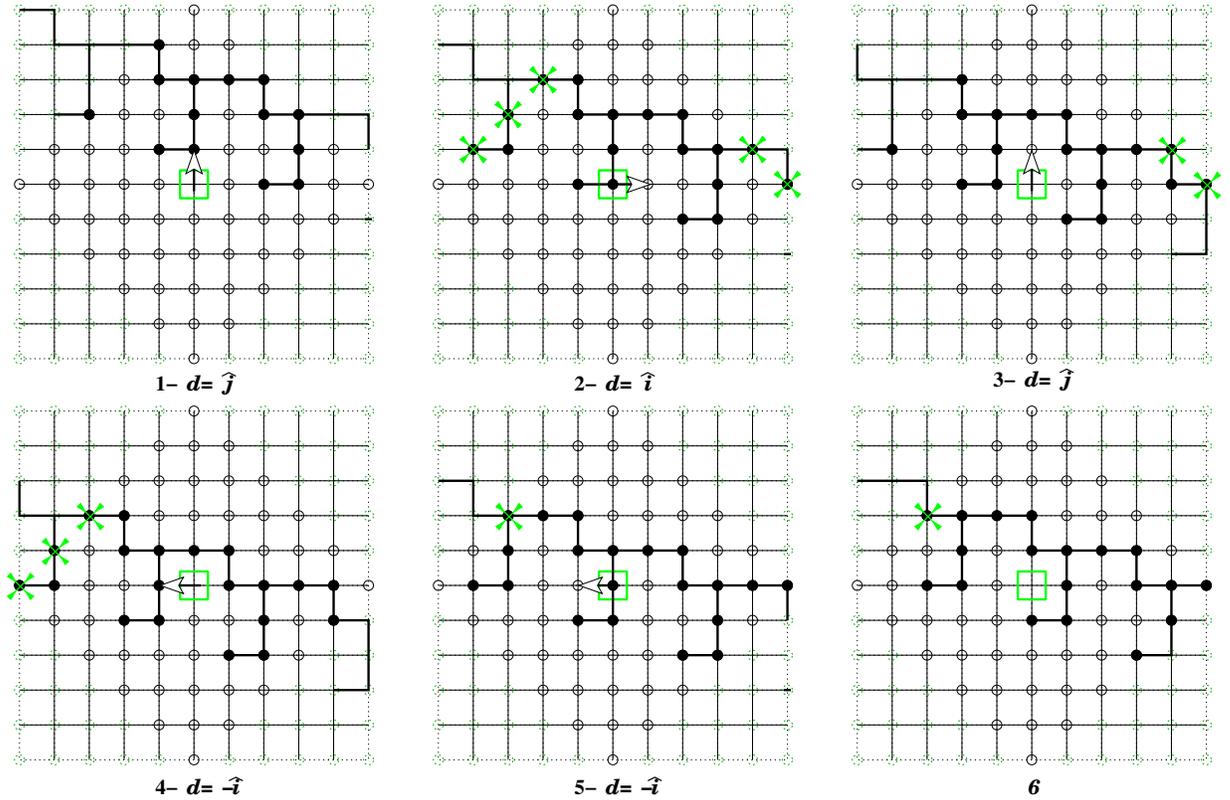
Ver figura 3.6.



**Figura 3.6:** En esta figura se observa la aplicación sucesiva de la función  $\overrightarrow{(3,-1)H_5^d}$  partiendo con el conjunto del cuadro 1. Las líneas negras representan la trayectoria de la máquina, los círculos blancos son la vecindad de radio 5, los círculos negros son las celdas (pertenecientes a la vecindad) que han sido visitadas, los círculos marcados con una X son los puntos agregados a la frontera por la acción de  $\overrightarrow{(3,-1)F_5^d}$ .

### 3.3.1. Parámetros de los movimientos repetitivos

Cuando una máquina no lleva piedras o lleva algunas de ellas sin usarlas, se comporta como una máquina sin piedras, por otra parte si usa alguna de sus piedras, también tendrá un comportamiento que puede ser simulado por una máquina sin piedras; asociado a cada uno de estos comportamientos hay un set de parámetros útiles a la hora de almacenar la información necesaria para reproducir la trayectoria asociada a cada comportamiento. Los parámetros que serán de interés son los siguientes:



**Figura 3.7:** En esta figura se observa la aplicación sucesiva de la función  $\overleftarrow{(3,-1)}\sigma_5^d$  partiendo con el conjunto del cuadro 1. Las líneas negras representan la trayectoria de la máquina, los círculos blancos son la vecindad de radio 5, los círculos negros son las celdas (pertenecientes a la vecindad) que han sido visitadas, los círculos marcados con una X son los puntos agregados a la frontera por la acción de  $\overleftarrow{(3,-1)}\mathcal{F}_5^d$ .

- $n_F^q$ , cantidad de iteraciones correspondiente a la parte periódica cuando  $\mathbf{M}$  parte sin piedras en estado interno  $q$ ,
- $n_i^q$ , cantidad de iteraciones correspondiente a la parte periódica cuando  $g_i$  parte en la casilla en que está la máquina y esta se encuentra en estado interno  $q$ ,
- $n_{r,i}^q$ , cantidad de iteraciones correspondiente a la parte transiente cuando  $g_i$  parte en la casilla en que está la máquina y esta se encuentra en estado interno  $q$ ,
- $\nu_F^q$ , vector director del movimiento periódico cuando  $\mathbf{M}$  parte sin piedras en estado interno  $q$ ,
- $\nu_i^q$ , vector director del movimiento periódico cuando  $g_i$  parte en la casilla en que está la máquina y esta se encuentra en estado interno  $q$ ,

- $\tau_i^q$ , vector director del movimiento transiente cuando  $g_i$  parte en la casilla en que está la máquina y esta se encuentra en estado interno  $q$ ,
- $d_i^q$  es el vector que va desde la posición en la que comienza el período, hasta la posición en la que quedó  $g_i$  la última vez que fue dejada cuando la máquina parte en la casilla en que está  $g_i$ , esta se encuentra en estado interno  $q$  y el movimiento involucra tomar y dejar una cantidad finita de veces a  $g_i$ .

El cálculo de estos parámetros es posible de la siguiente manera:

1. Si la máquina no usa piedras, nos fijamos en el primer momento en que se repite un estado; la cantidad de iteraciones entre la primera vez que aparece el estado que se repitió y la segunda vez es  $n_F^q$ . Por otra parte, ya que no se usan piedras, a cada estado hay asociada una dirección. La suma de las direcciones correspondientes a los estados del período, es  $\nu_F^q$ .
2. Si la máquina encuentra la piedra  $g_i$  en estado  $q$ , tenemos dos posibilidades:
  - • Toma la piedra y se va con ella en un movimiento últimamente periódico en que no la suelta.
  - • Toma la piedra y se va con ella en un movimiento últimamente periódico que usa la piedra infinitas veces,
 Los parámetros calculados aquí son:  $(n_i^q, \nu_i^q, n_{\tau,i}^q, \tau_i^q)$ 
  - Toma la piedra, luego de un tiempo finito la deja y se va sin ella en un movimiento últimamente periódico.
 Los parámetros calculados aquí son:  $(n_i^q, \nu_i^q, n_{\tau,i}^q, \tau_i^q, d_i^q)$

En estos últimos casos se usa una piedra, por la proposición 2.5 hay una máquina sin piedras que simula a la que tiene piedras; así, para calcular los parámetros de interés podemos hacerlo como en el caso 1.

Otro caso importante para el cual debemos definir sus parámetros, es el caso en que la máquina lleva a cuestras la piedra  $g_{-i}$  y en estado interno  $q$  se encuentra con  $g_i$ ; en este caso los parámetros son:  $((^{-i}\nu_i)_1^q, (^{-i}\nu_i)_2^q)$ .

Si la distancia entre las piedras se mantiene menor que  $|Q|^3$ , se pueden dar varias situaciones y los parámetros que se definen son  $((^{-i}\nu_i)_1^q, (^{-i}\nu_i)_2^q) = (0, 0)$ , pero si dicha distancia supera  $|Q|^3$ , solo pueden darse dos situaciones:

- la máquina dejó definitivamente una de las piedras, usando la otra piedra una cantidad finita o infinita de iteraciones. Se definen los parámetros  $((^{-i}\nu_i)_1^q, (^{-i}\nu_i)_2^q) = (\infty, 0)$  en caso que la piedra que se dejó definitivamente es  $g_1$  y  $((^{-i}\nu_i)_1^q, (^{-i}\nu_i)_2^q) = (0, \infty)$  en caso que la piedra que se dejó definitivamente es  $g_2$ ,

- dado  $k \in \{1, 2\}$ , la máquina comenzó una dinámica de ida y vuelta entre las piedras, habiendo dejado la piedra  $g_k$  con un movimiento últimamente periódico cuyo período es representado de forma neta por el vector  $u_k \in \mathbb{Z}^2$ , para cada  $k \in \{1, 2\}$ , caso en el que se definen los parámetros  $((^i\nu_i)_1^q, (^i\nu_i)_2^q) = (\theta, \theta)$ .

Para establecer la calculabilidad de estos parámetros, dada la tripleta  $(g_i, q, g_{-i})$ , representando que se lleva a  $g_i$  y en estado interno  $q$  se encuentra a  $g_{-i}$ , debemos hacer el siguiente análisis:

Ya que que en el caso en que la distancia entre las piedras es acotada superiormente por  $|Q|^3$  hay una cantidad finita de configuraciones (posición de  $g_i$  respecto a  $\mathbf{M}$ , posición y estado interno de  $\mathbf{M}$ , posición de  $g_{-i}$  con respecto a  $\mathbf{M}$ ), por el determinismo de la regla, la secuencia resulta ser últimamente periódica y su transiente está acotado superiormente por la cantidad de configuraciones posibles<sup>1</sup>  $C$ . En consecuencia, para verificar si la dinámica se encuentra en este caso o no, basta con correr la máquina por un tiempo  $C + 1$  y chequear si durante todo este proceso las piedras estuvieron o no a una distancia menor que  $|Q|^3$ .

En caso que durante todo este proceso las piedras sí estuvieron a una distancia menor que  $|Q|^3$ , los parámetros a usar son  $(0, 0)$ .

En otro caso, hay que verificar si es que una vez dejada la piedra  $g_i$ , la máquina vuelve a esta antes de estar a distancia mayor que  $|Q|^3$ , o no.

En caso negativo, se decide que los parámetros a usar son  $((^{-i}\nu_i)_1^q, (^{-i}\nu_i)_2^q) = (\infty, 0)$  si la piedra que se dejó para no ser visitada denuevo es  $g_1$  y  $((^{-i}\nu_i)_1^q, (^{-i}\nu_i)_2^q) = (0, \infty)$  en caso que la piedra que se dejó para no ser visitada denuevo es  $g_2$ .

En otro caso, escogemos  $((^{-i}\nu_i)_1^q, (^{-i}\nu_i)_2^q) = (\theta, \theta)$ .

### 3.3.2. Un lema técnico

En las secciones siguientes se definirá el autómata a pilas que reconoce a  $L_{\mathbf{M}}$ . Este autómata guardará la información sobre las celdas recorridas y la posición de las piedras usando la pila y un vector adicional que guardará en memoria interna. Como la memoria interna es finita, este vector no puede ser muy grande. En la pila guarda repeticiones de un mismo vector, correspondientes al movimiento que la máquina hace durante su desplazamiento repetitivo, la información en la pila representa puntos en una recta, el vector adicional representará la distancia desde esta recta a la cabeza de la máquina.

---


$${}^1C = (2 \lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor + 2 \lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor + 1)(2 \lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor + 2 \lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor)(2(\lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor + |Q|)^2 + 2(\lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor + |Q|) + 1)|Q| + 2(2 \lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor + 2 \lfloor \frac{|Q|^3}{2} \rfloor + 1)^2|Q| + |Q|$$

El siguiente lema muestra que no es necesario mantener vectores demasiado grandes en memoria interna, pues si la cabeza se llega a alejar demasiado de la recta correspondiente al último movimiento repetitivo con que se alejó de una determinada piedra, entonces ya no volverá a encontrar tal piedra, y entonces podremos olvidar tal información.

**Proposición 3.3** *Sea  $R = \{x_0 + r\alpha/r \in \mathbb{R}\}$  una recta con vector director  $\alpha$ ,  $B$  un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $B \cap R \neq \emptyset$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $\beta$  un vector de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, si  $(B + m\beta) \cap R \neq \emptyset$ , se cumple que  $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ ,  $(B + k\beta) \cap R \neq \emptyset$ .*

### Demostración.

Dadas las hipótesis de la proposición, sea  $x_1 \in B \cap R$  y  $x_2 \in (B + m\beta) \cap R$ , entonces existen  $n_1$  y  $n_2$  tales que podemos escribir:

$$x_1 = x_0 + n_1\alpha \qquad x_2 = x_0 + n_2\alpha$$

definamos también  $\bar{x}_2 = x_2 - m\beta$ , notemos que  $\bar{x}_2 \in B$ , como  $B$  es convexo, el segmento de recta que une los puntos  $x_1$  y  $\bar{x}_2$ :  $\bar{S} = \{x_1 + r(\bar{x}_2 - x_1)/r \in [0, 1]\}$  está contenido en  $B$ ; este conjunto puede ser escrito como:

$$\bar{S} = \{x_0 + n_1\alpha - r(m\beta + (n_1 - n_2)\alpha)/r \in [0, 1]\}.$$

Sea  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , se definen los siguientes conjuntos:

$B_k = B + k\beta$ ,  $\bar{S}_k = \bar{S} + k\beta$ , es fácil ver que el segmento de recta que une los puntos  $x_1 + k\beta$  y  $\bar{x}_2 + k\beta$ , es  $\bar{S}_k$ , y ya que  $B_k$  es convexo,  $\bar{S}_k \subseteq B_k$ . A continuación probaremos que  $\bar{S}_k$  interseca la recta  $R$ .

$$\bar{S}_k = \{x_0 + n_1\alpha + k\beta - r(m\beta + (n_1 - n_2)\alpha)/r \in [0, 1]\}.$$

Ya que  $0 < \frac{k}{m} < 1$ ,  $x = x_0 + n_1\alpha + k\beta - \frac{k}{m}(m\beta + (n_1 - n_2)\alpha) \in \bar{S}_k$ ; simplificando algunos términos podemos escribir  $x = x_0 + \frac{(m-k)n_1 + kn_2}{m}\alpha$ , de donde claramente  $x \in R$ . ■

**Corolario 3.1** *Sea  $R = \{x_0 + r\alpha/r \in \mathbb{R}\}$  una recta con vector director  $\alpha$ ,  $B$  un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $B \cap R \neq \emptyset$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $\beta$  un vector de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, si  $(B + m\beta) \cap R = \emptyset$ , se cumple que  $\forall k \in \{m, m+1, m+2, \dots\}$ ,  $(B + k\beta) \cap R = \emptyset$ .*

**Demostración.**

Dadas las hipótesis del corolario, supongamos que existe  $M > m$  tal que  $(B + M\beta) \cap R \neq \emptyset$ , por la proposición 3.3 tenemos que  $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$ ,  $(B + k\beta) \cap R \neq \emptyset$ , en particular si  $k = m \rightarrow \leftarrow$ .

■

**Lema 3.2** *Sea una máquina con 2 piedras  $M = (Q, \Sigma, \delta, \lambda, 2)$ . Supongamos que la máquina se desplazó de la posición de  $g_i$  a la posición de  $g_{-i}$  haciendo un movimiento repetitivo con vector  $\alpha$  y luego de visitar  $g_{-i}$  comenzó otro movimiento repetitivo resumido netamente por el vector  $\beta$ . Si en algún momento la posición de la máquina relativa a la posición de  $g_i$ :  $\mathcal{D}$ , es tal que  $\min_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{D} - n\alpha - P_i\|_1 > 2(|Q|^3 + |Q|)$ , entonces la máquina no volverá a encontrar a  $g_i$ .*

**Demostración.**

Si  $\beta \neq \theta$ :

Definamos algunas cosas antes de comenzar, una vez que se deje a  $g_i$  en la posición  $P_i$ , se comienza un comportamiento últimamente periódico que podemos resumir con los vectores netos del transiente y el período,  $d_t$  y  $\alpha$  respectivamente, notemos que  $\|d_t\|_1 < |Q|$ . Dado que la máquina encuentra a  $g_{-i}$ , la posición  $P_{-i}$  puede ser escrita de la siguiente forma:

$$P_{-i} = P_i + d_t + N\alpha + d_p,$$

donde  $N \in \mathbb{N}$  y  $d_p$  corresponde al desplazamiento realizado durante una fracción del período. Vemos que  $\|d_t + d_p\|_1 < |Q|$ . Luego de encontrar a  $g_{-i}$ , la dinámica de la máquina cambiará y separaremos el movimiento en una primera parte transiente que resumiremos en el vector  $d_\tau$  y el segundo período resumido en  $\beta$  (en adelante cuando hablemos del período, nos estaremos refiriendo al segundo período). Notar que  $\|d_\tau + \beta\|_1 < |Q|^3$ ,  $\|d_\tau\|_1 < |Q|^3$  y  $\|\beta\|_1 < |Q|^3$  y que además, para cualquier porción del período (resumido netamente por el vector  $\beta_t$ ), se satisface  $\|d_\tau + \beta_t\|_1 < |Q|^3$ .

Dados los parámetros definidos al comienzo, podemos escribir la posición de la máquina con respecto a la piedra justo después del segundo transiente, como:

$$\mathcal{D}_0 = P_{-i} + d_\tau = P_i + (d_t + d_p + d_\tau) + N\alpha,$$

donde claramente,  $\|d_t + d_p + d_\tau\|_1 < |Q| + |Q|^3$  y  $\|d_t + d_p + d_\tau + \beta_t\|_1 < |Q| + |Q|^3$ . Notemos además que los vectores  $(d_t + d_p + d_\tau)$  y  $(d_t + d_p + d_\tau + \beta_t)$  representan la posición de la máquina con respecto a  $P_i + N\alpha$  justo antes de la primera realización del período y la posición de la

máquina con respecto a  $P_i + N\alpha$  en un momento arbitrario de la primera realización del período, respectivamente. De esto podemos concluir que en una vecindad de radio  $|Q| + |Q|^3$  del punto  $P_i + N\alpha$  están contenidas todas las casillas visitadas en la primera realización del período.

Supongamos que  $\mathcal{D}$  es la posición de la máquina en algún momento después de haber dejado a  $g_{-i}$  y que satisface  $\min_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{D} - n\alpha - P_i\|_1 > 2(|Q|^3 + |Q|)$ . Por lo dicho más arriba, tenemos que existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\mathcal{D} - m\beta = x \in B(P_i + N\alpha, |Q| + |Q|^3)$ . La situación está ilustrada en la figura 3.8.

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos las vecindades  $B_n = B(x + n\beta, |Q| + |Q|^3)$ . Como  $x \in B(P_i + N\alpha, |Q| + |Q|^3)$ , entonces  $B_0 \cap \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$ .

Como para cada  $p \in \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{N}\}$ ,  $d(p, \mathcal{D}) > 2(|Q|^3 + |Q|)$ , entonces para cada  $p \in \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{R}\}$ ,  $d(p, \mathcal{D}) > 2|Q|^3 + |Q|$ , en efecto:

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $\bar{p} \in \{P_i + (n + a)\alpha/a \in ]0, 1[ \}$ , es decir,  $\bar{p}$  pertenece al segmento de recta que une los puntos  $P_i + n\alpha$  y  $P_i + (n + 1)\alpha$ .

Definamos los siguientes vectores:

$$v = P_i + n\alpha - \mathcal{D}$$

$$u = \bar{p} - (P_i + n\alpha)$$

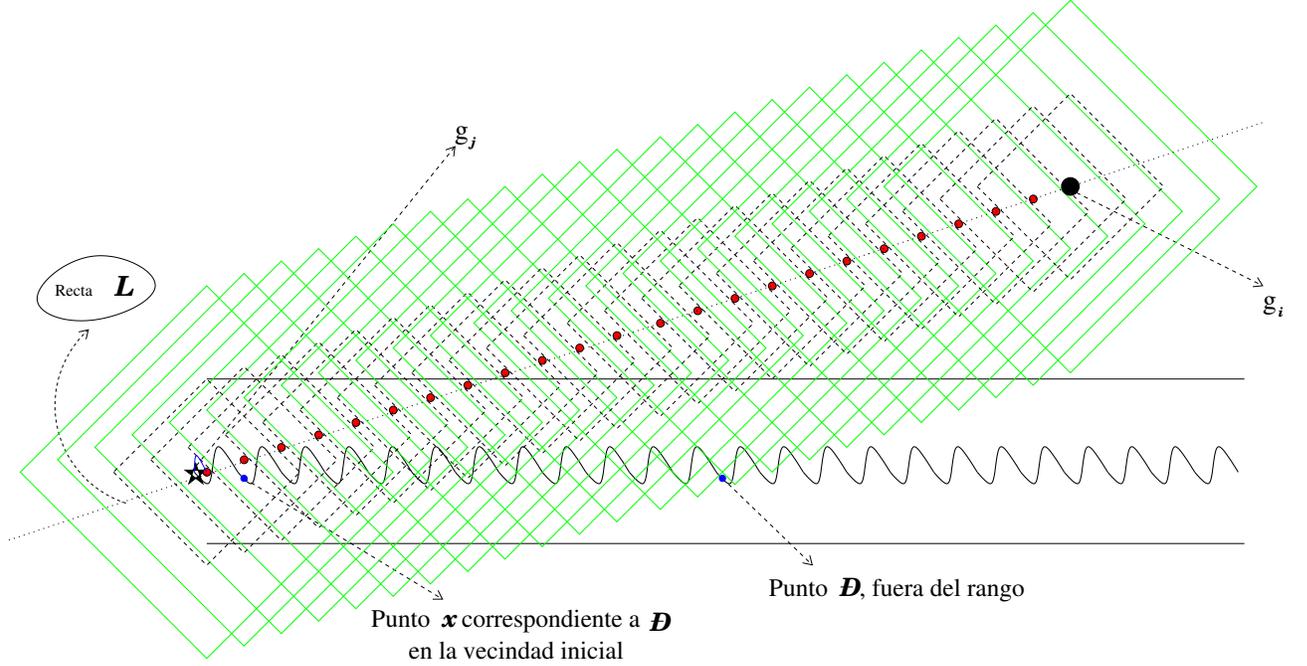
Tenemos que  $\|v\|_1 > 2(|Q|^3 + |Q|)$ , además, existe  $a \in ]0, 1[$  tal que  $u = a\alpha$ , en consecuencia,  $\|u\|_1 = \|a\alpha\|_1 = a\|\alpha\|_1$  y dado que  $\|\alpha\|_1 \leq |Q|$  se cumple que  $\|u\|_1 < |Q|$ .

De este modo:

$$\begin{aligned} \|\bar{p} - \mathcal{D}\|_1 &= \|v + u\|_1 \\ &\geq \|v\|_1 - \|u\|_1 \\ &> 2(|Q|^3 + |Q|) - |Q| \\ &= 2|Q|^3 + |Q| \end{aligned}$$

Luego, ya que  $\mathcal{D} = x + m\beta$ ,  $B_m \cap \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ . Ya que  $B_0$  es un conjunto convexo, del corolario 3.1 tenemos que para todo  $k \geq m$ ,  $B_k \cap \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{R}\} = \emptyset$ , además, como  $\{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{N}\} \subset \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{R}\}$  se cumple que para todo  $k \geq m$ ,  $B_k \cap \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ ; así,  $(\bigcup_{k \geq m} B_k) \cap \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ .

Como la trayectoria seguida por la máquina después de pasar por la casilla  $\mathcal{D}$  está contenida en el conjunto  $\bigcup_{k \geq m} B(x + k\beta, |Q|^3)$ , el que a su vez está contenido en el conjunto  $\bigcup_{k \geq m} B(x + k\beta, |Q| + |Q|^3)$ , concluimos que la trayectoria seguida por la máquina después de pasar por la casilla  $\mathcal{D}$  no contendrá puntos del conjunto  $\{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{N}\}$ , en particular no contendrá a  $P_i$ .



**Figura 3.8:** La figura muestra la recta  $L = \{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{R}\}$ , con los puntos del conjunto  $\{P_i + r\alpha/r \in \mathbb{N}\}$  marcados con rojo y cada uno enmarcado en una vecindad punteada de radio  $|Q| + |Q|^3$  y otra vecindad verde de radio  $2(|Q| + |Q|^3)$ , además se representa el segundo movimiento periódico enmarcado en una banda de radio  $|Q|^3$ .

Finalmente, si  $\beta = \theta$ , la secuencia periódica no le permite a la máquina visitar casillas distintas a las ya visitadas en la primera realización del período. Así la máquina no se puede alejar más de  $|Q|^3$  unidades de donde se encontró a  $g_{-i}$ , lo que contradice las hipótesis.  $\rightarrow\leftarrow$

■

### 3.3.3. Descripción de los estados de $Q_0$

En virtud de almacenar la información necesaria para la transición, se construye el estado del siguiente modo:

$$P = [(q, r, \eta), (abcde), (V_0, V, \bar{V}, U, \bar{U}), (n_F, \nu_F, T_F), (n^1, n^2, d), d_{\bar{V}}, ((n_\tau, n_B), (\tau_B, \nu_B, d_B)), d_{min}, \rho, S]$$

$$P \in Q_0 = [((Q \cup \{\Omega\}) \times \{0, 1\}^2 \times \{0, 1, \Phi\}^2) \times \{v, l, f\}^5 \times (\mathcal{P}(B(\theta, 4t)) \times \mathcal{P}(B(\theta, t)) \times \mathcal{P}(B(\theta, 2t)) \times \mathcal{P}(B(\theta, t)) \times \mathcal{P}(B(\theta, 2t))) \times (\{0, 1, \dots, |Q|\} \times B(\theta, |Q|) \times B(\theta, 3t)) \times (\{0, 1, \dots, t\} \times \{0, B\} \times (B(\theta, 3t) \cup \{\star\}) \times B(\theta, |Q|^3) \times (\{0, 1, \dots, |Q|^3\}^2 \times B(\theta, |Q|^3)^2 \times B(\theta, |Q|^2) \times B(\theta, 10t) \times \{0, 1, 2\} \times \{0, \odot, \ominus\}) \cup \{[R]\}]$$

Donde:

- $[R]$  es el estado de rechazo,
- $t = |Q| + |Q|^3$ ,
- $\mathcal{P}(U)$  representa el conjunto de partes del conjunto  $U$ ,
- $B(\theta, R)$  representa la bola de centro  $(0, 0)$  y radio  $R$  en la norma 1,
- $(q, r, \eta)$  es utilizado para guardar la coherencia, estado, espacio y carga de piedras,
- la palabra  $(abcde)$  indica cuales ventanas están activas,  $a$  corresponde a  $V_0$ ,  $b$  corresponde a  $V$ ,  $c$  corresponde a  $\bar{V}$ ,  $d$  corresponde a  $U$ ,  $e$  corresponde a  $\bar{U}$ ,
- $(V_0, V, \bar{V}, U, \bar{U})$  son las ventanas de información, indican el conjunto de casillas que ya han sido visitadas,
- $(n_F, \nu_F, T_F)$ , son los parámetros del movimiento últimamente periódico del comienzo,
- $(n^1, d)$  son un contador y una variable vectorial para almacenar posiciones relativas,
- $n^2$  es un avisador de cambio de etapa,
- $d_{\bar{V}}$  es una variable para almacenar posiciones relativas,
- $((n_\tau, n_B), (\tau_B, \nu_B, d_B))$  son los parámetros del movimiento últimamente periódico del final,
- $d_{min}$  es una variable vectorial que será de utilidad al momento de volver a visitar las casillas que fueron visitadas en un comienzo, un argumento similar al usado en el lema 3.2 justifica el rango usado para  $D$ ,
- $\rho$  servirá para almacenar cuál fue la piedra que se encontró,
- $S$  servirá para saber si la máquina se lleva o no, la piedra.

A modo de abreviación, en adelante nos referiremos por  $(q^*, r^*, \eta^*, m)$ , a las imágenes siguientes:

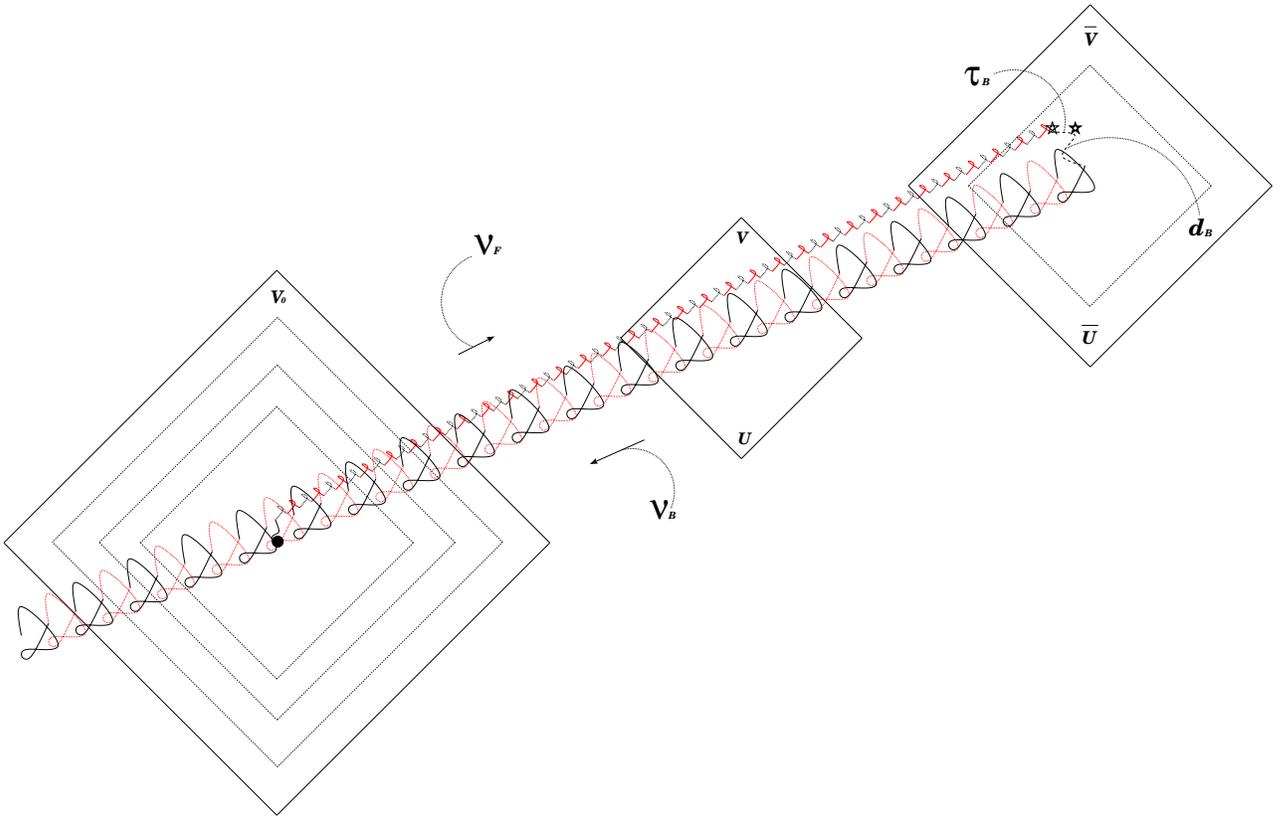
- $\delta(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)) = (q^*, r_1^*, r_2^*)$
- $\lambda(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)) = (\eta_1^*, \eta_2^*, m)$

En el comienzo el estado es:

$$P_0 = [(\Omega, \theta, (\Phi, \Phi)), (vllll), (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset), (0, \theta, \theta), (0, 0, \theta), \theta, ((0, 0), (\theta, \theta, \theta)), \theta, 0, 0]$$

Luego de leer el primer caracter, digamos  $(\bar{q}, \bar{r}, \bar{\eta}) = (q_0, \theta, \theta)$ ,  $P_0$  cambiará a un nuevo estado:  $P_1$ , el que será preparado en virtud de que el siguiente caracter sea válido; esto es, que sea consecuente con la función de transición de la máquina con dos piedras; el caso  $(\bar{r}, \bar{\eta}) \neq (\theta, \theta)$  se explicará al final de la sección 3.3.4, bajo el título **Casos particulares**.

$$P_1 = [(q^*, r^*, (\Phi, \Phi)), (vllll), (H_{4t}^m(\emptyset), \emptyset, \emptyset, \emptyset), (n_F^{q_0}, \nu_F^{q_0}, \theta), (0, 0, m), \theta, ((0, 0), (\theta, \theta, \theta)), \theta, 0, 0]$$



**Figura 3.9:** Representación de las ventanas usadas en los estados de  $Q_0$

### 3.3.4. Transiciones para los estados de $Q_0$

Para la evolución del autómata, será necesario chequear que el caracter leído es realmente el que seguiría en la dinámica de la máquina a piedras. El chequeo de la coherencia con el estado interno en la máquina a piedras es fácil y solo requiere verificar, en cada iteración, si se satisface:

$$(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2)) = (q, (r_1, r_2))$$

Si esta condición no se satisface, el autómata debe pasar al estado de rechazo. El chequeo de la coherencia con el espacio, es decir,  $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ , es más difícil y requiere de almacenar la información correspondiente a la trayectoria de la máquina.

El protocolo que será descrito aquí tiene el objetivo de poder verificar si, según la palabra leída, la piedra hallada estaba en una posición válida; esto es:

Si según la secuencia leída se encontró la piedra en una posición que ya fue visitada, y en la visita anterior la piedra no estaba ahí, evidentemente la secuencia leída no es válida para la máquina a piedras y debe ser rechazada; esto se verifica revisando en las ventanas activas en la iteración, si es que la posición actual (el centro de las ventanas) es un punto perteneciente a las mismas, o no.

Para chequear la validez de las posiciones de las piedras, las variables  $(\eta_1, \eta_2)$  evolucionarán de acuerdo con las ventanas. A continuación se define la relación que debe satisfacer el caracter leído y el estado para que se verifique la coherencia y así no pasar a estado de rechazo.

**Definición 3.12** Dado  $\bar{\eta} \in \{0, 1\}^2$  y  $\eta \in \{0, 1, \Phi\}^2$ ,

$$\bar{\eta} \supseteq \eta \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2\}, \forall a \in \{0, 1\}, \bar{\eta}_i = a \Rightarrow \eta_i \in \{a, \Phi\})$$

De esta forma, en cada iteración se verificará si es que  $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \supseteq (\eta_1, \eta_2)$ , si esta condición no se satisface, el autómata debe pasar al estado de rechazo. Entenderemos el símbolo  $\Phi$  como un grado de libertad en el sentido que  $\eta_i = \Phi$  si la casilla no ha sido visitada previamente; así,  $g_i$  puede estar o no en la casilla y de todas formas sería válido.

Las transiciones del *PDA* se describen en etapas (donde algunas etapas pueden ser vacías), del siguiente modo:

1. En el comienzo, hay un pequeño transiente seguido por un movimiento periódico, ambos de tamaño no mayor que  $|Q|$ , el autómata estará en esta etapa mientras la distancia,  $|d|$ , al punto de partida sea menor que  $3t$ ,

2. el movimiento periódico continúa hasta encontrar a  $g_i$ ,
3. después comienza otro movimiento últimamente periódico de período no mayor a  $|Q|^3$ ,
4. en el que finalmente encuentra la segunda piedra y se pasa a usar un subconjunto de estados totalmente diferente llamado  $Q_1$ , en el que se solo se almacenan las posiciones de las piedras, relativas a la posición de la máquina.

En la primera etapa, mientras  $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = (0, 0)$ :

- Se usa  $d$  para guardar la posición relativa al punto de partida, actualizándola de acuerdo a la dirección asumida por la máquina en cada iteración, es decir, se hace  $d = d + m$ ,
- se usa la ventana  $V_0$  para guardar las casillas visitadas mientras las demás ventanas permanecen desactivadas, la actualización de  $V_0$  se hace aplicando la función  $H_{4t}^m$ ,
- si  $\theta \in V_0$  se hace  $\eta = (0, 0)$ , en otro caso,  $\eta = (\Phi, \Phi)$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si aún en la primera etapa la piedra  $g_i$  es encontrada por la máquina, es decir,  $\bar{\eta}_i = 1$  y  $\bar{\eta}_{-i} = 0$ , entonces se verifica si  $\theta \notin V_0$ , en caso que esto se satisfaga ( $\bar{\eta} \geq \eta$ ) la casilla en que se encontró la piedra, es válida.

Entonces entramos en una sub-etapa llamada etapa 1', en esta etapa, mientras  $\bar{\eta}_{-i} = 0$  se hace lo siguiente:

- La palabra  $(abcde)$  pasa a  $(vffff)$ , es decir, seguirá con  $V_0$  activa y las demás se fijan,
- Dependiendo del estado  $q$  con el que se abordó la piedra y de cuál piedra fue la abordada, el movimiento últimamente periódico será diferente; una de las diferencias podría ser el hecho de llevar su piedra en el movimiento o no. Esto quedará almacenado en la variable  $S$ , tomando el valor  $\odot$  si se va con la piedra y  $\ominus$  si no se va con la piedra. La información de cuál fue la piedra encontrada se almacena en  $\rho$ , asumiendo el valor  $i$  si la piedra encontrada fue  $g_i$ .

Si  $S = \emptyset$ :

- Como fue explicado en la sección 3.3.1, las variables  $((n_\tau, n_B), (\tau_B, \nu_B, d_B))$ , asumirán los valores  $(n_\rho^q, n_{\tau, \rho}^q), (\tau_\rho^q, \nu_\rho^q, d_\rho^q)$ ,
- al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración:
  - Mientras  $n^1 < n_\tau$  y  $n^2 = 0$ , se usa la variable  $d$ , inicialmente como  $d = -m$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
    - ◊  $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0^2$
    - ◊  $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,<sup>3</sup>
  - cuando  $n^1 = n_\tau$  significa que terminó la parte transiente y comienza a contar (desde  $n^1 = 1$ ) para ahora poder verificar cada vez que se complete un período ( $n^1 = n_B$ ) y así agregar un 1 a la pila  $\rho$ , además se hace  $n^2 = B$ :
    - $d = m$ , es decir,  $d$  comienza de “cero” para almacenar en cada instante, la posición con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ . Para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y así vuelve a  $d = m$ .
    - ◊  $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$
    - ◊  $\eta_\rho = 0$ .<sup>4</sup>
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- Se hace  $\nu_B = \nu_i^q$ ,
- se comienza a usar la variable  $d$ , inicialmente como  $d = -m$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

<sup>2</sup>La coherencia con respecto a esta piedra será verificada con las casillas que ya fueron visitadas.

<sup>3</sup>La coherencia con respecto a esta piedra solo será verificada con  $d$ .

<sup>4</sup>Notemos que en esta parte de la evolución la máquina no vuelve a encontrar a  $g_\rho$ .

**Observación 3.2** *Notemos que en este caso sucede lo siguiente:*

- Si  $S = \ominus$  y  $n^2 = 0$ , se tiene que  $d$  almacena la posición de la piedra relativa a la posición de la máquina.
- Si  $S = \ominus$ ,  $n^2 = B$  y  $N$  es la suma de 1s o -1s de la pila  $\rho$ , se tiene que  $d - d_B + N\nu_B$  almacena la posición de la máquina relativa a la posición de la piedra.
- Si  $S = \odot$ , se tiene que  $d$  almacena la posición de la piedra relativa a la posición de la máquina.
- Además si una casilla fue visitada en el pasado por la máquina a piedras, entonces en el autómata a pilas la ventana que está activa contiene la casilla  $\theta$ .

Si ninguna piedra fue encontrada antes de haber avanzado de forma neta  $3t$  unidades, pasamos a la segunda etapa, mientras  $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = (0, 0)$ .

En la segunda etapa, la inicialización es del siguiente modo:

- Se activa  $V$ , es decir,  $(abcde)$  cambia a  $(vllll)$ , la que se usará para almacenar el movimiento periódico y comenzará como  $V = B(\theta, t) \cap V_0$ ,
- se agrega la casilla del centro a  $V_0$  y la palabra  $(abcde)$  cambia a  $(fvlll)$ , es decir, se fija  $V_0$ ,
- luego se fija  $T_F = d$ ,
- comenzamos a usar el contador  $n^1$  partiendo de  $n^1 = 1$ ,
- $d = m$ , es decir,  $d$  comienza de “cero”,
- si  $\theta \in V$  se hace  $\eta = (0, 0)$ , en otro caso,  $\eta = (\Phi, \Phi)$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Luego se itera el siguiente procedimiento:

- comenzamos a usar el contador  $n^1$  sumando 1 en cada iteración. Cada vez que  $n^1 = n_F$  se agrega un 1 a ambas pilas y  $n^1$  vuelve a ser 1,
- la ventana  $V$  se actualiza aplicando la función  $\overrightarrow{\nu_F H_t^m}$ ,

- $d$  almacenará en cada instante, la posición de la máquina con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ ; para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_F$  y  $d$  vuelve a ser  $m$ ,
- si  $\theta \in V$  se hace  $\eta = (0, 0)$ , en otro caso,  $\eta = (\Phi, \Phi)$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

**Observación 3.3** *Notemos que si una casilla fue visitada en el pasado por la máquina a piedras, entonces en el autómata a pilas la ventana que esta activa contiene la casilla  $\theta$ .*

Si durante esta etapa de la evolución se encuentra la piedra  $g_i$ , es decir,  $\bar{\eta}_i = 1$  y  $\bar{\eta}_{-i} = 0$ , entonces se verifica si  $\theta \notin V$ , en caso que esto no se satisfaga, el autómata pasa a estado de rechazo; en caso que sí se satisfaga pasamos a la tercera etapa, la casilla en que se encontró la piedra, es válida. Luego mientras  $\bar{\eta}_{-i} = 0$  se hace lo siguiente. En la inicialización, el estado se reestructura del siguiente modo:

- La palabra  $(abcde)$  cambia a  $(flvlv)$ , activando las ventanas  $\bar{V}$  y  $\bar{U}$ , que parten con  $\bar{U} = \emptyset$  y  $\bar{V} = \{x \in B(\theta, 2t) / \exists k \in \mathbb{N}_0, x + k\nu_F \in V\}$ ; además las ventanas  $V$  y  $U$  quedan en estado de latencia. La ventana  $\bar{V}$  servirá para recuperar la información almacenada en  $V$  y las pilas y luego actualizarla de forma correcta, es decir, tener la información necesaria para que en el futuro la ventana  $V$  sea coherente con la realidad de las casillas que fueron visitadas en el pasado, y la ventana  $\bar{U}$  tiene la misma utilidad.<sup>5</sup>
- Dependiendo del estado  $q$  con el que se abordó la piedra y cuál piedra fue la abordada, el movimiento últimamente periódico será diferente; una de las diferencias podría ser el hecho de llevar su piedra en el movimiento, o no, esto quedará almacenado en la variable  $S$ , tomando el valor  $\odot$  si se va con la piedra y  $\ominus$  si no se va con la piedra. La información de cuál fue la piedra encontrada se almacena en  $\rho$ , asumiendo el valor  $i$  si la piedra encontrada fue  $g_i$ .

Si  $S = \ominus$ :

- Se resetea la pila  $\rho$  (agregándole  $Z_0$ ),
- como fue explicado en la sección 3.3.1, las variables  $((n_\tau, n_B), (\tau_B, \nu_B, d_B))$  se fijan como  $((n_\rho^q, n_{\tau, \rho}^q), (\tau_\rho^q, \nu_\rho^q, d_\rho^q))$ ,

---

<sup>5</sup>Notar que las ventanas  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  se actualizan de distinta manera;  $\bar{U}$  agrega las casillas que se visitan, mientras  $\bar{V}$  solo va actualizando según las casillas que fueron visitadas antes de encontrar la piedra.

- $d_{min}$  se actualiza como  $d_{min} = d + m$ , esta variable nos ayudará a la hora de extraer o agregar 1s a la pila  $\neg\rho$  durante el movimiento últimamente periódico que sigue de haber encontrado la piedra  $g_i$ ,
- el contador  $n^1$  comienza de 1 nuevamente,
- se comienza a usar la variable  $d$ , inicialmente como  $d = -m$ , para luego almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, si la piedra es recogida o es llevada por  $\mathbf{M}$ , entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{\neg\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \bar{V} \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{\neg\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- también se comienza a usar la variable  $d_{\bar{V}}$  donde inicialmente  $d_{\bar{V}} = m$ , que será útil cuando necesitemos volver a usar la ventana  $V$  y se comience a usar  $U$ , desactivando las ventanas  $\bar{V}$  y  $\bar{U}$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- Se resetea la pila  $\rho$  (agregándole  $Z_0$ ),
- $d_{min}$  se actualiza como  $d_{min} = d + m$ , esta variable nos ayudará a la hora de extraer o agregar 1s a la pila  $\neg\rho$  durante el movimiento últimamente periódico que sigue de haber encontrado la piedra  $g_i$ ,
- se comienza a usar la variable  $d$ , inicialmente como  $d = -m$ , para luego almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, si la piedra es recogida o es llevada por  $\mathbf{M}$ , entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{\neg\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \bar{V} \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{\neg\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- se comienza a usar la variable  $d_{\bar{V}}$  donde inicialmente  $d_{\bar{V}} = m$ , que, al igual que en el caso anterior, será útil cuando necesitemos volver a usar la ventana  $V$  y se comience a usar  $U$  desactivando las ventanas  $\bar{V}$  y  $\bar{U}$ , se actualiza como  $d_{\bar{V}} = d_{\bar{V}} + m$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

**Observación 3.4** *Hasta ahora, hemos separado los casos en que  $S = \ominus$  y  $S = \odot$ . A grandes rasgos esta separación de casos se hace pues si la máquina se va con la piedra, no es necesario el uso de la pila para saber donde está, ya que de la proposición 2.1, la distancia a la piedra esta acotada. Así, basta tener una memoria finita.*

Aún en la tercera etapa, se itera el siguiente procedimiento. Hay dos subpartes: inicialmente se usan las ventanas  $\overline{V}$  y  $\overline{U}$ , y luego de esto se usan  $V$  y  $U$ .

1. Mientras  $|d_{\overline{V}}| < 2t$  se hace lo siguiente.

Si  $S = \emptyset$ :

- Se actualiza  $d_{\overline{V}}$  como  $d_{\overline{V}} = d_{\overline{V}} + m$ ,
- se actualiza la ventana  $\overline{V}$  aplicándole la función  $\overrightarrow{\nu_F \sigma_{2t}^m}$ ,
- se actualiza la ventana  $\overline{U}$  aplicándole la función  $H_{2t}^m$ ,
- al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración:
  - Mientras  $n^1 < n_\tau$  y  $n^2 = 0$ , se usa la variable  $d$ , inicialmente como  $d = -m$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
    - $\eta_{\neg\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \overline{V} \cup \overline{U}$ , en otro caso  $\eta_{\neg\rho} = 0$ ,
    - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
  - cuando  $n^1 = n_\tau$  significa que terminó la parte transiente y comienza a contar (desde  $n^1 = 1$ ) para ahora poder verificar cada vez que se complete un período ( $n^1 = n_B$ ) y así agregar un 1 a la pila  $\rho$ , además se hace  $n^2 = B$ :
    - $d = m$ , es decir,  $d$  comienza de “cero” para almacenar en cada instante, la posición con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ . Para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y así vuelve a  $d = m$ .
    - $\eta_{\neg\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \overline{V} \cup \overline{U}$ , en otro caso  $\eta_{\neg\rho} = 0$ ,
    - $\eta_\rho = 0$ .
- el vector  $d_{min}$  se actualizará del siguiente modo:
  - $d_{min} = \text{argmín}\{|u|/d_{min} + m = u + k\nu_B, k \in \mathbb{Z}\}$  donde el número  $k$  que logra el mínimo, dictará cuántos 1s se agregan o se quitan de la pila  $\neg\rho$  en los casos  $k > 0$  y  $k < 0$  respectivamente.
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\overline{q}, (\overline{r}_1, \overline{r}_2), (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- se actualiza  $d_{\bar{V}}$ , como  $d_{\bar{V}} = d_{\bar{V}} + m$ ,
- se actualiza la ventana  $\bar{V}$  aplicándole la función  $\overrightarrow{\nu_F \sigma_{2t}^m}$ ,
- se actualiza la ventana  $\bar{U}$  aplicándole la función  $H_{2t}^m$ ,
- se usa la variable  $d$  para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ ; si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{\neg\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \bar{V} \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{\neg\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- el vector  $d_{min}$  se actualizará del siguiente modo:
 
$$d_{min} = \text{Aargmín}\{|u|/d_{min} + m = u + k\nu_B, k \in \mathbb{Z}\}$$
 donde el número  $k$  que logra el mínimo, dictará cuántos 1s se agregan o se quitan de la pila  $\neg\rho$  en los casos  $k > 0$  y  $k < 0$  respectivamente.
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

**Observación 3.5** *Notemos que en este caso sucede lo siguiente:*

- Si  $S = \odot$  y  $n^2 = 0$ , se tiene que  $d$  almacena la posición de la piedra relativa a la posición de la máquina.
- Si  $S = \odot$ ,  $n^2 = B$  y  $N$  es la suma de 1s o -1s de la pila  $\rho$ , se tiene que  $d - d_B + N\nu_B$  almacena la posición de la máquina relativa a la posición de la piedra.
- Si  $S = \odot$ , se tiene que  $d$  almacena la posición de la piedra relativa a la posición de la máquina.
- La posición en la que se encuentra la máquina con respecto al origen está almacenada en  $T_F$ ,  $d_{min}$ , y la pila  $\neg\rho$  y es específicamente  $T_F + d_{min} + N_{\neg\rho}\nu_F$ , donde  $N_{\neg\rho}$  es la suma de los elementos que hay en la pila  $\neg\rho$ .
- Además si una casilla fue visitada en el pasado por la máquina a piedras, entonces en el autómata a pilas la ventana que esta activa contiene la casilla  $\theta$ .

**Observación 3.6** Si en esta etapa de la evolución, la pila  $\neg\rho$  se vacía, entonces la máquina está próxima al lugar de partida; es por esto que prontamente se deberá activar la información almacenada en  $V_0$  de forma coherente con la posición en la que se encuentre la máquina al momento del vaciamiento de la pila. Para guardar esta coherencia se usarán los vectores  $d_{min}$  y  $T_F$ , los que guardan la posición de la máquina relativa al comienzo del movimiento; la forma de actualizar las variables en esta situación es similar a lo explicado antes. Para no romper la continuidad de las etapas que están siendo explicadas, este caso se explica al final de la sección bajo el título **Caso especial**.

2. Cuando  $|d_{\bar{V}}| = 2t$ .

Si  $S = \emptyset$ :

- la palabra  $(abcde)$  cambia a  $(fvfvf)$ ,
- $V = \bar{V} \cap B(0, t)$ . Con esta actualización de  $V$ , se asegura que el trayecto periódico que fue usado para encontrar a  $g_i$ , atraviesa la ventana  $V$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}$ ,
- se actualiza  $V$  como  $V = \overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}(V)$ ,
- $U = \bar{U} \cap B(0, t)$ . Con esta actualización de  $U$ , se asegura que el trayecto periódico usado luego de encontrar a  $g_i$ , atraviesa una parte de la ventana  $U$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overrightarrow{\nu_B H_r^m}$ ,
- se actualiza  $U$  como  $U = \overrightarrow{\nu_B H_r^m}(U)$ ,
- al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración. Cada vez que  $n^1 = n_B$  agrega un 1 a la pila  $\rho^6$ ,
- $d$  almacenará en cada instante, la posición de la máquina con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ ; para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y  $d$  vuelve a ser  $m$ , además se hace:
  - $\eta_{\neg\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V \cup U$ , en otro caso  $\eta_{\neg\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 0$ .
- el vector  $d_{min}$  se actualizará del siguiente modo:
$$d_{min} = \text{argmín}\{|u|/d_{min} + m = u + k\nu_B, k \in \mathbb{Z}\}$$
donde el número  $k$  que logra el mínimo dictará cuántos 1s se agregan o se quitan de la pila  $\neg\rho$  en los casos  $k > 0$  y  $k < 0$  respectivamente.
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,

---

<sup>6</sup>notar que en esta parte del movimiento la máquina ya se encuentra en la parte periódica, y por esto, solo se verifica la condición  $n^1 = n_B$

- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- la palabra  $(abcde)$  cambia a  $(fvfvf)$ ,
- $V = \bar{V} \cap B(0, t)$ ; con esto se asegura que el trayecto periódico que fue usado para encontrar a  $g_i$ , atraviesa la ventana  $V$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overrightarrow{\nu_F \sigma_t^m}$ ,
- se actualiza  $V$  como  $V = \overrightarrow{\nu_F \sigma_t^m}(V)$ ,
- $U = \bar{U} \cap B(0, t)$ , con esto se asegura que el trayecto periódico usado luego de encontrar a  $g_i$ , atraviesa la parte trasera de la ventana  $U$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overrightarrow{\nu_B H_t^m}$ ,
- se actualiza  $U$  como  $U = \overrightarrow{\nu_B H_t^m}(U)$ ,
- se usa la variable  $d$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1 \Leftrightarrow d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- el vector  $d_{min}$  se actualizará del siguiente modo:
$$d_{min} = \text{Argmin}\{|u|/d_{min} + m = u + k\nu_B, k \in \mathbb{Z}\}$$
donde el número  $k$  que logra el mínimo dictará cuántos 1s se agregan o se quitan de la pila  $\neg\rho$  en los casos  $k > 0$  y  $k < 0$  respectivamente.
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

**Observación 3.7** *Notemos que en este caso sucede lo siguiente:*

- Si  $S = \otimes$  y  $N$  es la suma de 1s o -1s de la pila  $\rho$ , se tiene que  $d - d_B + N\nu_B$  almacena la posición de la máquina relativa a la posición de la piedra.
- Si  $S = \odot$ , se tiene que  $d$  almacena la posición de la piedra relativa a la posición de la máquina.
- La posición en la que se encuentra la máquina con respecto al origen está almacenada en  $T_F$ ,  $d_{min}$ , y la pila  $\neg\rho$  y es específicamente  $T_F + d_{min} + N_{\neg\rho}\nu_F$ , donde  $N_{\neg\rho}$  es la suma de los elementos que hay en la pila  $\neg\rho$ .
- Además si una casilla fue visitada en el pasado por la máquina a piedras, entonces en el autómata a pilas la ventana que esta activa contiene la casilla  $\theta$ .

Si durante esta etapa se vacía la pila  $\rho$ , entonces debemos activar la información almacenada en  $V_0$  de la siguiente manera:

Si  $d_{min} + T_F + m > 3t$ , entonces se actualiza  $d_{min}$  como  $d_{min} = d_{min} + m$ , además:

Si  $S = \emptyset$ :

- se actualiza  $V$  como  $V = \overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}(V)$ ,
- se actualiza  $U$  como  $U = \overrightarrow{\nu_B H_r^m}(U)$ ,
- al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración. Cada vez que  $n^1 = n_B$  agrega un 1 a la pila  $\rho$ ,
- $d$  almacenará en cada instante, la posición de la máquina con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ ; para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y  $d$  vuelve a ser  $m$ , además se hace:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 0$ .
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- se actualiza  $V$  como  $V = \overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}(V)$ ,
- se actualiza  $U$  como  $U = \overrightarrow{\nu_B H_t^m}(U)$ ,
- se usa la variable  $d$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1 \Leftrightarrow d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $d_{min} + T_F + m \leq 3t$ , entonces se encaja el movimiento con  $V_0$ , es decir,  $V_0 = (V \cup (V_0 - d_{min})) \cap B(\theta, 4t)$  y de aquí en adelante:

- se actualiza la ventana  $U$  aplicando la función  $\overrightarrow{\nu_B H_t^m}$ ,
- se actualiza la ventana  $V_0$  aplicando la función  $\sigma_{4t}^m$ ,
- Si  $S = \emptyset$ :
  - al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración. Cada vez que  $n^1 = n_B$  agrega un 1 a la pila  $\rho^7$ ,

---

<sup>7</sup>notar que en esta parte del movimiento la máquina ya se encuentra en la parte periódica, y por esto, solo se verifica la condición  $n^1 = n_B$

- $d$  almacenará en cada instante, la posición de la máquina con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ ; para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y  $d$  vuelve a ser  $m$ , además se hace:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0 \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_{\rho} = 0$ .
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- se usa la variable  $d$  para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ ; si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0 \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_{\rho} = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_{\rho} = 0$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Por otra parte, independientemente del momento en el que se encuentre la segunda piedra, el autómata debe entrar en un comportamiento diferente del explicado hasta aquí, pues ya conoce la posición de las piedras, e independientemente de cuales han sido las celdas visitadas hasta ahora, la aparición de piedras en lugares distintos a los registrados corresponde a un error, en consecuencia la palabra leída por el *PDA* debe ser rechazada.

Por las observaciones 3.2, 3.5 y 3.7 para cada caso particular el protocolo descrito hasta aquí nos lleva a concluir el siguiente resultado:

**Lema 3.3** Dada  $u \in L_M$  tal que en  $u$  aparecen ambas piedras y la segunda que aparece, lo hace justo al terminar de leer  $u$ , entonces al terminar de leer  $u$  se satisface:

Cuando  $d \neq \star$ :

- Si  $S = \odot$  y  $n^2 = 0$ ,  $d$  almacena la posición de la piedra  $g_\rho$  relativa a la posición de la máquina,
- Si  $S = \ominus$ ,  $n^2 = B$  y  $N$  es la suma de 1s o -1s de la pila  $\rho$ ,  $d_B - d - N\nu_B$  almacena la posición de la máquina relativa a la posición de la piedra  $g_\rho$ ,
- Si  $S = \odot$ ,  $d$  almacena la posición de la piedra  $g_\rho$  relativa a la posición de la máquina,

y en todos los casos,  $d = \star$  representa que  $g_\rho$  es llevada por la máquina.

### Caso especial:

Cuando  $|d_{\bar{V}}| < 2t$ .

Si  $d_{min} + T_F + m > 3t$ , entonces se actualiza  $d_{min}$  como  $d_{min} = d_{min} + m$  y las ventanas  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  serán actualizadas aplicando las funciones  $H_{2t}^m$  y  $\overline{\nu_F \sigma_{2t}^m}$ , además:

Si  $S = \odot$ :

- Se actualiza  $d_{\bar{V}}$  como  $d_{\bar{V}} = d_{\bar{V}} + m$ ,
- al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración:
  - Mientras  $n^1 < n_\tau$  y  $n^2 = 0$ , se usa la variable  $d$ , inicialmente como  $d = -m$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
    - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \bar{V} \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
    - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
  - cuando  $n^1 = n_\tau$  significa que terminó la parte transiente y comienza a contar (desde  $n^1 = 1$ ) para ahora poder verificar cada vez que se complete un período ( $n^1 = n_B$ ) y así agregar un 1 a la pila  $\rho$ , además se hace  $n^2 = B$ :
    - $d = m$ , es decir,  $d$  comienza de “cero” para almacenar en cada instante, la posición con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ . Para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y así vuelve a  $d = m$ .

- $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \bar{V} \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
- $\eta_{\rho} = 0$ .
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- se actualiza  $d_{\bar{V}}$ , como  $d_{\bar{V}} = d_{\bar{V}} + m$ ,
- se usa la variable  $d$  para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ ; si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin \bar{V} \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_{\rho} = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_{\rho} = 0$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $d_{min} + T_F + m \leq 3t$ , entonces se encaja el movimiento con  $V_0$ , es decir,  $V_0 = (\bar{V} \cup (V_0 - d_{min})) \cap B(\theta, 4t)$  y de aquí en adelante:

- se actualiza la ventana  $\bar{U}$  aplicando la función  $H_{2t}^m$ ,
- se actualiza la ventana  $V_0$  aplicando la función  $\sigma_{4t}^m$ ,
- Si  $S = \odot$ :
  - Se actualiza  $d_{\bar{V}}$  como  $d_{\bar{V}} = d_{\bar{V}} + m$ ,
  - al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración:
    - Mientras  $n^1 < n_{\tau}$  y  $n^2 = 0$ , se usa la variable  $d$ , inicialmente como  $d = -m$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
      - ◊  $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0 \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
      - ◊  $\eta_{\rho} = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_{\rho} = 0$ ,
    - cuando  $n^1 = n_{\tau}$  significa que terminó la parte transiente y comienza a contar (desde  $n^1 = 1$ ) para ahora poder verificar cada vez que se complete un período ( $n^1 = n_B$ ) y así agregar un 1 a la pila  $\rho$ , además se hace  $n^2 = B$ :

$d = m$ , es decir,  $d$  comienza de “cero” para almacenar en cada instante, la posición con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ . Para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y así vuelve a  $d = m$ .

- ◇  $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0 \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
- ◇  $\eta_\rho = 0$ .

- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- se actualiza  $d_{\bar{V}}$ , como  $d_{\bar{V}} = d_{\bar{V}} + m$ ,
- se usa la variable  $d$  para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ ; si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0 \cup \bar{U}$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Cuando  $|d_{\bar{V}}| = 2t$ .

Si  $d_{min} + T_F + m > 3t$ , entonces se actualiza  $d_{min}$  como  $d_{min} = d_{min} + m$ , además:

Si  $S = \odot$ :

- la palabra  $(abcde)$  cambia a  $(fvfvf)$ ,
- $V = \bar{V} \cap B(0, t)$ . Con esta actualización de  $V$ , se asegura que el trayecto periódico que fue usado para encontrar a  $g_i$ , atraviesa la ventana  $V$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}$ ,
- se actualiza  $V$  como  $V = \overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}(V)$ ,
- $U = \bar{U} \cap B(0, t)$ . Con esta actualización de  $U$ , se asegura que el trayecto periódico usado luego de encontrar a  $g_i$ , atraviesa una parte de la ventana  $U$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overrightarrow{\nu_B H_r^m}$ ,
- se actualiza  $U$  como  $U = \overrightarrow{\nu_B H_r^m}(U)$ ,
- al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración. Cada vez que  $n^1 = n_B$  agrega un 1 a la pila  $\rho^8$ ,

---

<sup>8</sup>notar que en esta parte del movimiento la máquina ya se encuentra en la parte periódica, y por esto, solo se verifica la condición  $n^1 = n_B$

- $d$  almacenará en cada instante, la posición de la máquina con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d+m$ ; para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y  $d$  vuelve a ser  $m$ , además se hace:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_{\rho} = 0$ .
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- la palabra  $(abcde)$  cambia a  $(fvfvf)$ ,
- $V = \bar{V} \cap B(0, t)$ ; con esto se asegura que el trayecto periódico que fue usado para encontrar a  $g_i$ , atraviesa la ventana  $V$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}$ ,
- se actualiza  $V$  como  $V = \overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}(V)$ ,
- $U = \bar{U} \cap B(0, t)$ , con esto se asegura que el trayecto periódico usado luego de encontrar a  $g_i$ , atraviesa la parte trasera de la ventana  $U$  y con esto lo correcto será actualizar esta ventana con la función  $\overrightarrow{\nu_B H_t^m}$ ,
- se actualiza  $U$  como  $U = \overrightarrow{\nu_B H_t^m}(U)$ ,
- se usa la variable  $d$ , para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ , si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_{\rho} = 1 \Leftrightarrow d = \theta$ , en otro caso  $\eta_{\rho} = 0$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $d_{min} + T_F + m \leq 3t$ , entonces, si aún no se activan las ventanas  $U$  y  $V$ , se hace igual que antes:

- la palabra  $(abcde)$  cambia a  $(fvfvf)$ ,
- $V = \bar{V} \cap B(0, t)$ ,
- $U = \bar{U} \cap B(0, t)$ ,

luego se encaja el movimiento con  $V_0$ , es decir,  $V_0 = (V \cup (V_0 - d_{min})) \cap B(\theta, 4t)$  y de aquí en adelante:

- se actualiza la ventana  $U$  aplicando la función  $\overrightarrow{\nu_B H_t^m}$ ,
- se actualiza la ventana  $V_0$  aplicando la función  $\sigma_{4t}^m$ ,
- Si  $S = \emptyset$ :
  - se actualiza  $V$  como  $V = \overleftarrow{\nu_F \sigma_t^m}(V)$ ,
  - se actualiza  $U$  como  $U = \overrightarrow{\nu_B H_r^m}(U)$ ,
  - al contador  $n^1$  se le suma 1 en cada iteración. Cada vez que  $n^1 = n_B$  agrega un 1 a la pila  $\rho$ ,
  - $d$  almacenará en cada instante, la posición de la máquina con respecto a la última casilla visitada en la última repetición del período, es decir, se actualiza como  $d = d + m$ ; para verificar los períodos completados lo hace con la condición  $n^1 = n_B$  y  $d$  vuelve a ser  $m$ , además se hace:
    - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
    - $\eta_\rho = 0$ .
  - $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
  - las demás variables se mantienen sin cambios.

Si  $S = \odot$ :

- se usa la variable  $d$  para almacenar la posición de la piedra  $g_i$  con respecto a la posición de la máquina, es decir, se actualiza como  $d = d - m$ ; si la piedra es recogida o es llevada por la máquina, entonces se asigna  $d = \star$ . En función de  $d$  se actualiza  $\eta$  de la siguiente forma:
  - $\eta_{-\rho} = \Phi$ , si  $\theta \notin V_0 \cup U$ , en otro caso  $\eta_{-\rho} = 0$ ,
  - $\eta_\rho = 1$  si  $d = \theta$ , en otro caso  $\eta_\rho = 0$ ,
- $(q, r)$  se actualiza como la imagen por la función  $\delta$  de  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2))$ ,
- las demás variables se mantienen sin cambios.

### Casos particulares:

Recordemos que el protocolo descrito en esta sección pre-supone un estado inicial de la máquina a piedras de la forma  $(q_0, \theta, \theta)$ , aquí damos una breve descripción de los demás casos.

- Si para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $r_i + \eta_i = 1$ , entonces, desde un comienzo el autómata puede guardar la información relativa a las piedras, en consecuencia, no será necesario el uso de ventanas. En este caso el autómata comienza en un estado de  $Q_1$ , coherente con la transición de argumento  $(q_0, r, \eta)$ .

- Si existe  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $r_i + \eta_i = 1$  y  $r_{-i} + \eta_{-i} = 0$ , entonces, el autómata solamente debe almacenar el movimiento últimamente periódico definido por el estado inicial  $q_0$  y la información de  $g_i$  hasta encontrar a  $g_{-i}$ , esto lo hará como en la **etapa 1**, partiendo con un estado  $P_1$ , coherente con la transición de argumento  $(q_0, r, \eta)$ , esto es:

- Si  $r_i = 1$  y  $\eta_i = 0$ , el estado  $(q_0, r, \eta)$  define el movimiento últimamente periódico que seguirá la máquina sacando a la piedra  $g_{-i}$  del espacio. en consecuencia, también define si será usando indefinidamente la piedra o no, definamos  $S^i$  como  $\odot$  si se va usando la piedra y  $\oslash$  en otro caso. Además, define el vector  $\nu^i$  director del movimiento periódico y su tamaño  $n_\pi^i$ , el vector  $\tau^i$  director de la parte transiente y su tamaño  $n_\tau^i$ , y la posición en la que comienza el período respecto a la posición de la piedra  $d^i$ ; con esto podemos escribir el estado inicial:

$$P_1 = [(q^*, r^*, (\Phi, \Phi)), (v f f f f), (H_{4t}^m(\emptyset), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset), (0, \theta, \theta), (0, 0, m), \theta, ((n_\tau^i, n_\pi^i), (\tau^i, \nu^i, d^i)), \theta, i, S^i].$$

- Si  $r_i = 0$  y  $\eta_i = 1$ , el estado  $(q_0, r, \eta)$  define el movimiento últimamente periódico que seguirá la máquina sacando a la piedra  $g_{-i}$  del espacio. en consecuencia, también define si será usando indefinidamente la piedra o no, definamos  $S_i$  como  $\odot$  si se va usando la piedra y  $\oslash$  en otro caso. Además, define el vector  $\nu^i$  director del movimiento periódico y su tamaño  $n_\pi^i$ , el vector  $\tau^i$  director de la parte transiente y su tamaño  $n_\tau^i$ , y la posición en la que comienza el período respecto a la posición de la piedra  $d^i$ ; con esto podemos escribir el estado inicial:

$$P_1 = [(q^*, r^*, (\Phi, \Phi)), (v f f f f), (H_{4t}^m(\emptyset), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset), (0, \theta, \theta), (0, 0, m), \theta, ((n_\tau^i, n_\pi^i), (\tau^i, \nu^i, d^i)), \theta, i, S_i].$$

### 3.3.5. Descripción de los estados de $Q_1$ (4ª etapa)

Una vez que la máquina encuentre la piedra  $g_{-\rho}$ , el autómata debe verificar si es que el origen es o no una casilla perteneciente a alguna de las ventanas activas de la etapa en la que se encontró. En caso positivo, la piedra fue encontrada en un lugar no válido, en consecuencia el autómata debe pasar al estado de rechazo; en otro caso, la información con respecto a la piedra  $g_\rho$  está almacenada en la memoria del *PDA* (en las variables  $d_B$ ,  $d$  y en la pila  $\rho$ ); es por esto que desde este momento ya no será necesario continuar con el uso de las ventanas, pues la posición de cada piedra ya está determinada. En la pila  $\neg\rho$  puede o no haber información, cualquiera sea el caso, esa información ya no es relevante para la transición, en consecuencia, la borraremos; ahora el estado debe ser reformulado.

$$Q_1 = \{[q, d_1, d_2, \sigma_1, \sigma_2] / q \in Q, \sigma_1, \sigma_2 \in (B(\theta, |Q|^3) \cup \{0, \infty\}), d_1, d_2 \in (B(0, 2(|Q| + |Q|^3)) \cup \{\star, \infty\})\}$$

- $q$  representa el estado en que debería estar la máquina luego del estado  $(\bar{q}, \bar{r}, \bar{\eta})$ ,
- $d_i$  es la parte de la distancia de  $g_i$  relativa a la posición de la máquina que no está almacenada en la pila  $i$ ,
- $\sigma_i$  es el vector director del período en el movimiento últimamente periódico seguido de dejar a  $g_i$  en el plano.

Como veremos más adelante, el radio  $2(|Q| + |Q|^3)$  queda justificado por el lema 3.2. El estado  $[(q, r), (abcde), (V_0, V, \bar{V}, U, \bar{U}), (n_F, \nu_F, T_F), (n^1, n^2, d), d_{\bar{V}}, ((n_\tau, n_B), (\tau_B, \nu_B, d_B)), d_{min}, \rho, S]$  con el que se encontró la segunda piedra, se transforma en el estado inicial para esta nueva etapa como sigue:

Recordemos que:

- $\delta(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2)) = (q^*, r_1^*, r_2^*),$
- $\lambda(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2)) = (\eta_1^*, \eta_2^*, m),$

donde  $m \in \{-\hat{i}, \hat{i}, \hat{j}, -\hat{j}\}$ .

El estado inicial es  $[q, (d_1, d_2), (\sigma_1, \sigma_2)]$  como se construye a continuación dependiendo de los casos:

- Si  $r_\rho = 1$ , la máquina encontró a  $g_{-\rho}$  con  $g_\rho$  a cuestras y en estado interno  $q$ , entonces el estado inicial se construye del siguiente modo:
  - $(\sigma_1, \sigma_2) = ((\rho\nu_{-\rho})_1^q, (\rho\nu_{-\rho})_2^q),$
  - si  $r_{-\rho}^* \neq 1$ , entonces:  $d_{-\rho} = -m$  y  $d_\rho = \star,$
  - si  $r_{-\rho}^* = 1$ , entonces:  $d_{-\rho} = \star,$ 
    - si  $r_\rho^* = 1$ , entonces:  $d_\rho = \star,$
    - si  $r_\rho^* = 0$ , entonces:  $d_\rho = -m,$
  - $q$  será el estado que determina la función  $\delta$  en el momento actual, es decir,  $q = q^*.$

- Si  $r_\rho \neq 1$ :
  - Para cada  $k \in \{1, 2\}$ , si  $r_k^* = 1$ , entonces  $d_k = \star$ ,
  - si  $r_k^* \neq 1$ , dependiendo de los valores de las variables,  $d_B$ ,  $d$ ,  $\rho$ ,  $n^2$  y  $S$  sabremos qué hay que poner en  $d_k$  y  $\sigma_k$ ,
    - si  $S = \circlearrowleft$  y  $n^2 = 0$ , significa que la máquina dejó la piedra  $g_\rho$  atrás y la distancia de la piedra  $g_\rho$  relativa a la máquina está almacenada en la pila  $\rho$  y las variables,  $d_B$  y  $d$ . Entonces,  $d_\rho = d_B - d - m$ ,  $d_{-\rho} = -m$ ,  $\sigma_\rho = \nu_B$ ,  $\sigma_{-\rho} = \nu_{-\rho}^q$ , pues se encontró a  $g_{-\rho}$  en estado interno  $q$ ,
    - si  $S = \circlearrowright$  o ( $S = \circlearrowleft$  y  $n^2 = B$ ), significa que la máquina viene con un movimiento que involucra la piedra  $g_\rho$ , en consecuencia la pila no guarda información con respecto a la posición de la piedra y en  $d$  está exactamente la posición de la piedra  $g_\rho$  relativa a la de la máquina. Entonces,  $d_\rho = d - m$ ,  $d_{-\rho} = -m$ ,  $\sigma_\rho = \theta$ ,  $\sigma_{-\rho} = \nu_{-\rho}^q$ , pues se encontró a  $g_{-\rho}$  en estado interno  $q$ ,
  - $q$  será el estado que determina la función  $\delta$  en el momento actual, es decir,  $q = q^*$ .

**Observación 3.8** *Por el lema 3.3, el estado  $[q, (d_1, d_2), (\sigma_1, \sigma_2)]$  construido aquí es tal que:*

- para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $d_i \neq \infty$ ,
- si  $N$  es la suma de 1s o -1s de la pila  $\rho$ ,  $d_\rho - N\nu_B$  es la posición relativa de  $g_\rho$  con respecto a la máquina,
- para cada  $i \in \{1, 2\}$ ,  $d_i = \star$  significa que  $g_\star$  es acarreada por la máquina,

### 3.3.6. Transiciones para los estados de $Q_1$ (4ª etapa)

En esta parte del autómata, es importante la posición relativa de las piedras con respecto a la máquina, es decir, las variables  $(d_1, d_2)$  y los elementos de las pilas; esto se verá traducido en un  $((r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$ , que tal como en la primera parte, nos servirán a la hora de chequear la coherencia, la relación que deberán satisfacer es la siguiente:

- $r_i = 1 \Leftrightarrow (d_i = \star \text{ y } X_i = Z_0)$
- $\eta_i = 1 \Leftrightarrow (d_i = 0 \text{ y } X_i = Z_0)$

Para escribir las transiciones, digamos lo siguiente, si el autómata se encuentra en estado interno  $[q, d_1, d_2, \sigma_1, \sigma_2]$  leyendo el caracter  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2))$ , con las pilas como  $X_1$  y  $X_2$ , entonces, dado que los valores  $((r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$ , son calculados en función de  $((d_1, d_2), (X_1, X_2))$  como se explicó más arriba, se hace lo siguiente:

- si  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)) \neq (q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$ , entonces no hay coherencia y se pasa a estado de rechazo.
- si  $(\bar{q}, (\bar{r}_1, \bar{r}_2), (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)) = (q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$ , entonces si hay coherencia, y se pasa a estado  $[q', d'_1, d'_2, \sigma'_1, \sigma'_2]$ , y las pilas cambian a  $(X'_1, X'_2)$ . Cada uno de estos elementos será explicado en lo que sigue.

Definiremos el segundo caso, es decir, cuando no se entra en un estado de rechazo. Primeramente, definamos un par de funciones:

$$\ell : \mathbb{Z}^2 \cup \{\star, \infty\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\ell(d) = \begin{cases} |d| & \text{si } d \notin \{\star, \infty\}, \\ \infty & \text{si } d = \infty, \\ -1 & \text{si } d = \star. \end{cases}$$

$$\eta : \mathbb{Z}^2 \cup \{\star, \infty\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\eta(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell(d) = 0, \\ 0 & \text{si } \ell(d) \neq 0. \end{cases}$$

Si queremos saber qué es lo que debe hacer  $\mathbf{PD}_2$ , primero debemos preguntarnos qué es lo que haría  $\mathbf{M}$  con la información almacenada en el estado y pilas de  $\mathbf{PD}_2$ , lo que traducido a los términos de la máquina a piedras es  $(q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$ , nuestro interés es saber cuales son los valores de  $q', d'_1, d'_2, \sigma'_1, \sigma'_2, X'_1$  y  $X'_2$ .

Primero definamos  $q' = q^*$ , luego, para definir  $d'_i$  debemos ponernos en algunos casos:

$$d'_i = \begin{cases} \star & \text{si } \ell(d_i) = 0 \text{ y } r_i^* = 1, \\ -m & \text{si } \ell(d_i) = 0 \text{ y } r_i^* = 0, \\ \star & \text{si } \ell(d_i) = -1 \text{ y } r_i^* = 1, \\ -m & \text{si } \ell(d_i) = -1 \text{ y } r_i^* = 0, \\ \text{argmín}\{|u|/ & \text{si } \ell(d_i) \neq 0, \ell(d_i - m) \neq 0 \\ u = d_i - m + n\sigma_i, n \in \mathbb{Z}\} & \text{y } \text{argmín}\{|u|/u = d_i - m + n\sigma_i, \\ & n \in \mathbb{Z}\} \leq 2(|Q| + |Q|^3), \\ \infty & \text{si } \text{Argmin}\{|u|/u = d_i - m + n\sigma_i, \\ & n \in \mathbb{Z}\} > 2(|Q| + |Q|^3) \text{ o } d_i = \infty, \\ 0 & \text{si } \ell(d_i) \neq 0 \text{ y } \ell(d_i - m) = 0. \end{cases}$$

Agreguemos que cuando  $\sigma_i = 0$ , seguirá siendo 0 para siempre y para efecto de cálculo se usa  $\sigma_i = \theta$ , y cuando  $\sigma_i = \infty$ , seguirá siendo  $\infty$  para siempre y significa que la piedra  $g_i$  no volverá a ser visitada, para efectos de cálculo también se usa  $\sigma_i = \theta$ .

La información en las pilas, se actualiza de la siguiente forma: de la función *Argmin* se desprende  $n_i$ , de modo que  $n_i\sigma_i = \text{Argmin}\{|d|/d = d_i - m + n\sigma_i, n \in \mathbb{Z}\} - (d_i - m)$ , esto siempre y cuando  $d'_i \notin \{\star, \infty\}$ . La dinámica de la pila dependerá del signo de  $n_i$ , como se detalla a continuación.

- $X_i = \overbrace{-1 - 1 - 1 \cdots - 1}^{n_i\text{-veces}} X'_i, \dots$  si  $\text{signo}(n_i) = +$  y  $X_i = -1$ ,
- $X'_i = \overbrace{111 \cdots 1}^{n_i\text{-veces}} X_i, \dots$  si  $\text{signo}(n_i) = +$  y  $X_i \neq -1$ ,
- $X_i = \overbrace{111 \cdots 1}^{n_i\text{-veces}} X'_i, \dots$  si  $\text{signo}(n_i) = -$  y  $X_i = 1$ ,
- $X'_i = \overbrace{-1 - 1 - 1 \cdots - 1}^{n_i\text{-veces}} X_i, \dots$  si  $\text{signo}(n_i) = -$  y  $X_i \neq 1$ ,
- $\sigma'_i = \sigma_i, \dots$  si  $d'_i \neq 0$ ,
- $\sigma'_i = \nu_i^{\bar{q}}, \dots$  si  $d'_i = 0, X'_i = Z_0, d'_{-i} \neq \star$  y  $\sigma_i \notin \{0, \infty\}$ ,
- si  $d'_i = 0, X'_i = Z_0, d'_{-i} = \star$  y  $\sigma_i \notin \{0, \infty\}, \dots$  entonces  $(\sigma'_1, \sigma'_2) = (({}^{-i}\nu_i)_{\bar{q}}^1, ({}^{-i}\nu_i)_{\bar{q}}^2)$ .
- si  $d'_i = 0, X'_i \neq Z_0, \dots$  entonces  $\sigma'_i = \sigma_i$

**Teorema 3.1** *Dada  $M$  una máquina con dos piedras,  $n \in \mathbb{N}$  y el autómata  $\mathbf{PD}_2$  definido más arriba. Si  $w = (q^i, (r_1^i, r_2^i), (\eta_1^i, \eta_2^i))_{i=1}^n$  es tal que existe  $u \in \Sigma^*$  satisfaciendo que:*

- *justo al terminar de leer  $u$ , las dos piedras han aparecido en  $u$ ,*
- $uw \in L_M$ ,

*entonces la secuencia de estados de  $Q_1$  que genera la dinámica de  $\mathbf{PD}_2$  al leer  $w$ :  $((q^i, d_1^i, d_2^i, \sigma_1^i, \sigma_2^i), (X_1^i, X_2^i))_{i=1}^{n+1}$ , satisface los siguientes puntos:*

- $\forall (j, i) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, \dots, n\}, d_j^i \neq \theta \Rightarrow \eta(d_j^i) = \eta_j^i = 0$ ,
- $\forall (j, i) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, \dots, n\}, d_j^i = \theta \Rightarrow (\eta_j^i = 1 \Leftrightarrow X_j^i = Z_0)$ ,
- $\forall (j, i) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, \dots, n\}, d_j^i = \star \Rightarrow (X_j^i = Z_0 \wedge r_j^i = 1)$ .

## Demostración.

Dadas las hipótesis del teorema, para probar estos tres puntos, definamos  $N_j^i$  como la suma de todos los 1s o -1s que tiene la pila  $j$  en el instante  $i$ , y  $D_j^i = d_j^i - N_j^i \sigma_j^i$ . Probaremos por inducción en  $i$ , que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  se satisfacen los siguientes puntos <sup>9</sup>:

- Si  $d_j^i \notin \{\star, \infty\}$ , entonces  $D_j^i$  es la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $i$ ,
- si  $d_j^i = \star$ , entonces  $g_j$  es llevada por  $\mathbf{M}$ ,
- si  $d_j^i = \infty$ , entonces  $g_j$  fue dejada atrás por  $\mathbf{M}$  y no volverá a ser visitada.

Probaremos  $I$  pues de  $I$  se puede concluir el teorema, en efecto:

Supongamos que dado  $l \leq n$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  se satisface  $I$ , entonces  $\forall j \in \{1, 2\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, l\}$ :

- Si  $d_j^i \neq \theta$  tenemos 3 casos:
  - Si  $d_j^i \notin \{\theta, \star, \infty\}$ , se tendrá que  $D_j^i = d_j^i - N_j^i \sigma_j^i \neq \theta$ , pues  $d_j^i$  no puede ser múltiplo de  $\sigma_j^i$  por la forma de calcularlo, es decir,  $\mathbf{M}$  se encuentra a una distancia no nula de  $g_j$  en el instante  $i$  y en consecuencia:
 
$$\eta_j^i = 0 = \eta(d_j^i).$$
  - Si  $d_j^i = \infty$ ,  $g_j$  fue dejada atrás por  $\mathbf{M}$  y no volverá a ser visitada. Luego,
 
$$\eta_j^i = 0 = \eta(\infty) = \eta(d_j^i).$$
  - Si  $d_j^i = \star$ , significa que la piedra es acarreada por la máquina y en consecuencia  $\eta_j^i = 0 = \eta(\star) = \eta(d_j^i)$ .
- Si  $d_j^i = \theta$ , se tendrá que  $D_j^i = -N_j^i \sigma_j^i$ , y como  $D_j^i$  es la posición de  $g_j$  relativa a la máquina se cumple:
 
$$\eta_j^i = 1 \Leftrightarrow D_j^i = 0 \Leftrightarrow N_j^i = 0 \Leftrightarrow X_j^i = Z_0.$$
- Si  $d_j^i = \star$ , significa que la piedra es acarreada por la máquina y en consecuencia  $r_j^i = 1$ . Además, antes de haber sido recogida tuvo que pasar por encima de ella, por lo que la pila está vacía, es decir,  $X_j^i = Z_0$ .

---

<sup>9</sup>A este conjunto de proposiciones le llamamos afirmación  $I$

**Base:**

Si  $i = 1$ , se está leyendo el caracter:  $w_1 = (q, (r_1, r_2), (\eta_1, \eta_2))$ . La secuencia de estados es,  $\{(X_1^1, X_2^1, [q^1, d_1^1, d_2^1, \sigma_1^1, \sigma_2^1]), (X_1^2, X_2^2, [q^2, d_1^2, d_2^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2])\}$ , y por la construcción del estado inicial, de la observación 3.8, una vez encontradas las dos piedras se cumple que:

- $d_j^1 \notin \{\star, \infty\}$ , entonces  $D_j^1$  representa la distancia relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $i$ ,
- si  $d_j^1 = \star$ , entonces  $g_j$  es llevada por  $\mathbf{M}$ ,
- $d_j^1 \neq \infty$  en la iteración.

**Hipótesis:**

Se cumple que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, j \in \{1, 2\}$ :

- Si  $d_j^i \notin \{\star, \infty\}$ , entonces  $D_j^i$  representa la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $i$ ,
- si  $d_j^i = \star$ , entonces  $g_j$  es llevada por  $\mathbf{M}$ ,
- si  $d_j^i = \infty$ , entonces el estado representa que  $g_j$  fue dejada atrás por  $\mathbf{M}$  y no volverá a ser visitada.

Aclaremos que como parte de la hipótesis de inducción, también podemos decir que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, j \in \{1, 2\}$  se satisface  $I$

**Tesis:**

Se cumple que  $\forall j \in \{1, 2\}$ :

- Si  $d_j^{k+1} \notin \{\star, \infty\}$ , entonces  $D_j^{k+1}$  representa la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $i$ ,
- si  $d_j^{k+1} = \star$ , entonces  $g_j$  es llevada por  $\mathbf{M}$ ,
- si  $d_j^{k+1} = \infty$ , entonces el estado representa que  $g_j$  fue dejada atrás por  $\mathbf{M}$  y no volverá a ser visitada.

Definamos primero  $m^{l+1} = \Pi_3(\lambda(q^l, (r_1^l, r_2^l), (\eta_1^l, \eta_2^l)))$ , donde  $\Pi_3$  representa la proyección en la tercera componente.

En efecto, sea  $j \in \{1, 2\}$ :

Si  $d_j^{k+1} \notin \{\star, \infty\}$ , entonces  $d_j^k \neq \infty$ , en efecto, si  $d_j^k = \infty$  entonces  $d_j^{k+1} = \infty \rightarrow \leftarrow$ ; a continuación se analiza cada situación:

- Supongamos que  $N_j^k \neq 0$ , notar que por **H.I.**  $d_j^k \neq \star$ , por otra parte, al hacer la iteración correspondiente, se calcularán  $d_j^{k+1}$  y  $n_j^{k+1}$  mediante la función *Argmin*, satisfaciendo que:
  - $d_j^{k+1} = \text{Argmin}\{|d|/d = d_j^k - m^{k+1} + n\sigma_j^{k+1}, n \in \mathbb{Z}\}$ ,
  - $n_j^{k+1}$  es tal que  $d_j^k - m^{k+1} = d_j^{k+1} - n_j^{k+1}\sigma_j^{k+1}$ .

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 D_j^{k+1} &= d_j^{k+1} - N_j^{k+1}\sigma_j^{k+1} \\
 &= d_j^{k+1} - n_j^{k+1}\sigma_j^{k+1} - N_j^k\sigma_j^{k+1} \\
 &= d_j^{k+1} - n_j^{k+1}\sigma_j^{k+1} - N_j^k\sigma_j^k \dots \dots \dots (1) \\
 &= d_j^k - N_j^k\sigma_j^k - m^{k+1} \\
 &= D_j^k - m^{k+1}
 \end{aligned}$$

La igualdad (1) es verdadera pues, como  $N_j^k \neq 0$  entonces  $X_j^k \neq Z_0$ , en consecuencia  $\sigma_j^k = \sigma_j^{k+1}$ . Por la hipótesis de inducción la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $k$  es  $D_j^k$ , en consecuencia la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $k + 1$  es  $D_j^k - m^{k+1} = D_j^{k+1}$ ,

- si,  $N_j^k = 0$  y  $d_j^k = \star$ , la única posibilidad es que  $D_j^{k+1} = d_j^{k+1} - N_j^{k+1}\sigma_j^{k+1} = -m^{k+1}$ , lo que es la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $k + 1$ ,
- si,  $N_j^k = 0$  y  $d_j^k \neq \star$ , puede pasar lo siguiente:
  - $d_j^k = \theta$ , esto significa que la máquina en la  $k$ -ésima iteración se encontraba sobre  $g_j$ , la única posibilidad que existe para este caso, es  $D_j^{k+1} = d_j^{k+1} - N_j^{k+1}\sigma_j^{k+1} = -m^{k+1}$ , lo que claramente es la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $k + 1$ ,
  - $d_j^k \neq \theta$ , en este caso en la iteración correspondiente, se calcularán  $d_j^{k+1}$  y  $n_j^{k+1}$  mediante la función *Argmin*, satisfaciendo que:
    - $d_j^{k+1} = \text{Argmin}\{|d|/d = d_j^k - m^{k+1} + n\sigma_j^{k+1}, n \in \mathbb{Z}\}$ ,
    - $n_j^{k+1}$  es tal que  $d_j^k - m^{k+1} = d_j^{k+1} - n_j^{k+1}\sigma_j^{k+1}$ ,

entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
D_j^{k+1} &= d_j^{k+1} - N_j^{k+1} \sigma_j^{k+1} \\
&= d_j^{k+1} - n_j^{k+1} \sigma_j^{k+1} \dots \dots \dots (2) \\
&= d_j^k - m^{k+1} \\
&= D_j^k - m^{k+1}
\end{aligned}$$

La igualdad (2) es verdadera puesto que  $N_j^k = 0$ . En consecuencia,  $D_j^{k+1}$  es la posición relativa de  $g_j$  con respecto a  $\mathbf{M}$  en el instante  $k + 1$ .

Si  $d_j^{k+1} = \infty$ , hay dos posibilidades:

- $d_j^k = \infty$ , caso en el que la **H.I.** justifica que no se visitará la posición en la que se encuentra  $g_j$  en iteraciones posteriores.
- $d_j^k \neq \infty$ , esto es,  $d_j^k \leq 2(|Q|^3 + |Q|)$  y  $Argmin\{|d|/d = d_j^k - m^{k+1} + n\sigma_j^{k+1}, n \in \mathbb{Z}\} > 2(|Q|^3 + |Q|)$ , y el lema 3.2 justifica que no se visitará la posición en la que se encuentra  $g_j$  en iteraciones posteriores.

Si  $d_j^{k+1} = \star$ , hay dos posibilidades:

- $d_j^k = \star$ , lo que significa que la piedra era llevada antes de la iteración  $k + 1$  y según la transición del autómata, la única posibilidad de obtener  $d_j^{k+1} = \star$  es que la máquina lleve a  $g_j$  en la iteración  $k + 1$ ,
- $d_j^k \neq \star$ , esto es,  $d_j^k = \theta$  ya que en este caso, es la única posibilidad de que  $d_j^{k+1}$  sea  $\star$ , lo que significa que en la iteración  $k$ , la máquina se encontraba en la misma casilla que  $g_j$ . Para que haya cambiado de  $\theta$  a  $\star$ ,  $g_j$  debe haber sido recogida.

■

Este teorema nos asegura que el estado de la segunda parte del autómata es esencial a la hora de calcular la información subyacente al espacio celular y con esto poder efectuar la transición correcta de la máquina a piedras.

### 3.4. Movimiento paralelo

El movimiento entre las dos piedras se hace sin piedras, mediante un movimiento repetitivo que avanza en una dirección fija que depende de los estados que se están repitiendo. Como el conjunto de estados es finito, el conjunto de direcciones realizables es finito también. Cuando las piedras están muy alejadas, el vector asociado al movimiento de ida y el asociado al movimiento de vuelta no pueden ser muy diferentes. En esta sección probaremos que sobre cierta distancia, los vectores de traslación deben ser paralelos.

Cuando la máquina deja una piedra, digamos  $g_i$ , para ir a buscar la otra, como ya fue explicado, lo hace con un movimiento que está acotado en una banda que denotaremos  $B^{ida}$ . Si en la dinámica exhibida por la máquina, esta se encuentra con  $g_{-i}$ , la máquina seguirá un movimiento que también está acotado en una banda, la que en principio es distinta a la usada luego de dejar a  $g_i$ ; a esta banda la denotaremos por  $B^{vuelta}$ . Para que la trayectoria seguida por la máquina luego de dejar a  $g_{-i}$ , pase por la posición en la que quedó  $g_i$ , es necesario que  $B^{vuelta}$  contenga a la posición en la que yace  $g_i$ ; a continuación analizaremos el caso en que las bandas tienen direcciones diferentes.

Primero definamos algunos vectores, sin pérdida de generalidad, pensemos que la piedra  $g_{-i}$  fue encontrada en el origen:

1.  $u$  es el vector que va del origen a la posición en la que se encuentra  $g_i$ , como se muestra en la figura 3.10,
2.  $v$  es el vector que va del origen a la posición en la que comienza el movimiento periódico luego que la máquina haya pasado por el origen, como se muestra en la figura 3.10.

Hay que entender, que mientras más agudo es el ángulo que forman las bandas de ida y vuelta, más lejos se pueden encontrar las piedras; es por esto, que si queremos dar una cota para tal distancia debemos hacerlo poniéndonos en el caso del ángulo más pequeño, para esto, digamos que los vectores directores de las bandas son  $\alpha$  y  $\beta$ ; el ángulo  $\lambda(\alpha, \beta)$  que forman ambas bandas está caracterizado en función de  $\alpha$  y  $\beta$  por  $\lambda(\alpha, \beta) = \arccos\left(\frac{\alpha\beta}{|\alpha||\beta|}\right)$ . En virtud de esto se define el siguiente ángulo en función de  $Q$ :

$$\lambda = \min\{\lambda(\alpha, \beta)/\alpha \text{ y } \beta \in B(\theta, |Q|) \text{ y } \alpha \text{ no es múltiplo de } \beta\}.$$

Sea:

- $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \text{argmín}\{\lambda(\alpha, \beta)/\alpha \text{ y } \beta \in B(\theta, |Q|) \text{ y } \alpha \text{ no es múltiplo de } \beta\},$
- $\mathcal{R} = \{u + r\bar{\beta}/r \in \mathbb{R}\},$

- $\bar{v} = \operatorname{argmín}\{\|v\|_2/v \in \mathcal{R}\},$
- $\mathbf{d} = \frac{|Q|+|Q|^3+1}{\sin(\lambda)},$
- $w$  de tal modo que sea una porción del período y exista  $n \in \mathbb{N}$  con  $v + n\bar{\beta} + w = D,$

como se muestra en la figura 3.10.

Es claro que las siguientes desigualdades se cumplen:

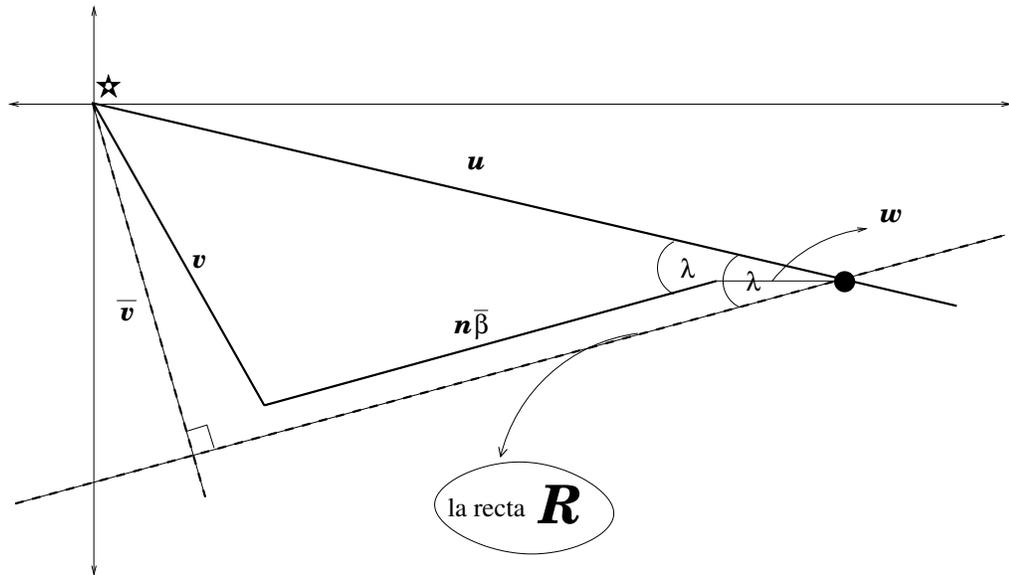
- $\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq |Q|^3,$
- $\|v + w\|_2 \leq \|v + w\|_1 \leq |Q|^3 + |Q|.$

Como  $(v + w) + n\bar{\beta} = u \in \mathcal{R}$  tenemos que  $\|\bar{v}\|_2 \leq \|v + w\|_2 \leq |Q|^3 + |Q|.$

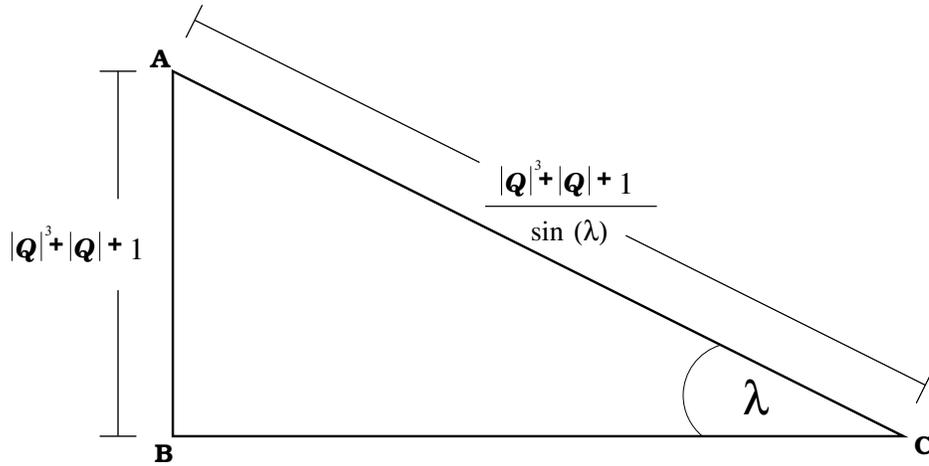
Supongamos que  $\|u\|_1 \geq \mathbf{d}\sqrt{2}.$

$$\begin{aligned} \|u\|_1 \geq \mathbf{d}\sqrt{2} &\Rightarrow \|u\|_2 \geq \mathbf{d}, \\ &\Rightarrow \|\bar{v}\|_2 \geq |Q| + |Q|^3 + 1, \\ &\Rightarrow \|\bar{v}\|_2 > |Q| + |Q|^3, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción; en consecuencia  $\|u\|_1$  debe ser menor que  $\mathbf{d}\sqrt{2}.$  Ver figura 3.10



**Figura 3.10:** En la figura, la piedra  $g_i$  se representa por la estrella y  $g_{-i}$  por el círculo.



**Figura 3.11:** La figura muestra el triángulo  $ABC$  rectángulo en  $B$ , con sus medidas extremas.

**Observación 3.9** Notar que de la figura 3.11, si  $\overline{AC} \geq \frac{|Q| + |Q|^3 + 1}{\sin(\lambda)}$  entonces se tiene que  $\overline{AB} \geq |Q| + |Q|^3 + 1$ , todo esto en distancia euclídeana.

Hemos demostrado así, la siguiente proposición:

**Proposición 3.4** Dada una máquina con 2 piedras  $M = (Q, \Sigma, \delta, \lambda, 2)$ , si las piedras están a una distancia mayor que  $\sqrt{2} \frac{|Q| + |Q|^3 + 1}{\sin(\lambda)}$  y no existen  $v \in \mathbb{Z}^2$ ,  $n_{ida} \in \mathbb{Z}$  y  $n_{vuelta} \in \mathbb{Z}$  tales que  $B^{ida} = n_{ida}v$  y  $B^{vuelta} = n_{vuelta}v$ , entonces la trayectoria de la máquina no volverá a pasar por la posición de  $g_i$ .

# Conclusión

En esta memoria, se analizaron dos tipos de máquina. Esto con la motivación de estudiar la complejidad del  $t - shift$  asociado a ellas. En el primer capítulo tratamos de probar que las máquinas estudiadas solo eran capaces de hacer ciclos de largo acotado, por el contrario se establece que las dos abejas abordadas en el primer capítulo, son capaces de hacer ciclos de largo arbitrario, lo que abre la pregunta: ¿es posible tener trayectorias acotadas? Además, proporcionamos un protocolo que nos permite colorear el espacio celular con el propósito de encaminar a una de estas abejas en un recorrido cualquiera, siempre y cuando éste no repita casillas; lo que es un primer paso para construir circuitos lógicos capaces de calcular fórmulas booleanas y con esto demostrar la universalidad de estas máquinas, lo que parece ser posible.

Por otra parte, dado que las abejas del primer capítulo son bastante parecidas en su regla, estudiamos cuál es la relación que guardan, concluyendo que son diferentes bajo la relación de isomorfismo y una de las reglas es isomorfa a la inversa de la otra; finalmente, pudimos concluir directamente que las abejas estudiadas no son simétricas con respecto al tiempo.

En el segundo capítulo empezamos a tratar con máquinas con piedras y nos preocupamos de revisar y detallar aún más algunos resultados previos de estas máquinas, además de dar, en la proposición 2.5, la construcción de una máquina sin piedras  $\mathbf{M}_0$  que simula una máquina con una piedra  $\mathbf{M}$ , donde la noción de simulación propuesta en la definición 2.9 es diferente a la noción de la definición 1.5 del capítulo 1 pues como  $\mathbf{M}_0$  simula la posición exacta de la piedra solo mientras ésta se encuentra a distancia menor o igual que  $|Q|$ , cuando la piedra está más lejos,  $\mathbf{M}_0$  no sabe la posición exacta de tal piedra, en consecuencia, no se puede reproducir la configuración de la máquina  $\mathbf{M}$  a partir de cualquier configuración de  $\mathbf{M}_0$ . Además, la simulación solo pretende seguir la trayectoria en una grilla monocromática.

En el tercer capítulo se caracterizó la complejidad del lenguaje asociado a la dinámica simbólica de una máquina con 2 piedras, como reconocible por un autómata determinista con 2 pilas. Este resultado está basado en la construcción de un *PDA* capaz de efectuar la transición de una máquina con 2 piedras y no perder la información relevante para así guardar la coherencia en el tiempo, con este fin se construyeron ventanas que permiten al *PDA* tener en memoria interna las casillas visitadas en el pasado cercano, lo que apoyado en los resultados del capítulo dos nos permitió hacer uso de las pilas para almacenar los movimientos repetitivos de forma correcta.

Usando el lema del bombeo para lenguajes de libre contexto, se probó que el *t-shift* de una máquina con 2 piedras, no es un lenguaje de libre contexto. Como ya fue estudiado por *Kůrka* y *Maass* en [12], existe una jerarquía para los subshifts **REAL-TIME** dada por la cantidad de pilas necesarias para reconocerlo, donde se definen las familias  $\mathbb{R}(n)$  y  $\mathbb{Q}(n)$  como los lenguajes reconocidos por un autómata con  $n$  pilas en tiempo real, determinista y no determinista respectivamente. En este contexto, los resultados del capítulo tres sitúan al *t-shift* de una máquina con dos piedras en  $\mathbb{R}(2) - \mathbb{Q}(1)$ .

# Bibliografía

- [1] M. Blum and C. Hewitt. Automata on a 2-dimensional tape. In *Proceedings of the 8th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (SWAT 1967)*, FOCS '67, pages 155–160, Washington, DC, USA, 1967. IEEE Computer Society.
- [2] L. A. Bunimovich and S. Troubetzkoy. Recurrence properties of Lorentz lattice gas cellular automata. *J. of Stat. Physics*, 67:289–302, 1992.
- [3] M. Delorme and J. Mazoyer. Pebble automata. figures families recognition and universality. Technical Report 32, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France, 1999.
- [4] P. Dorbec and A. Gajardo. Langton's fly. Technical Report 07, Departamento de Ingeniería Matemática, Concepción, Chile, 2007.
- [5] A. Gajardo. Sofic one head machines. In B. Durand, editor, *Journées Automates Cellulaires*, pages 54–64, 2008.
- [6] A. Gajardo, J. Kari, and A. Moreira. On time-symmetry in cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*, to appear.
- [7] A. Gajardo and J. Mazoyer. One head machines from a symbolic approach. *Theor. Comput. Sci.*, 370:34–47, 2007.
- [8] J. M. F. Gunn and M. Ortuño. Percolation and motion in a simple random environment. *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 18:L1095–L1101, 1985.
- [9] J. Ullman, J. Hopcroft, R. Motwani. *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Addison-Wesley, 2001.
- [10] P. Kůrka. On topological dynamics of Turing machines. *Theor. Comput. Sci.*, 174:203–216, March 1997.
- [11] P. Kůrka. *Topological and Symbolic Dynamics*. Société Mathématique de France, Paris, France, 2003.
- [12] P. Kůrka and A. Maass. Realtime subshifts. *Theor. Comput. Sci.*, 237:307–325, 2000.

- [13] J Neumann. *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Champaign, IL, USA, 1966.