

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS PARA EL
ACOPLAMIENTO DE FLUIDOS CON MEDIOS POROSOS

*Memoria para optar al título de
Ingeniero Matemático*

Ricardo Oyarzúa Vargas

Enero 2007
CONCEPCION-CHILE

**UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS PARA EL
ACOPLAMIENTO DE FLUIDOS CON MEDIOS POROSOS**

Ricardo Elvis Oyarzúa Vargas

Profesor Guía: Gabriel N. Gatica

COMISIÓN EVALUADORA

Firma: _____
Gabriel Barrenechea
Universidad de Concepción

Firma: _____
Gabriel N. Gatica
Universidad de Concepción

Firma: _____
Francisco Javier Sayas
Universidad de Zaragoza, España

Fecha defensa de título: _____

Calificación: _____

Concepción–Enero 2007

RESUMEN

En este trabajo consideramos un medio poroso inserto en un fluido, y presentamos un método de elementos finitos mixtos conforme para el problema acoplado correspondiente. Las condiciones de transmisión en la interfase de ambos dominios están dadas por: balance de fuerzas normales, conservación de masa, y la ley de Beavers-Joseph-Saffman, la cual induce la introducción de la traza de la presión en el medio poroso como un multiplicador de Lagrange. Los subespacios de elementos finitos utilizados en el esquema discreto son los elementos de Bernardi-Raugel y Raviart-Thomas para las velocidades, constantes a trozo para la presión, y elementos continuos y lineales a trozo para el multiplicador de Lagrange. Además, damos un estimador de error a posteriori confiable para el esquema de Galerkin.

Esta memoria se organiza como sigue. En el Capítulo 1 introducimos el problema de valores de contorno de interés, y definimos los elementos finitos de Bernardi-Raugel, los cuales se emplearán para aproximar la velocidad en el fluido. En el Capítulo 2 presentamos los esquemas continuo y discreto y demostramos que ambos son bien propuestos. En el Capítulo 3 entregamos algunos resultados numéricos que muestran el buen comportamiento del método. En el Capítulo 4 se deduce un estimador de error a posteriori confiable y, finalmente, en el Capítulo 5 se entregan resultados numéricos que ilustran su confiabilidad.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 2 |
| 1.1. El problema acoplado | 2 |
| 1.2. Elementos de Bernardi-Raugel | 4 |
| 2. Análisis a priori de las formulaciones continua y discreta | 7 |
| 2.1. Formulación continua | 7 |
| 2.2. Análisis de la formulación continua | 8 |
| 2.3. Formulación de Galerkin | 11 |
| 2.4. Análisis de la formulación de Galerkin | 14 |
| 3. Resultados numéricos del análisis a priori | 21 |
| 4. Análisis de error a posteriori | 30 |
| 4.1. Introducción | 30 |
| 4.2. El estimador de error a posteriori | 31 |
| 5. Resultados numéricos del análisis a posteriori | 37 |
| Bibliografía | 49 |

Capítulo 1

Introducción

En el último tiempo ha habido un interés creciente en desarrollar métodos numéricos eficientes para aproximar soluciones de problemas de acoplamiento de fluidos con medios porosos, modelados por las ecuaciones de Stokes y Darcy, respectivamente (ver [5], [10], [16], [19], y sus referencias). En particular, se analizó recientemente en [16] una formulación variacional mixta que utiliza la condición de Beavers-Joseph-Saffman para el acoplamiento en la interfase, la cual induce la introducción de la traza de la presión del fluido en el medio poroso como un multiplicador de Lagrange adicional. Además, se establece allí que la formulación continua correspondiente es un problema bien propuesto, y se incluye el análisis detallado de un método de elementos finitos mixtos no conforme. Esta no-conformidad proviene del hecho que el multiplicador de Lagrange es aproximado por funciones constantes a trozo, las cuales, evidentemente, no están incluidas en el espacio de Sobolev de las trazas en la interfase. Una formulación similar a la de [16] se estudia en [10]. En esta memoria consideramos un caso particular de [16] en el cual suponemos que el medio poroso está completamente inserto en el fluido, e introducimos un nuevo método de elementos finitos mixtos conforme para la solución numérica del problema acoplado.

1.1. El problema acoplado

Para describir la geometría del problema, sea Ω_2 un dominio acotado simplemente conexo de \mathbb{R}^2 con frontera poligonal Γ_2 , y sea Ω_1 la región anular acotada por Γ_2 y por una curva poligonal cerrada Γ_1 , cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega_2}$ (ver Figura 1.1). El problema de transmisión consiste en acoplar un fluido viscoso incompresible que ocupa Ω_1 , con un material poroso que vive en Ω_2 . Sean $\mu > 0$ la viscosidad de fluido y \mathbf{K} un tensor simétrico y uniformemente definido positivo en Ω_2 que representa la permeabilidad

del medio poroso, y supongamos que existe $C > 0$ tal que $\|\mathbf{K}(x)z\| \leq C\|z\|$ para todo $x \in \Omega_2$, y para todo $z \in \mathbb{R}^2$. Entonces, las ecuaciones constitutivas están dadas por las leyes de Stokes y de Darcy, respectivamente, esto es:

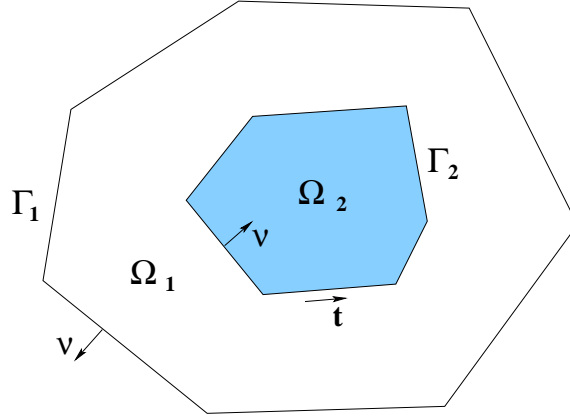


Figura 1.1: Geometría del problema.

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) = -p_1 \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en } \Omega_1, \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = -\mathbf{K} \nabla p_2 \quad \text{en } \Omega_2,$$

donde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y (p_1, p_2) denotan las velocidades y presiones en los dominios correspondientes, \mathbf{I} es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)$ es el tensor de esfuerzos, y

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) := \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}_1 + (\nabla \mathbf{u}_1)^\top \right)$$

es el tensor de deformaciones. De aquí en adelante, dado cualquier espacio normado U , U^2 y $U^{2 \times 2}$ denotan el espacio de vectores y matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en U , respectivamente. También, el superíndice $^\top$ representará la transpuesta de una matriz. Así, dados $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\Omega_1)]^2$ y $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ tal que $\int_{\Omega_2} f_2 = 0$, el problema acoplado es: Encontrar $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y (p_1, p_2) tales que

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) = \mathbf{f}_1 & \text{en } \Omega_1 & \text{(conservación de momentum),} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 & \text{en } \Omega_1 & \text{(conservación de masa),} \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_1 & \text{(deslizamiento nulo),} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = f_2 & \text{en } \Omega_2 & \text{(conservación de masa),} \\ \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} & \text{en } \Gamma_2 & \text{(conservación de masa),} \\ (\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} = -p_2 & \text{sobre } \Gamma_2 & \text{(balance de fuerzas normales),} \\ -\frac{\kappa}{\mu} (\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t} & \text{sobre } \Gamma_2 & \text{(ley de Beavers-Joseph-Saffman),} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario exterior a Ω_1 , \mathbf{t} es el vector tangencial a Γ_2 y $\kappa > 0$ es la constante de fricción. Aquí, la condición de Beavers-Joseph-Saffman establece que la velocidad de deslizamiento en Γ_2 es proporcional al esfuerzo de corte en Γ_2 (bajo el supuesto experimental, que $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{t}$ es despreciable) (ver [4], [15], y [20] para mayores detalles de esta condición de interfase).

A través del presente trabajo consideramos la terminología estandar para espacios de Sobolev, normas y seminormas, utilizamos $\mathbf{0}$ para denotar un vector nulo genérico, y usamos C y c , con o sin subíndices, barras, tildes o sombreros, para denotar constantes positivas independientes de los parámetros de discretización, los cuales pueden tomar distintos valores en distintos lugares.

A continuación presentamos el elemento de Bernardi-Raugel, el cual se empleará para aproximar la velocidad en el fluido.

1.2. Elementos de Bernardi-Raugel

Sea T un triángulo de vértices a_1, a_2, a_3 , como se aprecia en la Figura 1.2.

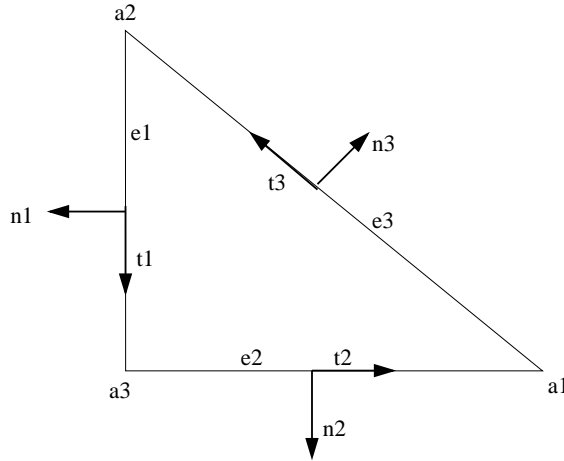


Figura 1.2

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, λ_i denota la coordenada baricéntrica asociada al vértice a_i , e_i es el lado de T opuesto a a_i , \mathbf{n}_i es el vector normal exterior a e_i y \mathbf{t}_i denota el vector tangencial a e_i . Definamos entonces las siguientes funciones sobre T :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{n}_i \prod_{j=1, j \neq i}^3 \lambda_j, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.2)$$

con las cuales el espacio local de Bernardi-Raugel $\text{BR}(T)$ queda dado por:

$$\text{BR}(T) = [\mathbf{P}_1(T)]^2 \oplus \langle \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\} \rangle,$$

donde $\mathbf{P}_1(T)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 en T .

De la definición (1.2) vemos que $\mathbf{p}_i(a_j) = 0$ y $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{t}_i|_{e_i} = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, y $\mathbf{p}_i|_{e_j} = 0$ para todo $i \neq j$. Además, si I_T es el interpolante usual en $[\mathbf{P}_1(T)]^2$, entonces, para cada $\mathbf{p} \in \text{BR}(T)$ vemos que $I_T(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{p}(a_i)$, con lo cual obtenemos

$$\mathbf{p} = I_T(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{p}_i, \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R},$$

y así se sigue que

$$\alpha_i \mathbf{p}_i|_{e_j} = (\mathbf{p} - I_T \mathbf{p})|_{e_j}.$$

Lo anterior sugiere la elección de los siguientes grados de libertad para las funciones de $\text{BR}(T)$: los valores de \mathbf{p} en cada vértice a_i de T y el flujo de \mathbf{p} a través de cada lado e_i de T . El próximo lema confirma la $\text{BR}(T)$ -unisolvencia de estos grados de libertad.

Lema 1.2.1 *Todo polinomio \mathbf{p} de $\text{BR}(T)$ queda únicamente determinado por los valores:*

$$\mathbf{p}(a_i), \quad \int_{e_i} \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Demostración. Ver Lema 2.1 en Capítulo II de [11].□

Ahora, utilizando los espacios locales de Bernardi-Raugel, podemos definir el siguiente subespacio de elementos finitos para $[H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2$:

$$\mathbf{H}_{h_1} := \left\{ \mathbf{v} \in [C(\bar{\Omega}_1)]^2 : \mathbf{v}|_T \in \text{BR}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_1 \right\},$$

donde \mathcal{T}_1 denota una triangulación regular del dominio Ω_1 y $h_1 = \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_1\}$ con h_T el diámetro de T . Luego, utilizando el operador de Clément (ver A.53 en [11]):

$$\mathbf{I}_{h_1} : [H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2 \longrightarrow [\Phi_{h_1}]^2, \quad (1.3)$$

con $\Phi_{h_1} = \{\phi \in C(\Omega_1) : \phi|_T \in \mathbf{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_1\} \cap H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$, construimos el operador de interpolación de Bernardi-Raugel $\Pi_1 : [H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2 \rightarrow \mathbf{H}_{h_1}$, el cual, es caracterizado por:

$$\begin{aligned} \Pi_1 \mathbf{v}(a) &= \mathbf{I}_{h_1} \mathbf{v}(a) \quad \forall \text{ nodo } a \text{ de } \mathcal{T}_1, \\ \int_e (\Pi_1 \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \forall \text{ lado } e \text{ de } \mathcal{T}_1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

resulta lineal y acotado con respecto a la norma de $[H^1(\Omega_1)]^2$.

En el siguiente lema entregamos algunas propiedades del operador de Bernardi-Raugel.

Lema 1.2.2 *Supongamos que la triangulación \mathcal{T}_1 es regular. Entonces, existe $C > 0$, independiente de h_1 , tal que para $m \in \{0, 1\}$ y $k \in \{1, 2\}$ se tiene:*

$$|\mathbf{v} - \Pi_1 \mathbf{v}|_{m, \Omega_1} \leq C h_1^{k-m} |\mathbf{v}|_{k, \Omega_1} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^k(\Omega_1)]^2. \quad (1.5)$$

Además, se satisface que:

$$\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_1 \mathbf{v}) q \, dx = 0 \quad \forall q \in \mathbf{L}_{h_1}, \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{L}_{h_1} := \left\{ q \in L^2(\Omega_1) : q|_T \in \mathbf{P}_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_1 \right\}$.

Demostración. Ver Lema 2.2 en Capítulo II de [11]□.

Capítulo 2

Análisis a priori de las formulaciones continua y discreta

2.1. Formulación continua

Definamos el conjunto $\Omega := \Omega_1 \cup \Gamma_2 \cup \Omega_2$ y los espacios:

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0 \right\},$$

$$[H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2 := \left\{ \mathbf{v}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2 : \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_1 \right\},$$

y

$$H(\text{div}; \Omega_2) := \left\{ \mathbf{v}_2 \in [L^2(\Omega_2)]^2 : \text{div } \mathbf{v}_2 \in L^2(\Omega_2) \right\}.$$

A su vez, introduzcamos los espacios producto

$$\mathbf{H} := [H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2 \times H(\text{div}; \Omega_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} := L_0^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_2),$$

dotados con las normas $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} := \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} + \|\mathbf{v}_2\|_{H(\text{div}; \Omega_2)}$ para todo $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{H}$, y $\|(q, \xi)\|_{\mathbf{Q}} := \|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}$ para todo $(q, \xi) \in \mathbf{Q}$. También, denotamos

$\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $p := \begin{cases} p_1 & \text{en } \Omega_1 \\ p_2 & \text{en } \Omega_2 \end{cases}$, e introducimos el multiplicador de Lagrange

$$\lambda := p_2 = -(\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} = p_1 - 2\mu\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_1)\boldsymbol{\nu} \quad \text{sobre } \Gamma_2.$$

Luego, utilizando la fórmula de integración por partes:

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{v} \cdot \text{div } \mathbf{e}(\mathbf{w}) := - \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{w}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega_1} \{(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{w})\boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{w})\boldsymbol{\nu})\},$$

y multiplicando por funciones apropiadas las ecuaciones (1.1) y la ley de Darcy, obtenemos

$$2\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_1) + \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}) - \int_{\Omega_1} p_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \int_{\Gamma_2} \lambda(\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) = \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1, \quad (2.1)$$

$$- \int_{\Omega_2} q \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = - \int_{\Omega_2} f_2 q, \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega_2} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v}_2 - \int_{\Omega_2} p_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2 - \int_{\Gamma_2} \lambda(\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Gamma_2} \xi \{ (\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) - (\mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}) \} = 0, \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega_1} q \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0. \quad (2.5)$$

Así, de (2.1), (2.3), (2.2), (2.4) y (2.5), obtenemos la siguiente formulación variacional mixta de (1.1): Encontrar $(\mathbf{u}, (p, \lambda)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p, \lambda)) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \forall \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{H}, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, (q, \xi)) &= - \int_{\Omega_2} f_2 q & \forall (q, \xi) \in \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{a} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= 2\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_1) + \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t})(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}) + \int_{\Omega_2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi)) &:= - \int_{\Omega_1} q \operatorname{div} \mathbf{v}_1 - \int_{\Omega_2} q \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi \rangle_{\Gamma_2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_2}$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ y $H^{1/2}(\Gamma_2)$ con respecto al producto interior de $L^2(\Gamma_2)$.

2.2. Análisis de la formulación continua

En lo que sigue empleamos la teoría clásica de Babuška-Brezzi para probar que (2.6) es un problema bien propuesto. Primero observamos que \mathbf{a} y \mathbf{b} son acotadas, lo cual se sigue de una simple aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de la estimación de trazas en $[H^1(\Omega_1)]^2$ y $H(\operatorname{div}; \Omega_2)$ (ver también Lema 2.1 y 3.1 en [16] para los detalles). A continuación, probamos la condición inf-sup continua para \mathbf{b} .

Lema 2.2.1 *Existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H} \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq \beta \|(q, \xi)\|_{\mathbf{Q}} \quad \forall (q, \xi) \in \mathbf{Q}. \quad (2.8)$$

Demostración. Dados $(q, \xi) \in \mathbf{Q}$ y $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, sea $\varphi \in H^1(\Omega_2)$ la única solución débil del problema de valores de contornos:

$$-\Delta \varphi = \frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{en } \Omega_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\psi \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad \int_{\Omega_2} \varphi = 0.$$

Notar que, de acuerdo a la estimación de dependencia continua, se cumple que

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega_2)} \leq c \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}.$$

Entonces, definimos $\mathbf{w}_2 := \nabla \varphi$ y observamos que $\operatorname{div} \mathbf{w}_2 = -\frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2}$ en Ω_2 y $\mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} = -\psi$ sobre Γ_2 . Se sigue que $\mathbf{w}_2 \in H(\operatorname{div}; \Omega_2)$ y

$$\|\mathbf{w}_2\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_2)} \leq C \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}.$$

Así, si hacemos $\mathbf{w} := (\mathbf{0}, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}$ encontramos que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H} \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} &\geq \frac{|\mathbf{b}(\mathbf{w}, (q, \xi))|}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}} = \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2} + \frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2} \int_{\Omega_2} q|}{\|\mathbf{w}_2\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_2)}} \\ &\geq c_1 \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}} - c_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

con lo cual, observando que $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ es arbitrario, obtenemos que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H} \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq c_1 \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} - c_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, dado que $q \in L_0^2(\Omega)$, un resultado conocido (ver Corolario 2.4 en Capítulo I de [11]) asegura la existencia de $\mathbf{z} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que $\operatorname{div} \mathbf{z} = -q$ en Ω y $\|\mathbf{z}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c \|q\|_{L^2(\Omega)}$. Así, definiendo $\mathbf{w} := (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}$, con $\mathbf{w}_i = \mathbf{z}|_{\Omega_i}$ para cada $i \in \{1, 2\}$, encontramos que $\mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}$ sobre Γ_2 y $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}$, con lo cual

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H} \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq \frac{|\mathbf{b}(\mathbf{w}, (q, \xi))|}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}} = \frac{\|q\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}} \geq c_3 \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.10)$$

Finalmente, es fácil ver que (2.9) y (2.10) implican (2.8) con β dependiente de c_1 , c_2 , y c_3 . \square

Lema 2.2.2 Sea $\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} : \mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi)) = 0 \quad \forall (q, \xi) \in \mathbf{Q}\}$. Entonces, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.11)$$

Demostración. De acuerdo a la definición de \mathbf{b} vemos que $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{V}$ si y sólo si

$$\int_{\Omega_1} q \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \int_{\Omega_2} q \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)$$

y

$$\langle \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi \rangle_{\Gamma_2} = 0 \quad \forall \xi \in H^{1/2}(\Gamma_2). \quad (2.12)$$

Entonces, notando que $L^2(\Omega) = L_0^2(\Omega) \oplus \mathbb{R}$, y tomando $\xi \in \mathbb{R}$ en (2.12), se deduce que

$$\int_{\Omega_1} q \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \int_{\Omega_2} q \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

En particular, se sigue que $\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$ en Ω_2 , con lo cual, gracias a la desigualdad de Korn, la desigualdad de Poincaré, y el hecho que \mathbf{K}^{-1} es una matriz simétrica y uniformemente definida positiva, obtenemos que

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2\mu \|\mathbf{e}(\mathbf{v}_1)\|_{[L^2(\Omega_1)]^{2 \times 2}}^2 + \frac{\mu}{\kappa} \|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + \int_{\Omega_2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

□

Teorema 2.2.1 Existe un único $(\mathbf{u}, (p, \lambda)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ solución de (2.6). Además, existe $\tilde{C} > 0$, dependiente de β , α , y las constantes de acotamiento de \mathbf{a} y \mathbf{b} , tal que

$$\|(\mathbf{u}, (p, \lambda))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \leq \tilde{C} \left\{ \|\mathbf{f}_1\|_{[L^2(\Omega_1)]^2} + \|f_2\|_{L^2(\Omega_2)} \right\}.$$

Demostración. Gracias a los Lemas 2.2.1 y 2.2.2, y dado que el lado derecho de (2.6) define funcionales lineales y acotados sobre \mathbf{H} y \mathbf{Q} respectivamente, la demostración se sigue de una aplicación directa de la teoría de Babuška-Brezzi. □

Es importante observar que la demostración del Teorema 2.2.1 también se obtiene, usando una formulación equivalente a (2.6), del análisis de [16] para el caso en que el medio poroso no está completamente inserto en el fluido (ver Remark 3.1 en [16]). Sin embargo, dado que en [16] no se incluyen los detalles, hemos realizado la demostración anterior para entregar un análisis completo de nuestro problema acoplado.

2.3. Formulación de Galerkin

Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 triangulaciones regulares de $\bar{\Omega}_1$ y $\bar{\Omega}_2$, respectivamente, por triángulos T de diámetro h_T , y asumamos que los vertices de \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 coinciden en la interfase Γ_2 . Denotemos por \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 al conjunto de vértices de \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 respectivamente. Sea también, $h := \max\{h_1, h_2\}$, donde $h_i := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_i\}$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces, para cada $T \in \mathcal{T}_2$ sea $\text{RT}_0(T)$ el espacio local de Raviart-Thomas de orden 0, esto es

$$\text{RT}_0(T) := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

donde $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en un vector genérico de \mathbb{R}^2 . En lo que sigue, dado un entero no negativo k y un subconjunto S de \mathbb{R}^2 , $\mathbf{P}_k(S)$ denota al espacio de polinomios definidos sobre S , de grado $\leq k$. Definamos así, los siguientes subespacios de elementos finitos para las velocidades y la presión:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{h_1} &:= \left\{ \mathbf{v} \in [C(\bar{\Omega}_1)]^2 : \mathbf{v}|_T \in \text{BR}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_1 \right\}, \\ \mathbf{H}_{h_2} &:= \left\{ \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega_2) : \mathbf{v}|_T \in \text{RT}_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_2 \right\}, \\ \mathbf{Q}_h &:= \left\{ q \in L^2(\Omega) : q|_T \in \mathbf{P}_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \right\}, \\ \text{y } \mathbf{Q}_{h,0} &:= \mathbf{Q}_h \cap L_0^2(\Omega), \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $\text{BR}(T)$ es el conjunto definido en la Sección 1.2. Además, introducimos una partición independiente $\{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m\}$ de Γ_2 , con

$$\tilde{h} := \max\{|\tilde{\gamma}_j| : j \in \{1, \dots, m\}\},$$

y definimos el siguiente subespacio de elementos finitos para el multiplicador de Lagrange $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_2)$:

$$\mathbf{Q}_{\tilde{h}} := \left\{ \xi \in C(\Gamma_2) : \xi|_{\tilde{\gamma}_j} \in \mathbf{P}_1(\tilde{\gamma}_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \right\}. \tag{2.14}$$

Entonces, definiendo $\mathbf{H}_h := \mathbf{H}_{h_1} \times \mathbf{H}_{h_2}$ y $\mathbf{Q}_{h,\tilde{h}} := \mathbf{Q}_{h,0} \times \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$, nuestro esquema conforme de Galerkin es: Encontrar $(\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}})) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{h,\tilde{h}}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p_h, \lambda_{\tilde{h}})) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \forall \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{H}_h, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}_h, (q, \xi)) &= - \int_{\Omega_2} f_2 q & \forall (q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h,\tilde{h}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

En lo que sigue, asumimos que la partición independiente sobre Γ_2 es uniformemente regular, lo cual significa que existe una constante $C > 0$, independiente de \tilde{h} , tal que $|\tilde{\gamma}_j| \geq C\tilde{h}$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Sabemos que esta condición implica la siguiente desigualdad inversa para el espacio $\mathbf{Q}_{\tilde{h}}$ (ver, e.g. [2], [17]): para cualquier par de números reales s y t con $0 \leq s \leq t \leq 1$, existe $C > 0$ tal que

$$\|\xi\|_{H^t(\Gamma_2)} \leq C\tilde{h}^{s-t} \|\xi\|_{H^s(\Gamma_2)} \quad \forall \xi \in \mathbf{Q}_{\tilde{h}}. \quad (2.16)$$

También necesitamos las funciones polinomiales constantes a trozo sobre Γ_2 . Entonces, si $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ es la partición sobre Γ_2 inducida por las triangulaciones \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 , y k es un entero no negativo, definimos

$$\Psi_k := \{ \psi \in L^2(\Gamma_2) : \psi|_{\gamma_j} \in \mathbf{P}_k(\gamma_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \}.$$

En particular, notemos que Ψ_0 puede ser considerado también como la traza normal sobre Γ_2 de las funciones en \mathbf{H}_{h_2} . Además, asumimos que \mathcal{T}_2 es uniformemente regular cerca de Γ_2 , lo que significa que existe una constante $C > 0$, independiente de h_2 , tal que $|\gamma_j| \geq Ch_2$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Esta condición implica la siguiente desigualdad inversa para el espacio Ψ_k (ver, e.g. [2], [17]): para cualquier par de números reales s y t con $-\frac{1}{2} \leq s \leq t \leq 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\|\psi\|_{H^t(\Gamma_2)} \leq Ch_2^{s-t} \|\psi\|_{H^s(\Gamma_2)} \quad \forall \psi \in \Psi_k. \quad (2.17)$$

Por otro lado, se sabe (ver, e.g. [2]) que Ψ_0 satisface la siguiente propiedad de aproximación: para todo $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y para todo $z \in H^s(\Gamma_2)$, existe $\psi \in \Psi_0$ tal que

$$\|z - \psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \leq Ch_2^{s+1/2} \|z\|_{H^s(\Gamma_2)}. \quad (2.18)$$

El siguiente lema establece un resultado técnico que involucra a los espacios $\mathbf{Q}_{\tilde{h}}$ y Ψ_0 , el cual será usado en la Sección 2.4 para probar la condición inf-sup discreta para \mathbf{b} . Observemos que la demostración correspondiente, utiliza los mismos argumentos del Lema 3.3 en [3]. En particular, empleamos la propiedad de aproximación (2.18) de Ψ_0 , y la desigualdad inversa (2.16) para $\mathbf{Q}_{\tilde{h}}$.

Lema 2.3.1 *Existen constantes $C_0 \in (0, 1)$ y $\tilde{C}_1 > 0$, independientes de h_2 y \tilde{h} , tales que para todo $h_2 \leq C_0\tilde{h}$ y para todo $\xi \in \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$ se cumple que*

$$\sup_{\substack{\psi \in \Psi_0 \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}} \geq \tilde{C}_1 \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \quad (2.19)$$

Demostración. Dado $\xi \in \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$, sea $\varphi \in H^1(\Omega_2)$ la solución de

$$-\Delta\varphi + \varphi = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad \varphi = \xi \quad \text{sobre } \Gamma_2.$$

Como $\mathbf{Q}_{\tilde{h}} \subseteq H^1(\Gamma_2)$, el resultado usual de regularidad sobre dominios poligonales (ver [12], [13]) implica que $\varphi \in H^{1+\delta}(\Omega_2)$ y $\|\varphi\|_{H^{1+\delta}(\Omega_2)} \leq C \|\xi\|_{H^{1/2+\delta}(\Gamma_2)}$, para todo $\delta \in [0, \delta_0)$, donde $\delta_0 := \min\{\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2\omega}\}$ y ω es el mayor ángulo interior de Ω_2 . También, observamos que la derivada normal de φ sobre Γ_2 está bien definida para todo $\delta \in [0, \delta_0)$, y satisface la desigualdad $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_{\Gamma_2} \in H^{-1/2+\delta}(\Gamma_2)$ con $\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\|_{H^{-1/2+\delta}(\Gamma_2)} \leq C \|\varphi\|_{H^{1+\delta}(\Omega_2)}$ (ver Teorema 2.4 en [1]). En particular, para $\delta = 0$ tenemos que $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_{\Gamma_2} \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, y entonces, integrando por partes y usando el teorema de traza, encontramos que

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \xi \right\rangle_{\Gamma_2} = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_2} = \|\varphi\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \geq \tilde{C} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}^2. \quad (2.20)$$

Ahora, considerando un $\delta \in (0, \delta_0)$ fijo y aplicando la propiedad de aproximación (2.18), deducimos que existe $\bar{\psi} \in \Psi_0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \bar{\psi} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \leq C h_2^\delta \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right\|_{H^{-1/2+\delta}(\Gamma_2)} \leq C h_2^\delta \|\varphi\|_{H^{1+\delta}(\Omega_2)} \leq C h_2^\delta \|\xi\|_{H^{1/2+\delta}(\Gamma_2)},$$

y en virtud de la desigualdad inversa (2.16), se tiene que

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \bar{\psi} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \leq \bar{C} \left(\frac{h_2}{\tilde{h}} \right)^\delta \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \quad (2.21)$$

Así, se sigue que

$$\|\bar{\psi}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \leq \bar{C} \left(\frac{h_2}{\tilde{h}} \right)^\delta \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} + C \|\varphi\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \hat{C} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \quad \forall h_2 \leq \tilde{h}.$$

Además, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\psi \in \Psi_0 \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}} &\geq \frac{|\langle \bar{\psi}, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\bar{\psi}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}} \geq \frac{1}{\hat{C}} \frac{|\langle \bar{\psi}, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}} \\ &\geq \frac{1}{\hat{C} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}} \left\{ \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \xi \right\rangle_{\Gamma_2} - \left| \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \bar{\psi}, \xi \right\rangle_{\Gamma_2} \right\}, \end{aligned}$$

y usando (2.20) y (2.21), lo anterior implica que

$$\sup_{\substack{\psi \in \Psi_0 \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}} \geq \frac{1}{\hat{C}} \left\{ \tilde{C} - \bar{C} \left(\frac{h_2}{\tilde{h}} \right)^\delta \right\} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}.$$

De esta forma, tomando en particular $C_0 := \left(\frac{\tilde{C}}{2\bar{C}} \right)^{1/\delta}$ concluimos que para todo $h_2 \leq C_0 \tilde{h}$ y para todo $\xi \in \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$ se cumple la desigualdad (2.19) con $\tilde{C}_1 := \frac{\tilde{C}}{2\bar{C}}$.

□

Ahora, denotamos por $\Pi_2 : [H^1(\Omega_2)]^2 \rightarrow \mathbf{H}_{h_2}$ al operador de interpolación de Raviart-Thomas que, gracias al Teorema 3.1 de [1], también puede definirse desde el espacio $[H^\delta(\Omega_2)]^2 \cap H(\text{div}; \Omega_2)$ a \mathbf{H}_{h_2} para todo $\delta \in (0, 1)$. Además, según el Teorema 3.16 en [14], se cumple que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_2(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(\Omega_2)]^2} \leq C h_2^\delta \left\{ |\boldsymbol{\tau}|_{[H^\delta(\Omega_2)]^2} + \|\text{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{L^2(\Omega_2)} \right\} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in [H^\delta(\Omega_2)]^2 \cap H(\text{div}; \Omega_2). \quad (2.22)$$

Recordemos también que, dado $\boldsymbol{\tau} \in [H^\delta(\Omega_2)]^2 \cap H(\text{div}; \Omega_2)$, tenemos que

$$\int_e \Pi_2(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_e \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{para cada lado } e \text{ de } \mathcal{T}_2, \quad (2.23)$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega_2} q \text{div}(\Pi_2(\boldsymbol{\tau})) = \int_{\Omega_2} q \text{div}(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall q \in \mathbf{Q}_h. \quad (2.24)$$

Equivalentemente, si \mathcal{Q}_2 denota la proyección ortogonal de $L^2(\Omega_2)$ sobre la restricción de \mathbf{Q}_h a Ω_2 , entonces la relación (2.24) puede escribirse como

$$\text{div}(\Pi_2(\boldsymbol{\tau})) = \mathcal{Q}_2(\text{div}(\boldsymbol{\tau})) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in [H^\delta(\Omega_2)]^2 \cap H(\text{div}; \Omega_2). \quad (2.25)$$

2.4. Análisis de la formulación de Galerkin

Comenzamos con el siguiente Lema que establece el análogo discreto de (2.9).

Lema 2.4.1 *Sea $C_0 \in (0, 1)$ la constante proporcionada por el Lema 2.3.1. Entonces existen $C_1, C_2 > 0$, independientes de h_1, h_2 , y \tilde{h} , tal que para todo $h_2 \leq C_0 \tilde{h}$ y para todo $(q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$, se cumple que*

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq C_1 \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} - C_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.26)$$

Demostración. Dados $(q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$ y $\psi \in \Psi_0$, procedemos como en el Lema 2.2.1. Sea $\varphi \in H^1(\Omega_2)$ la única solución débil del problema :

$$-\Delta \varphi = \frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{en } \Omega_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\psi \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad \int_{\Omega_2} \varphi = 0.$$

Dado que $\Psi_0 \subseteq L^2(\Gamma_2)$, el resultado usual para dominios poligonales (ver [12], [13]) implica ahora que $\varphi \in H^{1+\delta}(\Omega_2)$ y $\|\varphi\|_{H^{1+\delta}(\Omega_2)} \leq C \|\psi\|_{H^{-1/2+\delta}(\Gamma_2)} \quad \forall \delta \in [0, \delta_0)$, donde, al igual que en la demostración del Lema 2.3.1, $\delta_0 := \min\{\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2\omega}\}$ y ω es el mayor ángulo interior de Ω_2 . Es claro que $\nabla \varphi \in [H^\delta(\Omega_2)]^2$ y $\text{div}(\nabla \varphi) = -\frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2}$ en Ω_2 , de donde

$\nabla\varphi \in [H^\delta(\Omega_2)]^2 \cap H(\text{div}; \Omega_2)$. Entonces, hacemos $\mathbf{w}_2 := \Pi_2(\nabla\varphi) \in \mathbf{H}_{h_2}$ y aplicamos (2.25) para deducir que

$$\text{div } \mathbf{w}_2 = \mathcal{Q}_2(\text{div}(\nabla\varphi)) = \mathcal{Q}_2\left(-\frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2}\right) = -\frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{en } \Omega_2,$$

de donde

$$\|\text{div } \mathbf{w}_2\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}.$$

Además, utilizando (2.22), la desigualdad de regularidad antes mencionada para φ , la estimación

$$\|\text{div}(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)},$$

y la desigualdad inversa (2.17) para Ψ_0 , obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_2\|_{[L^2(\Omega_2)]^2} &\leq \|\Pi_2(\nabla\varphi) - \nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega_2)]^2} + \|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega_2)]^2} \\ &\leq C h_2^\delta \left\{ \|\nabla\varphi\|_{[H^\delta(\Omega_2)]^2} + \|\text{div}(\nabla\varphi)\|_{L^2(\Omega_2)} \right\} + \|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega_2)]^2} \\ &\leq C h_2^\delta \left\{ \|\varphi\|_{H^{1+\delta}(\Omega_2)} + \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \right\} + \|\varphi\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \tilde{C} \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|\mathbf{w}_2\|_{H(\text{div}; \Omega_2)} \leq \bar{C} \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}.$$

Por otro lado, de acuerdo a (2.23) se cumple que $\int_e \mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_e \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\nu}$ en cada lado e de \mathcal{T}_2 , y dado que $\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\nu} = -\psi$ sobre Γ_2 , encontramos que $\mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} = -\psi$ sobre Γ_2 . De esta forma, hacemos $\mathbf{w} := (\mathbf{0}, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}_h$ y obtenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} &\geq \frac{|\mathbf{b}(\mathbf{w}, (q, \xi))|}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}} = \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2} + \frac{1}{|\Omega_2|} \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma_2} \int_{\Omega_2} q|}{\|\mathbf{w}_2\|_{H(\text{div}; \Omega_2)}} \\ &\geq c_1 \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}} - C_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

con lo cual, utilizando el hecho que $\psi \in \Psi_0$ es arbitrario, se tiene que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq c_1 \sup_{\substack{\psi \in \Psi_0 \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \psi, \xi \rangle_{\Gamma_2}|}{\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}} - C_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Esta desigualdad y (2.19) (cf. Lema 2.3.1) implican (2.26) y completan la demostración. \square

Para lo que sigue, notemos que si \mathcal{Q}_1 denota la proyección ortogonal de $L^2(\Omega_1)$ sobre la restricción de \mathbf{Q}_h a Ω_1 , entonces la relación (1.6) del operador de Bernardi-Raugel puede escribirse como

$$\mathcal{Q}_1(\text{div}(\Pi_1(\mathbf{v}_1))) = \mathcal{Q}_1(\text{div}(\mathbf{v}_1)) \quad \forall \mathbf{v}_1 \in [H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2. \quad (2.27)$$

La estimación preliminar dada en el Lema 2.4.1 se complementa con el siguiente resultado.

Lema 2.4.2 *Existen $C_3, C_4 > 0$, independientes de h_1, h_2 , y \tilde{h} , tales que para todo $(q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$, se cumple que*

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq C_3 \|q\|_{L^2(\Omega)} - C_4 h_2^{1/2} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \quad (2.28)$$

Demostración. Sea $(q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$. Dado que $q \in L_0^2(\Omega)$ existe $\mathbf{z} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = -q \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \|\mathbf{z}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.29)$$

Luego, haciendo $\mathbf{z}_i := \mathbf{z}|_{\Omega_i}$ para cada $i \in \{1, 2\}$, y observando que $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$ sobre Γ_2 , las relaciones (2.23) y (1.4) implican:

$$\int_{\Gamma_2} (\Pi_1(\mathbf{z}_1) - \Pi_2(\mathbf{z}_2)) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \quad (2.30)$$

Así, denotamos por $\varphi \in H^1(\Omega_2)$ la única solución débil del problema:

$$-\Delta \varphi = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = (\Pi_1(\mathbf{z}_1) - \Pi_2(\mathbf{z}_2)) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad \int_{\Omega_2} \varphi = 0, \quad (2.31)$$

y definimos $\mathbf{w} := (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbf{H}_h$, con

$$\mathbf{w}_1 := \Pi_1(\mathbf{z}_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 := \Pi_2(\mathbf{z}_2) + \Pi_2(\nabla \varphi). \quad (2.32)$$

Dado que $(\Pi_1(\mathbf{z}_1) - \Pi_2(\mathbf{z}_2)) \cdot \boldsymbol{\nu} \in \Psi_2 \subseteq L^2(\Gamma_2)$, seguimos los mismos argumentos dados en la demostración del Lema 2.4.1 para deducir que

$$\|\Pi_2(\nabla \varphi)\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_2)} \leq C \|(\Pi_1(\mathbf{z}_1) - \Pi_2(\mathbf{z}_2)) \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)},$$

lo cual, usando la continuidad de la traza normal en $H(\operatorname{div}; \Omega_1)$ y $H(\operatorname{div}; \Omega_2)$, y el hecho que $[H^1(\Omega_1)]^2$ está incluido continuamente en $H(\operatorname{div}; \Omega_1)$, se tiene que

$$\|\Pi_2(\nabla \varphi)\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_2)} \leq C \left\{ \|\Pi_1(\mathbf{z}_1)\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} + \|\Pi_2(\mathbf{z}_2)\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_2)} \right\}. \quad (2.33)$$

Ahora, de (2.22) y (2.29) se sigue fácilmente que

$$\|\Pi_2(\mathbf{z}_2)\|_{[L^2(\Omega_2)]^2} \leq C \|\mathbf{z}_2\|_{[H^1(\Omega_2)]^2} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)},$$

y dado que

$$\operatorname{div}(\Pi_2(\mathbf{z}_2)) = \mathcal{Q}_2(\operatorname{div}(\mathbf{z}_2)) = \mathcal{Q}_2(-q) = -q \quad \text{en } \Omega_2,$$

encontramos que

$$\|\Pi_2(\mathbf{z}_2)\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_2)} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.34)$$

Similarmente, usando que $\Pi_1 : [H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2 \rightarrow \mathbf{H}_{h_1}$ es acotado, y aplicando nuevamente la estimación (2.29), tenemos

$$\|\Pi_1(\mathbf{z}_1)\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.35)$$

De esta forma, (2.32), (2.33), (2.34), y (2.35) implican

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}} \leq C \left\{ \|\Pi_1(\mathbf{z}_1)\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} + \|\Pi_2(\mathbf{z}_2)\|_{H(\text{div}; \Omega_2)} \right\} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.36)$$

Por lo tanto, aplicando (2.25) y (2.27), y notando en particular que

$$\text{div}(\Pi_2(\nabla\varphi)) = \mathcal{Q}_2(\text{div}(\nabla\varphi)) = \mathcal{Q}_2(0) = 0 \quad \text{en } \Omega_2,$$

deducimos que

$$\int_{\Omega_1} q \text{div}(\mathbf{w}_1) + \int_{\Omega_2} q \text{div}(\mathbf{w}_2) = \int_{\Omega} q \text{div}(\mathbf{z}) = -\|q\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.37)$$

Por otro lado, denotemos por \mathcal{P}_0 la proyección ortogonal de $L^2(\Gamma_2)$ sobre Ψ_0 . Aplicando argumentos de dualidad y la estimación $\|z - \mathcal{P}_0(z)\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq Ch_2^{1/2} \|z\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}$, la cual es válida para todo $z \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, se puede probar que

$$\|z - \mathcal{P}_0(z)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \leq Ch_2^{1/2} \|z\|_{L^2(\Gamma_2)} \quad \forall z \in L^2(\Gamma_2). \quad (2.38)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|z - \mathcal{P}_0(z)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} &= \sup_{\substack{\xi \in H^{1/2}(\Gamma_2) \\ \xi \neq 0}} \frac{\langle z - \mathcal{P}_0(z), \xi \rangle_{\Gamma_2}}{\|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}} = \sup_{\substack{\xi \in H^{1/2}(\Gamma_2) \\ \xi \neq 0}} \frac{\langle z - \mathcal{P}_0(z), \xi - \mathcal{P}_0(\xi) \rangle_{\Gamma_2}}{\|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}} \\ &\leq \sup_{\substack{\xi \in H^{1/2}(\Gamma_2) \\ \xi \neq 0}} \frac{\|z - \mathcal{P}_0(z)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\xi - \mathcal{P}_0(\xi)\|_{L^2(\Gamma_2)}}{\|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}} \\ &\leq Ch_2^{1/2} \sup_{\substack{\xi \in H^{1/2}(\Gamma_2) \\ \xi \neq 0}} \frac{\|z\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}}{\|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}} = Ch_2^{1/2} \|z\|_{L^2(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

Observemos entonces que utilizando (2.38) obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi \rangle_{\Gamma_2}| &= |\langle (\Pi_1(\mathbf{z}_1) - \Pi_2(\mathbf{z}_2) - \Pi_2(\nabla\varphi)) \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi \rangle_{\Gamma_2}| \\ &= |\langle \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathcal{P}_0(\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\nu}), \xi \rangle_{\Gamma_2}| = |\langle \Pi_1(\mathbf{z}_1) \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathcal{P}_0(\Pi_1(\mathbf{z}_1) \cdot \boldsymbol{\nu}), \xi \rangle_{\Gamma_2}| \\ &\leq \|\Pi_1(\mathbf{z}_1) \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathcal{P}_0(\Pi_1(\mathbf{z}_1) \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \\ &\leq Ch_2^{1/2} \|\Pi_1(\mathbf{z}_1) \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \leq Ch_2^{1/2} \|\Pi_1(\mathbf{z}_1)\|_{[L^2(\Gamma_2)]^2} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

Así, usando la estimación de traza en $[H^1(\Omega_1)]^2$ y (2.35), se tiene que

$$|\langle \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi \rangle_{\Gamma_2}| \leq C h_2^{1/2} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.39)$$

Finalmente, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} &\geq \frac{|\mathbf{b}(\mathbf{w}, (q, \xi))|}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}} \\ &= \frac{\left| -\int_{\Omega_1} q \operatorname{div}(\mathbf{w}_1) - \int_{\Omega_2} q \operatorname{div}(\mathbf{w}_2) + \langle \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi \rangle_{\Gamma_2} \right|}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}}, \end{aligned}$$

lo cual, junto con (2.36), (2.37), y (2.39), implican (2.28) y completan la demostración. \square

Enfatizamos aquí la importancia de la propiedad (1.4) satisfecha por el operador Π_1 , la cual constituye la razón principal para usar el subespacio de Bernardi-Raugel en nuestro esquema de elementos finitos mixtos (2.15). De hecho, es claro que (2.30), el cual se sigue de (2.23) y (1.4), permite introducir el problema auxiliar de valores de contorno (2.31), y por lo tanto, el término de corrección dado por $\Pi_2(\nabla\varphi)$ en (2.32). De esta forma, obtenemos $O(h_2^{1/2})$ en la estimación (2.28), el cual según mostramos a continuación, cumple un rol fundamental en la demostración de la condición inf-sup discreta para \mathbf{b} .

Lema 2.4.3 *Sea $C_0 \in (0, 1)$ la constante del Lema 2.3.1. Entonces, existen $h_0, \bar{\beta} > 0$, independientes de h_1, h_2 , y \tilde{h} , tales que para todo $h_2 \leq \min\{h_0, C_0 \tilde{h}\}$ y para todo $(q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$, se cumple que*

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq \bar{\beta} \|(q, \xi)\|_{\mathbf{Q}}. \quad (2.40)$$

Demostración. Se sigue de las estimaciones (2.26) y (2.28) (ver Lemas 2.4.1 y 2.4.2, respectivamente). En efecto, multiplicando (2.26) por $\frac{C_3}{C_2}$ y sumando el resultado a (2.28), obtenemos

$$\left(1 + \frac{C_3}{C_2}\right) \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq \left(\frac{C_1 C_3}{C_2} - C_4 h_2^{1/2}\right) \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)},$$

lo cual, tomando en particular $h_2 \leq h_0 := \left(\frac{C_1 C_3}{2 C_2 C_4}\right)^2$, implica

$$\left(1 + \frac{C_3}{C_2}\right) \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq \frac{C_1 C_3}{2 C_2} \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \quad (2.41)$$

Luego, sumando (2.28) y (2.41), se obtiene

$$\left(2 + \frac{C_3}{C_2}\right) \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}} \geq C_3 \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.42)$$

De esta forma, (2.41) y (2.42) implican (2.40) con $\bar{\beta}$ que depende sólo de C_1 , C_2 , C_3 , y C_4 . \square

La coercividad discreta de \mathbf{a} se muestra a continuación.

Lema 2.4.4 *Sea $\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_h : \mathbf{b}(\mathbf{v}, (q, \xi)) = 0 \ \forall (q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}\}$. Entonces, existe $\bar{\alpha} > 0$, independiente de h_1 , h_2 , y \tilde{h} , tal que*

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \bar{\alpha} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h. \quad (2.43)$$

Demostración. Análoga a la demostración del Lema 2.2.2 pero observando ahora que $\mathbf{Q}_h = \mathbf{Q}_{h,0} \oplus \mathbb{R}$ y que $\mathbb{R} \subseteq \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$. Omitimos los detalles restantes. \square

A continuación, establecemos la existencia, unicidad y estabilidad del esquema de Galerkin (2.15) y proporcionamos la estimación de error a priori respectiva.

Teorema 2.4.1 *Sean $C_0 \in (0, 1)$ y $h_0 > 0$ las constantes dadas por los Lemas 2.3.1 y 2.4.3, respectivamente. Entonces, para todo $h_2 \leq \min\{h_0, C_0 \tilde{h}\}$ existe una única solución $(\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}})) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$ de (2.15). Además, existe $\bar{C} > 0$, que depende de $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}$, y de las constantes de acotamiento de \mathbf{a} y \mathbf{b} , tal que*

$$\|(\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}}))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \leq \bar{C} \left\{ \|\mathbf{f}_1\|_{[L^2(\Omega_1)]^2} + \|f_2\|_{L^2(\Omega_2)} \right\}.$$

También, existe $C > 0$, independientemente de h_1 , h_2 , y \tilde{h} , tal que se cumple

$$\|(\mathbf{u}, (p, \lambda)) - (\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}}))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \leq C \inf_{(\mathbf{v}_h, (q_h, \xi_{\tilde{h}})) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}} \|(\mathbf{u}, (p, \lambda)) - (\mathbf{v}_h, (q_h, \xi_{\tilde{h}}))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}}.$$

Demostración. Se sigue de los Lemas 2.4.3, 2.4.4, 2.2.1, y 2.2.2, y de la teoría de Babuška-Brezzi. \square

Recordamos ahora las propiedades de aproximación de los subespacios empleados en la definición del esquema de Galerkin (2.15) (ver, e.g. [2], [6], [7], [18]):

(AP $_{h_1}$) Para todo $\mathbf{v}_1 \in [H^2(\Omega_1)]^2$, se cumple que

$$\|\mathbf{v}_1 - \Pi_1(\mathbf{v}_1)\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} \leq C h_1 \|\mathbf{v}_1\|_{[H^2(\Omega_1)]^2}.$$

(AP_{h₂}) Para todo $\boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega_2)]^2$ con $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in H^1(\Omega_2)$, se cumple que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_2(\boldsymbol{\tau})\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_2)} \leq C h_2 \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(\Omega_2)]^2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{H^1(\Omega_2)} \right\}.$$

(AP_{h,0}) Para todo $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, existe $q_h \in \mathbf{Q}_{h,0}$ tal que

$$\|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h \|q\|_{H^1(\Omega)}.$$

(AP_{h̃}) Para todo $\xi \in H^{3/2}(\Gamma_2)$, existe $\xi_{\tilde{h}} \in \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$ tal que

$$\|\xi - \xi_{\tilde{h}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \leq C \tilde{h} \|\xi\|_{H^{3/2}(\Gamma_2)}.$$

El siguiente teorema entrega el orden de convergencia de nuestro método de elementos finitos mixtos.

Teorema 2.4.2 Sean $C_0 \in (0, 1)$ y $h_0 > 0$ las constantes proporcionadas por los Lemas 2.3.1 y 2.4.3, respectivamente, y sean $(\mathbf{u}, (p, \lambda)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$, con $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, y $(\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}})) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$ las únicas soluciones de las formulaciones mixtas continua y discreta (2.6) y (2.15), respectivamente. Asumamos que $\mathbf{u}_1 \in [H^{1+r}(\Omega_1)]^2$, $\mathbf{u}_2 \in [H^r(\Omega_2)]^2$, $\operatorname{div}(\mathbf{u}_2) \in H^r(\Omega_2)$, $p \in H^r(\Omega)$, y $\lambda \in H^{r+1/2}(\Gamma_2)$, para algún $r \in (0, 1]$. Entonces existe $C > 0$, independiente de h_1 , h_2 , y \tilde{h} , tal que para todo $h_2 \leq \min\{h_0, C_0 \tilde{h}\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u}, (p, \lambda)) - (\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}}))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \leq C h^r \left\{ \|\mathbf{u}_1\|_{[H^{1+r}(\Omega_1)]^2} + \|\mathbf{u}_2\|_{[H^r(\Omega_2)]^2} \right. \\ & \left. + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_2\|_{H^r(\Omega_2)} + \|p\|_{H^r(\Omega)} \right\} + C \tilde{h}^r \|\lambda\|_{H^{r+1/2}(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

Demostración. Se sigue de la estimación de Cea del Teorema 2.4.1, las propiedades de aproximación anteriores, y los teoremas de interpolación respectivos para los espacios de Sobolev involucrados.

□

Capítulo 3

Resultados numéricos del análisis a priori

En esta sección presentamos dos ejemplos que ilustran el buen funcionamiento de nuestro esquema conforme de elementos finitos mixtos (2.15) sobre un conjunto de triangulaciones uniformes del dominio. Comenzamos introduciendo algunas notaciones. La variable N corresponde al número de grados de libertad que definen los subespacios de elementos finitos \mathbf{H}_h y $\mathbf{Q}_{h,\tilde{h}}$, y los errores individuales se denotan por:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) &:= \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1,h}\|_{[H^1(\Omega_1)]^2}, & \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) &:= \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2,h}\|_{H(\operatorname{div};\Omega_2)}, \\ \mathbf{e}(p) &:= \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}, & \mathbf{e}(\lambda) &:= \|\lambda - \lambda_{\tilde{h}}\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}_h := (\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}) \in \mathbf{H}_h$. Experimentalmente, $\mathbf{e}(\lambda)$ se estima por

$$\sqrt{\|\lambda - \lambda_{\tilde{h}}\|_{H^1(\Gamma_2)} \|\lambda - \lambda_{\tilde{h}}\|_{L^2(\Gamma_2)}}.$$

Además, $r(\mathbf{u}_1)$, $r(\mathbf{u}_2)$, $r(p)$, y $r(\lambda)$ denotan los órdenes de convergencia experimentales dados por

$$\begin{aligned} r(\mathbf{u}_1) &:= \frac{\log(\mathbf{e}(\mathbf{u}_1)/\mathbf{e}'(\mathbf{u}_1))}{\log(h/h')}, & r(\mathbf{u}_2) &:= \frac{\log(\mathbf{e}(\mathbf{u}_2)/\mathbf{e}'(\mathbf{u}_2))}{\log(h/h')}, \\ r(p) &:= \frac{\log(\mathbf{e}(p)/\mathbf{e}'(p))}{\log(h/h')}, & r(\lambda) &:= \frac{\log(\mathbf{e}(\lambda)/\mathbf{e}'(\lambda))}{\log(\tilde{h}/\tilde{h}')}, \end{aligned}$$

donde h y h' (resp. \tilde{h} y \tilde{h}') denotan dos tamaños de malla consecutivos con errores \mathbf{e} y \mathbf{e}' .

A continuación describimos los datos utilizados en los ejemplos. En ambos casos elegimos $\mu = 1$, $\kappa = 1$, y $\mathbf{K} = \mathbf{I}$, la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. También, consideramos los

dominios $\Omega_2 :=] - 1/2, 1/2[\times] - 1/2, 1/2[$ y $\Omega_1 :=] - 1, 1[\times] - 1, 1[\setminus \Omega_2$. Los datos \mathbf{f}_1 y f_2 se eligen de modo que las soluciones exactas están dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{u}_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 20(x_1^2 - \frac{1}{4})^4 (x_1^2 - 1)^2 x_2 (3x_2^2 - \frac{9}{4})(x_2^2 - 1)(x_2^2 - \frac{1}{4})^3 \\ 20x_1 (3x_1^2 - \frac{9}{4})(x_1^2 - 1)(x_1^2 - \frac{1}{4})^3 (x_2^2 - \frac{1}{4})^4 (x_2^2 - 1)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \pi \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_1) \\ \pi \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \end{pmatrix},$$

$$p(x_1, x_2) = -\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

y

$$\mathbf{u}_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \pi \sin^2(\pi x_1) \cos^4(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos^3(\pi x_2) (1 - 3 \sin^2(\pi x_2)) \\ -\pi \sin^2(\pi x_2) \cos^4(\pi x_2) \sin(\pi x_1) \cos^3(\pi x_1) (1 - 3 \sin^2(\pi x_1)) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -(2x_1 - 1)(2x_1 + 1)(20x_1^2 - 4x_1 - 1) \\ -(2x_2 - 1)(2x_2 + 1)(20x_2^2 + 4x_2 - 1) \end{pmatrix},$$

$$p(x_1, x_2) = -\left(x_1^2 - \frac{1}{4}\right)^2 (-4x_1 + 1) - \left(x_2^2 - \frac{1}{4}\right)^2 (-4x_2 - 1),$$

para los Ejemplos 1 y 2 respectivamente

Observemos que las soluciones de ambos ejemplos tienen comportamientos oscilantes.

Los resultados numéricos que se muestran a continuación fueron obtenidos en un *computador Pentium Xeon con procesadores duales*, usando un código Matlab. De acuerdo a la hipótesis establecida en el Teorema 2.4.1 para los tamaños de malla h_2 y \tilde{h} , a saber $h_2 \leq C_0 \tilde{h}$, y dado que la constante $C_0 \in (0, 1)$ no se conoce explícitamente, tomamos un vértice de la partición independiente $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ cada dos vértices de \mathcal{T}_2 sobre Γ_2 , con lo cual aseguramos que $h_2 \leq \frac{1}{2} \tilde{h}$. Como veremos a continuación, esta elección presenta un buen comportamiento en ambos ejemplos. Además, no fue necesario tomar valores de h_2 suficientemente pequeños (como sugiere técnicamente la desigualdad $h_2 \leq h_0$ del Teorema 2.4.1) dado que el esquema discreto obtenido resulta ser bien propuesto para los grados de libertad empleados.

En las Tablas 3.1 y 3.2 presentamos la secuencia de errores de cada ejemplo con sus respectivos órdenes de convergencia para un conjunto de triangulaciones uniformes del dominio $\bar{\Omega}$. Podemos observar que el error dominante en el Ejemplo 1 está dado por $\mathbf{e}(\mathbf{u}_2)$, mientras que $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1)$ y $\mathbf{e}(\mathbf{u}_2)$ lo son en el Ejemplo 2. Además, en el Ejemplo 2, $\mathbf{e}(p)$ tiene

un decaimiento más rápido que $O(h)$ al comienzo, pero se estabiliza rápidamente en torno al $O(h)$. Observamos que los órdenes de convergencia $O(h)$ y $O(\tilde{h})$ proporcionados por el Teorema 2.4.2 (cuando $r = 1$) son alcanzados por las incógnitas correspondientes. Es importante mencionar que la convergencia del multiplicador de Lagrange λ en el Ejemplo 1, la cual se muestra en la Tabla 3.1, presenta un perfecto $O(\tilde{h})$. Los órdenes de convergencia experimentales se verifican gráficamente en las Figuras 3.1 y 3.8 donde mostramos los tamaños de malla h y los errores $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{e}(\mathbf{u}_2)$, y $\mathbf{e}(p)$ vs. los grados de libertad N . En particular, vemos en estas figuras que la curva de $\mathbf{e}(\mathbf{u}_2)$ está por sobre las otras en el Ejemplo 1, mientras que las curvas de $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1)$ y $\mathbf{e}(\mathbf{u}_2)$ casi no se distinguen una de la otra en el Ejemplo 2. También, de la Figura 3.2 a la 3.7 (de la Figura 3.9 a la 3.14, respectivamente) exhibimos las soluciones aproximadas (para $N = 53185$) y exactas del Ejemplo 1 (resp. Ejemplo 2). Podemos ver que en ambos ejemplos, las funciones constantes a trozo realizan una buena aproximación de la presión en el dominio Ω , y que el subespacio de Bernardi-Raugel proporciona una aproximación perfecta de la velocidad en el fluido Ω_1 , la cual no se ve afectada por las fuertes oscilaciones de \mathbf{u}_1 . Similarmente, el subespacio de Raviart-Thomas realiza una muy buena reconstrucción de la velocidad en el medio poroso Ω_2 . Quizás, como podemos ver en las Figuras 3.12 y 3.13 en el Ejemplo 2, esta reconstrucción es un poco menos exacta en aquellas regiones de alto gradiente. Sin embargo, esto puede mejorarse aplicando un algoritmo de adaptatividad basado en un estimador de error a posteriori conveniente. Finalmente, podemos ver de las Figuras 3.7 y 3.14, que las funciones continuas y lineales a trozos aproximan de manera bastante exacta la traza λ de la presión en la interface Γ_2 .

En resumen, los resultados numéricos entregados ilustran el buen funcionamiento de nuestro esquema de elementos finitos mixtos y confirman los órdenes de convergencia teóricos.

Tabla 3.1: grados de libertad, tamaños de malla, errores, y órdenes de convergencia
(EJEMPLO 1)

| N | h | $e(\mathbf{u}_1)$ | $r(\mathbf{u}_1)$ | $e(\mathbf{u}_2)$ | $r(\mathbf{u}_2)$ | $e(p)$ | $r(p)$ | \tilde{h} | $e(\lambda)$ | $r(\lambda)$ |
|--------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------|--------|-------------|--------------|--------------|
| 409 | 0.353 | 0.0794 | — | 2.6019 | — | 0.2663 | — | 0.500 | 1.1220 | — |
| 1649 | 0.176 | 0.0392 | 1.018 | 1.3117 | 0.988 | 0.1314 | 1.019 | 0.250 | 0.4995 | 1.043 |
| 13281 | 0.062 | 0.0151 | 0.917 | 0.4734 | 0.979 | 0.0463 | 1.003 | 0.125 | 0.2450 | 1.013 |
| 53185 | 0.031 | 0.0078 | 0.950 | 0.2369 | 0.997 | 0.0232 | 0.994 | 0.062 | 0.1202 | 1.004 |
| 106369 | 0.022 | 0.0056 | 0.960 | 0.1645 | 1.057 | 0.0164 | 1.005 | 0.031 | 0.0600 | 1.000 |

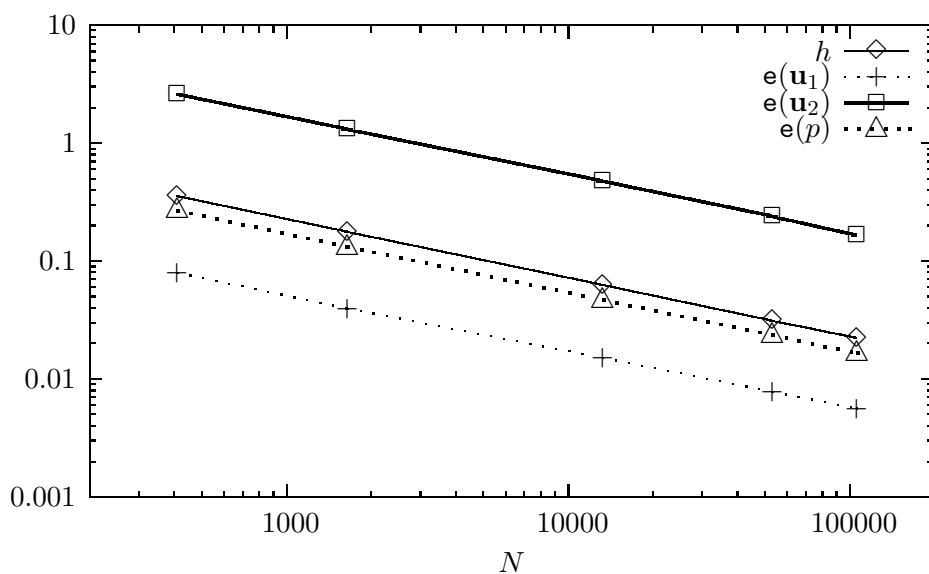


Figura 3.1: tamaños de malla h y errores vs. grados de libertad N (EJEMPLO 1)

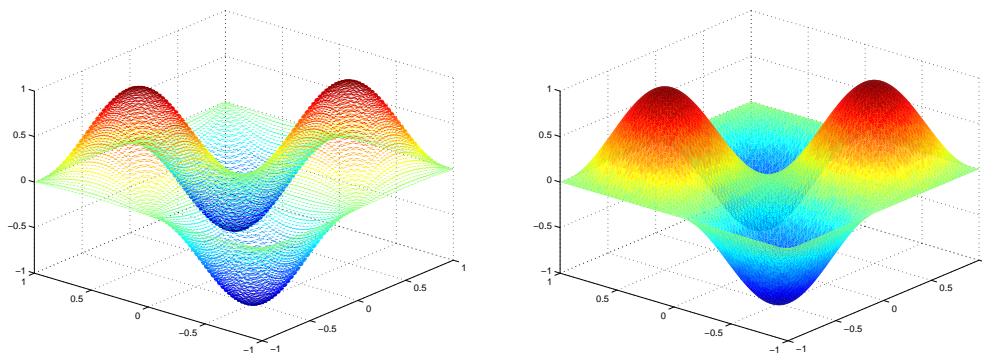


Figura 3.2: p_h y p (EJEMPLO 1)

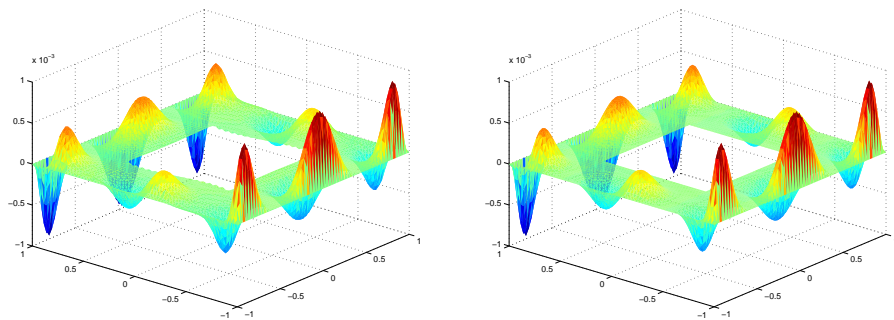


Figura 3.3: primera componente de $\mathbf{u}_{1,h}$ y \mathbf{u}_1 (EJEMPLO 1)

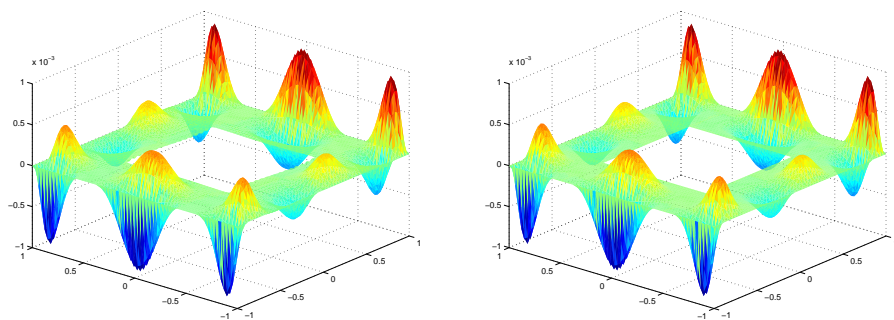


Figura 3.4: segunda componente de $\mathbf{u}_{1,h}$ y \mathbf{u}_1 (EJEMPLO 1)

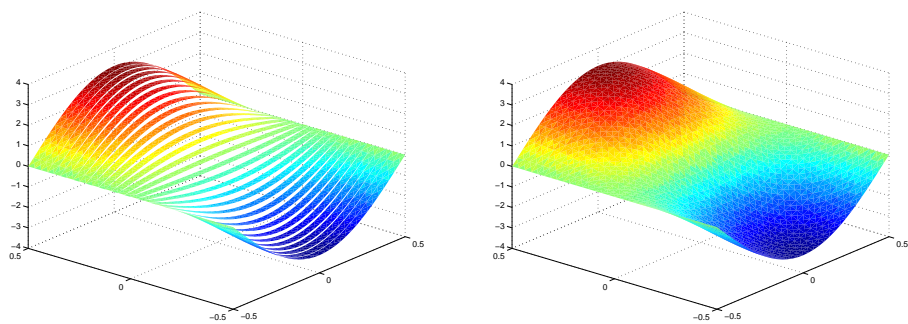


Figura 3.5: primera componente de $\mathbf{u}_{2,h}$ y \mathbf{u}_2 (EJEMPLO 1)

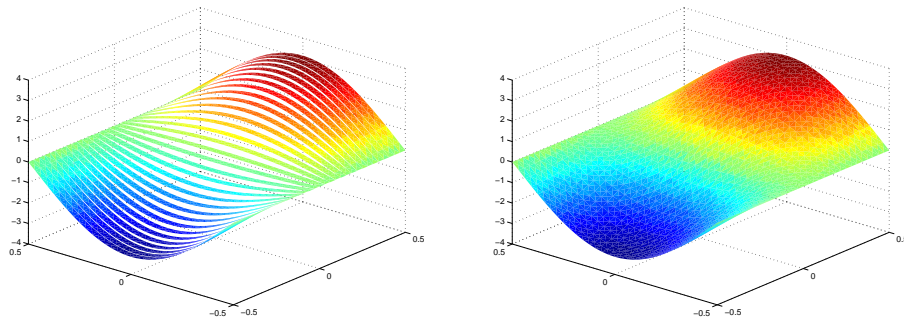


Figura 3.6: segunda componente de $\mathbf{u}_{2,h}$ y \mathbf{u}_2 (EJEMPLO 1)

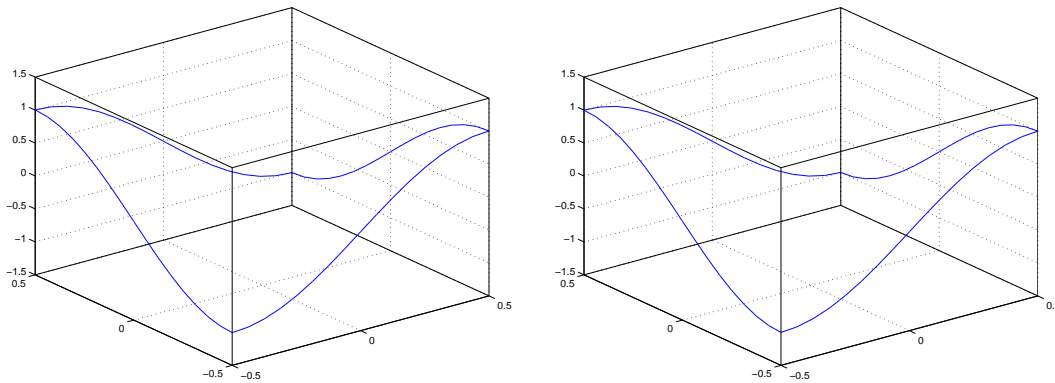


Figura 3.7: $\lambda_{\tilde{h}}$ y λ (EJEMPLO 1)

Tabla 3.2: grados de libertad, tamaños de malla, errores, y órdenes de convergencia
(EJEMPLO 2)

| N | h | $e(\mathbf{u}_1)$ | $r(\mathbf{u}_1)$ | $e(\mathbf{u}_2)$ | $r(\mathbf{u}_2)$ | $e(p)$ | $r(p)$ | \tilde{h} | $e(\lambda)$ | $r(\lambda)$ |
|--------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------|--------|-------------|--------------|--------------|
| 409 | 0.353 | 1.7255 | — | 1.6828 | — | 1.7461 | — | 0.500 | 0.1504 | — |
| 1649 | 0.176 | 0.9305 | 0.890 | 0.8635 | 0.962 | 0.3951 | 2.143 | 0.250 | 0.0951 | 0.661 |
| 13281 | 0.062 | 0.3274 | 1.004 | 0.3059 | 0.998 | 0.1630 | 0.851 | 0.125 | 0.0423 | 1.168 |
| 53185 | 0.031 | 0.1637 | 0.997 | 0.1534 | 0.993 | 0.0796 | 1.031 | 0.062 | 0.0202 | 1.063 |
| 106369 | 0.022 | 0.1225 | 0.840 | 0.1088 | 0.996 | 0.0543 | 1.109 | 0.031 | 0.0108 | 0.903 |

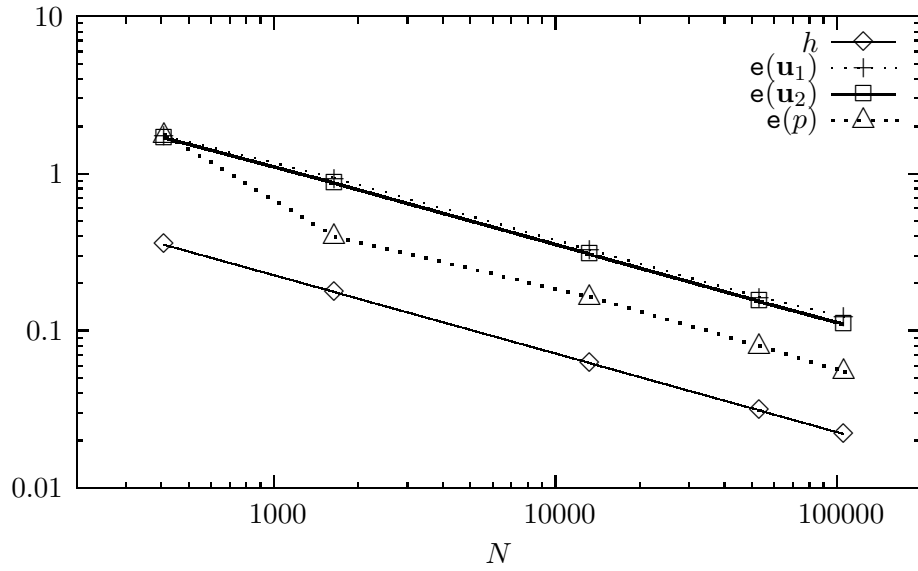


Figura 3.8: tamaños de malla h y errores vs. grados de libertad N (EJEMPLO 2)

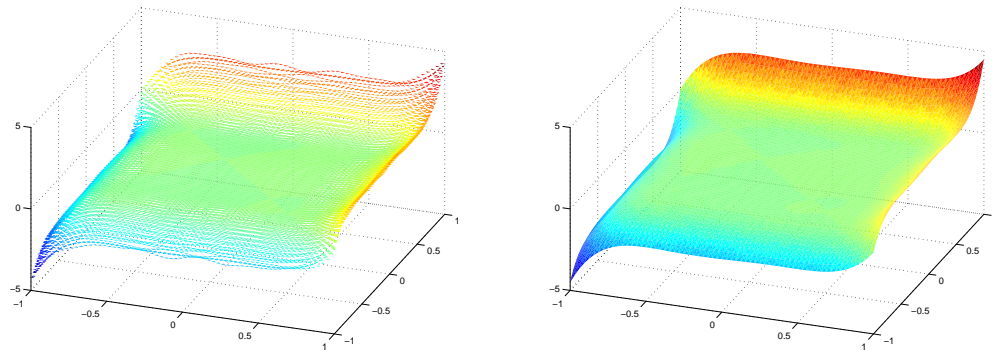


Figura 3.9: p_h y p (EJEMPLO 2)

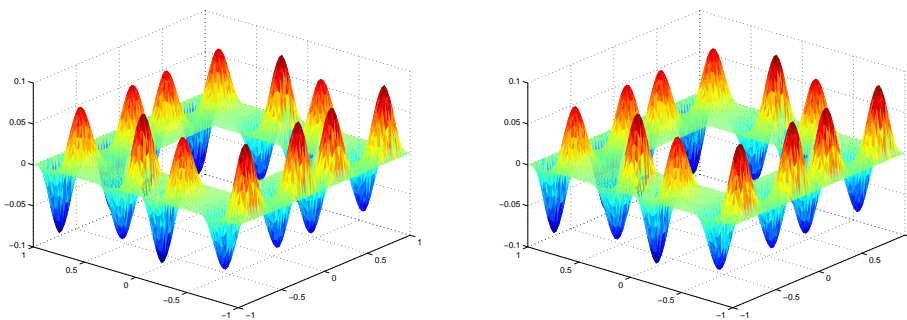


Figura 3.10: primera componente de $\mathbf{u}_{1,h}$ y \mathbf{u}_1 (EJEMPLO 2)

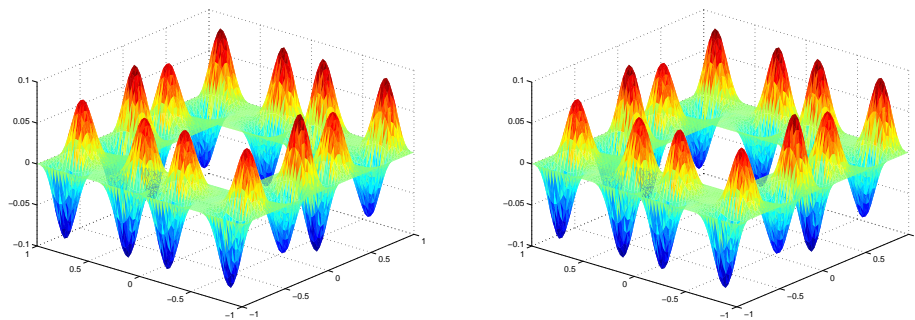


Figura 3.11: segunda componente de $\mathbf{u}_{1,h}$ y \mathbf{u}_1 (EJEMPLO 2)

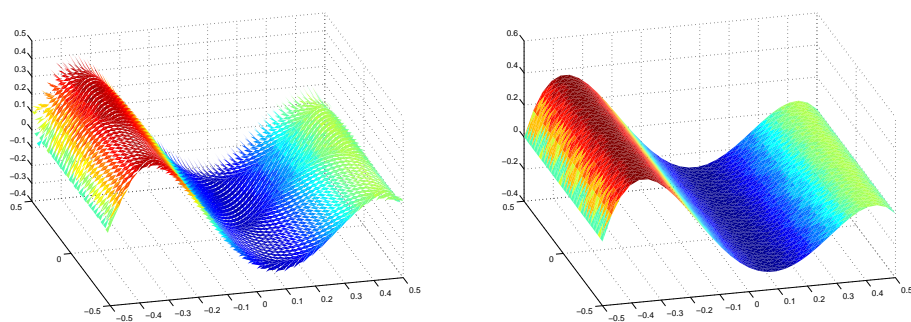


Figura 3.12: primera componente de $\mathbf{u}_{2,h}$ y \mathbf{u}_2 (EJEMPLO 2)

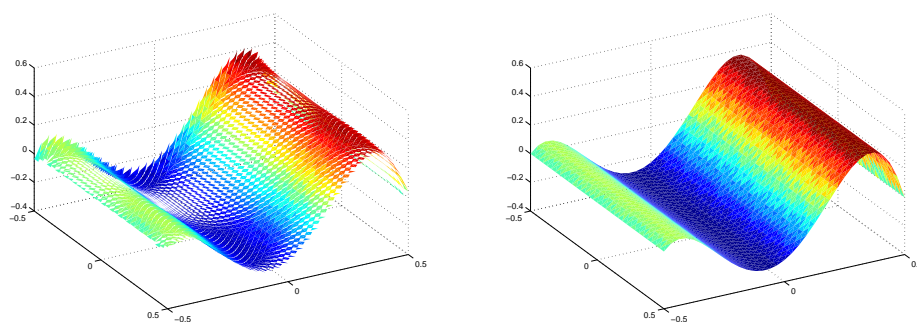


Figura 3.13: segunda componente de $\mathbf{u}_{2,h}$ y \mathbf{u}_2 (EJEMPLO 2)

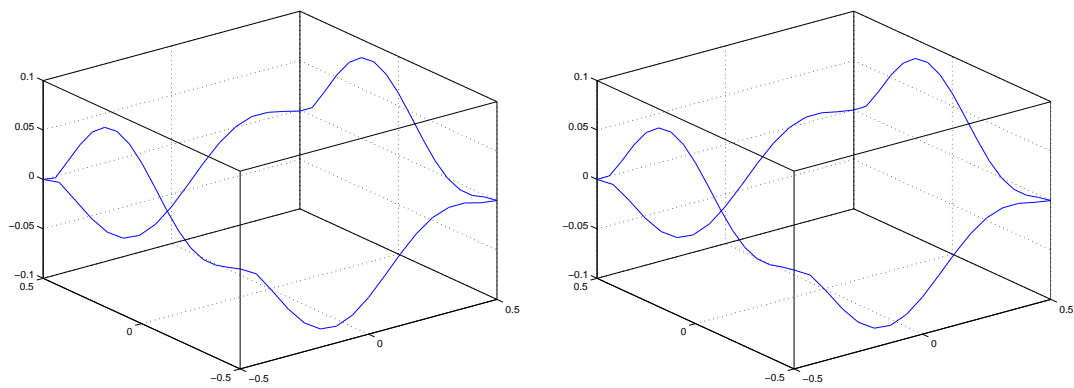


Figura 3.14: $\lambda_{\tilde{h}}$ y λ (EJEMPLO 2)

Capítulo 4

Análisis de error a posteriori

4.1. Introducción

Para garantizar una buena convergencia del método de elementos finitos mixtos (2.15) es conveniente aplicar un algoritmo adaptativo basado en un estimador de error a posteriori, que nos permita refinar aquellos elementos de la triangulación en los que se comete un mayor error. Para tal efecto, a continuación desarrollamos un análisis de error a posteriori de nuestro esquema discreto. En lo que sigue se asume, mas generalmente, que las condiciones de transmisión sobre la interfase Γ_2 no son necesariamente homogéneas. En otras palabras, supondremos que existen funciones $g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ y $g_3 \in L^2(\Gamma_2)$, tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\nu} &:= g_1 && \text{en } \Gamma_2, \\ -(\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} - p_2 &:= g_2 && \text{en } \Gamma_2, \end{aligned}$$

y

$$-\frac{\kappa}{\mu} (\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{t} - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t} := g_3 \quad \text{en } \Gamma_2.$$

Se sigue que nuestras nuevas formulaciones mixtas continua y discreta, están dadas, respectivamente por: Encontrar $(\mathbf{u}, (p, \lambda)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p, \lambda)) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} g_3(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}) \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, (q, \xi)) &= - \int_{\Omega_2} f_2 q + \int_{\Gamma_2} \xi g_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

para todo $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{H}$, para todo $(q, \xi) \in \mathbf{Q}$, y: Encontrar $(\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\bar{h}})) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{h, \bar{h}}$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p_h, \lambda_{\tilde{h}})) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} g_3(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}) \\
\mathbf{b}(\mathbf{u}_h, (q, \xi)) &= - \int_{\Omega_2} f_2 q + \int_{\Gamma_2} \xi g_1
\end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{H}_h$, para todo $(q, \xi) \in \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$, donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son las formas bilineales definidas en (2.7). El análisis de existencia y unicidad de ambas formulaciones es análogo al desarrollado para el esquema (2.6), dado que los lados derechos de (4.1) y de (4.2) definen funcionales lineales y acotados sobre $\mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ y $\mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{h, \tilde{h}}$, respectivamente.

Introducimos a continuación algunas notaciones. Denotamos por $E(T)$ al conjunto de lados de un triángulo $T \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$. Además, se definen los conjuntos

$$E_{h_1} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_1} E(T), \quad E_{h_2} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_2} E(T), \quad E_h := E_{h_1} \cup E_{h_2},$$

$$E_h(\Gamma_1) := \{e \in E_h : e \subset \Gamma_1\} \quad \text{y} \quad E_h(\Gamma_2) := \{e \in E_h : e \subset \Gamma_2\}.$$

Es claro que $E_h = E_{h_1} \cup E_{h_2} \cup E_h(\Gamma_1) \cup E_h(\Gamma_2)$. Denotamos también por $N(T)$ al conjunto de vértices de un triángulo $T \in \mathcal{T}$, y por $N(e)$ al conjunto de vértices de un lado $e \in E_h$. Entonces, definamos

$$\omega_T = \bigcup_{N(T) \cap N(T') \neq \emptyset} T' \quad \text{y} \quad \omega_e = \bigcup_{N(e) \cap N(T') \neq \emptyset} T'.$$

Finalmente, dado un triángulo $T \in \mathcal{T}$ y un lado $e \in E_h$, h_e es la longitud de e , $\boldsymbol{\nu}_T$ el vector normal unitario exterior a T , y $\boldsymbol{\nu}_e$, el vector unitario normal a e , el cual coincide con $\boldsymbol{\nu}$ para cada lado $e \in E_h(\Gamma_2)$. Luego, para todo \mathbf{A} suficientemente regular, $[\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}_e]$ denota el salto de \mathbf{A} sobre e , esto es $[\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}_e] = \mathbf{A}|_T \boldsymbol{\nu}_e - \mathbf{A}|_{T'} \boldsymbol{\nu}_e$, con $e \in E(T) \cap E(T')$.

4.2. El estimador de error a posteriori

El siguiente teorema nos entrega las propiedades de aproximación del interpolante de Clément \mathbf{I}_{h_1} , las cuales se utilizarán posteriormente.

Teorema 4.2.1 *Sea \mathbf{I}_{h_1} el interpolante de Clément definido en la Sección 1.2. Entonces, existe una constante $C_1 > 0$ tal que para todo $T \in \mathcal{T}_1$, y para todo $l, m \in \mathbb{N}$ con $0 \leq l \leq m \leq 1$, se tiene*

$$|\mathbf{v} - \mathbf{I}_{h_1} \mathbf{v}|_{l,T} \leq C_1 h_T^{m-l} |\mathbf{v}|_{[H^m(\omega_T)]^2} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^m(\omega_T)]^2. \tag{4.3}$$

Además, existe una constante $C_2 > 0$ tal que para todo $e \subset \partial T$ se tiene

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_{h_1} \mathbf{v}\|_{L^2(e)} \leq C_2 h_e^{1/2} |\mathbf{v}|_{[H^1(\omega_e)]^2} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(\omega_T)]^2. \quad (4.4)$$

Dem: Ver [9]

Los siguientes lemas proporcionan resultado previos que serán utilizados en la demostración del teorema principal (ver Teorema 4.2.2).

Lema 4.2.1 *Sea \mathbf{I}_{h_1} el interpolante de Clément definido en la Sección 1.2. Existe entonces una constante $C_3 > 0$ tal que para todo $\mathbf{v}_1 \in [H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2$ se tiene*

$$G_1(\mathbf{v}_1) := \mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, (\mathbf{v}_1, 0)) + \mathbf{b}((\mathbf{v}_1, 0), (p - p_h, \lambda - \lambda_{\tilde{h}})) \leq C_3 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \eta_{1,T}^2 \right\}^{1/2} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega_1)]^2}$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_{1,T}^2 &= h_T^2 \|\mathbf{f}_1 + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{1,h}\|_{[L^2(T)]^2}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_{h_1}} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}_e\|_{[L^2(e)]^2}^2 \\ &+ \sum_{e \in E(T) \cap E_h(\Gamma_2)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda_{\tilde{h}} + g_2\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_h(\Gamma_2)} h_e \left\| \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} g_3 \right\|_{L^2(e)}^2 \end{aligned}$$

$$\text{y } \boldsymbol{\sigma}_{1,h} = 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h}) - p_h \mathbf{I}.$$

Demostración: Observemos que $\mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1) \in \mathbf{H}_h \forall \mathbf{v}_1 \in [H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)]^2$ y luego, de (4.1) y (4.2)

se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}_h, (\mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1), 0)) + \mathbf{b}(\mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1), (p_h, \lambda_{\tilde{h}})) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1) \\ &- \int_{\Gamma_2} g_2 \mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} g_3 \mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Luego, sumando y restando $\mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1)$ en G_1 y considerando (4.5) obtenemos que:

$$G_1(\mathbf{v}_1) = \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 - 2\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h}) : \mathbf{e}(\bar{\mathbf{v}}_1) - \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} \{(\mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t}) + g_3\} (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{t}) \quad (4.6)$$

$$+ \int_{\Omega_2} p_h \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_1 - \int_{\Gamma_2} (\lambda_{\tilde{h}} + g_2) (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad (4.7)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{I}_{h_1}(\mathbf{v}_1)$. Ahora, gracias a la simetría de \mathbf{e} , es claro que

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h}) : \mathbf{e}(\bar{\mathbf{v}}_1) = \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h}) : \nabla \bar{\mathbf{v}}_1 \quad (4.8)$$

Además,

$$\int_{\Omega_1} p_h \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_1 = \int_{\Omega_1} p_h \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\bar{\mathbf{v}}_1)) = \int_{\Omega_1} p_h \mathbf{I} : \mathbf{e}(\bar{\mathbf{v}}_1) = \int_{\Omega_1} p_h \mathbf{I} : \nabla \bar{\mathbf{v}}_1, \quad (4.9)$$

y así, de (4.8) y (4.9), se sigue, integrando por partes, que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} p_h \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_1 - 2\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h}) : \mathbf{e}(\bar{\mathbf{v}}_1) = \int_{\Omega_1} \{p_h \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h})\} : \nabla \bar{\mathbf{v}}_1 \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \left\{ - \int_T \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \operatorname{div} (p_h \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h})) + \int_{\partial T} \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot ((p_h \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h})) \boldsymbol{\nu}_T) \right\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 - 2\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h}) : \mathbf{e}(\bar{\mathbf{v}}_1) + \int_{\Omega_1} p_h \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_1 = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \int_T (\mathbf{f}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{1,h}) \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 - \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \int_{\partial T} \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}_T) \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \int_T (\mathbf{f}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{1,h}) \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 - \sum_{e \in E_{h_1}} \int_e \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot [(\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}_e)] - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}_e), \quad (4.10) \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{\sigma}_{1,h} = 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}_{1,h}) - p_h \mathbf{I}$. Ahora, separando $\bar{\mathbf{v}}_1$ en sus componentes normal y tangencial en cada lado $e \in E_h(\Gamma_2)$ y recordando que $\boldsymbol{\nu}_e = \boldsymbol{\nu}$ en Γ_2 , obtenemos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}) = - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e \{(\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}\} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}) \\ & = - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) (\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{t}) (\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t}), \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} & - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}) - \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t} + g_3) (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{t}) - \int_{\Gamma_2} (\lambda_{\tilde{h}} + g_2) (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}). \\ & = - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) \{ \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda_{\tilde{h}} + g_2 \} - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{t}) \left\{ \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} (\mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t}) + \frac{\mu}{\kappa} g_3 \right\}. \quad (4.11) \end{aligned}$$

De esta forma, de (4.10) y (4.11) se deduce que

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}_1) & = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \int_T (\mathbf{f}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{1,h}) \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 - \sum_{e \in E_{h_1}} \int_e \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot [(\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}_e)] - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}) \{ \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda_{\tilde{h}} + g_2 \} \\ & \quad - \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e (\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{t}) \left\{ \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} (\mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t}) + \frac{\mu}{\kappa} g_3 \right\}. \end{aligned}$$

Así, utilizando las desigualdades (4.3) y (4.4), obtenemos finalmente que:

$$\begin{aligned}
|G(\mathbf{v}_1)| &\leq C_3 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_1} h_T \|\mathbf{f}_1 + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{1,h}\|_{[L^2(T)]^2} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\omega_T)]^2} \right. \\
&+ \sum_{e \in E_{h_1}} h_e^{1/2} \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}_e\|_{[L^2(e)]^2} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\omega_e)]^2} + \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} h_e^{1/2} \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda_{\tilde{h}} + g_2\|_{L^2(e)} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\omega_e)]^2} \\
&\left. + \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} h_e^{1/2} \left\| \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} (\mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t}) + \frac{\mu}{\kappa} g_3 \right\|_{L^2(e)} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\omega_e)]^2} \right\} \\
&\leq C_3 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \eta_{1,T}^2 \right\}^{1/2} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega_1)]^2},
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\eta_{1,T}^2 &= h_T^2 \|\mathbf{f}_1 + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{1,h}\|_{[L^2(T)]^2}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_{h_1}} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}_e\|_{[L^2(e)]^2}^2 \\
&+ \sum_{e \in E(T) \cap E_h(\Gamma_2)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda_{\tilde{h}} + g_2\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_h(\Gamma_2)} h_e \left\| \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} g_3 \right\|_{L^2(e)}^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 4.2.2 Sea $\varphi_{h_2} \in H^1(\Omega_2)$ tal que $\varphi_{h_2}(x) = \lambda_{\tilde{h}}(x) \forall x \in \mathcal{T}_2 \cap \Gamma_2$. Entonces, existe una constante $C_4 > 0$ tal que:

$$G_2(\mathbf{v}_2) := \mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, (0, \mathbf{v}_2)) + \mathbf{b}((0, \mathbf{v}_2), (p - p_h, \lambda - \lambda_{\tilde{h}})) \leq C_4 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_2} \eta_{2,T}^2 \right\}^{1/2} \|\mathbf{v}_2\|_{H(\text{div}, \Omega_2)}$$

para todo $\mathbf{v}_2 \in H(\text{div}, \Omega_2)$, donde

$$\eta_{2,T}^2 = \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{2,h} + \nabla \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)}^2 + \|p_h - \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E_h(\Gamma_2) \cap E(T)} \|\lambda_{\tilde{h}} - \varphi_{h_2}\|_{H_{00}^{1/2}(e)}^2.$$

Demostración: De (4.1) y (4.2) se tiene que

$$G_2(\mathbf{v}_2) := - \int_{\Omega_2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{2,h} \cdot \mathbf{v}_2 + \int_{\Omega_2} p_h \text{div} \mathbf{v}_2 + \int_{\Gamma_2} \lambda_{\tilde{h}} (\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}). \quad (4.12)$$

Luego, sumando y restando φ_{h_2} al segundo término de (4.12) e integrando por partes se tiene que:

$$\begin{aligned}
G_2(\mathbf{v}_2) &= - \int_{\Omega_2} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{2,h} + \nabla \varphi_{h_2}) \cdot \mathbf{v}_2 + \int_{\Omega_2} (p_h - \varphi_{h_2}) \text{div} \mathbf{v}_2 + \int_{\Gamma_2} (\lambda_{\tilde{h}} - \varphi_{h_2}) (\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}) \\
&= - \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_2}} \int_T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{2,h} + \nabla \varphi_{h_2}) \cdot \mathbf{v}_2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_2}} \int_T (p_h - \varphi_{h_2}) \text{div} \mathbf{v}_2 + \sum_{e \in E_h(\Gamma_2)} \int_e (\lambda_{\tilde{h}} - \varphi_{h_2}) (\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}),
\end{aligned}$$

y gracias a la continuidad de la traza de la componente normal, se sigue que:

$$\begin{aligned}
|G(\mathbf{v}_2)| &\leq C_4 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_2} (\|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{2,h} + \nabla \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)} + \|p_h - \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)}) \|\mathbf{v}_2\|_{H(\text{div}, T)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E_h(\Gamma_2) \cap E(T)} \|\lambda_{\tilde{h}} - \varphi_{h_2}\|_{H_{00}^{1/2}(e)} \|\mathbf{v}_2\|_{H(\text{div}, T)} \right\} \\
&\leq C_4 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_2} \eta_{2,T}^2 \right\}^{1/2} \|\mathbf{v}_2\|_{H(\text{div}, \Omega_2)},
\end{aligned}$$

con

$$\eta_{2,T}^2 = \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{2,h} + \nabla \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)}^2 + \|p_h - \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E_h(\Gamma_2) \cap E(T)} \|\lambda_{\tilde{h}} - \varphi_{h_2}\|_{H_{00}^{1/2}(e)}^2. \quad \square$$

Teorema 4.2.2 *Sea $\varphi_{h_2} \in H^1(\Omega_2)$ tal que $\varphi_{h_2} = \lambda_{\tilde{h}} \forall x \in \mathcal{T}_2 \cap \Gamma_2$. Entonces, existe una constante $C_5 > 0$, independiente de h_1, h_2 y \tilde{h} tal que:*

$$\|(\mathbf{u}, (p, \lambda)) - (\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}}))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{T}} \leq C_5 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{1,h}} \Theta_{1,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{2,h}} \Theta_{2,T}^2 \right\}^{1/2},$$

donde $\Theta_{1,T}$ y $\Theta_{2,T}$ están definidos, respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\Theta_{1,T}^2 &= h_T \|\mathbf{f}_1 + \text{div } \boldsymbol{\sigma}_{1,h}\|_{L^2(T)}^2 + \|\text{div } \mathbf{u}_{1,h}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_{h_1}(\Gamma_2)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(e)}^2 \\
&+ \sum_{e \in E(T) \cap E_{h_1}(\Gamma_2)} h_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + \lambda_{\tilde{h}} + g_2\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_{h_1}(\Gamma_2)} h_e \left\| \boldsymbol{\sigma}_{1,h} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u}_{1,h} \cdot \mathbf{t} + \frac{\mu}{\kappa} g_3 \right\|_{L^2(e)}^2 \\
&\quad + \sum_{e \in E(T) \cap E_{h_1}(\Gamma_2)} \tilde{h}_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h}(\mathbf{u}_{1,h} - \mathbf{u}_{2,h}) \cdot \boldsymbol{\nu} - g_1\|_{L^2(e)}^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

y

$$\begin{aligned}
\Theta_{2,T}^2 &= \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_{2,h} + \nabla \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)}^2 + \|p_h - \varphi_{h_2}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_h(\Gamma_2)} \|\lambda_{\tilde{h}} - \varphi_{h_2}\|_{H_{00}^{1/2}(e)}^2 \\
&+ \|\text{div } \mathbf{u}_{2,h} - f_2\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in E(T) \cap E_{h_1}(\Gamma_2)} \tilde{h}_e \|\boldsymbol{\sigma}_{1,h}(\mathbf{u}_{1,h} - \mathbf{u}_{2,h}) \cdot \boldsymbol{\nu} - g_1\|_{L^2(e)}^2,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $\tilde{h}_e = |\tilde{\gamma}_j|$ para $e \subseteq \tilde{\gamma}_j, j \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración: La dependencia continua dada por el Teorema 2.4.2 es equivalente a la condición inf-sup global para la formulación continua, y por lo tanto, existe $C > 0$ tal que:

$$\|(\mathbf{w}, (r, \mu))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \leq C \sup_{\substack{(\mathbf{v}, (q, \xi)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \\ \|(\mathbf{v}, (q, \xi))\| \leq 1}} \left\{ \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (r, \mu)) + b(\mathbf{w}, (q, \xi)) \right\} \quad (4.15)$$

para todo $(\mathbf{w}, (r, \mu)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$. En particular, para $(\mathbf{w}, (r, \mu)) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, (p - p_h, \lambda - \lambda_{\tilde{h}}))$, se tiene:

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, (p - p_h, \lambda - \lambda_{\tilde{h}}))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \\ & \leq C \sup_{\substack{(\mathbf{v}, (q, \xi)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \\ \|(\mathbf{v}, (q, \xi))\| \leq 1}} |\mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p - p_h, \lambda - \lambda_{\tilde{h}})) + \mathbf{b}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, (q, \xi))|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Luego, dado $(\mathbf{v}, (q, \xi)) = ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (q, \xi)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ tal que $\|(\mathbf{v}, (q, \xi))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \leq 1$, de los lemas anteriores se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p - p_h, \lambda - \lambda_{\tilde{h}}))| = |G_1(\mathbf{v}_1) + G_2(\mathbf{v}_2)| \\ & \leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \eta_{1,T}^2 \right\}^{1/2} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} + \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_2} \eta_{2,T}^2 \right\}^{1/2} \|\mathbf{v}_2\|_{H(\text{div}, \Omega_2)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

con G_1 y G_2 , las funciones dadas en los lemas anteriores. Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, (q, \xi))| & = \left| - \int_{\Omega_2} f_2 q + \int_{\Omega_1} q \operatorname{div} \mathbf{u}_{1,h} + \int_{\Omega_2} q \operatorname{div} \mathbf{u}_{2,h} - \int_{\Gamma_2} \xi (\mathbf{u}_{1,h} - \mathbf{u}_{2,h} - g_1) \cdot \boldsymbol{\nu} \right| \\ & \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_2} \|f_2 - \operatorname{div} \mathbf{u}_{2,h}\|_{L^2(T)} \|q\|_{L^2(T)} \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_{1,h}\|_{L^2(T)} \|q\|_{L^2(T)} + \|(\mathbf{u}_{1,h} - \mathbf{u}_{2,h} - g_1) \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \|\xi\|_{1/2, \Gamma_2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

y del Lemma 3.4 de [8] se tiene que

$$\|(\mathbf{u}_{1,h} - \mathbf{u}_{2,h} - g_1) \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}^2 \leq \log(1 + \tilde{C}) \sum_{j=1}^m |\gamma_j| \|(\mathbf{u}_{1,h} - \mathbf{u}_{2,h} - g_1) \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(\gamma_j)}^2, \quad (4.19)$$

con $\tilde{C} = \left\{ \frac{|\gamma_i|}{|\gamma_j|}; |i - j| = 1 \right\}$. Así, de (4.16), (4.17), (4.18) y (4.19) obtenemos que

$$\|(\mathbf{u}, (p, \lambda)) - (\mathbf{u}_h, (p_h, \lambda_{\tilde{h}}))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{T}} \leq C_5 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{1,h}} \Theta_{1,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{2,h}} \Theta_{2,T}^2 \right\}^{1/2}$$

con $\Theta_{1,T}^2$ y $\Theta_{2,T}^2$ dados por (4.13) y (4.14), respectivamente. \square

Capítulo 5

Resultados numéricos del análisis a posteriori

En este capítulo consideramos cuatro ejemplos para ilustrar el buen funcionamiento del estimador de error a posteriori

$$\Theta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{1,h}} \Theta_{1,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_{2,h}} \Theta_{2,T}^2 \right\}^{1/2}.$$

Denotamos por:

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}(\mathbf{u}_1)^2 + \mathbf{e}(\mathbf{u}_2)^2 + \mathbf{e}(p)^2 + \mathbf{e}(\lambda)^2]^{1/2}$$

al error global, donde $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{e}(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{e}(p)$ y $\mathbf{e}(\lambda)$ son los errores individuales definidos en el Capítulo 3. Además, dadas dos triangulaciones consecutivas, con grados de libertad N y N' , y errores globales \mathbf{e} y \mathbf{e}' , el orden de convergencia experimental se define por

$$r(\mathbf{e}) := -2 \frac{\log(\mathbf{e}/\mathbf{e}')}{\log(N/N')}.$$

Por otro lado, el algoritmo utilizado para el proceso de refinamiento de mallas es el siguiente:

- 1) Comenzar con una malla \mathcal{T}_h .
- 2) Resolver el problema discreto para la malla actual \mathcal{T}_h .
- 3) calcular la función auxiliar φ_{h_2} .
- 4) Calcular Θ_T para cada triangulo $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_h$ donde $\Theta_T = \Theta_{i,T}$ cuando $T \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$.
- 5) Refinar cada $T \in \mathcal{T}_h$ cuyo indicador Θ_T satisface $\Theta_T \geq \frac{1}{2} \max\{\Theta_T : T \in \mathcal{T}\}$.
- 6) Definir la malla resultante como la actual e ir al paso 2.

En la implementación del estimador de error a posteriori, la función auxiliar $\varphi_{h_2} \in H^1(\Omega_2)$ se define de la siguiente forma: φ_{h_2} es la única función de $C(\bar{\Omega}_2)$ tal que $\varphi_{h_2}|_T \in \mathbf{P}_1(T)$, para todo $T \in \mathcal{T}_2$ y

$$\varphi_{h_2}(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{T \in \omega_x} |T| p_h|_T}{\sum_{T \in \omega_x} |T|} & \forall x \in \mathcal{N}_2, \\ \lambda_{\tilde{h}}(x) & \forall x \in \mathcal{N}_2 \cap \Gamma_2, \end{cases}$$

donde $\omega_x = \{T \in \mathcal{T}_2 : x \in N(T)\}$.

A continuación se detallan las soluciones exactas de cada ejemplo y sus respectivos dominios, eligiendo $\mu = 1$, $\kappa = 1$, y $\mathbf{K} = \mathbf{I}$, la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ para cada caso.

Ejemplo 1

$$\Omega_2 := \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[\times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[, \quad \Omega_1 :=] -1, 1[\times] -1, 1[- \bar{\Omega}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y) (x^2 - \frac{1}{4})^3 (y^2 - \frac{1}{4})^2 (\pi(y^2 - \frac{1}{4}) \cos(\pi y) + 3y \sin(\pi y)) \\ -\sin(\pi y)^2 \sin(\pi x) (x^2 - \frac{1}{4})^2 (y^2 - \frac{1}{4})^3 (\pi(x^2 - \frac{1}{4}) \cos(\pi x) + 3x \sin(\pi x)) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{6yx^2}{(x^2 + y^2 + 0,01)^4} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + 0,01)^3} \\ -x \\ \frac{-x}{(x^2 + y^2 + 0,01)^3} + \frac{6y^2x}{(x^2 + y^2 + 0,01)^4} \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = \frac{yx}{(x^2 + y^2 + 0,01)^3}.$$

Ejemplo 2

$$\Omega_2 := \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[\times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[, \quad \Omega_1 :=] -1, 1[\times] -1, 1[- \bar{\Omega}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} (x^2 - 1)^2 (x^2 - \frac{1}{4})^3 (y^2 - 1) (y^2 - \frac{1}{4})^2 \left(\frac{y(200y^2 - 140)}{((x-1)^2 + (y-1)^2 + 0,001)} - \frac{40(y^2 - 1)(y^2 - \frac{1}{4})(y-1)}{((x-1)^2 + (y-1)^2 + 0,001)^2} \right) \\ -(y^2 - 1)^2 (y^2 - \frac{1}{4})^3 (x^2 - 1) (x^2 - \frac{1}{4})^2 \left(\frac{x(200x^2 - 140)}{((x-1)^2 + (y-1)^2 + 0,001)} - \frac{40(x^2 - 1)(x^2 - \frac{1}{4})(x-1)}{((x-1)^2 + (y-1)^2 + 0,001)^2} \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(x + 2,001 + y)^2} + \frac{2(x + y + 2)}{(x + 2,001 + y)^3} + 0,6642269374x \\ -1 \\ \frac{-1}{(x + 2,001 + y)^2} + \frac{2(x + y + 2)}{(x + 2,001 + y)^3} \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = \frac{(x + y + 2)}{(x + 2,001 + y)^2} - 0,5787385322 - 0,3321134687x^2.$$

Ejemplo 3

$$\Omega_2 :=] - 1, 1[\times] - 1, 1[- \{ [0, 1] \times [0, 1] \}, \quad \Omega_1 :=] - 2, 2[\times] - 2, 2[- \bar{\Omega}_2,$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} (3\sin(\pi x) - \sin(3\pi x)) \left(\frac{3\pi(\cos(\pi y) - \cos(3\pi y))}{32(x^2 + y^2 + 0,01)^2} - \frac{(3\sin(\pi y) - \sin(3\pi y))y}{8(x^2 + y^2 + 0,01)^3} \right) \\ -(3\sin(\pi y) - \sin(3\pi y)) \left(\frac{3\pi(\cos(\pi x) - \cos(3\pi x)\pi)}{32(x^2 + y^2 + 0,01)^2} - \frac{(3\sin(\pi x) - \sin(3\pi x))x}{8(x^2 + y^2 + 0,01)^3} \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -3x^2 - 2x \\ -3y^2 \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 - 4/3.$$

Ejemplo 4

$$\Omega_2 :=] - 0,8, -0,2[\times] - 0,3, 0,3[, \quad \Omega_1 :=] - 1, 1[\times] - 1, 1[- \{ \bar{\Omega}_2 \cup [0, 1] \times [0, 1] \},$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{x^2(x^2 - 1)^2(x^2 + x + \frac{4}{25})^3 y(y^2 - 1)(y^2 - 0,09)^2(12y^4 - 8,54y^2 + 0,18)}{(x^2 + y^2 + 0,001)^{16/3}} \\ \frac{-y^2(y^2 - 1)^2(y^2 - 0,09)^3 x(x^2 - 1)(x^2 + x + \frac{4}{25})^2(2x^6 + 2x^5 + 8,32x^4 + 5x^3 - 5,68x^2 - 3x)}{(x^2 + y^2 + 0,001)^{16/3}} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{-32x^2 y^3 (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 (x^2 + x + \frac{4}{25})^3 (y^2 - 0,09)^3}{(x^2 + y^2 + 0,001)^{19/3}} \\ \frac{-32x^2 y^3 (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 (x^2 + x + \frac{4}{25})^3 (y^2 - 0,09)^3}{(x^2 + y^2 + 0,001)^{19/3}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\exp\{x + y\}(x + y) - \exp\{x + y\} + 1,949386442x \\ -\exp\{x + y\}(x + y) - \exp\{x + y\} \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = \exp\{x + y\}(x + y) + \frac{4}{3}\exp\{-2\} - 1,675102260 + \frac{2}{3}\exp\{1\} - 0,9746932208x^2.$$

Los resultados numéricos que se muestran a continuación fueron obtenidos en un computador *Pentium Xeon con procesadores duales*, usando un código Matlab.

En la Tablas 5.1 y 5.2 presentamos los errores, la eficiencia y la razón de convergencia para el refinamiento uniforme y adaptativo del Ejemplo 1. En este caso, la función considerada presenta una singularidad numérica en el punto $(0, 0)$, la cual es bien identificada por el estimador como podemos ver en la Figura 5.2. Además, en la Figura 5.1 observamos la clara diferencia entre los refinamientos uniforme y adaptativo. Vemos que el error global

tiene un decaimiento mas rápido con el refinamiento adaptativo, y se obtiene un orden de convergencia óptimo.

Los resultados numéricos del Ejemplo 2 se pueden ver en las Tablas 5.3 y 5.4. Aquí observamos dos singularidades numéricas, una de ellas presente en el punto $(-1, -1)$ para la presión y la velocidad en el medio poroso, y la otra en el punto $(1, 1)$ para la velocidad en el fluido. Vemos en la Figura 5.4 que el estimador localiza de buena forma estas singularidades, y que además detecta zonas de altos gradientes, cercanas al punto de singularidad. En la Tabla 5.3 observamos también que el error global tiene un decaimiento mas rápido que con el refinamiento uniforme, y que se obtiene un orden de convergencia óptimo.

En las Tablas 5.5 y 5.6 se muestran los errores, la eficiencia y la razón de convergencia del error global para los refinamientos uniforme y adaptativo del Ejemplo 3. En este caso, el punto de singularidad se encuentra en el punto $(0, 0)$, y está presente en la velocidad del fluido. Vemos de la Figura 5.6 que el estimador localiza el punto de singularidad, pero además, detecta algunas zonas de altos gradientes en el dominio exterior. Estas zonas, se presentan debido a la gran oscilación de la función \mathbf{u}_1 . De igual forma, en la Figura 5.5, observamos que el decaimiento del error utilizando el refinamiento adaptativo es más rápido que en el refinamiento uniforme, y que el orden de convergencia del método es óptimo. Finalmente, los resultados numéricos del Ejemplo 4, se pueden observar en las Tablas 5.7 y 5.8. Aquí, observamos el mal comportamiento de la convergencia del método utilizando refinamiento uniforme, el cual se mejora ostensiblemente utilizando el refinamiento adaptativo. Esto se corrobora en Figura 5.7. También vemos que la singularidad presente en el punto $(0, 0)$ es detectada eficientemente por el estimador, lo que se puede apreciar en la Figura 5.8.

Tabla 5.1: errores individuales, error total \mathbf{e} , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento uniforme (EJEMPLO 1).

| N | $\mathbf{e}(u_1)$ | $\mathbf{e}(u_2)$ | $\mathbf{e}(p)$ | $\mathbf{e}(\lambda)$ | \mathbf{e} | $r(\mathbf{e})$ | Θ | \mathbf{e}/Θ |
|--------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|--------------|-----------------|-----------|---------------------|
| 409 | 0.124E+2 | 0.261E+4 | 0.845E+2 | 0.166E+3 | 0.261E+4 | – | 0.105E+4 | 2.50 |
| 1649 | 0.240E+1 | 0.662E+5 | 0.833E+2 | 0.342E+2 | 0.662E+5 | – | 0.662E+5 | 1.00 |
| 13281 | 0.130E-1 | 0.429E+5 | 0.306E+2 | 0.466E+1 | 0.429E+5 | 0.42 | 0.429E+5 | 0.99 |
| 53185 | 0.540E-1 | 0.291E+5 | 0.165E+2 | 0.235E+1 | 0.291E+5 | 0.56 | 0.291E+5 | 0.99 |
| 106369 | 0.410E-1 | 0.208E+5 | 0.117E+2 | 0.157E+1 | 0.208E+5 | 0.97 | 0.2085E+5 | 0.99 |

Tabla 5.2: errores individuales, error total \mathbf{e} , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento adaptativo (EJEMPLO 1).

| N | $\mathbf{e}(u_1)$ | $\mathbf{e}(u_2)$ | $\mathbf{e}(p)$ | $\mathbf{e}(\lambda)$ | \mathbf{e} | $r(\mathbf{e})$ | Θ | \mathbf{e}/Θ |
|--------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|--------------|-----------------|----------|---------------------|
| 409 | 0.124E+2 | 0.261E+4 | 0.845E+2 | 0.166E+3 | 0.261E+4 | – | 0.105E+4 | 2.50 |
| 549 | 0.159E+1 | 0.620E+4 | 0.833E+2 | 0.290E+2 | 0.662E+5 | – | 0.662E+5 | 1.00 |
| 679 | 0.127E+1 | 0.824E+5 | 0.548E+2 | 0.195E+2 | 0.824E+5 | – | 0.824E+5 | 0.99 |
| 819 | 0.757E+0 | 0.467E+5 | 0.325E+2 | 0.174E+2 | 0.467E+5 | 6.05 | 0.467E+5 | 0.99 |
| 1114 | 0.953E+1 | 0.269E+5 | 0.330E+2 | 0.422E+2 | 0.269E+5 | 3.60 | 0.269E+5 | 0.99 |
| 1984 | 0.358E+1 | 0.184E+5 | 0.215E+2 | 0.239E+2 | 0.184E+5 | 1.31 | 0.185E+5 | 0.99 |
| 3584 | 0.133E+1 | 0.123E+5 | 0.139E+2 | 0.111E+2 | 0.123E+5 | 1.37 | 0.123E+5 | 0.99 |
| 4599 | 0.100E+1 | 0.991E+4 | 0.131E+2 | 0.151E+2 | 0.991E+4 | 1.74 | 0.996E+4 | 0.99 |
| 6099 | 0.614E+0 | 0.850E+4 | 0.119E+2 | 0.142E+2 | 0.850E+4 | 1.09 | 0.856E+4 | 0.99 |
| 12044 | 0.552E+0 | 0.598E+4 | 0.105E+2 | 0.138E+2 | 0.598E+4 | 1.03 | 0.606E+4 | 0.98 |
| 17549 | 0.791E+0 | 0.487E+4 | 0.851E+1 | 0.140E+2 | 0.487E+4 | 1.09 | 0.500E+4 | 0.98 |
| 27244 | 0.773E+0 | 0.389E+4 | 0.770E+1 | 0.138E+2 | 0.389E+4 | 1.13 | 0.403E+4 | 0.97 |
| 42034 | 0.577E+0 | 0.314E+4 | 0.695E+1 | 0.136E+2 | 0.314E+4 | 0.99 | 0.332E+4 | 0.95 |
| 58910 | 0.764E+0 | 0.262E+4 | 0.589E+1 | 0.128E+2 | 0.262E+4 | 1.06 | 0.283E+4 | 0.93 |
| 86737 | 0.504E+0 | 0.217E+4 | 0.480E+1 | 0.114E+2 | 0.217E+4 | 0.99 | 0.240E+4 | 0.90 |
| 114838 | 0.303E+0 | 0.187E+4 | 0.399E+1 | 0.926E+1 | 0.190E+4 | 1.05 | 0.212E+4 | 0.88 |

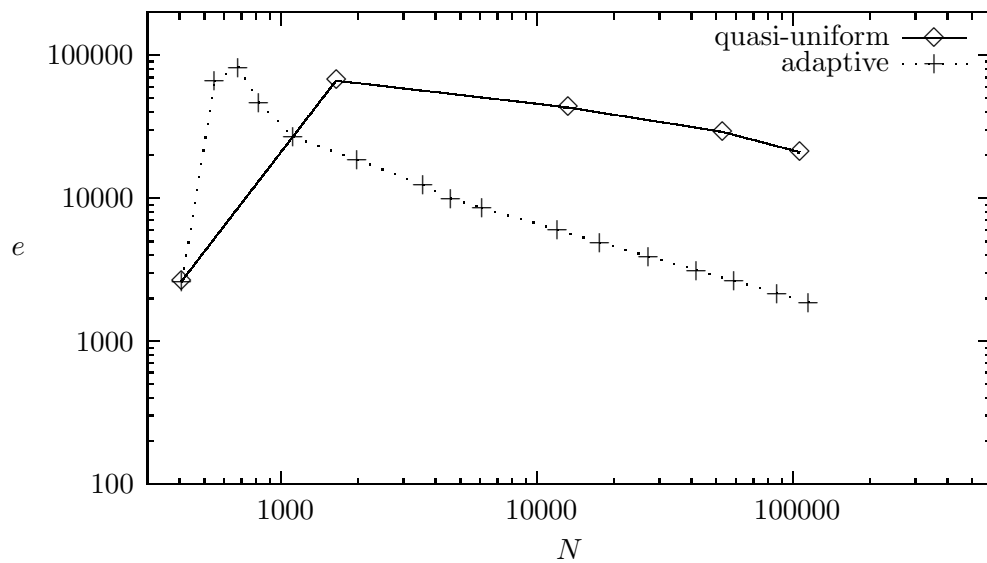


Figura 5.1: e vs. N para ambos refinamientos (EJEMPLO 1)

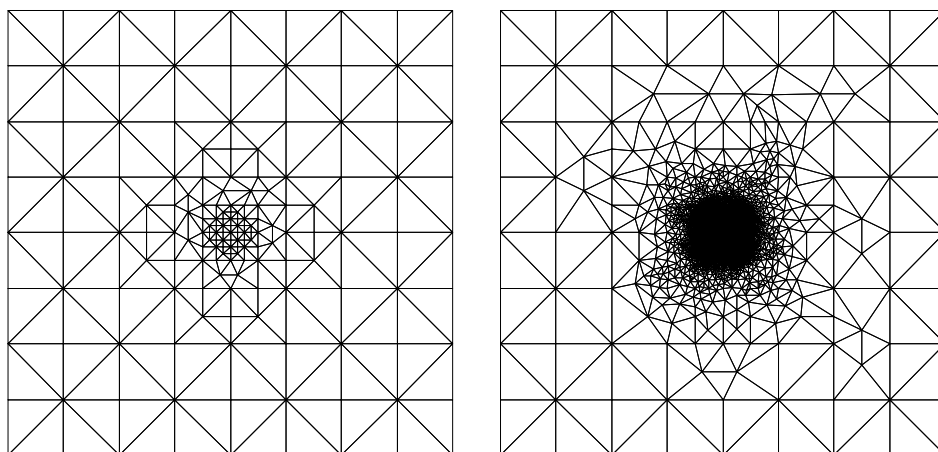


Figura 5.2: mallas intermedias con 819 y 114838 grados de libertad (EJEMPLO 1)

Tabla 5.3: errores individuales, error total \mathbf{e} , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento uniforme (EJEMPLO 2)

| N | $\mathbf{e}(u_1)$ | $\mathbf{e}(u_2)$ | $\mathbf{e}(p)$ | $\mathbf{e}(\lambda)$ | \mathbf{e} | $r(\mathbf{e})$ | Θ | \mathbf{e}/Θ |
|--------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|--------------|-----------------|----------|---------------------|
| 409 | 0.232E+1 | 0.169E+0 | 0.170E+1 | 0.150E+0 | 0.289E+1 | – | 0.480E+2 | 0.06 |
| 1649 | 0.314E+1 | 0.840E-1 | 0.143E+1 | 0.880E-1 | 0.345E+1 | – | 0.210E+2 | 0.16 |
| 6625 | 0.226E+1 | 0.290E-1 | 0.700E+0 | 0.460E-1 | 0.236E+1 | 0.36 | 0.153E+2 | 0.16 |
| 26561 | 0.127E+1 | 0.150E-1 | 0.444E+0 | 0.260E-1 | 0.135E+1 | 0.81 | 0.856E+1 | 0.16 |
| 106369 | 0.806E+0 | 0.100E-1 | 0.481E+0 | 0.150E-1 | 0.938E+0 | 1.04 | 0.563E+1 | 0.17 |

Tabla 5.4: errores individuales, error total \mathbf{e} , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento adaptativo (EJEMPLO 2)

| N | $\mathbf{e}(u_1)$ | $\mathbf{e}(u_2)$ | $\mathbf{e}(p)$ | $\mathbf{e}(\lambda)$ | \mathbf{e} | $r(\mathbf{e})$ | Θ | \mathbf{e}/Θ |
|-------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|--------------|-----------------|----------|---------------------|
| 409 | 0.232E+1 | 0.169E+0 | 0.170E+1 | 0.150E+0 | 0.289E+1 | – | 0.480E+2 | 0.06 |
| 457 | 0.313E+1 | 0.169E+0 | 0.149E+1 | 0.155E+0 | 0.348E+1 | – | 0.213E+2 | 0.16 |
| 505 | 0.268E+1 | 0.169E+0 | 0.139E+1 | 0.152E+0 | 0.303E+1 | 2.75 | 0.165E+2 | 0.18 |
| 660 | 0.185E+1 | 0.169E+0 | 0.753E+0 | 0.128E+0 | 0.201E+1 | 3.07 | 0.121E+2 | 0.17 |
| 944 | 0.119E+1 | 0.169E+0 | 0.645E+0 | 0.124E+0 | 0.137E+1 | 2.16 | 0.868E+1 | 0.16 |
| 1020 | 0.116E+1 | 0.169E+0 | 0.598E+0 | 0.125E+0 | 0.132E+1 | 0.85 | 0.806E+1 | 0.16 |
| 1100 | 0.113E+1 | 0.169E+0 | 0.538E+0 | 0.124E+0 | 0.127E+1 | 0.99 | 0.758E+1 | 0.17 |
| 1285 | 0.102E+1 | 0.169E+0 | 0.377E+0 | 0.124E+0 | 0.111E+1 | 1.76 | 0.646E+1 | 0.17 |
| 2247 | 0.670E+0 | 0.169E+0 | 0.290E+0 | 0.112E+1 | 0.759E+0 | 1.36 | 0.437E+1 | 0.17 |
| 4691 | 0.467E+0 | 0.169E+0 | 0.201E+0 | 0.112E+1 | 0.550E+0 | 0.87 | 0.301E+1 | 0.18 |
| 6201 | 0.386E+0 | 0.169E+0 | 0.184E+0 | 0.124E+0 | 0.476E+0 | 1.04 | 0.253E+1 | 0.19 |
| 13315 | 0.276E+0 | 0.106E+0 | 0.120E+0 | 0.880E-1 | 0.331E+0 | 0.95 | 0.175E+1 | 0.19 |
| 18441 | 0.229E+0 | 0.106E+0 | 0.100E+0 | 0.890E-1 | 0.285E+0 | 0.91 | 0.146E+1 | 0.19 |
| 21351 | 0.209E+0 | 0.810E-1 | 0.930E-1 | 0.680E-1 | 0.252E+0 | 1.67 | 0.134E+1 | 0.19 |
| 31314 | 0.176E+0 | 0.670E-1 | 0.770E-1 | 0.520E-1 | 0.210E+0 | 0.95 | 0.113E+1 | 0.19 |
| 50822 | 0.140E+0 | 0.530E-1 | 0.620E-1 | 0.450E-1 | 0.168E+0 | 0.93 | 0.928E+0 | 0.19 |
| 78544 | 0.113E+0 | 0.360E-1 | 0.4830E-1 | 0.310E-1 | 0.132E+0 | 1.12 | 0.722E+0 | 0.18 |
| 82133 | 0.109E+0 | 0.330E-1 | 0.470E-1 | 0.300E-1 | 0.127E+0 | 1.77 | 0.696E+0 | 0.18 |

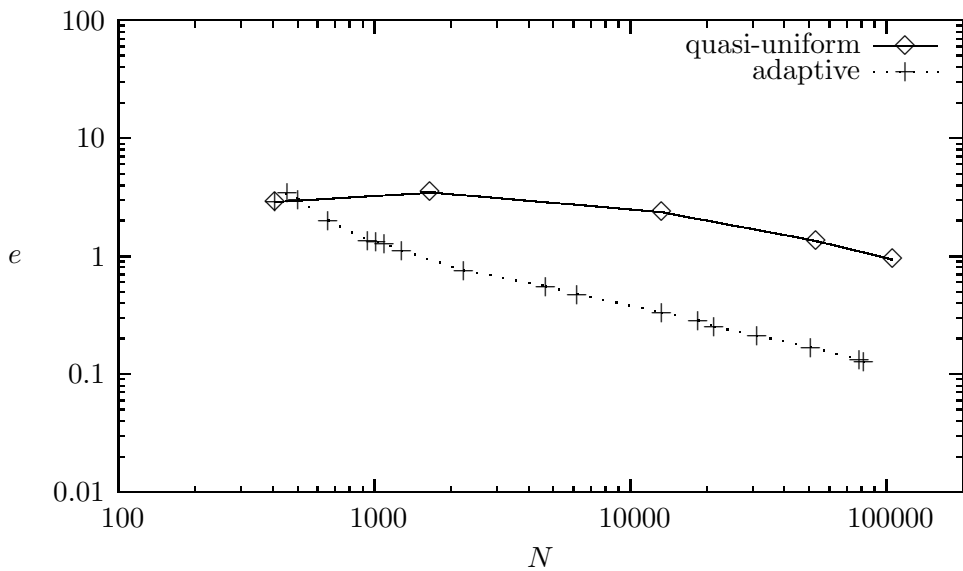


Figura 5.3: e vs. N para ambos refinamientos (EJEMPLO 2)

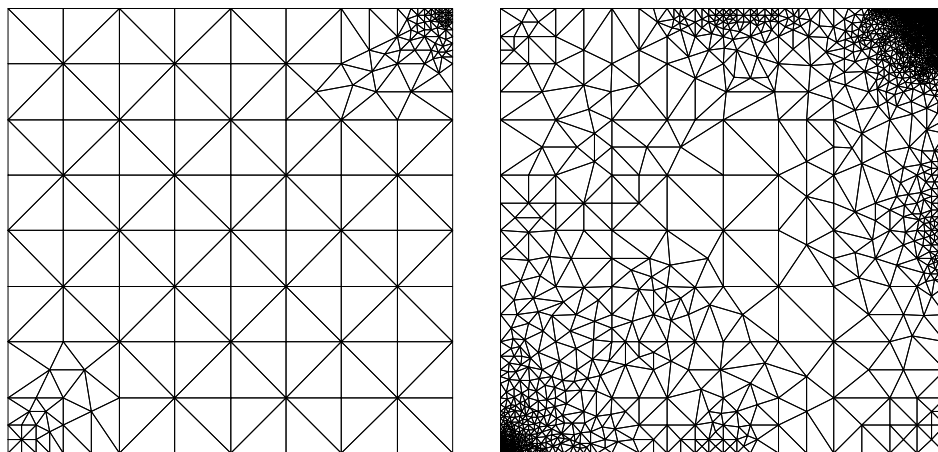


Figura 5.4: mallas intermedias con 944 y 82133 grados de libertad (EJEMPLO 2)

Tabla 5.5: errores individuales, error total e , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento uniforme (EJEMPLO 3)

| N | $e(u_1)$ | $e(u_2)$ | $e(p)$ | $e(\lambda)$ | e | $r(e)$ | Θ | e/Θ |
|-------|----------|----------|----------|--------------|----------|--------|----------|------------|
| 820 | 0.202E+3 | 0.156E+2 | 0.181E+3 | 0.472E+2 | 0.276E+3 | - | 0.954E+3 | 0.29 |
| 1665 | 0.218E+3 | 0.389E+2 | 0.181E+3 | 0.956E+2 | 0.302E+3 | - | 0.831E+3 | 0.36 |
| 8173 | 0.517E+2 | 0.253E+1 | 0.199E+2 | 0.581E+1 | 0.558E+2 | 2.12 | 0.245E+3 | 0.23 |
| 16349 | 0.414E+2 | 0.219E+1 | 0.164E+2 | 0.614E+1 | 0.449E+2 | 0.63 | 0.203E+3 | 0.22 |
| 32868 | 0.256E+2 | 0.481E+0 | 0.532E+1 | 0.353E+1 | 0.264E+2 | 1.52 | 0.144E+3 | 0.18 |
| 82494 | 0.200E+1 | 0.156E+0 | 0.453E+0 | 0.254E+0 | 0.207E+1 | 0.93 | 0.120E+2 | 0.17 |

Tabla 5.6: errores individuales, error total e , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento adaptativo (EJEMPLO 3)

| N | $e(u_1)$ | $e(u_2)$ | $e(p)$ | $e(\lambda)$ | e | $r(e)$ | Θ | e/Θ |
|-------|----------|----------|----------|--------------|----------|--------|----------|------------|
| 820 | 0.202E+3 | 0.156E+2 | 0.181E+3 | 0.472E+2 | 0.276E+3 | - | 0.954E+3 | 0.30 |
| 872 | 0.113E+3 | 0.146E+2 | 0.908E+2 | 0.320E+2 | 0.149E+3 | 19.99 | 0.506E+3 | 0.30 |
| 1067 | 0.542E+2 | 0.531E+1 | 0.294E+2 | 0.126E+2 | 0.632E+2 | 8.53 | 0.337E+3 | 0.18 |
| 1081 | 0.523E+2 | 0.365E+1 | 0.300E+2 | 0.852E+1 | 0.571E+2 | 15.43 | 0.302E+3 | 0.19 |
| 1582 | 0.322E+2 | 0.213E+1 | 0.105E+2 | 0.463E+1 | 0.343E+2 | 2.69 | 0.202E+3 | 0.16 |
| 1967 | 0.267E+2 | 0.148E+1 | 0.750E+1 | 0.357E+1 | 0.280E+2 | 1.85 | 0.166E+3 | 0.17 |
| 3860 | 0.171E+2 | 0.150E+1 | 0.579E+1 | 0.248E+1 | 0.183E+2 | 1.26 | 0.109E+3 | 0.17 |
| 5848 | 0.134E+2 | 0.130E+1 | 0.535E+1 | 0.295E+1 | 0.148E+2 | 1.02 | 0.861E+2 | 0.17 |
| 9520 | 0.102E+2 | 0.115E+1 | 0.368E+1 | 0.148E+1 | 0.110E+2 | 1.22 | 0.658E+2 | 0.17 |
| 14937 | 0.812E+1 | 0.113E+1 | 0.253E+1 | 0.148E+1 | 0.870E+1 | 1.04 | 0.518E+2 | 0.17 |
| 18024 | 0.741E+1 | 0.111E+1 | 0.231E+1 | 0.131E+1 | 0.795E+1 | 0.97 | 0.467E+2 | 0.17 |
| 24255 | 0.637E+1 | 0.108E+1 | 0.194E+1 | 0.126E+1 | 0.686E+1 | 0.99 | 0.399E+2 | 0.17 |
| 36765 | 0.513E+1 | 0.804E+0 | 0.163E+1 | 0.149E+1 | 0.553E+1 | 1.04 | 0.327E+2 | 0.17 |
| 53633 | 0.416E+1 | 0.789E+0 | 0.128E+1 | 0.106E+1 | 0.454E+1 | 1.04 | 0.263E+2 | 0.17 |
| 69830 | 0.361E+1 | 0.750E+0 | 0.106E+1 | 0.929E+0 | 0.396E+1 | 1.05 | 0.228E+2 | 0.17 |

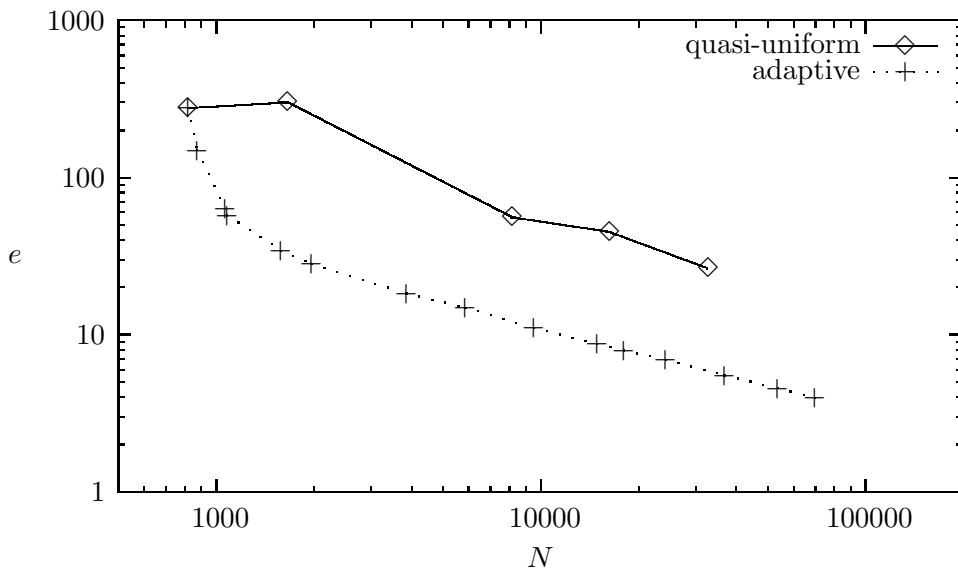


Figura 5.5: e vs. N para ambos refinamientos (EJEMPLO 3)

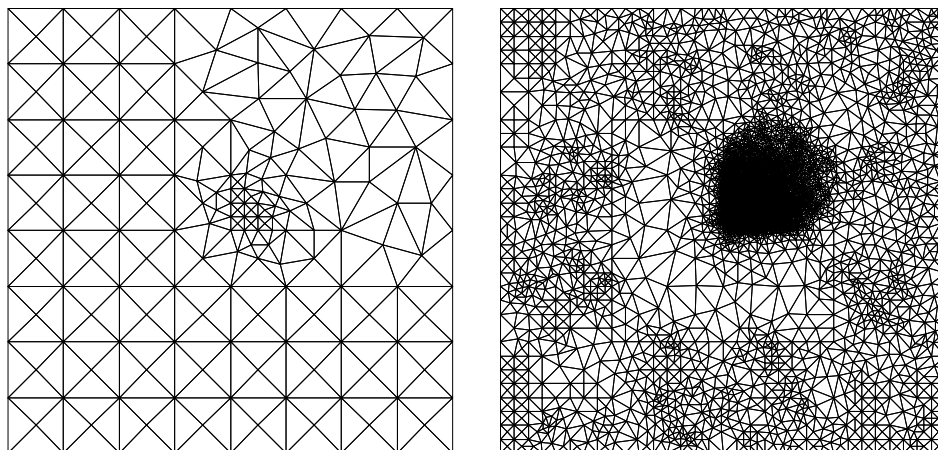


Figura 5.6: mallas intermedias con 1081 y 69830 grados de libertad (EJEMPLO 3)

Tabla 5.7: errores individuales, error total \mathbf{e} , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento uniforme (EJEMPLO 4)

| N | $\mathbf{e}(u_1)$ | $\mathbf{e}(u_2)$ | $\mathbf{e}(p)$ | $\mathbf{e}(\lambda)$ | \mathbf{e} | $r(\mathbf{e})$ | Θ | \mathbf{e}/Θ |
|-------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|--------------|-----------------|----------|---------------------|
| 147 | 0.239E+5 | 0.480E+0 | 0.119E+2 | 0.032E+2 | 0.239E+5 | — | 0.773E+3 | — |
| 6169 | 0.159E+6 | 0.210E+4 | 0.261E+6 | 0.320E+5 | 0.307E+6 | — | 0.206E+7 | 0.15 |
| 15723 | 0.188E+6 | 0.250E+4 | 0.153E+6 | 0.270E+5 | 0.244E+6 | 0.49 | 0.118E+7 | 0.21 |
| 31039 | 0.174E+6 | 0.150E+4 | 0.116E+6 | 0.250E+5 | 0.211E+6 | 0.44 | 0.110E+6 | 0.19 |
| 62722 | 0.146E+6 | 0.200E+3 | 0.874E+5 | 0.350E+5 | 0.174E+6 | 0.54 | 0.766E+6 | 0.22 |

Tabla 5.8: errores individuales, error total \mathbf{e} , índice de eficiencia y orden de convergencia para el refinamiento adaptativo (EJEMPLO 4)

| N | $\mathbf{e}(u_1)$ | $\mathbf{e}(u_2)$ | $\mathbf{e}(p)$ | $\mathbf{e}(\lambda)$ | \mathbf{e} | $r(\mathbf{e})$ | Θ | \mathbf{e}/Θ |
|-------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|--------------|-----------------|----------|---------------------|
| 147 | 0.239E+6 | 0.480E+0 | 0.119E+2 | 0.321E+1 | 0.239E+4 | — | 0.773E+3 | — |
| 188 | 0.112E+6 | 0.867E+2 | 0.310E+4 | 0.254E+4 | 0.112E+5 | — | 0.124E+6 | 0.90 |
| 195 | 0.996E+5 | 0.1602E+3 | 0.619E+4 | 0.460E+4 | 0.999E+5 | — | 0.485E+6 | 0.21 |
| 298 | 0.141E+6 | 0.220E+2 | 0.112E+6 | 0.551E+5 | 0.189E+6 | — | 0.180E+7 | 0.11 |
| 383 | 0.151E+6 | 0.985E+3 | 0.578E+5 | 0.226E+5 | 0.163E+6 | — | 0.159E+7 | 0.10 |
| 429 | 0.167E+6 | 0.326E+3 | 0.218E+6 | 0.434E+5 | 0.278E+6 | — | 0.128E+7 | 0.22 |
| 592 | 0.106E+6 | 0.226E+3 | 0.358E+5 | 0.561E+4 | 0.112E+6 | 5.67 | 0.686E+6 | 0.16 |
| 815 | 0.742E+5 | 0.393E+3 | 0.253E+5 | 0.665E+4 | 0.786E+5 | 2.19 | 0.487E+6 | 0.16 |
| 1187 | 0.594E+5 | 0.311E+2 | 0.164E+5 | 0.354E+3 | 0.616E+5 | 1.30 | 0.366E+6 | 0.17 |
| 1243 | 0.562E+5 | 0.453E+2 | 0.128E+5 | 0.868E+3 | 0.576E+5 | 2.87 | 0.334E+6 | 0.17 |
| 2322 | 0.388E+5 | 0.142E+2 | 0.966E+4 | 0.300E+2 | 0.400E+5 | 1.17 | 0.241E+6 | 0.17 |
| 2729 | 0.337E+5 | 0.103E+1 | 0.814E+4 | 0.949E+4 | 0.347E+5 | 1.77 | 0.205E+6 | 0.17 |
| 3373 | 0.293E+5 | 0.196E+1 | 0.641E+4 | 0.414E+2 | 0.300E+5 | 1.36 | 0.179E+6 | 0.17 |
| 5973 | 0.219E+5 | 0.837E+1 | 0.537E+4 | 0.166E+3 | 0.226E+5 | 0.99 | 0.135E+6 | 0.17 |
| 8216 | 0.182E+5 | 0.552E+1 | 0.426E+4 | 0.114E+3 | 0.187E+5 | 1.20 | 0.111E+6 | 0.17 |
| 14349 | 0.136E+5 | 0.566E+1 | 0.326E+4 | 0.124E+3 | 0.140E+5 | 1.03 | 0.832E+5 | 0.17 |
| 17820 | 0.119E+5 | 0.449E+1 | 0.270E+4 | 0.112E+3 | 0.122E+5 | 1.28 | 0.717E+5 | 0.17 |
| 27158 | 0.971E+4 | 0.348E+1 | 0.218E+4 | 0.904E+2 | 0.996E+4 | 0.96 | 0.589E+5 | 0.17 |
| 33617 | 0.862E+4 | 0.330E+1 | 0.192E+4 | 0.762E+2 | 0.883E+4 | 1.12 | 0.521E+5 | 0.17 |
| 48108 | 0.728E+4 | 0.271E+1 | 0.164E+4 | 0.516E+2 | 0.746E+4 | 0.94 | 0.442E+5 | 0.17 |
| 55566 | 0.669E+4 | 0.288E+1 | 0.150E+4 | 0.545E+2 | 0.686E+4 | 1.16 | 0.406E+5 | 0.17 |
| 64176 | 0.616E+4 | 0.253E+1 | 0.135E+4 | 0.553E+2 | 0.631E+4 | 1.17 | 0.372E+5 | 0.17 |

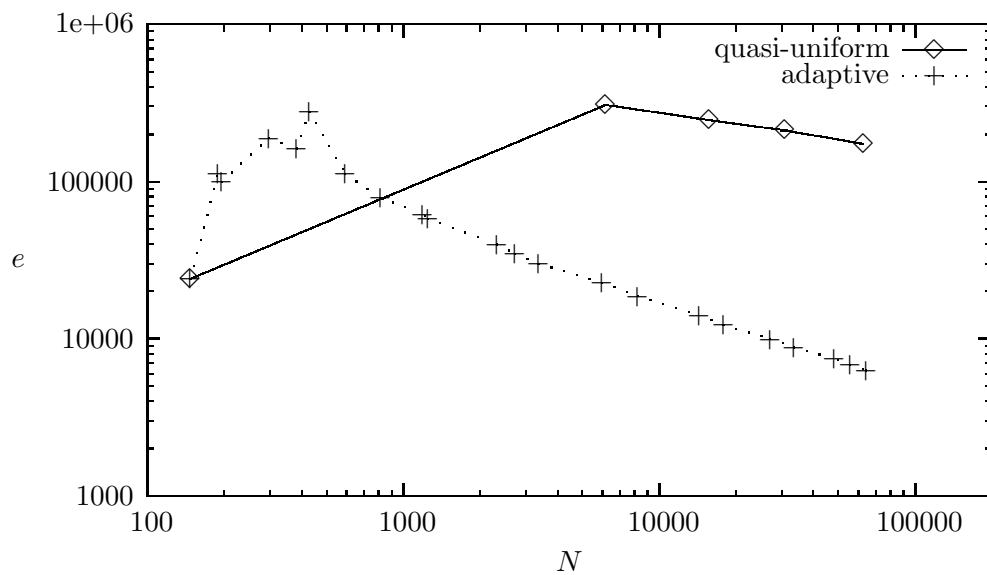


Figura 5.7: e vs. N para ambos refinamientos (EJEMPLO 4)

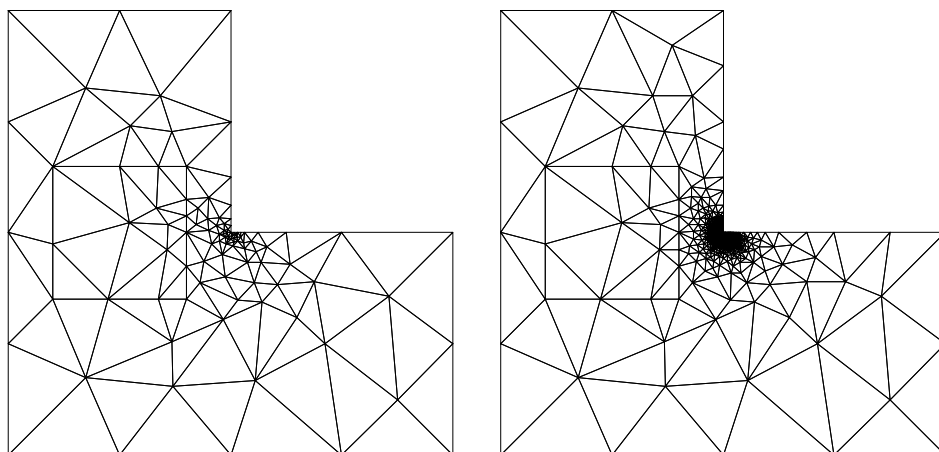


Figura 5.8: mallas intermedias con 592 y 64176 grados de libertad(EJEMPLO 4)

Bibliografía

- [1] A. AGOUZAL AND J.-M. THOMAS, *An extension theorem for equilibrium finite element spaces*. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, vol. 13, pp. 257-266, (1996).
- [2] I. BABUŠKA AND A.K. AZIZ, *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method*. In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, A.K. Aziz (editor), Academic Press, New York, (1972).
- [3] I. BABUŠKA AND G.N. GATICA, *On the mixed finite element method with Lagrange multipliers*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 19, 2, pp. 192-210, (2003).
- [4] G. BEAVERS AND D. JOSEPH, *Boundary conditions at a naturally impermeable wall*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 30, pp. 197-207, (1967).
- [5] C. BERNARDI, F. HECHT, AND O. PIRONNEAU, *Coupling Darcy and Stokes equations for porous media with cracks*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 39, 1, pp. 7-35, (2005).
- [6] C. BERNARDI AND G. RAUGEL, *Analysis of some finite elements for the Stokes problem*. Mathematics of Computation, vol. 44, 169, pp. 71-79, (1985).
- [7] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [8] C. CARSTENSEN , *An a posteriori error estimate for a first-kind integral equation* . Mathematics of Computation., vol. 66 , pp. 139-155, (1997).
- [9] PH. CLÉMENT, *Approximation by finite element functions using local regularization*. RAIRO Analyse Numérique, vol. 9 , pp. 77-84, (1975).

-
- [10] M. DISCACCIATI, E. MIGLIO, AND A. QUARTERONI, *Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows*. Applied Numerical Mathematics, vol. 43, pp. 57-74, (2002).
- [11] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1986.
- [12] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Non-Smooth Domains*. Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, 1985.
- [13] P. GRISVARD, *Problèmes aux limites dans les polygones. Mode d'emploi*. EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches (Serie C), 1, pp. 21-59, (1986).
- [14] R. HIPTMAIR, *Finite elements in computational electromagnetism*. Acta Numerica, vol. 11, pp. 237-339, (2002).
- [15] W. JÄGER AND M. MIKELIC, *On the interface boundary condition of Beavers, Joseph, and Saffman*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 60, pp. 1111-1127, (2000).
- [16] W.J. LAYTON, F. SCHIEWECK, AND I. YOTOV, *Coupling fluid flow with porous media flow*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 40, 6, pp. 2195-2218, (2003).
- [17] S. PRÖSSDORF AND B. SILBERMANN, *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations*. Birkhäuser-Verlag: Basel, 1991.
- [18] J.E. ROBERTS AND J.-M. THOMAS, *Mixed and Hybrid Methods*. In Handbook of Numerical Analysis, edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, vol. II, Finite Element Methods (Part 1), North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [19] B. RIVIERE AND I. YOTOV, *Locally conservative coupling of Stokes and Darcy flows*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 42, 5, pp. 1959-1977, (2005).
- [20] P. SAFFMAN, *On the boundary condition at the surface of a porous media*. Studies in Applied Mathematics, vol. 50, pp. 93-101, (1971).