

Sistemas de Ecuaciones Hiperbólicas Nolineales

Diagonalización, problema de Riemann, entropía y aplicaciones

Apuntes de Curso – Leyes de Conservación
525507-1 & 4220078-0

Mauricio A. Sepúlveda Cortés
Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA)
& Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Índice general

1. Sistemas Hiperbólicos Lineales	9
1.1. Introducción	9
1.2. Diagonalización y variables características	10
1.3. Vectores propios izquierdos	10
1.4. El problema de Riemann para sistemas lineales	11
1.4.1. Curvas de onda en el plano de estados	12
1.5. La ecuación de ondas como sistema hiperbólico	13
1.5.1. Valores y vectores propios	13
1.5.2. Deducción de la fórmula de d'Alembert	14
1.6. Sistemas simetrizables y entropía	14
1.6.1. Simetrización de la ecuación de ondas	15
1.7. Ecuaciones de Maxwell en una dimensión	15
1.8. Sistemas no lineales y linealización	17
1.8.1. Entropía para sistemas no lineales	17
1.9. Aguas someras: estructura hiperbólica y energía	18
1.9.1. Valores propios	18
1.9.2. Invariantes de Riemann	18
1.9.3. Entropía y energía	19
1.9.4. Linealización de aguas someras	19
1.10. Sistema Shallow Water–Exner	21
1.10.1. Energía extendida	21
1.10.2. Balance formal de energía	21
1.10.3. Comentario sobre convexidad	21
1.11. Riemann solvers para sistemas lineales y linealizados	22
1.11.1. Solver exacto lineal	22
1.11.2. Solver de Roe	22
1.11.3. Solver HLL	23
1.11.4. Comparación entre solvers de Riemann	23
1.12. Sistemas hiperbólicos lineales en varias dimensiones	24
1.12.1. Símbolo direccional	24
1.12.2. Ejemplo: ecuaciones de Maxwell en 3D	24
1.12.3. Matrices del sistema	25
1.12.4. Figura: polarización de ondas	25
1.12.5. Análisis espectral	26
1.12.6. Entropía (energía electromagnética)	26

1.12.7. Interpretación física	26
1.12.8. Estructura del problema de Riemann en varias dimensiones	27
1.13. Riemann solvers en varias dimensiones	30
1.13.1. Caso bidimensional en malla cartesiana	30
1.13.2. Solvers en cada interfaz	30
1.13.3. Ejemplos de flujos numéricos	31
1.13.4. Interpretación geométrica	31
1.13.5. Mallas desestructuradas	31
1.13.6. Comentario	32
1.14. Ejercicios	32
2. Sistemas Hiperbólicos No Lineales	37
2.1. Hiperbolicidad y algunos ejemplos	37
2.1.1. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión	37
2.1.2. Sistemas hiperbólicos multidimensionales	37
2.2. Ecuaciones de Shallow Water	38
2.2.1. Deducción física	38
2.2.2. Hiperbolicidad en una dimensión	39
2.2.3. Modelo bidimensional	39
2.3. El p -Sistema	40
2.3.1. Deducción física	40
2.3.2. Hiperbolicidad	42
2.4. Dinámica de los Gases	43
2.4.1. Ecuaciones de Euler unidimensionales	43
2.4.2. Hiperbolicidad	43
2.4.3. Ecuaciones tridimensionales	44
2.5. Sistema de Cromatografía	46
2.5.1. Deducción física	46
2.5.2. Forma conservativa y matriz jacobiana	47
2.5.3. Hiperbolicidad	47
2.5.4. Campos característicos	48
2.6. Pérdida de Hiperbolicidad	49
2.6.1. Modelo Two-Layer Shallow Water	49
2.6.2. Sedimentación Multicomponente	51
2.6.3. Implicancias Numéricas	53
2.7. Ejercicios	53
3. Problema de Riemann	59
3.1. Introducción	59
3.2. Ondas de rarefacción, discontinuidades de contacto e invariantes de Riemann	59
3.2.1. Sistema hiperbólico no lineal	60
3.2.2. Problema de Riemann	60
3.2.3. Curvas integrales y j -ondas	60
3.2.4. Invariantes de Riemann	61
3.2.5. Diagonalización mediante invariantes de Riemann	61

3.2.6.	Campos genuinamente no lineales	62
3.2.7.	Ondas de rarefacción	62
3.2.8.	Campos linealmente degenerados	63
3.2.9.	Discontinuidades de contacto	64
3.2.10.	GN versus LD	64
3.2.11.	Resumen geométrico	65
3.2.12.	Curvas de rarefacción para el sistema de aguas someras	65
3.3.	Ondas de choque y curvas de Hugoniot	68
3.3.1.	Condición de Rankine–Hugoniot	68
3.3.2.	Curva de Hugoniot	69
3.3.3.	Curvas de Hugoniot por familia	69
3.3.4.	Deducción de la tangencia	69
3.3.5.	Choques físicamente admisibles	70
3.3.6.	Interpretación geométrica	70
3.3.7.	Comparación entre rarefacciones y choques	71
3.3.8.	Resumen	71
3.3.9.	Curvas de choque para el sistema de aguas someras	71
3.4.	Resolución del problema de Riemann para el sistema de aguas someras	74
3.4.1.	Curvas completas de onda	75
3.4.2.	Curva de onda de la primera familia	75
3.4.3.	Curva de onda de la segunda familia	76
3.4.4.	Determinación del estado intermedio	76
3.4.5.	Estructuras posibles de la solución	76
3.4.6.	Formación de vacío	77
3.4.7.	Interpretación física	77
3.4.8.	Entropía para el sistema de aguas someras	77
3.5.	Modelo de cromatografía y sistemas de Temple	80
3.5.1.	Campos característicos	80
3.5.2.	Invariantes de Riemann	81
3.5.3.	Ondas de rarefacción	82
3.5.4.	Discontinuidades de contacto	82
3.5.5.	Curvas de choque	82
3.5.6.	Sistemas de Temple	83
3.5.7.	Choques y rarefacciones en la familia 1	84
3.5.8.	Estado intermedio del problema de Riemann	84
3.5.9.	Entropía y flujo de entropía para el modelo de cromatografía	85
3.6.	El teorema de Lax y el teorema de Glimm	90
3.6.1.	El teorema local de Lax	90
3.6.2.	Interpretación geométrica	90
3.6.3.	Idea de la demostración	91
3.6.4.	El teorema de Glimm	91
3.6.5.	Idea de la demostración del teorema de Glimm	92

4. Métodos Numéricos para Leyes de Conservación	101
4.1. El método de Godunov para leyes de conservación escalares	101
4.1.1. Reconstrucción constante	102
4.1.2. Flujo de Godunov	102
4.1.3. Ejemplo: la ecuación de advección lineal	103
4.2. El método de Godunov para la ecuación de Burgers	104
4.2.1. Rarefacción	105
4.2.2. Choque	105
4.2.3. Fórmula explícita	105
4.3. El método de Godunov para sistemas hiperbólicos	106
4.3.1. Reconstrucción constante	106
4.3.2. Flujo de Godunov	106
4.3.3. La dificultad práctica	107
4.4. El solucionador de Roe	107
4.4.1. Linearización de Roe	108
4.4.2. Problema de Riemann aproximado	108
4.4.3. Flujo de Roe	108
4.4.4. Deducción del flujo de Roe desde el problema de Riemann lineal . . .	108
4.4.5. Ejemplo: el sistema de aguas someras	110
4.4.6. Corrección de entropía de Harten	113
4.4.7. Ejemplo: las ecuaciones de Euler para un gas perfecto	115
4.4.8. Ventajas y limitaciones del solucionador de Roe	117
4.5. El solucionador HLL	119
4.5.1. Aproximación del problema de Riemann	119
4.5.2. Cálculo del estado intermedio	120
4.5.3. El flujo HLL	120
4.5.4. Estimación de las velocidades extremas	121
4.6. El solucionador de Engquist–Osher	121
5. Métodos bien balanceados	129
5.1. El sistema de aguas someras con batimetría	130
5.2. Estados estacionarios y equilibrio de lago en reposo	131
5.3. ¿Por qué falla un esquema de Godunov clásico?	132
5.4. La idea de los métodos well-balanced	135
5.5. Reconstrucción hidrostática de Audusse et al.	135
5.6. Ejemplos numéricos	141
5.6.1. Ejemplo 1: lago en reposo	141
5.6.2. Ejemplo 2: pequeña perturbación sobre un lago en reposo	142
5.7. Comentarios finales y bibliografía	143
Apéndice A. Implementación en Matlab del esquema well-balanced	149

Prefacio

Los presentes apuntes surgieron como material de apoyo para el curso de *Leyes de Conservación Hiperbólicas*, impartido en el Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática de la Universidad de Concepción.

Desde hace varios años, este curso ya cuenta con los apuntes elaborados por el profesor Raimund Bürger, los cuales constituyen una referencia consolidada para esta asignatura. El propósito del presente manuscrito no es reemplazar dicho material, sino ofrecer un complemento con un enfoque pedagógico diferente, poniendo especial énfasis en ciertos aspectos de la teoría y en su relación con los métodos numéricos modernos.

La motivación original de estos apuntes fue desarrollar con mayor detalle la teoría de los sistemas hiperbólicos lineales y del problema de Riemann lineal, temas que, a juicio del autor, constituyen un puente natural hacia la comprensión de los sistemas hiperbólicos no lineales. A partir de esta idea inicial, el manuscrito fue creciendo progresivamente hasta transformarse en un texto más amplio, incorporando posteriormente una introducción a los solucionadores aproximados de Riemann, tales como los métodos de Godunov, Roe, HLL y Engquist–Osher, así como una breve introducción a los esquemas *well-balanced* para las ecuaciones de aguas someras con batimetría.

El énfasis del texto está puesto en la interpretación geométrica de la hiperbolicidad, la estructura espectral de los sistemas, el papel fundamental del problema de Riemann y la estrecha relación entre la teoría analítica y los métodos de volúmenes finitos. Siempre que ha sido posible, se han privilegiado las demostraciones y las interpretaciones matemáticas por sobre una presentación meramente formal de los resultados, procurando que el lector pueda comprender no sólo *cómo* se construyen los distintos resultados, sino también *por qué* aparecen de forma natural.

El autor desea agradecer al profesor Raimund Bürger por la lectura crítica de una versión preliminar de estos apuntes. Sus observaciones permitieron mejorar diversos aspectos de la exposición, corregir algunas imprecisiones en la bibliografía y revisar ciertos detalles técnicos y fórmulas,. Naturalmente, cualquier error u omisión que aún pudiera subsistir es de exclusiva responsabilidad del autor.

Estos apuntes se encuentran todavía en permanente elaboración y no deben considerarse una versión definitiva. El autor agradecerá sinceramente cualquier comentario, corrección o sugerencia que contribuya a mejorar tanto su contenido como su presentación en futuras versiones.

Concepción, Chile
Julio de 2026
Mauricio Sepúlveda Cortés

Capítulo 1

Sistemas Hiperbólicos Lineales

1.1. Introducción

El objetivo de estos apuntes es estudiar sistemas hiperbólicos lineales de primer orden en una dimensión espacial, de la forma

$$u_t + Au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1.1)$$

donde $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^p$ y $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es una matriz constante.

Estos sistemas aparecen de manera natural en el estudio de ondas, acústica, electromagnetismo, elasticidad, dinámica de fluidos y como linealización local de sistemas no lineales de leyes de conservación. La propiedad esencial de los sistemas hiperbólicos es que la información se propaga con velocidad finita. En el caso lineal, dichas velocidades están determinadas por los valores propios de la matriz A .

Definición 1.1.1 (Hiperbolicidad). *El sistema (1.1.1) se dice hiperbólico si la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y todos sus valores propios son reales. Es decir, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, y una base de vectores propios derechos $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{R}^p$ tales que*

$$Ar_i = \lambda_i r_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

Observación 1.1.1. *En algunos textos se distingue entre hiperbolicidad y estricta hiperbolicidad. El sistema se dice estrictamente hiperbólico si, además,*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p.$$

Esta hipótesis simplifica la estructura de las ondas, aunque muchas ideas se mantienen cuando hay valores propios múltiples.

El hilo conductor será el siguiente: la diagonalización de A permite descomponer el sistema en ecuaciones de transporte; los vectores propios izquierdos entregan las variables características; el problema de Riemann se resuelve descomponiendo el salto inicial en ondas propias; y la simetrización permite construir una entropía cuadrática, usualmente interpretable como energía.

1.2. Diagonalización y variables características

Supongamos que A es diagonalizable con valores propios reales. Sea

$$R = (r_1 | r_2 | \cdots | r_p),$$

la matriz cuyas columnas son los vectores propios derechos de A . Entonces $AR = R\Lambda$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Como R es invertible, se tiene

$$A = R\Lambda R^{-1}. \quad (1.2.1)$$

Definimos ahora las variables características

$$w = R^{-1}u. \quad (1.2.2)$$

Entonces $u = Rw$, y sustituyendo en (1.1.1) se obtiene $Rw_t + ARw_x = 0$. Usando $AR = R\Lambda$, resulta $Rw_t + R\Lambda w_x = 0$. Multiplicando por R^{-1} ,

$$w_t + \Lambda w_x = 0. \quad (1.2.3)$$

Por tanto, el sistema se desacopla en p ecuaciones escalares de transporte:

$$(w_i)_t + \lambda_i(w_i)_x = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.2.4)$$

Proposición 1.2.1 (Solución del sistema diagonalizado). *Si $w_i(x, 0) = w_i^0(x)$, entonces la solución de (1.2.4) es $w_i(x, t) = w_i^0(x - \lambda_i t)$. Por consiguiente,*

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^p w_i^0(x - \lambda_i t) r_i. \quad (1.2.5)$$

Demostración. La ecuación $(w_i)_t + \lambda_i(w_i)_x = 0$ es una ecuación de transporte. A lo largo de las rectas características

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad x(t) = x_0 + \lambda_i t,$$

se tiene

$$\frac{d}{dt} w_i(x(t), t) = (w_i)_t + \lambda_i(w_i)_x = 0.$$

Por tanto w_i permanece constante sobre cada recta característica y

$$w_i(x, t) = w_i(x - \lambda_i t, 0) = w_i^0(x - \lambda_i t).$$

Finalmente, como $u = Rw$, se obtiene (1.2.5). □

1.3. Vectores propios izquierdos

Sea $L := R^{-1}$. Escribimos L por filas: $L = \begin{pmatrix} \ell_1^T \\ \ell_2^T \\ \vdots \\ \ell_p^T \end{pmatrix}$. Entonces $w_i = \ell_i^T u$.

Proposición 1.3.1 (Vectores propios izquierdos). *Las filas ℓ_i^T de R^{-1} son vectores propios izquierdos de A , es decir,*

$$\ell_i^T A = \lambda_i \ell_i^T.$$

Además, satisfacen la relación de biortogonalidad $\ell_i^T r_j = \delta_{ij}$.

Demostración. Como $A = R\Lambda R^{-1}$, se tiene $R^{-1}A = \Lambda R^{-1}$. Comparando la i -ésima fila de ambos lados, $\ell_i^T A = \lambda_i \ell_i^T$. Por otra parte, $LR = I$, lo cual implica $\ell_i^T r_j = \delta_{ij}$. $\square$

Observación 1.3.1. *Los vectores propios derechos r_i describen las direcciones en el espacio de estados en las cuales se propagan las ondas. Los vectores propios izquierdos ℓ_i , en cambio, permiten extraer las amplitudes de dichas ondas:*

$$w_i = \ell_i^T u.$$

1.4. El problema de Riemann para sistemas lineales

El problema de Riemann consiste en resolver (1.1.1) con dato inicial constante a trozos:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

donde $u_L, u_R \in \mathbb{R}^p$. El salto inicial se descompone en la base de vectores propios derechos:

$$u_R - u_L = \sum_{i=1}^p \alpha_i r_i. \quad (1.4.2)$$

Multiplicando por ℓ_j^T , obtenemos $\ell_j^T(u_R - u_L) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \ell_j^T r_i = \alpha_j$. Por tanto,

$$\alpha_i = \ell_i^T(u_R - u_L). \quad (1.4.3)$$

Teorema 1.4.1 (Solución del problema de Riemann lineal). *Supongamos que A es diagonalizable con valores propios reales ordenados*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p.$$

La solución autosimilar del problema de Riemann (1.1.1)–(1.4.1) está dada por

$$u(x, t) = u_L + \sum_{\lambda_i < x/t} \alpha_i r_i, \quad \alpha_i = \ell_i^T(u_R - u_L). \quad (1.4.4)$$

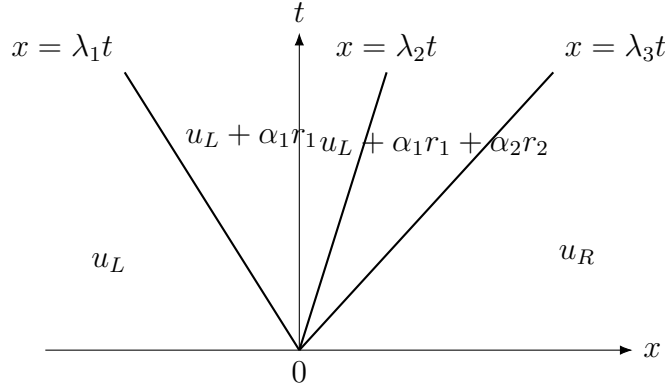
Demostración. En variables características $w = Lu$, el dato inicial queda

$$w_i(x, 0) = \begin{cases} \ell_i^T u_L, & x < 0, \\ \ell_i^T u_R, & x > 0. \end{cases}$$

Cada componente satisface $(w_i)_t + \lambda_i(w_i)_x = 0$. Por tanto,

$$w_i(x, t) = \begin{cases} \ell_i^T u_L, & x/t < \lambda_i, \\ \ell_i^T u_R, & x/t > \lambda_i. \end{cases}$$

Reconstruyendo $u = Rw = \sum_i w_i r_i$, al cruzar la onda de velocidad λ_i , la componente w_i cambia en $\ell_i^T(u_R - u_L) = \alpha_i$. Esto entrega (1.4.4). $\square$



1.4.1. Curvas de onda en el plano de estados

Consideremos el sistema lineal hiperbólico asociado a la ecuación de ondas, con variables de estado

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_t \\ y_x \end{pmatrix}.$$

Sean U_L y U_R dos estados constantes. El problema de Riemann produce un estado intermedio U_m tal que:

$$U_R - U_L = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2.$$

Esto induce la descomposición:

$$U_L \xrightarrow{\text{onda 1}} U_m \xrightarrow{\text{onda 2}} U_R.$$

Descripción geométrica

- La primera onda conecta U_L con U_m mediante:

$$U_m = U_L + \alpha_1 r_1,$$

es decir, a lo largo de una recta en dirección del vector propio r_1 .

- La segunda onda conecta U_m con U_R mediante:

$$U_R = U_m + \alpha_2 r_2,$$

es decir, a lo largo de una recta en dirección del vector propio r_2 .

Por lo tanto, en el plano (u, v) , la solución del problema de Riemann corresponde a un camino poligonal compuesto por dos segmentos rectos.

Relación con invariantes de Riemann

Sea $w_i = \ell_i^T U$ las variables características. Entonces:

- a lo largo de la onda asociada a λ_1 , se mantiene constante w_2 ,
- a lo largo de la onda asociada a λ_2 , se mantiene constante w_1 .

Esto muestra que las curvas de onda son líneas de nivel de los invariantes de Riemann.

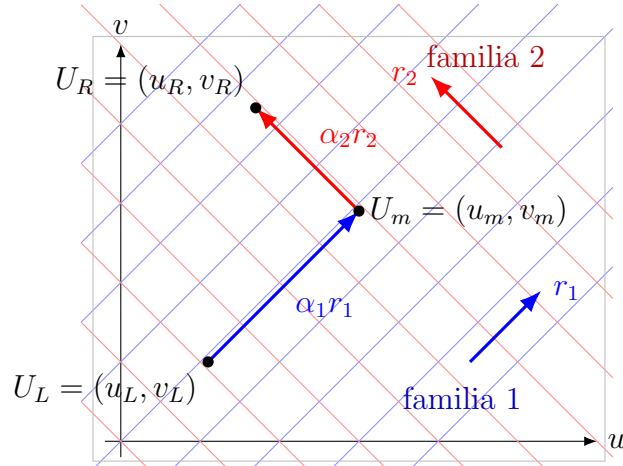


Figura 1.1: Curvas de onda en el plano de estados (u, v) para un sistema lineal 2×2 . Las familias de ondas son rectas paralelas a los vectores propios r_1 y r_2 . El problema de Riemann conecta U_L con U_R pasando por un estado intermedio U_m .

1.5. La ecuación de ondas como sistema hiperbólico

Consideremos la ecuación de ondas unidimensional

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = 0, \quad c > 0. \quad (1.5.1)$$

Definimos $u_1 = y_t$, $u_2 = y_x$. Entonces

$$(u_1)_t - c^2 (u_2)_x = 0, \quad (u_2)_t - (u_1)_x = 0.$$

Por tanto,

$$u_t + Au_x = 0, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.2)$$

1.5.1. Valores y vectores propios

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -c$, $\lambda_2 = c$. Una elección de vectores propios derechos es $r_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, $r_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix}$. Así,

$$R = \begin{pmatrix} c & -c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Las variables características son

$$w_1 = \frac{1}{2c}y_t + \frac{1}{2}y_x, \quad w_2 = -\frac{1}{2c}y_t + \frac{1}{2}y_x.$$

1.5.2. Deducción de la fórmula de d'Alembert

Supongamos condiciones iniciales

$$y(x, 0) = f(x), \quad y_t(x, 0) = g(x).$$

Entonces $u_1(x, 0) = g(x)$ y $u_2(x, 0) = f'(x)$. Como w_1 viaja con velocidad $-c$ y w_2 con velocidad c , se tiene

$$w_1(x, t) = w_1^0(x + ct), \quad w_2(x, t) = w_2^0(x - ct),$$

donde

$$w_1^0(x) = \frac{1}{2c}g(x) + \frac{1}{2}f'(x), \quad w_2^0(x) = -\frac{1}{2c}g(x) + \frac{1}{2}f'(x).$$

Como $u = Rw$, resulta

$$y_t = u_1 = cw_1 - cw_2, \quad y_x = u_2 = w_1 + w_2.$$

La función

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (1.5.3)$$

satisface las expresiones anteriores para y_t e y_x , y cumple las condiciones iniciales. Esta es la fórmula de d'Alembert.

1.6. Sistemas simetrizables y entropía

La diagonalización describe cómo se propagan las ondas. Sin embargo, muchos sistemas hiperbólicos poseen además una estructura energética. Esta estructura se expresa mediante la existencia de una matriz simetrizante.

Definición 1.6.1 (Sistema simetrizable). *El sistema lineal $u_t + Au_x = 0$ se dice simetrizable si existe una matriz simétrica definida positiva H tal que*

$$HA = (HA)^T. \quad (1.6.1)$$

Proposición 1.6.1 (Entropía cuadrática). *Si existe $H = H^T > 0$ tal que HA es simétrica, entonces*

$$\eta(u) = \frac{1}{2}u^T Hu$$

satisface

$$\eta_t + q_x = 0, \quad q(u) = \frac{1}{2}u^T H A u. \quad (1.6.2)$$

Demostración. Multiplicamos la ecuación por $u^T H$:

$$u^T H u_t + u^T H A u_x = 0.$$

Como H es simétrica,

$$u^T H u_t = \partial_t \left(\frac{1}{2} u^T H u \right).$$

Además, como HA es simétrica,

$$u^T H A u_x = \partial_x \left(\frac{1}{2} u^T H A u \right).$$

Se obtiene entonces (1.6.2). □

1.6.1. Simetrización de la ecuación de ondas

Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

tomamos $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$HA = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix},$$

que es simétrica. La entropía asociada es

$$\eta(u) = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} c^2 u_2^2 = \frac{1}{2} y_t^2 + \frac{1}{2} c^2 y_x^2.$$

Esta es la energía de la cuerda: el primer término corresponde a la energía cinética y el segundo a la energía potencial elástica.

1.7. Ecuaciones de Maxwell en una dimensión

Partimos de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, sin cargas ni corrientes:

$$\partial_t \mathbf{E} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}, \quad \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E},$$

junto con las restricciones

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Aquí

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z).$$

Supondremos una onda plana que se propaga en la dirección x . Esto significa que todos los campos dependen solo de x y t : $\partial_y = \partial_z = 0$. Entonces

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(B_z)_x \\ (B_y)_x \end{pmatrix}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(E_z)_x \\ (E_y)_x \end{pmatrix}.$$

Por tanto, Maxwell se reduce a

$$\begin{cases} (E_x)_t = 0, \\ (E_y)_t = -c^2(B_z)_x, \\ (E_z)_t = c^2(B_y)_x, \end{cases} \quad \begin{cases} (B_x)_t = 0, \\ (B_y)_t = (E_z)_x, \\ (B_z)_t = -(E_y)_x. \end{cases}$$

Las componentes longitudinales E_x y B_x no se propagan; permanecen constantes en el tiempo. Además, si inicialmente $\nabla \cdot \mathbf{E} = (E_x)_x = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = (B_x)_x = 0$, entonces estas restricciones se preservan. De este modo, la dinámica propagativa queda contenida en dos sistemas 2×2 desacoplados:

$$\begin{cases} (E_y)_t + c^2(B_z)_x = 0, \\ (B_z)_t + (E_y)_x = 0, \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} (E_z)_t - c^2(B_y)_x = 0, \\ (B_y)_t - (E_z)_x = 0. \end{cases}$$

Cada uno de estos sistemas describe una polarización transversal de la onda electromagnética.

Consideremos, por ejemplo, el primer par: $U = \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix}$. Entonces

$$U_t + AU_x = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -c$, $\lambda_2 = c$. Por tanto, el sistema es hiperbólico. Una elección de variables características es

$$w_+ = E_y + cB_z, \quad w_- = E_y - cB_z.$$

En efecto,

$$(w_+)_t + c(w_+)_x = 0, \quad (w_-)_t - c(w_-)_x = 0.$$

Así, w_+ se propaga con velocidad c hacia la izquierda, mientras que w_- se propaga con velocidad c hacia la derecha, según la convención $w_t + \lambda w_x = 0$.

Energía electromagnética

La energía electromagnética reducida es

$$\eta(U) = \frac{1}{2}E_y^2 + \frac{1}{2}c^2B_z^2.$$

Esta energía corresponde a la suma de la energía del campo eléctrico y la energía del campo magnético. En forma matricial,

$$\eta(U) = \frac{1}{2}U^T H U, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$HA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix},$$

que es simétrica. Por tanto, el sistema de Maxwell 1D es simetrizable y admite la ley de conservación

$$\eta_t + q_x = 0, \quad q(U) = \frac{1}{2}U^T H A U.$$

En este caso, $q(U) = c^2 E_y B_z$. Este flujo de energía es la versión unidimensional del vector de Poynting.

Comentario físico

La reducción anterior describe ondas electromagnéticas planas en el vacío. Las hipótesis usadas son:

- ausencia de cargas y corrientes libres;
- dependencia espacial solo en una dirección;
- polarización transversal;
- preservación de las restricciones de divergencia.

Por tanto, no se está describiendo la interacción con antenas, conductores, medios materiales, absorción ni dispersión. Sin embargo, el modelo conserva la estructura esencial de Maxwell como sistema hiperbólico lineal: propagación a velocidad finita, modos característicos y conservación de energía electromagnética.

1.8. Sistemas no lineales y linealización

Consideremos ahora un sistema no lineal de leyes de conservación:

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U \in \mathbb{R}^p. \quad (1.8.1)$$

Si U^* es un estado constante y escribimos $U = U^* + V$, con V pequeño, entonces

$$F(U^* + V) = F(U^*) + F'(U^*)V + \mathcal{O}(|V|^2).$$

Como U^* es constante, despreciando términos cuadráticos se obtiene

$$V_t + F'(U^*)V_x = 0.$$

Por tanto, la matriz $A(U^*) = F'(U^*)$ define el sistema hiperbólico lineal que describe la propagación local de perturbaciones alrededor del estado U^* .

1.8.1. Entropía para sistemas no lineales

Una entropía para (1.8.1) es una función convexa $\eta(U)$ para la cual existe un flujo de entropía $q(U)$ tal que

$$\nabla \eta(U) F'(U) = \nabla q(U). \quad (1.8.2)$$

Para soluciones suaves,

$$\eta(U)_t + q(U)_x = 0.$$

Si η es estrictamente convexa, entonces $H(U) = \nabla^2 \eta(U)$ es definida positiva. En muchos sistemas físicos, esta matriz simetriza el sistema en el sentido de que $H(U)F'(U)$ es simétrica.

1.9. Aguas someras: estructura hiperbólica y energía

El sistema de aguas someras sin fuente topográfica puede escribirse en variables conservativas

$$U = \begin{pmatrix} h \\ m \end{pmatrix}, \quad m = hu,$$

como

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad F(U) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}. \quad (1.9.1)$$

Aquí $h > 0$ es la altura de agua, u la velocidad promedio y g la aceleración de gravedad.

1.9.1. Valores propios

El Jacobiano en variables conservativas es

$$F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - gh = 0$, por lo que

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}.$$

Así, mientras $h > 0$, el sistema es hiperbólico.

1.9.2. Invariantes de Riemann

Buscamos funciones $w(h, u)$ tales que sean constantes a lo largo de una familia característica. Esto equivale a exigir que su gradiente sea proporcional a un vector propio izquierdo del sistema. El sistema en variables primitivas es:

$$\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_t + A(h, u) \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_x = 0, \quad A(h, u) = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son:

$$\lambda_{\pm} = u \pm c, \quad c = \sqrt{gh}.$$

Vectores propios izquierdos Buscamos $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ tal que: $\ell A = \lambda \ell$. Esto da el sistema:

$$\begin{cases} \ell_1 u + \ell_2 g = \lambda \ell_1, \\ \ell_1 h + \ell_2 u = \lambda \ell_2. \end{cases}$$

Para $\lambda = u + c$, se obtiene:

$$\ell_1 h + \ell_2 u = (u + c)\ell_2 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = \frac{c}{h} \ell_2.$$

Por tanto, un vector propio izquierdo es proporcional a:

$$\ell_+ = \left(\frac{c}{h}, 1 \right).$$

Análogamente, para $\lambda = u - c$:

$$\ell_- = \left(-\frac{c}{h}, 1 \right).$$

Construcción de los invariantes Buscamos $w(h, u)$ tal que: $\nabla w \propto \ell$. Entonces:

$$\nabla w_+ = \left(\frac{c}{h}, 1 \right), \quad \nabla w_- = \left(-\frac{c}{h}, 1 \right).$$

Esto equivale a resolver:

$$\frac{\partial w_{\pm}}{\partial h} = \pm \frac{c}{h} = \pm \frac{\sqrt{gh}}{h} = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad \frac{\partial w_{\pm}}{\partial u} = 1.$$

Integrando respecto de u : $w_{\pm} = u + \phi_{\pm}(h)$. Luego:

$$\phi'_{\pm}(h) = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Integrando: $\phi_{\pm}(h) = \pm 2\sqrt{gh}$. Por lo tanto:

$$\boxed{w_- = u - 2\sqrt{gh}, \quad w_+ = u + 2\sqrt{gh}.}$$

Interpretación Estas cantidades permanecen constantes a lo largo de las curvas características:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{gh}.$$

Esto refleja la naturaleza no lineal del sistema: las velocidades dependen del estado.

1.9.3. Entropía y energía

La energía mecánica total por unidad de área es

$$\eta(h, m) = \frac{1}{2} \frac{m^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 = \frac{1}{2} hu^2 + \frac{1}{2} gh^2. \quad (1.9.2)$$

El primer término es la energía cinética del flujo y el segundo es la energía potencial gravitacional asociada a la columna de agua. El flujo de entropía correspondiente es

$$q(h, m) = u \left(\frac{1}{2} hu^2 + gh^2 \right).$$

Para soluciones suaves, $\eta_t + q_x = 0$. En presencia de choques, la energía satisface típicamente una desigualdad de entropía $\eta_t + q_x \leq 0$, que expresa disipación mecánica.

1.9.4. Linealización de aguas someras

Sea (h^*, u^*) un estado constante, con $h^* > 0$. Para perturbaciones pequeñas

$$h = h^* + \tilde{h}, \quad u = u^* + \tilde{u},$$

se obtiene, en variables primitivas,

$$\begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u^* & h^* \\ g & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_x = 0.$$

Este es un sistema lineal hiperbólico con velocidades

$$u^* - \sqrt{gh^*}, \quad u^* + \sqrt{gh^*}.$$

Invariantes de Riemann en la linearización

Consideremos la linearización alrededor de un estado constante (h^*, u^*) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u^* & h^* \\ g & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}_x = 0.$$

Los valores propios son:

$$\lambda_{\pm} = u^* \pm c^*, \quad c^* = \sqrt{gh^*}.$$

Vectores propios izquierdos Análogamente al caso no lineal, se obtiene:

$$\ell_{\pm} = \left(\pm \frac{c^*}{h^*}, 1 \right).$$

Invariantes lineales Buscamos funciones lineales:

$$w_{\pm} = \tilde{u} + \alpha_{\pm} \tilde{h}.$$

Imponiendo: $\nabla w_{\pm} \propto \ell_{\pm}$, se obtiene: $\alpha_{\pm} = \pm \frac{c^*}{h^*}$. Por tanto:

$$\boxed{w_{\pm} = \tilde{u} \pm \frac{c^*}{h^*} \tilde{h}.}$$

Comparación con el caso no lineal En el sistema completo:

$$w_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh},$$

mientras que en la linearización:

$$w_{\pm} = \tilde{u} \pm \frac{c^*}{h^*} \tilde{h}.$$

- En el caso no lineal, los invariantes son funciones no lineales de h .
- En la linearización, los invariantes son combinaciones lineales.
- La dependencia $2\sqrt{gh}$ se reemplaza por su derivada en el estado base.

Interpretación La linearización aproxima localmente la estructura característica del sistema no lineal. En particular, los invariantes lineales son la aproximación de primer orden de los invariantes no lineales alrededor del estado (h^*, u^*) .

1.10. Sistema Shallow Water–Exner

El sistema acoplado Shallow Water–Exner modela la interacción entre flujo superficial y evolución del lecho sedimentario. Una forma usual es

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = -gh(z_b)_x, \\ (z_b)_t + \xi q_b(h, u)_x = 0, \end{cases} \quad (1.10.1)$$

donde z_b representa la elevación del fondo, q_b es el flujo sólido y ξ es una constante relacionada con la porosidad del sedimento.

1.10.1. Energía extendida

Para aguas someras con topografía, la energía hidráulica natural incluye el término potencial asociado al fondo:

$$\eta(h, u, z_b) = \frac{1}{2}hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + ghz_b. \quad (1.10.2)$$

Los tres términos representan, respectivamente: energía cinética del flujo, energía potencial gravitacional de la columna de agua y energía potencial asociada a la posición del lecho.

1.10.2. Balance formal de energía

Para la parte hidráulica se obtiene formalmente

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + ghz_b \right) + \partial_x \left[u \left(\frac{1}{2}hu^2 + gh^2 + ghz_b \right) \right] = gh(z_b)_t.$$

Si el fondo es fijo, $(z_b)_t = 0$, la energía hidráulica se conserva. En cambio, cuando el fondo evoluciona según Exner,

$$(z_b)_t = -\xi q_b(h, u)_x,$$

se tiene

$$gh(z_b)_t = -\xi gh q_b(h, u)_x.$$

Este término representa el intercambio energético entre el flujo y el lecho móvil.

1.10.3. Comentario sobre convexidad

A diferencia de la energía de aguas someras puras, la energía extendida

$$\eta(h, m, z_b) = \frac{1}{2} \frac{m^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 + ghz_b$$

no es estrictamente convexa en todas las variables (h, m, z_b) . En efecto, el término ghz_b acopla h y z_b , pero no existe un término cuadrático positivo en z_b . Esto refleja que el sistema acoplado no posee, en general, una simetrización convexa simple del mismo tipo que las aguas someras puras.

1.11. Riemann solvers para sistemas lineales y linealizados

Los métodos de volúmenes finitos para leyes de conservación usan flujos numéricos contruidos a partir de problemas de Riemann locales. En una malla uniforme $x_j = j\Delta x$, una actualización conservativa típica es

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n).$$

El problema central es definir el flujo numérico $F_{j+1/2}^n$ a partir de los estados $U_L = U_j^n$ y $U_R = U_{j+1}^n$.

1.11.1. Solver exacto lineal

Para el sistema lineal $u_t + Au_x = 0$, con $A = R\Lambda R^{-1}$, se descompone

$$u_R - u_L = \sum_{i=1}^p \alpha_i r_i.$$

El flujo de Godunov para el sistema lineal puede escribirse como

$$F_G(u_L, u_R) = A^- u_R + A^+ u_L,$$

donde

$$A^\pm = R\Lambda^\pm R^{-1}, \quad \Lambda^\pm = \text{diag}(\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_p^\pm),$$

con $\lambda_i^+ = \max(\lambda_i, 0)$ y $\lambda_i^- = \min(\lambda_i, 0)$.

1.11.2. Solver de Roe

Para un sistema no lineal $U_t + F(U)_x = 0$, el solver de Roe reemplaza localmente el sistema por uno lineal:

$$U_t + \tilde{A}(U_L, U_R)U_x = 0,$$

donde $\tilde{A}$ debe aproximar el Jacobiano y satisfacer, idealmente,

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L).$$

Luego se aplica la descomposición característica de $\tilde{A}$:

$$U_R - U_L = \sum_i \alpha_i \tilde{r}_i.$$

El flujo de Roe se escribe

$$F_{\text{Roe}}(U_L, U_R) = \frac{1}{2}(F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2} \sum_i |\tilde{\lambda}_i| \alpha_i \tilde{r}_i.$$

1.11.3. Solver HLL

El solver HLL aproxima la solución del problema de Riemann por tres estados separados por dos velocidades s_L y s_R . El flujo HLL es

$$F_{\text{HLL}} = \begin{cases} F(U_L), & 0 \leq s_L, \\ \frac{s_R F(U_L) - s_L F(U_R) + s_L s_R (U_R - U_L)}{s_R - s_L}, & s_L \leq 0 \leq s_R, \\ F(U_R), & s_R \leq 0. \end{cases}$$

Este solver es robusto y muy utilizado en aguas someras, Euler y sistemas acoplados, aunque puede ser más difusivo que Roe porque no resuelve todas las ondas intermedias.

1.11.4. Comparación entre solvers de Riemann

Los distintos flujos numéricos pueden entenderse según cuánta información utilizan sobre la estructura característica del sistema.

Método	Idea principal	Información usada	Comentario
Godunov	Resuelve exactamente el problema de Riemann local.	Solución exacta del abanico de ondas.	Es el flujo de referencia, pero puede ser costoso para sistemas no lineales.
Roe	Reemplaza el sistema no lineal por un sistema linealizado local.	Valores y vectores propios de la matriz de Roe $\tilde{A}$.	En el caso lineal con $F(U) = AU$, coincide exactamente con Godunov.
HLL	Aproxima todo el abanico de ondas por dos ondas extremas.	Solo velocidades extremas s_L y s_R .	Es robusto y simple, pero no resuelve ondas intermedias.
Lax–Friedrichs	Agrega difusión numérica uniforme.	Una velocidad máxima global o local α .	Es un caso particular de HLL con $s_L = -\alpha$, $s_R = \alpha$. Es más difusivo.

Comentario

En el caso lineal con coeficientes constantes,

$$F(U) = AU,$$

el solver de Roe coincide con el solver exacto de Godunov, ya que la linearización de Roe es simplemente $\tilde{A} = A$. En cambio, el flujo de Lax–Friedrichs no utiliza la descomposición

característica completa. Su término disipativo es proporcional a

$$\alpha(U_R - U_L),$$

donde α es una cota superior de las velocidades características. Por esta razón, Lax–Friedrichs suele ser más difusivo.

El método HLL puede interpretarse como una mejora de Lax–Friedrichs: en lugar de usar una única velocidad simétrica α , emplea dos velocidades extremas s_L y s_R , que aproximan el abanico de ondas del problema de Riemann. Por ello, Lax–Friedrichs se obtiene como caso particular de HLL tomando $s_L = -\alpha$, $s_R = \alpha$. Desde el punto de vista conceptual, se tiene la jerarquía

$$\boxed{\text{Godunov/Roe} \longrightarrow \text{HLL} \longrightarrow \text{Lax–Friedrichs},}$$

donde la flecha indica una pérdida progresiva de información característica y, típicamente, un aumento de difusión numérica.

1.12. Sistemas hiperbólicos lineales en varias dimensiones

Consideremos el sistema lineal en d dimensiones:

$$u_t + \sum_{j=1}^d A_j u_{x_j} = 0, \quad u \in \mathbb{R}^p, \quad (1.12.1)$$

donde $A_j \in \mathbb{R}^{p \times p}$ son matrices constantes.

1.12.1. Símbolo direccional

Sea $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{R}^d$, con $|n| = 1$. Definimos el operador direccional

$$A(n) = \sum_{j=1}^d n_j A_j. \quad (1.12.2)$$

Definición 1.12.1. *El sistema es hiperbólico si, para todo n , la matriz $A(n)$ es diagonalizable con valores propios reales.*

Observación 1.12.1. *El análisis en varias dimensiones se reduce al estudio unidimensional en cada dirección n .*

1.12.2. Ejemplo: ecuaciones de Maxwell en 3D

Consideramos las ecuaciones de Maxwell en el vacío, sin fuentes:

$$\partial_t \mathbf{E} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}, \quad \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (1.12.3)$$

Definimos el vector de estado

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Entonces el sistema se escribe como

$$U_t + A_1 U_x + A_2 U_y + A_3 U_z = 0. \quad (1.12.4)$$

1.12.3. Matrices del sistema

Las matrices A_j están dadas por:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.12.4. Figura: polarización de ondas

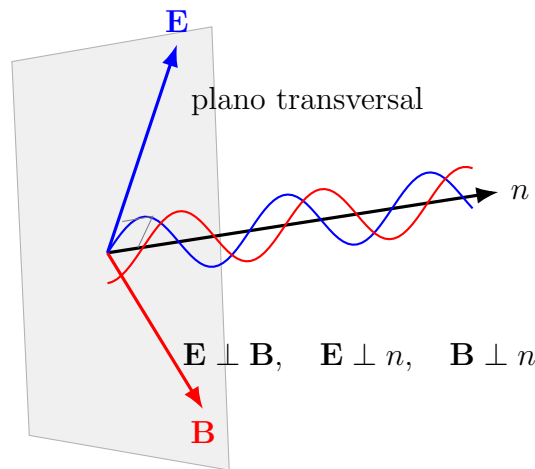


Figura 1.2: Polarización transversal de una onda electromagnética plana. La dirección n indica la propagación, mientras que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ pertenecen al plano transversal.

1.12.5. Análisis espectral

Para una dirección n , se define:

$$A(n) = n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3.$$

Se puede verificar que

$$A(n) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 n \times \mathbf{B} \\ n \times \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

El problema espectral es:

$$\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 n \times \mathbf{B} \\ n \times \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son:

$$\lambda = -c, 0, c$$

con multiplicidades:

- $+c$: dos modos (polarizaciones),
- $-c$: dos modos,
- 0 : dos modos (no propagativos).

Observación 1.12.2. *El sistema es hiperbólico pero no estrictamente hiperbólico, debido a la multiplicidad de los valores propios.*

1.12.6. Entropía (energía electromagnética)

La energía electromagnética es:

$$\eta(U) = \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} c^2 |\mathbf{B}|^2. \quad (1.12.5)$$

Satisface la ley de conservación:

$$\eta_t + \nabla \cdot (c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (1.12.6)$$

El flujo $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ es el vector de Poynting.

1.12.7. Interpretación física

- Los modos con $\lambda = \pm c$ corresponden a ondas electromagnéticas transversales.
- Los modos con $\lambda = 0$ corresponden a restricciones de divergencia.
- La multiplicidad refleja la existencia de distintas polarizaciones.

Interpretación física: vector de Poynting

El flujo de energía electromagnética está dado por el vector

$$\mathbf{S} = c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Este vector se denomina *vector de Poynting*. Su dirección indica la dirección de propagación de la energía electromagnética, mientras que su magnitud representa la cantidad de energía que atraviesa una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área.

La ley

$$\eta_t + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

expresa la conservación local de la energía electromagnética. En efecto, si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio regular, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta \, dx = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Por lo tanto, la variación temporal de la energía contenida en Ω es igual al flujo neto de energía que atraviesa la frontera $\partial\Omega$.

En una onda plana, los campos $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ y el vector de Poynting son mutuamente ortogonales:

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \quad \mathbf{S} \parallel \text{dirección de propagación}.$$

Así, en el marco de sistemas hiperbólicos, el vector de Poynting juega el rol de *flujo de entropía*: la entropía es la energía electromagnética y su flujo es la energía transportada por la onda.

1.12.8. Estructura del problema de Riemann en varias dimensiones

El problema de Riemann multidimensional para sistemas hiperbólicos lineales presenta una estructura geométrica más rica que en una dimensión. Para sistemas lineales 2×2 , Giquin, Laurens y Rosier demostraron que, mediante cambios lineales adecuados, estos sistemas pueden reducirse a formas canónicas, y resolvieron explícitamente el problema de Riemann multidimensional para el caso canónico más relevante [6].

Consideremos el sistema lineal hiperbólico en dos dimensiones:

$$u_t + A_1 u_x + A_2 u_y = 0,$$

con datos iniciales tipo Riemann definidos por estados constantes en cada cuadrante:

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} U_{++}, & x > 0, y > 0, \\ U_{-+}, & x < 0, y > 0, \\ U_{--}, & x < 0, y < 0, \\ U_{+-}, & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

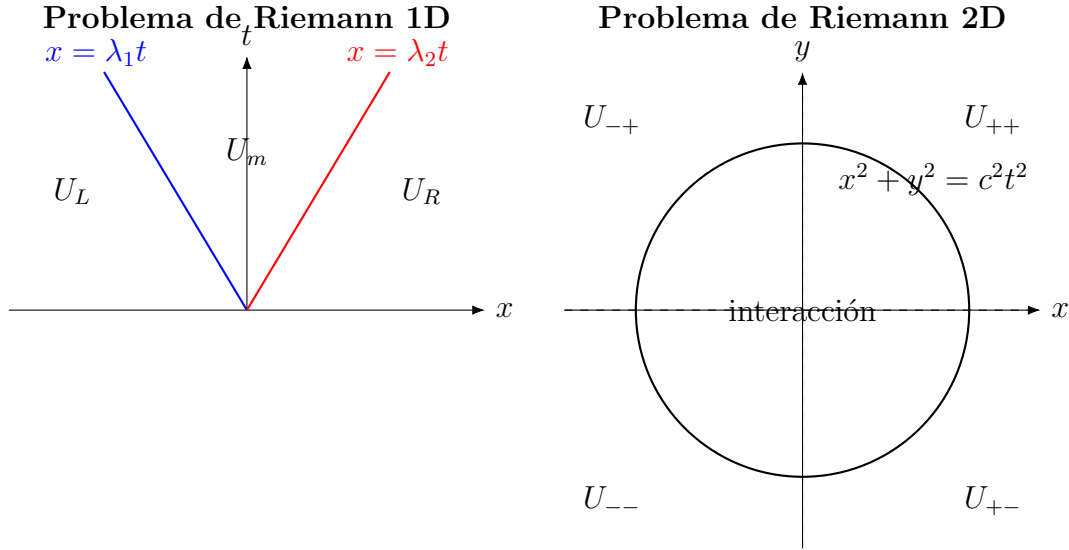


Figura 1.3: Comparación entre el problema de Riemann en una y dos dimensiones. En 1D aparecen estados constantes separados por ondas; en 2D aparece una región de interacción dentro del cono de influencia.

Cono de influencia

La propagación de la información ocurre con velocidad finita. En consecuencia, los efectos de la discontinuidad inicial se propagan dentro del cono:

$$x^2 + y^2 \leq c^2 t^2.$$

Fuera de este cono, la solución permanece igual a los estados iniciales.

Regiones de la solución

El espacio se divide en dos tipos de regiones:

- **Regiones exteriores:** donde la solución es constante e igual a uno de los estados iniciales.
- **Región interior (cono):** donde ocurre la interacción de las ondas provenientes de las distintas direcciones.

Diferencia con el caso unidimensional

En una dimensión, el problema de Riemann produce una solución formada por estados constantes separados por ondas.

En dos dimensiones, la situación es distinta:

- la solución ya no es constante dentro del cono;
- aparece una región de interacción continua;

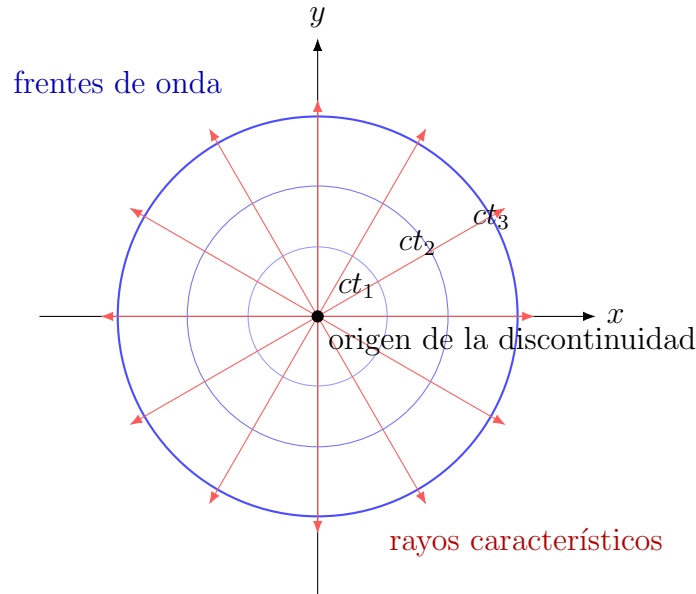


Figura 1.4: Representación esquemática de curvas características en dos dimensiones: los rayos indican direcciones de propagación y los círculos representan frentes de onda para tiempos crecientes.

- la solución depende de integrales (tipo Kirchhoff) y no solo de combinaciones lineales.

En varias dimensiones, las características no se reducen a rectas en el plano (x, t) . Para una perturbación localizada, la información se propaga en todas las direcciones espaciales. Los rayos característicos indican las direcciones de propagación, mientras que los frentes de onda corresponden a superficies de nivel de tiempo de llegada. En el caso isotrópico con velocidad c , dichos frentes son circunferencias en 2D y esferas en 3D.

Interpretación

Este fenómeno refleja que, en varias dimensiones, las ondas se propagan en todas las direcciones simultáneamente. Como consecuencia, las interacciones no pueden describirse únicamente mediante la descomposición en vectores propios, sino que involucran una estructura geométrica más rica.

Comentario

El caso unidimensional puede interpretarse como una situación degenerada en la cual la propagación ocurre solo en dos direcciones. En contraste, en dos dimensiones aparece un continuo de direcciones de propagación, lo que genera la región de interacción observada en la figura.

1.13. Riemann solvers en varias dimensiones

En esta sección extendemos los métodos de volúmenes finitos al caso multidimensional. El objetivo es mostrar cómo los solvers de Riemann unidimensionales se utilizan localmente en cada dirección o interfaz.

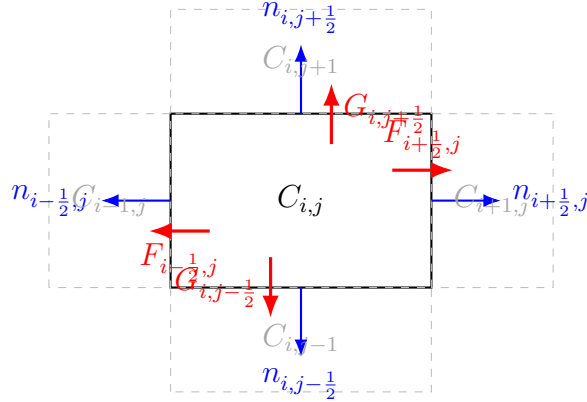
1.13.1. Caso bidimensional en malla cartesiana

Consideremos el sistema

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0.$$

Sea una malla rectangular con celdas $C_{i,j}$. Integrando sobre una celda se obtiene el esquema:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}).$$



flujos numéricos y normales exteriores en una celda rectangular

Figura 1.5: Celda cartesiana $C_{i,j}$ en un esquema de volúmenes finitos bidimensional. Cada flujo numérico se calcula resolviendo un problema de Riemann normal a la interfaz correspondiente.

Idea clave

Cada flujo en una cara se calcula resolviendo un problema de Riemann *unidimensional* normal a dicha cara.

El problema multidimensional se reduce a problemas 1D locales

1.13.2. Solvers en cada interfaz

En la interfaz vertical $x = x_{i+1/2}$:

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = \mathcal{F}(U_{i,j}, U_{i+1,j}),$$

donde $\mathcal{F}$ es un solver 1D.

Análogamente, en la interfaz horizontal:

$$G_{i,j+\frac{1}{2}} = \mathcal{G}(U_{i,j}, U_{i,j+1}).$$

1.13.3. Ejemplos de flujos numéricos

Godunov Se usa la solución exacta del problema de Riemann en cada cara.

Roe Se lineariza el sistema localmente:

$$F_{\text{Roe}} = \frac{1}{2}(F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2}|\tilde{A}|(U_R - U_L).$$

HLL Se aproximan las ondas por dos velocidades extremas:

$$F_{\text{HLL}} = \frac{s_R F(U_L) - s_L F(U_R) + s_L s_R (U_R - U_L)}{s_R - s_L}.$$

Lax–Friedrichs

$$F_{LF} = \frac{1}{2}(F(U_L) + F(U_R)) - \frac{\alpha}{2}(U_R - U_L).$$

1.13.4. Interpretación geométrica

Cada interfaz define una dirección normal n . El flujo numérico depende del operador direccional:

$$A(n) = n_x F'(U) + n_y G'(U).$$

Se resuelve un problema de Riemann en la dirección normal a la cara

1.13.5. Mallas desestructuradas

Sea ahora una partición del dominio en volúmenes arbitrarios C_i .

El esquema de volúmenes finitos se escribe como:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{e \in \partial C_i} |e| F_e,$$

donde:

- e : cara de la celda,
- n_e : normal exterior,
- F_e : flujo numérico a través de la cara.

Flujo en cada cara

$$F_e = \mathcal{F}(U_L, U_R, n_e),$$

donde el solver se aplica en la dirección normal:

Riemann solver en dirección n_e

1.13.6. Comentario

En mallas no estructuradas, la clave es:

- proyectar el sistema en la dirección normal,
- aplicar un solver unidimensional,
- reconstruir el flujo vectorial.

Esto muestra que la teoría unidimensional es el bloque fundamental para el caso multidimensional.

Los métodos multi-D se construyen a partir de solvers 1D

1.14. Ejercicios

Ejercicio 1.14.1. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalice A , encuentre sus vectores propios izquierdos y resuelva explícitamente $u_t + Au_x = 0$ para un dato inicial $u_0(x)$.

Ejercicio 1.14.2. *Considere*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule sus valores propios, vectores propios derechos, vectores propios izquierdos y variables características. Verifique directamente que dichas variables satisfacen ecuaciones de transporte.

Ejercicio 1.14.3. *Deduzca la fórmula de d'Alembert a partir de la diagonalización del sistema asociado a la ecuación de ondas.*

Ejercicio 1.14.4. *Resuelva el problema de Riemann para un sistema lineal 3×3 con valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Dibuje el diagrama en el plano (x, t) .*

Ejercicio 1.14.5. *Demuestre que si $A = A^T$, entonces $\eta(u) = \frac{1}{2}|u|^2$ es una entropía para $u_t + Au_x = 0$. Determine el flujo de entropía.*

Ejercicio 1.14.6. Sea A diagonalizable con valores propios reales. Demuestre que existe una matriz simétrica definida positiva H tal que HA es simétrica. Sugerencia: use $A = R\Lambda R^{-1}$ y considere $H = R^{-T}R^{-1}$.

Ejercicio 1.14.7. Para el sistema de Maxwell unidimensional, identifique las variables características y la energía electromagnética asociada. Compare con el caso de la cuerda vibrante.

Ejercicio 1.14.8. Para el sistema de aguas someras, derive los valores propios $u \pm \sqrt{gh}$. Luego verifique que $w_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh}$ son invariantes de Riemann.

Ejercicio 1.14.9. Linealice el sistema de aguas someras alrededor de un estado constante (h^*, u^*) . Interprete las dos velocidades características obtenidas.

Ejercicio 1.14.10. Analice la matriz Hessiana de la energía extendida del sistema *Shallow Water–Exner*:

$$\eta(h, m, z_b) = \frac{1}{2} \frac{m^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 + ghz_b.$$

Explique por qué no es estrictamente convexa en todas las variables.

Ejercicio 1.14.11. Construya el flujo de Roe para un sistema lineal $u_t + Au_x = 0$. Muestre que coincide con el flujo exacto de Godunov.

Ejercicio 1.14.12 (Símbolo direccional). Considere el sistema lineal

$$u_t + \sum_{j=1}^d A_j u_{x_j} = 0.$$

Para $n \in \mathbb{R}^d$, $|n| = 1$, defina

$$A(n) = \sum_{j=1}^d n_j A_j.$$

Explique por qué la hiperbolicidad multi- D se estudia analizando los valores propios de $A(n)$ para toda dirección n .

Ejercicio 1.14.13 (Maxwell 3D). Para las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, use las matrices A_1, A_2, A_3 del texto y calcule explícitamente $A(n)$. Verifique que

$$A(n) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 n \times \mathbf{B} \\ n \times \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.14.14 (Espectro de Maxwell). Demuestre que los valores propios del símbolo direccional de Maxwell son

$$\lambda = -c, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = c,$$

con multiplicidad dos cada uno. Interprete físicamente los modos $\lambda = \pm c$ y $\lambda = 0$.

Ejercicio 1.14.15 (Entropía de Maxwell). *Demuestre que*

$$\eta(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2}|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}c^2|\mathbf{B}|^2$$

satisface

$$\eta_t + \nabla \cdot (c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Interprete $c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ como flujo de energía.

Ejercicio 1.14.16 (Aguas someras linealizadas en 2D). *Considere el sistema de aguas someras 2D sin fuente:*

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x + (huv)_y &= 0, \\ (hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_y &= 0. \end{aligned}$$

Linealice alrededor de un estado constante (h^, u^*, v^*) . Luego, para una dirección unitaria*

$$n = (n_1, n_2),$$

demuestre que las velocidades características del símbolo direccional son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u^*n_1 + v^*n_2 - \sqrt{gh^*}, \\ \lambda_2 &= u^*n_1 + v^*n_2, \\ \lambda_3 &= u^*n_1 + v^*n_2 + \sqrt{gh^*}. \end{aligned}$$

Interprete la onda intermedia.

Ejercicio 1.14.17 (Energía de aguas someras multi-D). *Para aguas someras 2D, considere*

$$\eta(h, u, v) = \frac{1}{2}h(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}gh^2.$$

Deduzca formalmente la ley de conservación de energía para soluciones suaves y determine el flujo de entropía vectorial.

Bibliografía

- [1] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem*. Oxford University Press, 2000.
- [2] R. Bürger. *Introducción a Leyes de Conservación*. Apuntes de curso, Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, 2022.
- [3] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II. Interscience Publishers, 1962.
- [4] C. M. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer, 4th edition, 2016.
- [5] K. O. Friedrichs. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7:345–392, 1954.
- [6] H. Gilquin, J. Laurens and C. Rosier. Multi-dimensional Riemann problems for linear hyperbolic systems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 30(5):527–548, 1996.
- [7] P. D. Lax. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM, 1973.
- [8] J. Rauch. *Hyperbolic Partial Differential Equations and Geometric Optics*. American Mathematical Society, 2012.
- [9] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, 1974.

Capítulo 2

Sistemas Hiperbólicos No Lineales

2.1. Hiperbolicidad y algunos ejemplos

En esta sección introducimos sistemas hiperbólicos no lineales de leyes de conservación y algunos modelos fundamentales provenientes de la mecánica de fluidos.

2.1.1. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión

Un sistema de leyes de conservación en una dimensión espacial tiene la forma

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (2.1.1)$$

donde

$$U(x, t) \in \mathbb{R}^m, \quad F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es el flujo del sistema.

La matriz jacobiana del flujo es

$$A(U) = DF(U).$$

Definición 2.1.1 (Hiperbolicidad). *El sistema (2.1.1) se dice hiperbólico en $U \in \Omega$ si la matriz $A(U)$ posee valores propios reales y una base completa de vectores propios.*

Definición 2.1.2 (Hiperbolicidad estricta). *El sistema (2.1.1) se dice estrictamente hiperbólico si sus valores propios satisfacen*

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_m(U).$$

La hiperbolicidad implica propagación de información con velocidad finita y existencia de familias características.

2.1.2. Sistemas hiperbólicos multidimensionales

En varias dimensiones espaciales, un sistema de conservación tiene la forma

$$U_t + \sum_{j=1}^d F_j(U)_{x_j} = 0. \quad (2.1.2)$$

Definiendo

$$A_j(U) = DF_j(U),$$

la hiperbolicidad se estudia en cada dirección espacial.

Definición 2.1.3. *El sistema multidimensional es hiperbólico si para todo vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, la matriz*

$$A(\xi, U) = \sum_{j=1}^d \xi_j A_j(U)$$

tiene valores propios reales y una base completa de vectores propios.

Observación 2.1.1. *La matriz $A(\xi, U)$ corresponde al operador linealizado en la dirección ξ . Sus autovalores representan velocidades de propagación de ondas en dicha dirección.*

2.2. Ecuaciones de Shallow Water

2.2.1. Deducción física

Las ecuaciones de shallow water describen el movimiento de una capa de fluido cuya profundidad es pequeña respecto de la escala horizontal característica.

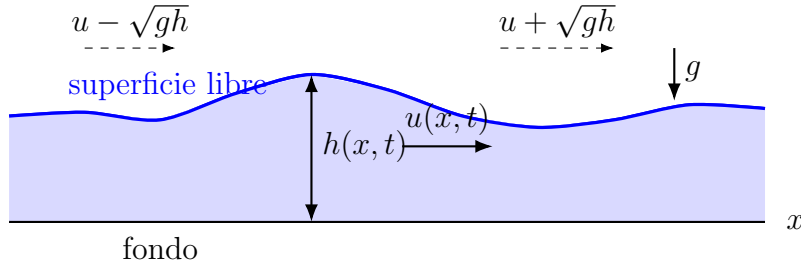


Figura 2.1: Modelo shallow water 1D. La variable $h(x, t)$ representa la altura de la columna de agua y $u(x, t)$ la velocidad horizontal promedio. Las velocidades características son $u \pm \sqrt{gh}$.

Consideremos un fluido incomprensible con superficie libre $z = \eta(x, t)$ y fondo $z = b(x)$. La profundidad del fluido es

$$h(x, t) = \eta(x, t) - b(x).$$

Las ecuaciones de Euler incomprensibles son

$$u_x + w_z = 0, \tag{2.2.1}$$

$$u_t + uu_x + wu_z = -\frac{1}{\rho}p_x, \tag{2.2.2}$$

$$w_t + uw_x + ww_z = -\frac{1}{\rho}p_z - g. \tag{2.2.3}$$

Bajo la hipótesis de aguas someras, $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$, las aceleraciones verticales son despreciables y la presión se aproxima por la ley hidrostática

$$p(x, z, t) = \rho g(\eta - z).$$

Integrando verticalmente y suponiendo que la velocidad horizontal es aproximadamente uniforme en profundidad, se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x &= 0. \end{aligned}} \quad (2.2.4)$$

2.2.2. Hiperbolicidad en una dimensión

Tomando variables conservativas

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad q = hu,$$

el flujo es

$$F(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana es

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix}.$$

Los autovalores satisfacen

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh}.$$

Por tanto, mientras $h > 0$, el sistema es estrictamente hiperbólico.

Observación 2.2.1. *Cuando $h = 0$ las velocidades características coinciden y el sistema pierde hiperbolicidad estricta. Esta situación corresponde a formación de vacío o zonas secas.*

2.2.3. Modelo bidimensional

En dos dimensiones espaciales, las ecuaciones son

$$\boxed{\begin{aligned} h_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x + (huv)_y &= 0, \\ (hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_y &= 0. \end{aligned}} \quad (2.2.5)$$

Para estudiar la hiperbolicidad se considera una dirección

$$\xi = (\xi_1, \xi_2),$$

y la combinación lineal de jacobianos

$$A(\xi) = \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2.$$

Los autovalores son

$$\lambda_1 = u_n - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u_n, \quad \lambda_3 = u_n + \sqrt{gh},$$

donde $u_n = u\xi_1 + v\xi_2$ es la velocidad normal a la dirección ξ . Luego el sistema es hiperbólico para $h > 0$.

2.3. El p -Sistema

2.3.1. Deducción física

El p -sistema se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler isentrópicas en una dimensión espacial, escritas inicialmente en coordenadas eulerianas. En estas coordenadas, x representa una posición fija del espacio y las incógnitas son la densidad $\rho(x, t)$ y la velocidad $u(x, t)$. Las ecuaciones de Euler isentrópicas son

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{2.3.1}$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0. \tag{2.3.2}$$

La hipótesis isentrópica significa que la entropía específica de cada partícula fluida permanece constante. En consecuencia, la presión queda determinada únicamente por la densidad, o equivalentemente por el volumen específico. Por eso se escribe $p = p(\rho)$, o, al introducir $v = \frac{1}{\rho}$, se escribe $p = p(v)$. La primera ecuación de Euler puede desarrollarse como

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0.$$

Introducimos la derivada material $\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\partial_x$. Entonces la ecuación de masa queda

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho u_x = 0.$$

Como $v = 1/\rho$, se tiene

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Usando la ecuación anterior,

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2}(-\rho u_x) = \frac{u_x}{\rho} = v u_x.$$

Por tanto,

$$\frac{Dv}{Dt} = v u_x.$$

Ahora pasamos a coordenadas lagrangianas. En una dimensión, una coordenada lagrangiana natural es la masa acumulada: $y = y(x, t)$, $dy = \rho dx$. Equivalentemente, $y_x = \rho$. La variable y etiqueta partículas del fluido. Por tanto, derivar respecto del tiempo manteniendo y fijo equivale a seguir una partícula. En consecuencia,

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t|_y.$$

Además, por la regla de la cadena,

$$\partial_x = y_x \partial_y = \rho \partial_y = \frac{1}{v} \partial_y.$$

De manera equivalente, $\partial_y = v \partial_x$. Aplicando estas identidades a

$$\frac{Dv}{Dt} = vu_x,$$

obtenemos $v_t = v \left(\frac{1}{v} u_y \right) = u_y$. Así,

$$v_t - u_y = 0.$$

Consideremos ahora la ecuación de momentum. La ecuación

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$$

puede escribirse, usando la ecuación de masa, en la forma no conservativa

$$\rho \frac{Du}{Dt} + p_x = 0.$$

Dividiendo por ρ , se obtiene

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} p_x = 0.$$

Como $v = 1/\rho$,

$$\frac{Du}{Dt} + vp_x = 0.$$

En coordenadas lagrangianas, $\frac{Du}{Dt} = u_t$, $vp_x = p_y$. Por tanto,

$$u_t + p(v)_y = 0.$$

Hemos obtenido entonces el sistema

$$\begin{cases} v_t - u_y = 0, \\ u_t + p(v)_y = 0. \end{cases}$$

Finalmente, es usual renombrar la coordenada lagrangiana y como x . Así se obtiene el p -sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} v_t - u_x &= 0, \\ u_t + p(v)_x &= 0. \end{aligned}} \quad (2.3.3)$$

Aquí:

- u representa la velocidad material del gas;
- $v = 1/\rho$ representa el volumen específico;
- $p = p(v)$ es la presión a lo largo de una curva isentrópica.

Observación 2.3.1 (Sobre la hipótesis isentrópica). *En un gas general, la presión depende tanto del volumen específico como de la entropía: $p = p(v, s)$. La hipótesis isentrópica significa que la entropía específica de cada partícula es constante:*

$$\frac{Ds}{Dt} = 0.$$

Si además el flujo se encuentra sobre una curva de entropía fija $s = s_0$, entonces la presión queda determinada sólo por v :

$$p = p(v, s_0).$$

Por esta razón, en el p -sistema se escribe simplemente $p = p(v)$. Para un gas ideal isentrópico se obtiene, por ejemplo,

$$p(v) = Kv^{-\gamma}, \quad \gamma > 1.$$

Observación 2.3.2 (Shocks y entropía). *Aunque el modelo se denomina isentrópico, las soluciones débiles pueden desarrollar shocks. Físicamente, un shock real no es isentrópico: en su estructura interna se produce entropía debido a efectos disipativos como viscosidad y conducción térmica.*

La interpretación usual es que el shock del modelo hiperbólico representa el límite macroscópico de una capa disipativa muy delgada. En el límite de viscosidad pequeña, la capa se colapsa en una discontinuidad. La condición de entropía selecciona precisamente aquellos shocks que son compatibles con este límite disipativo.

2.3.2. Hiperbolicidad

La matriz jacobiana es

$$A(v, u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-p'(v)}.$$

Por tanto, el sistema es hiperbólico si $p'(v) < 0$. En particular, para un gas politrópico

$$p(v) = Kv^{-\gamma}, \quad \gamma > 1,$$

se tiene $p'(v) < 0$, el sistema es estrictamente hiperbólico.

2.4. Dinámica de los Gases

2.4.1. Ecuaciones de Euler unidimensionales

Las ecuaciones de Euler compresibles en una dimensión espacial son

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \\ E_t + (u(E + p))_x = 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Aquí:

- ρ : densidad, u : velocidad, p : presión,
- $E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$: energía total.

La primera ecuación representa conservación de masa; la segunda, conservación de momentum; y la tercera, conservación de energía. Para cerrar el sistema se introduce una ecuación de estado. Para un gas ideal:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2}\rho u^2 \right).$$

2.4.2. Hiperbolicidad

Los autovalores del Jacobiano son

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

donde

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

es la velocidad del sonido. Para un gas ideal:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

Mientras $\rho > 0$, $p > 0$, el sistema es estrictamente hiperbólico.

Observación 2.4.1. *Las ondas correspondientes a $u \pm c$ son ondas acústicas, mientras que la característica u corresponde a una discontinuidad de contacto.*

Observación 2.4.2 (Entropía y ecuación de estado). *En dinámica de gases, la presión no depende únicamente de la densidad. En general, el estado termodinámico de un gas queda determinado por dos variables independientes. Una elección habitual es: (ρ, s) , donde:*

- ρ es la densidad;

- s es la entropía específica.

Equivalentemente, puede describirse el estado mediante: (ρ, e) , donde e representa la energía interna específica. La relación entre estas variables proviene de la termodinámica. La primera ley establece

$$de = T ds - p dv,$$

donde:

- T es la temperatura;
- p es la presión;
- $v = 1/\rho$ es el volumen específico.

Por tanto, la energía interna puede considerarse una función $e = e(v, s)$, y la presión queda determinada mediante

$$p = -\frac{\partial e}{\partial v}(v, s).$$

En consecuencia, la presión depende en general tanto de la densidad como de la entropía: $p = p(\rho, s)$. La hipótesis isentrópica consiste en asumir que la entropía específica permanece constante a lo largo de las trayectorias del fluido:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0.$$

En ese caso, el flujo evoluciona sobre una curva de entropía fija $s = s_0$, y la presión pasa a depender únicamente de ρ (o equivalentemente de v): $p = p(\rho)$. Para un gas ideal se obtiene la ley politrópica $p(\rho) = K\rho^\gamma$, o equivalentemente $p(v) = Kv^{-\gamma}$, donde $\gamma > 1$ es el coeficiente adiabático.

2.4.3. Ecuaciones tridimensionales

En tres dimensiones espaciales, las ecuaciones de Euler compresibles toman la forma

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ (\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ E_t + \nabla \cdot ((E + p)\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Aquí: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es el campo de velocidades y

$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2$$

representa la energía total. La presión se determina mediante una ecuación de estado: $p = p(\rho, s)$, donde s representa la entropía específica.

Proyección en una dirección

Para estudiar la hiperbolicidad se considera una dirección unitaria

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Definimos la velocidad normal $u_n = \mathbf{u} \cdot \xi$. El sistema proyectado sobre la dirección ξ tiene la forma

$$U_t + A(U, \xi)U_x = 0,$$

donde

$$A(U, \xi) = \sum_{j=1}^3 \xi_j A_j(U).$$

En variables primitivas $W = (\rho, u_1, u_2, u_3, p)^T$, la matriz proyectada puede escribirse como

$$A(W, \xi) = \begin{pmatrix} u_n & \rho\xi_1 & \rho\xi_2 & \rho\xi_3 & 0 \\ 0 & u_n & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & u_n & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_n & \xi_3 \\ 0 & \rho c^2 \xi_1 & \rho c^2 \xi_2 & \rho c^2 \xi_3 & \rho \\ & & & & u_n \end{pmatrix},$$

donde $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ es la velocidad del sonido al cuadrado.

Valores propios

Los autovalores de $A(W, \xi)$ son

$$\boxed{u_n - c, \quad u_n, \quad u_n, \quad u_n, \quad u_n + c.}$$

Por tanto, el sistema es hiperbólico siempre que $c^2 > 0$. Las velocidades $u_n \pm c$ corresponden a ondas acústicas que se propagan respecto del fluido con velocidad del sonido.

Multiplicidad del valor propio u_n

A diferencia del caso unidimensional, el valor propio u_n tiene multiplicidad algebraica tres.

Esto tiene una interpretación física importante. Las tres ondas asociadas corresponden a:

- una onda de entropía;
- dos ondas vorticales o de cizalle.

Estas ondas son transportadas por el flujo con velocidad u_n , pero no corresponden a compresiones acústicas.

- Las ondas acústicas modifican presión y densidad.
- Las ondas vorticales modifican la dirección del campo de velocidades.
- La onda de entropía transporta variaciones de entropía sin generar presión acústica.

Por esta razón, Euler multidimensional no es estrictamente hiperbólico, aunque sigue siendo hiperbólico.

Observación 2.4.3 (Ondas acústicas y modos transportados). *La estructura espectral de Euler tridimensional refleja una descomposición física natural:*

- dos modos acústicos: $u_n \pm c$;
- tres modos transportados: u_n .

Los modos acústicos describen propagación de presión y densidad, mientras que los modos asociados a u_n simplemente son advectados por el flujo.

Esta estructura juega un rol fundamental en:

- aeroacústica;
- dinámica vortical;
- métodos numéricos upwind;
- separación entre dinámica compresible e incompresible.

2.5. Sistema de Cromatografía

2.5.1. Deducción física

La cromatografía describe la separación de componentes químicos que son transportados por una fase móvil a través de una columna que contiene una fase estacionaria. Cada componente puede estar disuelto en la fase móvil o adsorbido en la fase estacionaria.

Consideremos dos especies químicas con concentraciones móviles

$$u = u(x, t), \quad v = v(x, t).$$

La masa total de cada especie se obtiene sumando la masa en la fase móvil y la masa adsorbida. Si $a_1(u, v)$ y $a_2(u, v)$ denotan las cantidades adsorbidas, entonces las leyes de conservación tienen la forma

$$\partial_t(u + a_1(u, v)) + \partial_x(qu) = 0,$$

$$\partial_t(v + a_2(u, v)) + \partial_x(qv) = 0,$$

donde $q > 0$ representa la velocidad de arrastre de la fase móvil.

Una hipótesis usual es que la adsorción es instantánea y está gobernada por una isoterma de Langmuir competitiva:

$$a_1(u, v) = \frac{K_1 u}{1 + K_1 u + K_2 v}, \quad a_2(u, v) = \frac{K_2 v}{1 + K_1 u + K_2 v}.$$

Esta ley expresa que ambas especies compiten por una cantidad limitada de sitios disponibles en la fase estacionaria.

Luego de una adimensionalización adecuada, una forma conservativa simplificada del sistema es

$$\boxed{\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u}{1 + u + v} \right)_x &= 0, \\ v_t + \left(\frac{v}{1 + u + v} \right)_x &= 0. \end{aligned}} \quad (2.5.1)$$

Este sistema es un modelo elemental de cromatografía binaria. La no linealidad aparece porque la velocidad efectiva de transporte de cada especie depende de la concentración total $u + v$.

2.5.2. Forma conservativa y matriz jacobiana

Escribimos

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \frac{u}{1 + \frac{u}{v} + v} \\ \frac{v}{1 + u + v} \end{pmatrix}.$$

Sea

$$S = 1 + u + v.$$

Entonces

$$F(U) = \begin{pmatrix} u/S \\ v/S \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana es

$$DF(U) = \frac{1}{S^2} \begin{pmatrix} 1 + v & -u \\ -v & 1 + u \end{pmatrix}.$$

2.5.3. Hiperbolicidad

Los autovalores de $DF(U)$ son

$$\lambda_1 = \frac{1}{S}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{S^2},$$

es decir,

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + u + v}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{(1 + u + v)^2}.$$

Si

$$u \geq 0, \quad v \geq 0,$$

entonces

$$S = 1 + u + v \geq 1.$$

Además,

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff \frac{1}{S} = \frac{1}{S^2} \iff S = 1 \iff u = v = 0.$$

Por tanto, el sistema es estrictamente hiperbólico en la región

$$u + v > 0.$$

En el origen $(u, v) = (0, 0)$, los autovalores coinciden y se pierde la hiperbolicidad estricta.

2.5.4. Campos característicos

Para $\lambda_1 = \frac{1}{S}$, un vector propio asociado es $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Como $\nabla \lambda_1 = -\frac{1}{S^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$\nabla \lambda_1 \cdot r_1 = 0.$$

Por tanto, la primera familia característica es linealmente degenerada.

Para $\lambda_2 = \frac{1}{S^2}$, un vector propio asociado es $r_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Además, $\nabla \lambda_2 = -\frac{2}{S^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\nabla \lambda_2 \cdot r_2 = -\frac{2(u+v)}{S^3}.$$

Si $u+v > 0$, esta cantidad es distinta de cero. Por consiguiente, la segunda familia característica es genuinamente no lineal. Este sistema de cromatografía combina una familia linealmente degenerada, asociada a discontinuidades de contacto, con una familia genuinamente no lineal, asociada a shocks y rarefacciones.

Observación 2.5.1 (Interpretación física de la discontinuidad de contacto). *En el sistema de cromatografía,*

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u}{1+u+v} \right)_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{v}{1+u+v} \right)_x = 0, \end{cases}$$

el primer campo característico está asociado al valor propio

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+u+v},$$

y posee vector propio $r_1 = (1, -1)$. La dirección r_1 corresponde a perturbaciones tales que $\delta u = -\delta v$, es decir,

$$\delta(u+v) = 0.$$

Por tanto, las ondas de la primera familia modifican únicamente la composición relativa de la mezcla, manteniendo constante la concentración total $u+v$.

Desde el punto de vista físico, esto significa que pueden existir dos regiones de la columna cromatográfica con distinta proporción entre especies químicas, pero con igual concentración total. Como la velocidad efectiva de transporte depende solamente de $u + v$,

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + u + v},$$

ambas regiones se desplazan exactamente a la misma velocidad.

En consecuencia, la interfaz entre dichas regiones no experimenta compresión ni expansión: simplemente es transportada por el flujo. Esto explica la aparición de discontinuidades de contacto asociadas al primer campo característico.

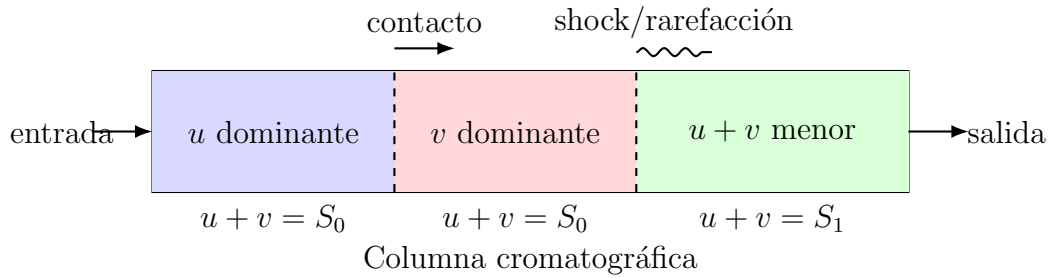


Figura 2.2: Interpretación del sistema de cromatografía. Una discontinuidad de contacto separa regiones con igual concentración total $u + v$, pero distinta composición relativa.

En contraste, la segunda familia característica es genuinamente no lineal y puede generar shocks y rarefacciones.

2.6. Pérdida de Hiperbolicidad

En varios modelos físicos de leyes de conservación, la hiperbolicidad puede perderse en ciertas regiones del espacio de estados. Esto significa que algunos valores propios del jacobiano dejan de ser reales y aparecen velocidades características complejas.

Desde el punto de vista físico, esto suele indicar que el modelo idealizado deja de ser válido y que fenómenos omitidos —como mezcla, viscosidad, turbulencia o difusión— comienzan a dominar la dinámica.

2.6.1. Modelo Two-Layer Shallow Water

Consideremos un fluido estratificado compuesto por dos capas superpuestas:

- capa superior: espesor h_1 , velocidad u_1 ,
- capa inferior: espesor h_2 , velocidad u_2 .

Denotemos por ρ_1, ρ_2 , las densidades respectivas, con $0 < \rho_1 < \rho_2$. Definimos el cociente de densidades: $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. El sistema unidimensional de conservación de masa y momentum es:

$$\partial_t \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 u_1 \\ h_2 \\ h_2 u_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} h_1 u_1 \\ h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 + g h_1 h_2 \\ h_2 u_2 \\ h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 + r g h_1 h_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Un modelo unidimensional en variables primitivas es

$$\begin{cases} h_{1,t} + u_1 h_{1,x} + h_1 u_{1,x} = 0, \\ u_{1,t} + u_1 u_{1,x} + g h_{1,x} + g h_{2,x} = 0, \\ h_{2,t} + u_2 h_{2,x} + h_2 u_{2,x} = 0, \\ u_{2,t} + u_2 u_{2,x} + r g h_{1,x} + g h_{2,x} = 0. \end{cases} \quad (2.6.1)$$

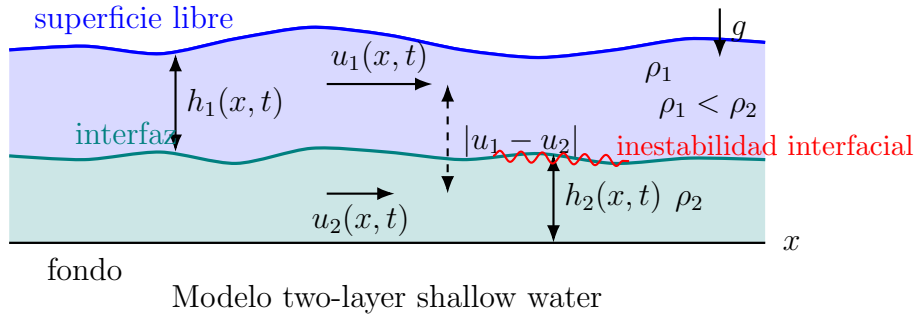


Figura 2.3: Modelo two-layer shallow water. Dos capas de densidades $\rho_1 < \rho_2$, alturas h_1, h_2 y velocidades u_1, u_2 . Un corte suficientemente grande $|u_1 - u_2|$ puede producir pérdida de hiperbolicidad e inestabilidad interfacial.

Definiendo $W = (h_1, u_1, h_2, u_2)^T$, el sistema puede escribirse como

$$W_t + A(W)W_x = 0,$$

donde

$$A(W) = \begin{pmatrix} u_1 & h_1 & 0 & 0 \\ g & u_1 & g & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & h_2 \\ r g & 0 & g & u_2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$\left[(\lambda - u_1)^2 - g h_1 \right] \left[(\lambda - u_2)^2 - g h_2 \right] - r g^2 h_1 h_2 = 0.$$

La hiperbolicidad requiere que las cuatro raíces sean reales.

Caso simétrico

Supongamos $h_1 = h_2 = h$, y definamos

$$u_1 = U + \frac{\Delta u}{2}, \quad u_2 = U - \frac{\Delta u}{2}.$$

donde el salto de velocidades entre ambas capas está definido por: $\Delta u = u_1 - u_2$. Introduciendo $\mu = \lambda - U$, el polinomio característico se transforma en

$$\left[\left(\mu - \frac{\Delta u}{2} \right)^2 - gh \right] \left[\left(\mu + \frac{\Delta u}{2} \right)^2 - gh \right] - rg^2 h^2 = 0.$$

La pérdida de hiperbolicidad ocurre cuando algunas raíces dejan de ser reales. Esto sucede si

$$\left(\frac{(\Delta u)^2}{4} - gh \right)^2 - rg^2 h^2 < 0.$$

Equivalentemente,

$$gh(1 - \sqrt{r}) < \frac{(\Delta u)^2}{4} < gh(1 + \sqrt{r}).$$

Por tanto, la pérdida de hiperbolicidad ocurre para un rango crítico del cizalle relativo entre ambas capas. Para diferencias de velocidad suficientemente pequeñas o suficientemente grandes, el sistema vuelve a ser hiperbólico.

Interpretación física

La pérdida de hiperbolicidad está asociada con la inestabilidad de Kelvin–Helmholtz. Cuando $|u_1 - u_2|$ es grande, la interfaz entre las capas se vuelve inestable y aparecen remolinos y mezcla turbulenta. El modelo idealizado de dos capas perfectamente separadas deja entonces de ser válido.

2.6.2. Sedimentación Multicomponente

Consideremos ahora una mezcla de dos especies sólidas con concentraciones $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$. Un modelo cinemático general tiene la forma

$$\Phi_t + F(\Phi)_x = 0.$$

Los flujos se escriben como

$$F(\Phi) = \begin{pmatrix} \phi_1 v_1(\phi_1, \phi_2) \\ \phi_2 v_2(\phi_1, \phi_2) \end{pmatrix},$$

donde v_1, v_2 representan velocidades de sedimentación.

La matriz jacobiana es

$$DF(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} a &= \partial_{\phi_1} f_1, & b &= \partial_{\phi_2} f_1, \\ c &= \partial_{\phi_1} f_2, & d &= \partial_{\phi_2} f_2. \end{aligned}$$

Los autovalores son

$$\lambda_{\pm} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}.$$

La hiperbolicidad requiere

$$(a-d)^2 + 4bc \geq 0.$$

Si

$$(a-d)^2 + 4bc < 0,$$

los autovalores se vuelven complejos y el sistema pierde hiperbolicidad.

Interpretación física

Los términos cruzados $b = \partial_{\phi_2} f_1$, $c = \partial_{\phi_1} f_2$, miden cómo una especie modifica el flujo de la otra.

Si las interacciones entre especies son suficientemente fuertes, el sistema deja de poseer velocidades reales de propagación.

Esto indica que el modelo puramente hiperbólico ya no describe correctamente la física del problema y que deben incorporarse efectos adicionales como:

- difusión,
- viscosidad,
- mezcla,
- dispersión hidrodinámica.

Ejemplo de velocidades de sedimentación

Un modelo frecuente en sedimentación impedida consiste en asumir que las velocidades dependen de la concentración total: $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Por ejemplo:

$$v_i(\phi_1, \phi_2) = v_{i,\infty}(1 - \phi)^n, \quad i = 1, 2,$$

donde:

- $v_{i,\infty}$: velocidad de sedimentación de la especie i en suspensión diluida,
- $n > 1$: parámetro empírico.

Entonces:

$$F(\Phi) = \begin{pmatrix} \phi_1 v_{1,\infty} (1 - \phi_1 - \phi_2)^n \\ \phi_2 v_{2,\infty} (1 - \phi_1 - \phi_2)^n \end{pmatrix}.$$

Este modelo refleja el fenómeno de sedimentación impedida: el aumento de concentración disminuye las velocidades de caída debido a la interacción hidrodinámica entre partículas.

2.6.3. Implicancias Numéricas

Cuando un sistema pierde hiperbolicidad:

- las velocidades características dejan de ser reales,
- el problema de Cauchy puede volverse mal puesto,
- aparecen oscilaciones numéricas violentas,
- las soluciones dependen fuertemente de la discretización.

En la práctica se utilizan tres estrategias principales:

1. restringir el cálculo a regiones hiperbólicas;
2. agregar términos regularizantes, por ejemplo

$$U_t + F(U)_x = \varepsilon U_{xx};$$

3. reemplazar el modelo por uno más completo que incorpore mezcla, viscosidad o turbulencia.

La pérdida de hiperbolicidad no debe interpretarse únicamente como una dificultad matemática o numérica; frecuentemente representa una señal de que el modelo físico simplificado dejó de ser válido.

2.7. Ejercicios

Ejercicio 2.7.1. *Considere el sistema de shallow water unidimensional*

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = 0. \end{cases}$$

1. *Escriba el sistema en variables primitivas (h, u) .*
2. *Calcule la matriz jacobiana.*
3. *Determine los valores propios y vectores propios.*
4. *Verifique que el sistema es estrictamente hiperbólico para $h > 0$.*
5. *Interprete físicamente las velocidades características.*

Ejercicio 2.7.2. *Considere las invariantes de Riemann del sistema shallow water:*

$$w_1 = u + 2\sqrt{gh}, \quad w_2 = u - 2\sqrt{gh}.$$

1. Verifique que son invariantes de Riemann.
2. Determine las curvas integrales asociadas a cada familia característica.
3. Deduzca las curvas de rarefacción.

Ejercicio 2.7.3. Sea el sistema de shallow water.

1. Deduzca las condiciones de Rankine–Hugoniot.
2. Obtenga la curva de Hugoniot.
3. Verifique la condición de entropía de Lax para shocks de primera familia.

Ejercicio 2.7.4. Considere el problema de Riemann para shallow water con datos

$$(h, u)(x, 0) = \begin{cases} (h_L, u_L), & x < 0, \\ (h_R, u_R), & x > 0. \end{cases}$$

1. Describa las cuatro configuraciones posibles:

$$R-R, \quad S-R, \quad R-S, \quad S-S.$$

2. Explique cuándo puede aparecer vacío.
3. Determine la condición para formación de vacío.

Ejercicio 2.7.5. Considere el p -sistema

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p(v)_x = 0. \end{cases}$$

1. Calcule los autovalores del sistema.
2. Determine condiciones sobre $p(v)$ para hiperbolicidad.
3. Verifique que para

$$p(v) = Kv^{-\gamma}, \quad \gamma > 1,$$

el sistema es estrictamente hiperbólico.

Ejercicio 2.7.6. Considere las ecuaciones de Euler isentrópicas

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0. \end{cases}$$

1. Calcule los autovalores del sistema.

2. Demuestre que las velocidades características son

$$u \pm c,$$

donde

$$c^2 = p'(\rho).$$

3. Interprete físicamente c .

Ejercicio 2.7.7. Considere el sistema de cromatografía

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u}{1+u+v} \right)_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{v}{1+u+v} \right)_x = 0. \end{cases}$$

1. Calcule la matriz jacobiana.
2. Determine los autovalores y vectores propios.
3. Verifique que el primer campo es linealmente degenerado.
4. Verifique que el segundo campo es genuinamente no lineal.

Ejercicio 2.7.8. Para el sistema de cromatografía, introduzca las variables

$$S = u + v, \quad R = u - v.$$

1. Deduzca una ecuación para S .
2. Deduzca una ecuación para R .
3. Interprete físicamente la discontinuidad de contacto asociada al primer campo característico.

Ejercicio 2.7.9. Considere el sistema two-layer shallow water:

$$W_t + A(W)W_x = 0.$$

1. Deduzca el polinomio característico.
2. Estudie la hiperbolicidad en el caso

$$h_1 = h_2 = h.$$

3. Determine condiciones sobre

$$|u_1 - u_2|$$

para pérdida de hiperbolicidad.

4. Interprete físicamente el fenómeno.

Ejercicio 2.7.10. *Considere un sistema bidisperso de sedimentación*

$$\Phi_t + F(\Phi)_x = 0,$$

con

$$DF(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. *Demuestre que el sistema es hiperbólico si*

$$(a - d)^2 + 4bc \geq 0.$$

2. *Explique cuándo puede perderse la hiperbolicidad.*

3. *Discuta posibles interpretaciones físicas.*

Ejercicio 2.7.11. *Sea un sistema de conservación*

$$U_t + F(U)_x = 0.$$

1. *Defina qué significa que un campo característico sea:*

- *linealmente degenerado,*
- *genuinamente no lineal.*

2. *Explique la relación entre:*

- *campos genuinamente no lineales,*
- *shocks,*
- *rarefacciones.*

3. *Explique por qué los campos linealmente degenerados producen discontinuidades de contacto.*

Ejercicio 2.7.12 (Ejercicio teórico). *Explique por qué la pérdida de hiperbolicidad suele interpretarse como una señal de que el modelo físico simplificado deja de ser válido.*

Discuta el rol de:

- *viscosidad,*
- *mezcla,*
- *difusión,*
- *turbulencia,*
- *regularización numérica.*

Bibliografía

- [1] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem*. Oxford University Press, 2000.
- [2] C. M. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer, 4th edition, 2016.
- [3] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer, 1996.
- [4] P. D. Lax. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM, 1973.
- [5] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations*. Springer, 2nd edition, 1994.
- [7] B. Temple. Systems of conservation laws with invariant submanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 280:781–795, 1983.
- [8] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3rd edition, 2009.

Capítulo 3

Problema de Riemann

3.1. Introducción

En el Capítulo 1 observamos que, para sistemas lineales, las ondas elementales se propagan con velocidades constantes dadas por los valores propios de la matriz del sistema. La solución del problema de Riemann se obtiene entonces mediante una descomposición lineal sobre los vectores propios.

En sistemas no lineales, los valores propios dependen del estado. Como consecuencia, las velocidades características pueden variar a lo largo de una misma familia de ondas. Esta dependencia conduce a fenómenos nuevos, inexistentes en el caso lineal, tales como abanicos de rarefacción, discontinuidades de contacto y ondas de choque.

El problema de Riemann ocupa un lugar central en la teoría de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Dado un estado izquierdo U_L y un estado derecho U_R , se busca describir la evolución de la discontinuidad inicial

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & x < 0, \\ U_R, & x > 0. \end{cases}$$

En sistemas lineales, la solución puede obtenerse mediante diagonalización y superposición de ondas elementales. En sistemas no lineales la situación es más rica: las familias características generan ondas de naturaleza diferente, tales como rarefacciones, discontinuidades de contacto y ondas de choque.

La clasificación de estas ondas depende de la estructura geométrica de los campos propios asociados al Jacobiano del flujo.

En este capítulo estudiaremos cómo los vectores propios y las invariantes de Riemann permiten construir dichas ondas elementales.

3.2. Ondas de rarefacción, discontinuidades de contacto e invariantes de Riemann

En esta sección estudiamos la estructura geométrica de las ondas elementales asociadas a sistemas hiperbólicos no lineales unidimensionales. Veremos cómo los vectores propios generan

las curvas de onda y cómo las invariantes de Riemann permiten describir dichas curvas en el espacio de estados.

3.2.1. Sistema hiperbólico no lineal

Consideremos un sistema de leyes de conservación:

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U \in \mathbb{R}^p,$$

donde $A(U) = DF(U)$ denota el Jacobiano del flujo. Supondremos que el sistema es estrictamente hiperbólico:

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_p(U),$$

donde:

- $\lambda_j(U)$ son los valores propios,
- $r_j(U)$ son los vectores propios derechos,
- $\ell_j(U)$ son los vectores propios izquierdos.

Estos satisfacen:

$$A(U)r_j(U) = \lambda_j(U)r_j(U),$$

y

$$\ell_j(U)A(U) = \lambda_j(U)\ell_j(U).$$

La estricta hiperbolicidad garantiza que cada familia característica esté asociada a un valor propio simple y a un campo propio bien definido.

3.2.2. Problema de Riemann

El problema de Riemann consiste en resolver el sistema con condición inicial:

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & x < 0, \\ U_R, & x > 0. \end{cases}$$

La solución se construye mediante ondas elementales asociadas a cada familia característica.

Geométricamente, una j -onda corresponde a una curva en el espacio de estados que sigue el campo propio $r_j(U)$.

3.2.3. Curvas integrales y j -ondas

Sea $U(s)$ una curva parametrizada en el espacio de estados. Diremos que sigue la j -ésima familia característica si satisface:

$$\boxed{\frac{dU}{ds} = r_j(U).}$$

3.2. ONDAS DE RAREFACCIÓN, DISCONTINUIDADES DE CONTACTO E INVARIANTES DE RIEMANN

Esta ecuación diferencial define las curvas integrales del campo propio r_j .
Dado un estado inicial U_L , la solución de este sistema genera una curva:

$$U(s), \quad U(0) = U_L,$$

que representa todos los estados alcanzables mediante una j -onda.

Por tanto:

las j -ondas son curvas integrales del campo propio $r_j(U)$.

3.2.4. Invariantes de Riemann

Una función escalar $w(U)$ se denomina invariante de Riemann para la familia j si:

$\nabla w(U) \cdot r_j(U) = 0.$

Geoméricamente, esto significa que $w(U)$ permanece constante a lo largo de las curvas integrales de $r_j(U)$. En efecto, si $U(s)$ satisface:

$$\frac{dU}{ds} = r_j(U),$$

entonces:

$$\frac{d}{ds}w(U(s)) = \nabla w(U) \cdot \frac{dU}{ds} = \nabla w(U) \cdot r_j(U) = 0.$$

Por tanto:

$w(U(s)) = \text{constante.}$

Esto muestra que las invariantes de Riemann describen geoméricamente las superficies de nivel transversales a las curvas de onda. En dimensión p , cada familia característica posee en general $p - 1$ invariantes independientes.

3.2.5. Diagonalización mediante invariantes de Riemann

Consideremos el sistema cuasilineal

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad U \in \mathbb{R}^p.$$

Supongamos que el sistema es estrictamente hiperbólico, con valores propios

$$\lambda_1(U) < \cdots < \lambda_p(U),$$

vectores propios derechos $r_j(U)$ y vectores propios izquierdos $\ell_j(U)$, normalizados de modo que $\ell_i(U) \cdot r_j(U) = \delta_{ij}$. Multiplicando el sistema por $\ell_j(U)$, obtenemos

$$\ell_j(U) \cdot U_t + \ell_j(U)A(U)U_x = 0.$$

Como

$$\ell_j(U)A(U) = \lambda_j(U)\ell_j(U),$$

se sigue que

$$\ell_j(U) \cdot U_t + \lambda_j(U) \ell_j(U) \cdot U_x = 0.$$

Si existe una función $w_j(U)$ y un factor no nulo $\mu_j(U)$ tales que $\nabla w_j(U) = \mu_j(U) \ell_j(U)$, entonces

$$\ell_j(U) \cdot U_t = \frac{1}{\mu_j(U)} (w_j)_t, \quad y \quad \ell_j(U) \cdot U_x = \frac{1}{\mu_j(U)} (w_j)_x.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\mu_j(U)} [(w_j)_t + \lambda_j(U) (w_j)_x] = 0.$$

Luego

$$\boxed{(w_j)_t + \lambda_j(U) (w_j)_x = 0.}$$

Así, si para cada j existe una coordenada w_j cuyo gradiente es proporcional al vector propio izquierdo ℓ_j , el sistema se escribe en forma diagonal:

$$(w_j)_t + \lambda_j(U) (w_j)_x = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Por tanto, las invariantes de Riemann diagonalizan el sistema.

3.2.6. Campos genuinamente no lineales

El campo característico j se dice genuinamente no lineal (GN) si:

$$\boxed{\nabla \lambda_j(U) \cdot r_j(U) \neq 0.}$$

En coordenadas de Riemann esto equivale a:

$$\boxed{\frac{\partial \lambda_j}{\partial w_j} \neq 0.}$$

Esto significa que la velocidad característica depende de la amplitud de la onda.

3.2.7. Ondas de rarefacción

Una rarefacción es una solución autosimilar: $U(x, t) = U(\xi)$, $\xi = \frac{x}{t}$. Sustituyendo:

$$-\xi U'(\xi) + A(U) U'(\xi) = 0,$$

o equivalentemente:

$$(A(U) - \xi I) U'(\xi) = 0.$$

Para soluciones no triviales: $U'(\xi) \parallel r_j(U)$, y simultáneamente: $\xi = \lambda_j(U)$. Por tanto:

$$\boxed{U'(\xi) = \alpha(\xi) r_j(U).}$$

La rarefacción sigue exactamente la curva integral del campo propio:

$$\boxed{\frac{dU}{ds} = r_j(U).}$$

Construcción mediante invariantes

Las invariantes de Riemann permiten describir explícitamente las curvas de rarefacción. En un sistema 2×2 , una familia posee una sola invariante independiente. Por ejemplo, para shallow water:

$$w_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh}.$$

Sobre la familia asociada a:

$$\lambda_+ = u + \sqrt{gh},$$

permanece constante:

$$w_- = u - 2\sqrt{gh}.$$

Por tanto, la curva de rarefacción satisface:

$$\boxed{u - 2\sqrt{gh} = u_L - 2\sqrt{gh_L}.$$

Esto define explícitamente la curva de onda en el plano (h, u) .

Estructura del abanico

Como el campo es genuinamente no lineal,

$$\nabla \lambda_j(U) \cdot r_j(U) \neq 0,$$

la velocidad característica cambia a lo largo de la curva de onda. Para una rarefacción j , se tiene: $\lambda_j(U_L) < \lambda_j(U_R)$. La solución toma la forma:

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & x/t < \lambda_j(U_L), \\ U(\xi), & \lambda_j(U_L) \leq \xi \leq \lambda_j(U_R), \\ U_R, & x/t > \lambda_j(U_R). \end{cases}$$

Dentro del abanico: $\xi = \lambda_j(U(\xi))$.

3.2.8. Campos linealmente degenerados

El campo j -ésimo se dice linealmente degenerado (LD) si:

$$\boxed{\nabla \lambda_j(U) \cdot r_j(U) = 0.}$$

Esto significa que la velocidad característica permanece constante a lo largo de las curvas integrales:

$$\frac{d}{ds} \lambda_j(U(s)) = \nabla \lambda_j(U) \cdot r_j(U) = 0.$$

Por tanto:

$$\boxed{\lambda_j(U) = \text{constante sobre las curvas de onda.}}$$

En consecuencia: λ_j constituye una invariante de Riemann de la familia j .

3.2.9. Discontinuidades de contacto

En un campo linealmente degenerado, las características no divergen ni se comprimen. La onda elemental asociada es una discontinuidad de contacto. La solución tiene la forma:

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & x < st, \\ U_R, & x > st, \end{cases}$$

donde: $s = \lambda_j(U_L) = \lambda_j(U_R)$. La discontinuidad satisface las condiciones de Rankine–Hugoniot:

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L).$$

Deducción local desde la curva integral

Supongamos que U_R está sobre la curva integral del campo r_j que parte de U_L . Para estados cercanos:

$$U_R = U_L + \varepsilon r_j(U_L) + o(\varepsilon).$$

Expandiendo el flujo:

$$F(U_R) = F(U_L) + A(U_L)(U_R - U_L) + o(\varepsilon).$$

Como:

$$A(U_L)r_j(U_L) = \lambda_j(U_L)r_j(U_L),$$

obtenemos:

$$F(U_R) - F(U_L) = \lambda_j(U_L)(U_R - U_L) + o(\varepsilon).$$

En un campo linealmente degenerado: $\lambda_j(U_R) = \lambda_j(U_L)$, de modo que la velocidad de propagación es constante: $s = \lambda_j(U_L) = \lambda_j(U_R)$. Así, la discontinuidad de contacto satisface localmente:

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L).$$

3.2.10. GN versus LD

La cantidad $\nabla \lambda_j(U) \cdot r_j(U)$ determina la naturaleza de la onda.

Campo genuinamente no lineal (GN).

$$\nabla \lambda_j \cdot r_j \neq 0.$$

La velocidad depende de la amplitud de la onda. En coordenadas de Riemann:

$$(w_j)_t + \lambda_j(W)(w_j)_x = 0.$$

Si se considera una onda pura de la familia j , los demás invariantes permanecen constantes, y la ecuación se reduce a:

$$(w_j)_t + \lambda_j(w_j)(w_j)_x = 0.$$

Localmente, expandiendo alrededor de un estado de referencia, aparece una dinámica tipo Burgers:

$$v_t + a v v_x = 0.$$

Las características pueden comprimirse o divergir, produciendo shocks y rarefacciones.

Campo linealmente degenerado (LD).

$$\nabla \lambda_j \cdot r_j = 0.$$

Entonces: $\frac{\partial \lambda_j}{\partial w_j} = 0$. La velocidad no depende de la amplitud de la onda. Para una onda pura:

$$(w_j)_t + c(w_j)_x = 0,$$

con c constante.

La dinámica es puramente transportiva y aparecen discontinuidades de contacto.

3.2.11. Resumen geométrico

Los vectores propios generan las ondas.

Las invariantes de Riemann describen las superficies de nivel de dichas ondas.

GN $\implies$ shocks y rarefacciones.

LD $\implies$ discontinuidades de contacto.

3.2.12. Curvas de rarefacción para el sistema de aguas someras

Consideremos el sistema de aguas someras 1D:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = 0. \end{cases}$$

En variables primitivas (h, u) , con $h > 0$, se escribe:

$$\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_x = 0.$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}.$$

Denotamos $c = \sqrt{gh}$.

Primera familia

Para $\lambda_1 = u - c$, el vector propio derecho satisface

$$(A - \lambda_1 I)r_1 = 0.$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} c & h \\ g & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dh \\ du \end{pmatrix} = 0.$$

De la primera ecuación:

$$c dh + h du = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{du}{dh} = -\frac{c}{h} = -\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Integrando:

$$u + 2\sqrt{gh} = \text{constante}.$$

Luego la curva de rarefacción de la primera familia que parte desde $U_L = (h_L, u_L)$ está dada por

$$\boxed{u + 2\sqrt{gh} = u_L + 2\sqrt{gh_L}.$$

Equivalentemente,

$$\boxed{u(h) = u_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh}.$$

Como

$$\lambda_1(h) = u(h) - \sqrt{gh} = u_L + 2\sqrt{gh_L} - 3\sqrt{gh},$$

la velocidad λ_1 aumenta cuando h disminuye. Por tanto, la rarefacción de la primera familia se obtiene moviéndose hacia

$$\boxed{h < h_L.}$$

En el plano (h, u) , la 1-onda se mueve hacia la izquierda y hacia arriba.

Segunda familia

Para $\lambda_2 = u + c$, se tiene

$$(A - \lambda_2 I)r_2 = 0,$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} -c & h \\ g & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dh \\ du \end{pmatrix} = 0.$$

De la primera ecuación:

$$-c dh + h du = 0.$$

Así,

$$\frac{du}{dh} = \frac{c}{h} = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

3.2. ONDAS DE RAREFACCIÓN, DISCONTINUIDADES DE CONTACTO E INVARIANTES DE RIEMANN

Integrando:

$$u - 2\sqrt{gh} = \text{constante}.$$

Luego la curva de rarefacción de la segunda familia que parte desde U_L está dada por

$$u - 2\sqrt{gh} = u_L - 2\sqrt{gh_L}.$$

Equivalentemente,

$$u(h) = u_L - 2\sqrt{gh_L} + 2\sqrt{gh}.$$

Como

$$\lambda_2(h) = u(h) + \sqrt{gh} = u_L - 2\sqrt{gh_L} + 3\sqrt{gh},$$

la velocidad λ_2 aumenta cuando h aumenta. Por tanto, la rarefacción de la segunda familia se obtiene moviéndose hacia

$$h > h_L.$$

En el plano (h, u) , la 2-onda se mueve hacia la derecha y hacia arriba.

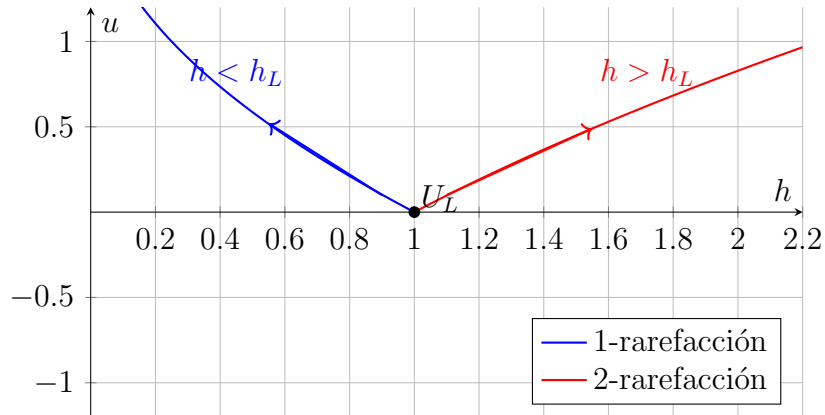


Figura 3.1: Curvas de rarefacción del sistema de aguas someras en el plano (h, u) , para $g = 1$, $h_L = 1$, $u_L = 0$.

Curvas en el plano (h, q)

Si $q = hu$, entonces las curvas anteriores se transforman en:

$$q_1(h) = h \left(u_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh} \right), \quad h < h_L,$$

para la primera familia, y

$$q_2(h) = h \left(u_L - 2\sqrt{gh_L} + 2\sqrt{gh} \right), \quad h > h_L,$$

para la segunda familia.

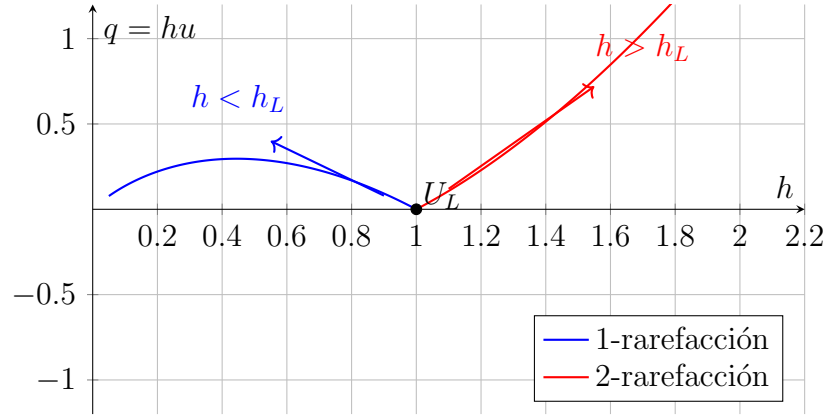


Figura 3.2: Curvas de rarefacción del sistema de aguas someras en el plano conservativo (h, q) , para $g = 1$, $h_L = 1$, $u_L = 0$.

3.3. Ondas de choque y curvas de Hugoniot

Consideremos nuevamente el sistema de leyes de conservación

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U \in \mathbb{R}^p.$$

Una onda de choque es una solución débil discontinua que conecta dos estados constantes U_L y U_R mediante una discontinuidad que se mueve con velocidad s . La solución tiene la forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & x < st, \\ U_R, & x > st. \end{cases}$$

Para que esta función sea una solución débil del sistema, la discontinuidad debe satisfacer la condición de Rankine–Hugoniot.

3.3.1. Condición de Rankine–Hugoniot

La condición de Rankine–Hugoniot es

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L).$$

Esta condición expresa la compatibilidad entre el salto del flujo y el salto de la variable conservativa.

Dedución

Escribimos la ecuación en forma integral sobre una región que contiene la discontinuidad. La conservación implica que el flujo neto a través de la discontinuidad debe balancear el cambio del estado conservado. De manera formal, para una discontinuidad que se mueve con velocidad s , el salto se denota por

$$[U] = U_R - U_L, \quad [F] = F(U_R) - F(U_L).$$

La condición de conservación a través de la curva $x = st$ es

$$s[U] = [F].$$

Es decir,

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L).$$

3.3.2. Curva de Hugoniot

Fijado un estado izquierdo U_L , la curva de Hugoniot asociada a U_L es el conjunto de estados U que pueden conectarse con U_L mediante una discontinuidad que satisface Rankine–Hugoniot.

Es decir,

$$\mathcal{H}(U_L) = \{U \in \mathbb{R}^p : \exists s \in \mathbb{R} \text{ tal que } F(U) - F(U_L) = s(U - U_L)\}.$$

El parámetro s corresponde a la velocidad de propagación del choque.

3.3.3. Curvas de Hugoniot por familia

En un sistema estrictamente hiperbólico, cerca de U_L , la curva de Hugoniot se descompone en ramas asociadas a las distintas familias características.

La j -ésima curva de Hugoniot se denota por

$$S_j(\sigma; U_L),$$

donde

$$S_j(0; U_L) = U_L.$$

Para amplitudes pequeñas, esta curva es tangente al vector propio derecho $r_j(U_L)$:

$$\frac{d}{d\sigma} S_j(0; U_L) = r_j(U_L).$$

Por tanto, al igual que las curvas de rarefacción, las curvas de choque nacen tangentes a los campos propios.

3.3.4. Deducción de la tangencia

Sea $U(\sigma)$ una rama de la curva de Hugoniot tal que

$$U(0) = U_L, \quad s(0) = \lambda_j(U_L).$$

La condición de Rankine–Hugoniot es

$$F(U(\sigma)) - F(U_L) = s(\sigma)(U(\sigma) - U_L).$$

Derivando respecto de σ y evaluando en $\sigma = 0$, obtenemos

$$A(U_L)U'(0) = s(0)U'(0).$$

Como

$$s(0) = \lambda_j(U_L),$$

se concluye que

$$A(U_L)U'(0) = \lambda_j(U_L)U'(0).$$

Por tanto,

$$U'(0)$$

es un vector propio derecho asociado a $\lambda_j(U_L)$, es decir,

$$\boxed{U'(0) \parallel r_j(U_L)}.$$

Esto muestra que la curva de Hugoniot y la curva de rarefacción tienen la misma tangente en U_L .

3.3.5. Choques físicamente admisibles

No toda discontinuidad que satisface Rankine–Hugoniot es físicamente admisible.

Para seleccionar la solución físicamente relevante se necesita una condición de entropía.

En sistemas estrictamente hiperbólicos, una condición clásica es la condición de Lax.

Un j -choque que conecta U_L con U_R y se mueve con velocidad s satisface la condición de Lax si

$$\boxed{\lambda_j(U_R) < s < \lambda_j(U_L)}.$$

Además, para las familias vecinas:

$$\lambda_{j-1}(U_L) < s < \lambda_{j+1}(U_R),$$

cuando estas expresiones tienen sentido.

La condición esencial es que las características de la familia j entren al choque desde ambos lados.

3.3.6. Interpretación geométrica

Una rarefacción aparece cuando las características se separan:

$$\lambda_j(U_L) < \lambda_j(U_R).$$

Un choque aparece cuando las características se comprimen:

$$\lambda_j(U_L) > \lambda_j(U_R).$$

Por tanto, para campos genuinamente no lineales, la misma curva integral puede generar rarefacciones o choques dependiendo del sentido en que se recorra.

3.3.7. Comparación entre rarefacciones y choques

Para amplitudes pequeñas:

$$R_j(\sigma; U_L) = U_L + \sigma r_j(U_L) + \mathcal{O}(\sigma^2),$$

y

$$S_j(\sigma; U_L) = U_L + \sigma r_j(U_L) + \mathcal{O}(\sigma^2).$$

Es decir, ambas curvas son tangentes en U_L .

Sin embargo, a orden superior difieren, salvo en campos linealmente degenerados.

En campos linealmente degenerados, la curva de rarefacción y la curva de Hugoniot coinciden, dando lugar a discontinuidades de contacto.

3.3.8. Resumen

Rankine–Hugoniot: $F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L)$.

Curva de Hugoniot: conjunto de estados conectables por un choque.

La curva de Hugoniot es tangente a $r_j(U_L)$.

La condición de Lax selecciona choques admisibles.

3.3.9. Curvas de choque para el sistema de aguas someras

Consideremos el sistema de aguas someras en variables conservativas:

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad q = hu,$$

con flujo

$$F(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$U_L = (h_L, q_L), \quad q_L = h_L u_L,$$

un estado izquierdo fijo, y sea

$$U = (h, q), \quad q = hu,$$

un estado derecho conectado con U_L mediante una discontinuidad de velocidad s .

La condición de Rankine–Hugoniot es

$$F(U) - F(U_L) = s(U - U_L).$$

Es decir,

$$s(h - h_L) = q - q_L,$$

$$s(q - q_L) = \frac{q^2}{h} - \frac{q_L^2}{h_L} + \frac{1}{2}g(h^2 - h_L^2).$$

Suponiendo $h \neq h_L$, de la primera ecuación:

$$s = \frac{q - q_L}{h - h_L}.$$

Es más conveniente trabajar con $u = q/h$. Entonces, eliminando s , se obtiene la relación de Hugoniot:

$$(u - u_L)^2 = g \frac{(h - h_L)^2(h + h_L)}{2hh_L}.$$

Por tanto,

$$u - u_L = \pm(h - h_L) \sqrt{\frac{g(h + h_L)}{2hh_L}}.$$

Estas dos ramas corresponden a las curvas de choque asociadas a las dos familias características.

Primera curva de choque

La primera familia tiene velocidad

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}.$$

La rama tangente al vector propio de la primera familia es

$$S_1(U_L) : \quad u(h) = u_L - (h - h_L) \sqrt{\frac{g(h + h_L)}{2hh_L}}.$$

La condición de Lax para un 1-choque es

$$\lambda_1(U) < s < \lambda_1(U_L).$$

Esta condición selecciona la rama

$$h > h_L.$$

Por tanto, la 1-onda de choque se obtiene moviéndose desde U_L hacia estados con mayor altura h . En el plano (h, u) , para $u_L = 0$, esta curva se mueve hacia la derecha y hacia abajo.

Segunda curva de choque

La segunda familia tiene velocidad

$$\lambda_2 = u + \sqrt{gh}.$$

La rama tangente al vector propio de la segunda familia es

$$S_2(U_L) : \quad u(h) = u_L + (h - h_L) \sqrt{\frac{g(h + h_L)}{2hh_L}}.$$

La condición de Lax para un 2-choque es

$$\lambda_2(U) < s < \lambda_2(U_L).$$

Esta condición selecciona la rama

$$0 < h < h_L.$$

Por tanto, la 2-onda de choque se obtiene moviéndose desde U_L hacia estados con menor altura h . En el plano (h, u) , para $u_L = 0$, esta curva se mueve hacia la izquierda y hacia abajo.

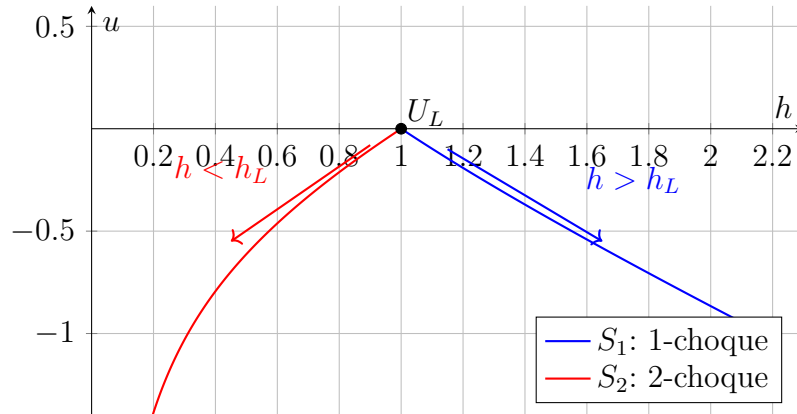


Figura 3.3: Curvas de choque del sistema de aguas someras en el plano (h, u) , para $g = 1$, $h_L = 1$, $u_L = 0$.

Curvas en el plano conservativo (h, q)

Como $q = hu$, las curvas anteriores se escriben como

$$q_1(h) = h \left[u_L - (h - h_L) \sqrt{\frac{g(h + h_L)}{2hh_L}} \right], \quad h > h_L,$$

para la primera familia, y

$$q_2(h) = h \left[u_L + (h - h_L) \sqrt{\frac{g(h + h_L)}{2hh_L}} \right], \quad 0 < h < h_L,$$

para la segunda familia.

Comentario

Las curvas de choque y las curvas de rarefacción son tangentes en el estado U_L , pero difieren a orden superior. Para aguas someras:

$$R_1 : \quad u + 2\sqrt{gh} = \text{constante},$$

$$R_2 : \quad u - 2\sqrt{gh} = \text{constante},$$

mientras que las curvas de choque están dadas por la relación de Hugoniot:

$$(u - u_L)^2 = g \frac{(h - h_L)^2(h + h_L)}{2hh_L}.$$

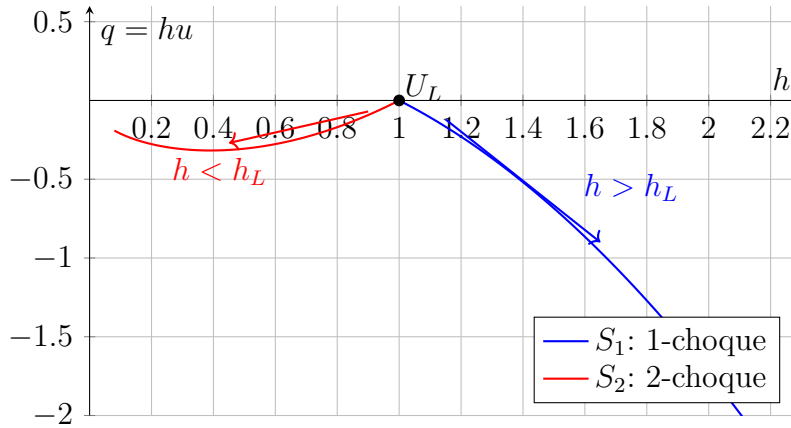


Figura 3.4: Curvas de choque del sistema de aguas someras en el plano conservativo (h, q) , para $g = 1$, $h_L = 1$, $u_L = 0$.

3.4. Resolución del problema de Riemann para el sistema de aguas someras

Una vez construidas las curvas de rarefacción y de choque asociadas a cada familia característica, podemos resolver el problema de Riemann para el sistema de aguas someras. Dados dos estados constantes

$$U_L = (h_L, u_L), \quad U_R = (h_R, u_R),$$

la solución del problema de Riemann consiste en encontrar un estado intermedio $U_M = (h_M, u_M)$, tal que

$$U_L \longrightarrow U_M \longrightarrow U_R,$$

mediante una onda de la primera familia seguida de una onda de la segunda familia.

3.4.1. Curvas completas de onda

Recordemos que la primera familia puede generar una rarefacción o un choque. La curva completa de la primera familia que parte desde (U_L) se denota por

$$W_1(U_L) = R_1(U_L) \cup S_1(U_L).$$

Análogamente, la curva completa de la segunda familia que termina en (U_R) se denota por

$$W_2(U_R) = R_2(U_R) \cup S_2(U_R).$$

Geométricamente, el estado intermedio se obtiene como la intersección de ambas curvas:

$$\boxed{U_M = W_1(U_L) \cap W_2(U_R).}$$

Por tanto, resolver el problema de Riemann equivale a encontrar la intersección de dos curvas en el plano de estados $((h, u))$.

3.4.2. Curva de onda de la primera familia

Sea $(h > 0)$.

Si $(h < h_L)$, la primera onda es una rarefacción y satisface

$$u = u_L + 2(\sqrt{gh_L} - \sqrt{gh}).$$

Si $(h > h_L)$, la primera onda es un choque y satisface

$$u = u_L - (h - h_L) \sqrt{\frac{g(h + h_L)}{2hh_L}}.$$

Introducimos la función

$$\phi_L(h) = \begin{cases} 2(\sqrt{gh_L} - \sqrt{gh}), & h \leq h_L, \\ -(h - h_L) \sqrt{\frac{g(h + h_L)}{2hh_L}}, & h > h_L. \end{cases}$$

Entonces la curva completa de la primera familia se escribe como

$$u = u_L + \phi_L(h).$$

3.4.3. Curva de onda de la segunda familia

Análogamente, si $(h < h_R)$, la segunda onda es una rarefacción y satisface

$$u = u_R - 2(\sqrt{gh_R} - \sqrt{gh}).$$

Si $(h > h_R)$, la segunda onda es un choque y satisface

$$u = u_R + (h - h_R)\sqrt{\frac{g(h + h_R)}{2hh_R}}.$$

Definimos

$$\phi_R(h) = \begin{cases} -2(\sqrt{gh_R} - \sqrt{gh}), & h \leq h_R, \\ (h - h_R)\sqrt{\frac{g(h + h_R)}{2hh_R}}, & h > h_R. \end{cases}$$

Entonces

$$u = u_R + \phi_R(h).$$

3.4.4. Determinación del estado intermedio

El estado intermedio $U_M = (h_M, u_M)$ pertenece simultáneamente a la curva de onda emitida desde U_L y a la curva de onda que llega a U_R . Por tanto,

$$u_M = u_L + \phi_L(h_M), \quad \text{y} \quad u_M = u_R + \phi_R(h_M).$$

Eliminando u_M , obtenemos la ecuación escalar

$$u_L + \phi_L(h_M) = u_R + \phi_R(h_M).$$

Equivalentemente, $f(h_M) = 0$, donde

$$f(h) = u_L - u_R + \phi_L(h) - \phi_R(h).$$

Esta ecuación posee una única solución positiva. En la práctica se resuelve mediante métodos iterativos, por ejemplo Newton o `fzero` en Matlab. Una vez calculado (h_M) , se obtiene

$$u_M = u_L + \phi_L(h_M).$$

De este modo queda completamente determinada la solución del problema de Riemann.

3.4.5. Estructuras posibles de la solución

Dependiendo de la posición relativa de (U_L) y (U_R) , pueden aparecer cuatro configuraciones: $R_1 + R_2$, $R_1 + S_2$, $S_1 + R_2$, $S_1 + S_2$. Por ejemplo, en el problema clásico de rotura de represa

$$u_L = u_R = 0, \quad h_L > h_R,$$

aparece una rarefacción de la primera familia seguida de un choque de la segunda familia:

$$\boxed{R_1 + S_2.}$$

3.4.6. Formación de vacío

Existe una situación particular en la cual no aparece ningún estado intermedio con altura positiva. Consideremos las curvas de rarefacción extremas emitidas desde (U_L) y (U_R) . La primera rarefacción satisface

$$u = u_L + 2(\sqrt{gh_L} - \sqrt{gh}),$$

mientras que la segunda satisface

$$u = u_R - 2(\sqrt{gh_R} - \sqrt{gh}).$$

Si hacemos tender (h) a cero en ambas expresiones obtenemos los estados límite

$$u = u_L + 2\sqrt{gh_L}, \quad y \quad u = u_R - 2\sqrt{gh_R}.$$

Para que exista un estado intermedio positivo, ambas curvas deben intersectarse antes de alcanzar $(h = 0)$. Por tanto, es necesario que

$$u_L + 2\sqrt{gh_L} > u_R - 2\sqrt{gh_R}.$$

Equivalentemente,

$$u_R - u_L < 2\sqrt{gh_L} + 2\sqrt{gh_R}.$$

Si esta desigualdad se viola, las dos rarefacciones se separan completamente y no existe un estado intermedio con $(h_M > 0)$. En ese caso aparece una región seca:

$$h = 0.$$

La solución tiene entonces la estructura

$$R_1 + \text{vacío} + R_2.$$

3.4.7. Interpretación física

La formación de vacío corresponde a una separación tan intensa entre los estados izquierdo y derecho que las dos masas de agua dejan de estar conectadas.

Geométricamente, las curvas de rarefacción ya no se intersectan en el semiplano $(h > 0)$, sino únicamente sobre el borde degenerado $(h=0)$.

Desde el punto de vista físico, aparece una región seca entre ambas masas de fluido.

Este fenómeno no tiene análogo en los sistemas lineales estudiados anteriormente y constituye una de las características más interesantes de los sistemas hiperbólicos no lineales.

3.4.8. Entropía para el sistema de aguas someras

Consideremos el sistema de aguas someras en variables conservativas $U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$, $q = hu$,

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

con

$$F(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}.$$

Buscamos una función de entropía convexa $\eta(U)$ y un flujo de entropía asociado $Q(U)$ que satisfagan

$$\eta_t + Q_x = 0$$

para soluciones suaves.

Interpretación física

La energía cinética por unidad de longitud es $E_k = \frac{1}{2}hu^2$. Usando $q = hu$, $E_k = \frac{1}{2}\frac{q^2}{h}$. Por otra parte, la energía potencial gravitacional por unidad de longitud es $E_p = \frac{1}{2}gh^2$. Por tanto, la energía mecánica total es

$$\eta(U) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2.$$

Esta función será nuestra candidata natural a entropía.

Gradiente de la entropía

Calculamos

$$\nabla\eta(U) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{q^2}{h^2} + gh \\ \frac{q}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u^2 + gh \\ u \end{pmatrix}.$$

Condición de compatibilidad

Recordemos que una pareja (η, Q) debe satisfacer

$$\nabla Q(U) = \nabla\eta(U) DF(U).$$

Como

$$DF(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{h^2} + gh & \frac{2q}{h} \end{pmatrix}.$$

obtenemos

$$\nabla\eta(U) DF(U) = \left(u(gh - u^2), gh + \frac{3}{2}u^2 \right).$$

Integrando estas expresiones se obtiene

$$Q(U) = u \left(\frac{1}{2}hu^2 + gh^2 \right).$$

En variables conservativas,

$$Q(U) = \frac{1}{2} \frac{q^3}{h^2} + gqh.$$

Ley de conservación de la energía

Para soluciones suaves se verifica

$$\eta_t + Q_x = 0.$$

Es decir,

$$\left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2 \right)_t + \left(\frac{1}{2} \frac{q^3}{h^2} + gqh \right)_x = 0.$$

Esta ecuación expresa la conservación local de la energía mecánica del fluido.

Interpretación de los choques

Cuando aparecen discontinuidades, la energía ya no se conserva exactamente. Las soluciones físicamente admisibles satisfacen la desigualdad entrópica

$$\eta_t + Q_x \leq 0.$$

La energía puede disiparse en el choque, pero no puede generarse espontáneamente.

Esta condición es equivalente a la condición de entropía de Lax para el sistema de aguas someras y permite seleccionar la solución física entre todas las soluciones débiles que satisfacen las ecuaciones de Rankine–Hugoniot.

Observación 3.4.1. *La entropía del sistema de aguas someras coincide con la energía mecánica total del fluido. Esta interpretación física es análoga a la obtenida para la ecuación de ondas lineal, donde la entropía corresponde a la suma de la energía cinética y potencial de la cuerda vibrante.*

Observación 3.4.2. *La entropía mecánica*

$$\eta(h, q) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2$$

no aparece de manera arbitraria. Si se linealiza el sistema alrededor de un estado de reposo $(H, 0)$, la matriz Jacobiana resultante es simetrizable mediante

$$M = \begin{pmatrix} g/H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La entropía cuadrática asociada es

$$\eta_{\text{lin}} = \frac{1}{2} \frac{g}{H} \tilde{h}^2 + \frac{1}{2} \tilde{u}^2,$$

que coincide, salvo factores de escala, con la energía potencial y cinética linealizadas. La entropía no lineal del sistema de aguas someras puede interpretarse como una extensión natural de esta energía cuadrática al régimen completamente no lineal.

3.5. Modelo de cromatografía y sistemas de Temple

Consideremos el sistema de cromatografía

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u}{1+u+v} \right)_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{v}{1+u+v} \right)_x = 0, \end{cases}$$

con $u, v \geq 0$. Escribimos

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \frac{u}{1+u+v} \\ \frac{v}{1+u+v} \end{pmatrix}.$$

Definimos $S = 1 + u + v$. Entonces

$$A(U) = DF(U) = \frac{1}{S^2} \begin{pmatrix} 1+v & -u \\ -v & 1+u \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son

$$\lambda_1(U) = \frac{1}{S^2}, \quad \lambda_2(U) = \frac{1}{S}.$$

Como $S > 1$, se tiene $\lambda_1 < \lambda_2$. Los vectores propios derechos pueden tomarse como

$$r_1(U) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad r_2(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.5.1. Campos característicos

Para la primera familia,

$$\nabla \lambda_1(U) = -\frac{2}{S^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\nabla \lambda_1(U) \cdot r_1(U) = -\frac{2(u+v)}{S^3}.$$

Si $u + v > 0$, entonces

$$\nabla \lambda_1(U) \cdot r_1(U) \neq 0.$$

Luego la primera familia es genuinamente no lineal.

Para la segunda familia,

$$\nabla \lambda_2(U) = -\frac{1}{S^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\nabla \lambda_2(U) \cdot r_2(U) = -\frac{1}{S^2}(1-1) = 0.$$

Luego la segunda familia es linealmente degenerada.

3.5.2. Invariantes de Riemann

Para la primera familia buscamos una función $w(U)$ tal que

$$\nabla w(U) \cdot r_1(U) = 0.$$

Como

$$r_1(U) = (u, v)^T,$$

esto equivale a

$$u w_u + v w_v = 0.$$

Una solución natural es

$$w_1(U) = \frac{v}{u}.$$

Por tanto, sobre las curvas de la primera familia se conserva la razón

$$\frac{v}{u} = \text{constante}.$$

Las curvas de la primera familia son rayos que salen del origen:

$$v = ku.$$

Para la segunda familia buscamos $w(U)$ tal que

$$\nabla w(U) \cdot r_2(U) = 0.$$

Como $r_2(U) = (1, -1)^T$, esto equivale a

$$w_u - w_v = 0.$$

Una solución natural es

$$w_2(U) = u + v.$$

Por tanto, las curvas de la segunda familia satisfacen

$$u + v = \text{constante}.$$

Además,

$$\lambda_2(U) = \frac{1}{1 + u + v},$$

de modo que λ_2 también permanece constante sobre las curvas de la segunda familia, como corresponde a un campo linealmente degenerado.

3.5.3. Ondas de rarefacción

Las curvas de rarefacción de la primera familia satisfacen

$$\frac{dU}{ds} = r_1(U).$$

Es decir,

$$\frac{du}{ds} = u, \quad \frac{dv}{ds} = v.$$

Dividiendo ambas ecuaciones,

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u}.$$

Integrando,

$$\ln v = \ln u + C,$$

y por tanto

$$\boxed{v = ku.}$$

Así, las rarefacciones de la primera familia son rayos en el plano (u, v) . La velocidad característica asociada es

$$\lambda_1(U) = \frac{1}{(1 + u + v)^2}.$$

A lo largo de un rayo $v = ku$, si $u + v$ disminuye, entonces λ_1 aumenta. Por tanto, una 1-rarefacción se obtiene moviéndose hacia el origen.

3.5.4. Discontinuidades de contacto

La segunda familia es linealmente degenerada. Sus curvas satisfacen $u + v = \text{constante}$. Sobre estas curvas,

$$\lambda_2(U) = \frac{1}{1 + u + v}$$

permanece constante. Por tanto, las ondas de la segunda familia son discontinuidades de contacto que se desplazan con velocidad

$$\boxed{s = \lambda_2(U) = \frac{1}{1 + u + v}.$$

3.5.5. Curvas de choque

Primera familia

La condición de Rankine–Hugoniot es

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L).$$

Escribiendo las dos componentes,

$$\frac{u_R}{S_R} - \frac{u_L}{S_L} = s(u_R - u_L), \quad \frac{v_R}{S_R} - \frac{v_L}{S_L} = s(v_R - v_L),$$

donde $S_i = 1 + u_i + v_i$, $i = L, R$. Reordenando,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{S_R} - s\right) u_R &= \left(\frac{1}{S_L} - s\right) u_L, \\ \left(\frac{1}{S_R} - s\right) v_R &= \left(\frac{1}{S_L} - s\right) v_L.\end{aligned}$$

Dividiendo ambas relaciones obtenemos

$$\frac{u_R}{v_R} = \frac{u_L}{v_L}.$$

Por consiguiente, $u_R v_L = v_R u_L$, y los estados U_L y U_R son colineales. Existe entonces un escalar $\alpha > 0$ tal que

$$U_R = \alpha U_L.$$

Esto demuestra que todas las curvas de choque de la primera familia son rayos que pasan por el origen,

$$\frac{v}{u} = \text{constante}.$$

Como las curvas de rarefacción obtenidas anteriormente satisfacen exactamente la misma ecuación, concluimos que las curvas de choque y rarefacción de la primera familia coinciden.

Segunda familia

Para la segunda familia, si U_L y U_R satisfacen

$$u_L + v_L = u_R + v_R,$$

entonces $S_L = S_R = S$. Luego

$$F(U_R) - F(U_L) = \frac{1}{S}(U_R - U_L).$$

Por tanto, Rankine–Hugoniot se satisface con

$$s = \frac{1}{S}.$$

Estas son precisamente las discontinuidades de contacto de la segunda familia.

3.5.6. Sistemas de Temple

Un sistema de Temple es un sistema hiperbólico para el cual las curvas de rarefacción y las curvas de choque de cada familia coinciden. El modelo de cromatografía es un ejemplo clásico de sistema de Temple. Las curvas de onda son, por tanto, rectas en el plano (u, v) :

- **Primera familia:** rayos que parten del origen, $\frac{v}{u} = \text{constante}$.
- **Segunda familia:** (rectas de pendiente -1), $u + v = \text{constante}$.

Esta estructura simplifica fuertemente el problema de Riemann, ya que el estado intermedio se obtiene como intersección de una curva de la primera familia emitida desde U_L con una curva de la segunda familia que llega a U_R .

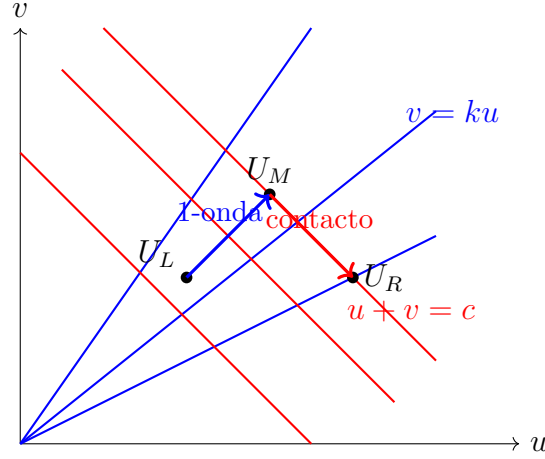


Figura 3.5: Curvas de onda para el modelo de cromatografía. Las curvas de la primera familia son rectas que pasan por el origen ($v/u = \text{constante}$); las de la segunda familia son rectas $u + v = \text{constante}$. Las curvas de choque y rarefacción de la primera familia coinciden, característica típica de los sistemas de Temple.

3.5.7. Choques y rarefacciones en la familia 1

Una característica notable de los sistemas de Temple es que las curvas de choque y de rarefacción de una misma familia coinciden geoméricamente. Para la familia 1 del modelo de cromatografía obtenemos

$$U_R = \alpha U_L, \quad \alpha > 0.$$

Sin embargo, la naturaleza de la onda viene determinada por la condición de entropía de Lax. Como

$$\lambda_1(c) = \frac{1}{(1+c)^2},$$

es estrictamente decreciente respecto de $c = u + v$, tenemos:

$$\boxed{0 < \alpha < 1 \implies \text{rarefacción 1,}} \quad \text{y} \quad \boxed{\alpha > 1 \implies \text{choque 1.}}$$

Por tanto, la misma recta del plano de estados puede representar una rarefacción o un choque dependiendo de la orientación con que se recorre.

3.5.8. Estado intermedio del problema de Riemann

Dado

$$U_L = (u_L, v_L), \quad U_R = (u_R, v_R),$$

la primera onda conserva

$$\frac{v}{u} = \frac{v_L}{u_L}.$$

La segunda onda debe conectar con U_R , por lo que conserva

$$u + v = u_R + v_R.$$

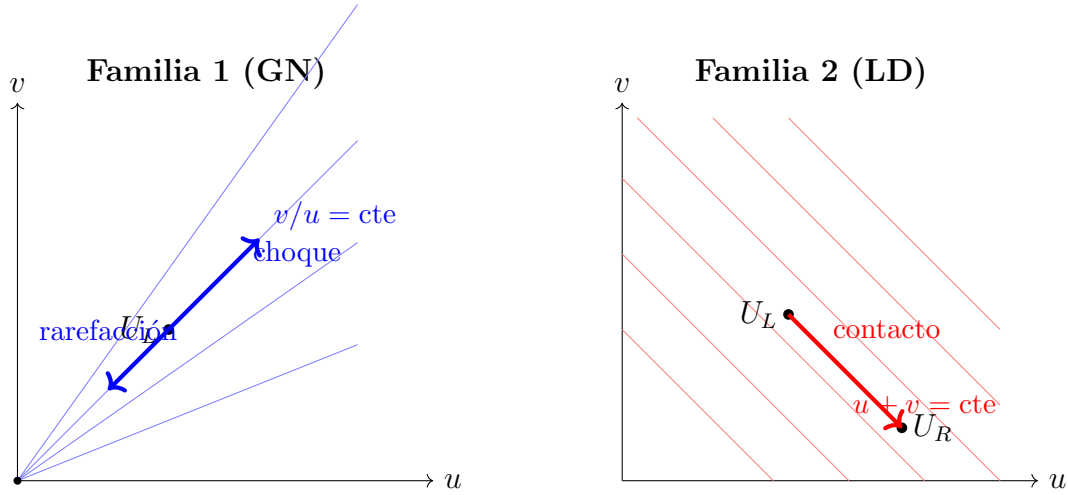


Figura 3.6: Geometría de las ondas del modelo de cromatografía. Izquierda: primera familia ($v/u = \text{cte}$), genuinamente no lineal. La misma recta puede representar una rarefacción (hacia el origen) o un choque (alejándose del origen). Derecha: segunda familia ($u + v = \text{cte}$), linealmente degenerada. Las ondas asociadas son discontinuidades de contacto.

El estado intermedio $U_M = (u_M, v_M)$ se obtiene resolviendo

$$\frac{v_M}{u_M} = \frac{v_L}{u_L}, \quad u_M + v_M = u_R + v_R.$$

Por tanto,

$$\boxed{u_M = \frac{u_R + v_R}{1 + \frac{v_L}{u_L}}}, \quad \text{y} \quad \boxed{v_M = \frac{\frac{v_L}{u_L}}{1 + \frac{v_L}{u_L}}(u_R + v_R)}.$$

Equivalentemente,

$$\boxed{U_M = \frac{u_R + v_R}{u_L + v_L} U_L}.$$

La solución del problema de Riemann tiene entonces la estructura

$$U_L \longrightarrow U_M \longrightarrow U_R,$$

donde la primera onda es una 1-rarefacción o un 1-choque, dependiendo del sentido en que se recorre el rayo, y la segunda onda es una discontinuidad de contacto.

3.5.9. Entropía y flujo de entropía para el modelo de cromatografía

Consideremos nuevamente el modelo de cromatografía

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u}{1 + u + v} \right)_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{v}{1 + u + v} \right)_x = 0. \end{cases}$$

Escribimos

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \frac{u}{1 + \frac{u}{v} + v} \\ \frac{v}{1 + \frac{u}{v} + v} \end{pmatrix}.$$

Introducimos las variables $c = u + v$, $y = \frac{u}{u + v}$, de modo que $u = cy$, $v = c(1 - y)$. Aquí c representa la concentración total, mientras que y representa la fracción relativa de la primera especie.

Coordenadas de Riemann

En estas variables, los valores propios son

$$\lambda_1(c) = \frac{1}{(1 + c)^2}, \quad \lambda_2(c) = \frac{1}{1 + c}.$$

Las curvas de la primera familia conservan la razón entre las concentraciones, es decir,

$$y = \frac{u}{u + v} = \text{constante},$$

mientras que las curvas de la segunda familia conservan

$$c = u + v = \text{constante}.$$

Por tanto, (c, y) son coordenadas naturales para el sistema.

Construcción de pares entropía–flujo en coordenadas de Riemann

La condición de compatibilidad para un par entropía–flujo (η, q) es

$$\nabla q(U) = \nabla \eta(U) DF(U).$$

En las coordenadas de Riemann

$$c = u + v, \quad y = \frac{u}{u + v},$$

el sistema se escribe en forma diagonal. Por tanto, la condición anterior se transforma en

$$q_c = \lambda_1(c)\eta_c, \quad q_y = \lambda_2(c)\eta_y.$$

Para que exista un flujo de entropía $q(c, y)$, debe cumplirse la condición de integrabilidad $q_{cy} = q_{yc}$. Sustituyendo las expresiones anteriores, obtenemos

$$\partial_y (\lambda_1(c)\eta_c) = \partial_c (\lambda_2(c)\eta_y).$$

Como las velocidades características dependen sólo de c , se tiene

$$\lambda_1(c)\eta_{cy} = \lambda_2(c)\eta_{cy} + \lambda_2'(c)\eta_y.$$

Por tanto,

$$\boxed{(\lambda_1(c) - \lambda_2(c))\eta_{cy} = \lambda_2'(c)\eta_y.}$$

Esta es una ecuación diferencial parcial lineal para la entropía η . En el modelo normalizado de cromatografía,

$$\lambda_1(c) = \frac{1}{(1+c)^2}, \quad \lambda_2(c) = \frac{1}{1+c}.$$

Entonces

$$\lambda_1(c) - \lambda_2(c) = \frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{1+c} = -\frac{c}{(1+c)^2},$$

y

$$\lambda_2'(c) = -\frac{1}{(1+c)^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad:

$$-\frac{c}{(1+c)^2}\eta_{cy} = -\frac{1}{(1+c)^2}\eta_y.$$

Multiplicando por $-(1+c)^2$, obtenemos $c\eta_{cy} = \eta_y$. Equivalentemente,

$$\eta_{cy} = \frac{1}{c}\eta_y.$$

Si definimos $z(c, y) = \eta_y(c, y)$, entonces

$$z_c = \frac{1}{c}z.$$

Esta ecuación ordinaria en la variable c tiene solución $z(c, y) = c a'(y)$, donde a es una función arbitraria de y . Como $z = \eta_y$, obtenemos

$$\eta_y(c, y) = c a'(y).$$

Integrando respecto de y ,

$$\eta(c, y) = c a(y) + b(c),$$

donde b es una función arbitraria de c . Por tanto, la familia general de entropías tiene la forma

$$\boxed{\eta(c, y) = c a(y) + b(c).}$$

El flujo de entropía $q(c, y)$ debe satisfacer

$$\nabla q(U) = \nabla \eta(U) DF(U).$$

En coordenadas de Riemann esto equivale a

$$q_c = \lambda_1(c)\eta_c, \quad q_y = \lambda_2(c)\eta_y.$$

Como

$$\eta_c = a(y) + b'(c), \quad \eta_y = c a'(y),$$

obtenemos

$$q_c = \frac{a(y) + b'(c)}{(1+c)^2}, \quad y \quad q_y = \frac{c}{1+c} a'(y).$$

Estas relaciones son compatibles, pues

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{a(y) + b'(c)}{(1+c)^2} \right] = \frac{a'(y)}{(1+c)^2},$$

mientras que

$$\frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{c}{1+c} a'(y) \right] = \frac{a'(y)}{(1+c)^2}.$$

Por tanto, un flujo de entropía asociado está dado por

$$q(c, y) = \frac{c}{1+c} a(y) + \int^c \frac{b'(s)}{(1+s)^2} ds.$$

Así, el modelo admite una familia de pares entropía-flujo:

$$\eta(c, y) = c a(y) + b(c),$$

$$q(c, y) = \frac{c}{1+c} a(y) + \int^c \frac{b'(s)}{(1+s)^2} ds.$$

Un ejemplo de entropía convexa

Una elección natural es

$$\eta(u, v) = u \log u + v \log v, \quad u > 0, \quad v > 0.$$

Esta función es estrictamente convexa y corresponde al análogo de la entropía de Gibbs-Boltzmann para una mezcla de dos especies. En variables (c, y) , esta entropía se escribe como

$$\eta(c, y) = c \log c + c [y \log y + (1-y) \log(1-y)].$$

Esto corresponde a tomar

$$a(y) = y \log y + (1-y) \log(1-y), \quad b(c) = c \log c.$$

El flujo de entropía asociado es

$$q(c, y) = \frac{c}{1+c} [y \log y + (1-y) \log(1-y)] + \int^c \frac{\log s + 1}{(1+s)^2} ds.$$

Una forma explícita de la integral es

$$\int^c \frac{\log s + 1}{(1+s)^2} ds = \log \left(\frac{c}{1+c} \right) - \frac{\log c + 1}{1+c},$$

salvo una constante aditiva. Por tanto,

$$q(c, y) = \frac{c}{1+c} [y \log y + (1-y) \log(1-y)] + \log \left(\frac{c}{1+c} \right) - \frac{\log c + 1}{1+c}.$$

Interpretación

A diferencia del sistema de aguas someras, donde la entropía coincide con la energía mecánica total, en el modelo de cromatografía la entropía no representa una energía física. Más bien, debe interpretarse como una entropía matemática asociada a las concentraciones. En particular, la elección

$$\eta(u, v) = u \log u + v \log v$$

mide una forma de mezcla o dispersión relativa de las especies químicas. Para soluciones suaves se tiene

$$\eta_t + q_x = 0.$$

Para soluciones débiles con discontinuidades, se impone la desigualdad entrópica

$$\eta_t + q_x \leq 0.$$

Esta condición permite seleccionar soluciones físicamente admisibles entre las soluciones débiles del sistema.

Relación con los sistemas de Temple

El modelo de cromatografía es un ejemplo clásico de sistema de Temple. En estos sistemas, las curvas de rarefacción y las curvas de choque de cada familia coinciden.

En el presente caso:

- familia 1: $\frac{u}{u+v} = \text{constante},$
- familia 2: $u+v = \text{constante}.$

Esta estructura geométrica simplifica la construcción de soluciones del problema de Riemann y también facilita la construcción de pares entropía-flujo.

Observación 3.5.1 (Modelo de Langmuir con tiempos de retención). *El modelo de cromatografía considerado en esta sección corresponde a una versión normalizada del sistema de Langmuir. En aplicaciones, es frecuente considerar flujos de la forma*

$$f_1(u, v) = \frac{k_1 u}{1 + k_1 u + k_2 v}, \quad f_2(u, v) = \frac{k_2 v}{1 + k_1 u + k_2 v},$$

donde k_1 y k_2 representan parámetros asociados a los tiempos de retención de las especies dentro de la columna. Mediante el cambio de variables $U_1 = k_1 u$, $U_2 = k_2 v$, este sistema se transforma en

$$(U_i)_t + \left(\frac{k_i U_i}{1 + U_1 + U_2} \right)_x = 0, \quad i = 1, 2.$$

Este es el modelo de cromatografía de Langmuir estudiado, por ejemplo, por Lu. Cuando $k_1 \neq k_2$, las especies poseen velocidades características distintas, lo que permite modelar la separación cromatográfica. El caso normalizado usado en estos apuntes corresponde esencialmente al caso $k_1 = k_2$, que conserva la estructura geométrica básica pero simplifica notablemente los cálculos.

En el caso general $0 < k_1 < k_2$, el sistema sigue siendo un ejemplo importante de sistema de Temple: las curvas de onda poseen una estructura geométrica especialmente simple. Sin embargo, la estructura espectral es más delicada y puede aparecer pérdida de hiperbolicidad estricta en la frontera del dominio de concentraciones.

3.6. El teorema de Lax y el teorema de Glimm

3.6.1. El teorema local de Lax

Consideremos el sistema hiperbólico

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U \in \Omega \subset \mathbb{R}^p.$$

Supondremos que:

1. el sistema es estrictamente hiperbólico;
2. cada campo característico es genuinamente no lineal o linealmente degenerado.

Fijemos un estado base $\bar{U} \in \Omega$. Denotemos por $T_j(\varepsilon_j; U)$ la curva de onda asociada a la familia j .

Si el campo es genuinamente no lineal, T_j representa la unión de las ramas de rarefacción y choque.

Si el campo es linealmente degenerado, T_j representa la curva de discontinuidades de contacto.

Componiendo estas curvas obtenemos

$$\Phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = T_p \circ \dots \circ T_1(\bar{U}).$$

Es decir, $\Phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

3.6.2. Interpretación geométrica

Partiendo de un estado izquierdo U_L , podemos generar una sucesión de estados $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(p)}$ mediante

$$U^{(1)} = T_1(\varepsilon_1; U_L),$$

$$U^{(2)} = T_2(\varepsilon_2; U^{(1)}),$$

$$\vdots$$

$$U^{(p)} = T_p(\varepsilon_p; U^{(p-1)}).$$

La composición completa define

$$U_R = \Phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p).$$

Los parámetros $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ representan las intensidades de las ondas.

Teorema 3.6.1 (Lax). *Sea*

$$U_t + F(U)_x = 0$$

un sistema estrictamente hiperbólico cuyos campos característicos sean genuinamente no lineales o linealmente degenerados.

Entonces, para todo par de estados U_L , U_R , suficientemente próximos, existe una única solución autosimilar del problema de Riemann formada por la sucesión ordenada de p ondas elementales.

3.6.3. Idea de la demostración

Observemos que $T_j(0; U) = U$. Además,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} T_j(0; U) = r_j(U).$$

Por tanto,

$$D\Phi(0) = [r_1(\bar{U}) \quad r_2(\bar{U}) \quad \cdots \quad r_p(\bar{U})].$$

Como el sistema es estrictamente hiperbólico, los vectores propios son linealmente independientes.

Luego $\det D\Phi(0) \neq 0$. El teorema de la función inversa implica entonces que existe un entorno de $\bar{U}$, en el cual la aplicación Φ es invertible.

Por consiguiente, para todo estado derecho suficientemente cercano a U_L , existe una única colección de parámetros $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ tal que

$$U_R = \Phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p).$$

Esto produce una solución única del problema de Riemann formada por la concatenación de p ondas elementales.

3.6.4. El teorema de Glimm

El teorema de Lax resuelve únicamente un problema de Riemann aislado.

La pregunta natural es:

¿qué ocurre para datos iniciales generales $U(x, 0) = U_0(x)$?

La respuesta fue obtenida por James Glimm en 1965.

Teorema 3.6.2 (Glimm). *Sea*

$$U_t + F(U)_x = 0$$

un sistema estrictamente hiperbólico cuyos campos sean genuinamente no lineales o linealmente degenerados. Si $TV(U_0)$ es suficientemente pequeña, entonces existe una solución global entrópica $U(x, t)$ para todo $t \geq 0$.

3.6.5. Idea de la demostración del teorema de Glimm

El teorema de Lax garantiza la existencia local de soluciones del problema de Riemann. Sin embargo, para datos iniciales generales aparecen infinitas interacciones entre ondas, por lo que la construcción local ya no es suficiente para obtener una solución global.

La contribución fundamental de Glimm fue demostrar que, si la variación total inicial es suficientemente pequeña, entonces las interacciones entre ondas permanecen controladas para todo tiempo.

Paso 1: aproximación por datos escalonados

Se aproxima el dato inicial por una función escalonada $U_0^\Delta(x)$, de modo que

$$TV(U_0^\Delta) \approx TV(U_0).$$

Cada discontinuidad de U_0^Δ genera un problema de Riemann elemental.

Paso 2: resolución exacta de problemas de Riemann

Entre dos instantes consecutivos, la solución aproximada se construye resolviendo exactamente todos los problemas de Riemann locales. La solución queda formada por un conjunto finito de ondas: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, correspondientes a choques, rarefacciones o discontinuidades de contacto.

Paso 3: el esquema aleatorio de Glimm

A diferencia del método de Godunov, que utiliza promedios celulares, el método de Glimm selecciona un punto aleatorio dentro de cada celda.

Sea $a_n \in [0, 1]$ una secuencia de números aleatorios. En cada paso temporal se define

$$U_i^{n+1} = U^\Delta(x_i + a_n \Delta x, t^{n+1} - 0).$$

Esta elección evita la difusión numérica inherente a los promedios celulares y preserva la estructura exacta de las ondas.

Paso 4: interacciones entre ondas

La principal dificultad aparece cuando dos ondas se encuentran. Supongamos que dos ondas α, β interactúan. Lax demostró que las amplitudes de las ondas salientes satisfacen una estimación del tipo

$$\Delta TV = O(|\alpha||\beta|).$$

Por tanto, la variación total puede aumentar debido a las interacciones. Si no se controla este crecimiento, podría producirse una explosión de la variación total en tiempo finito.

Paso 5: el potencial de interacción

La idea central de Glimm consiste en introducir el potencial

$$Q(t) = \sum_{\alpha \text{ approaches } \beta} |\alpha||\beta|,$$

donde la suma se extiende a todos los pares de ondas que eventualmente pueden interactuar. Cuando dos ondas se encuentran, el producto $|\alpha||\beta|$ desaparece de la suma. Por consiguiente, $Q(t)$ disminuye después de cada interacción.

Paso 6: el funcional de Glimm

Glimm definió el funcional

$$G(t) = TV(U(t)) + C Q(t),$$

donde $C > 0$ es una constante suficientemente grande. La estimación fundamental demuestra que

$$G(t_{n+1}) \leq G(t_n).$$

Es decir, aunque la variación total pueda aumentar ligeramente durante una interacción, dicho aumento queda compensado por la disminución del potencial $Q(t)$. Por tanto, $G(t)$ permanece uniformemente acotado para todo tiempo.

Paso 7: control uniforme de la variación total

Como

$$TV(U(t)) \leq G(t),$$

obtenemos una cota uniforme

$$TV(U^\Delta(t)) \leq C_0, \quad t \geq 0,$$

Independiente del parámetro de discretización. Esta es la estimación clave de toda la teoría.

Paso 8: compacidad

La familia de aproximaciones de Glimm queda uniformemente acotada en el espacio BV . El teorema de Helly implica entonces la existencia de una subsucesión convergente:

$$U^{\Delta_k} \longrightarrow U \quad \text{en } L^1_{\text{loc}}.$$

Paso 9: paso al límite

Finalmente, utilizando las ecuaciones integrales satisfechas por las aproximaciones y las estimaciones de interacción, se demuestra que el límite U satisface

$$U_t + F(U)_x = 0$$

en el sentido débil. Además, las soluciones de Riemann utilizadas en la construcción verifican las desigualdades de entropía, por lo que el límite también es una solución entrópica. Esto completa la demostración de existencia global.

Observación 3.6.1. *La estructura conceptual de la prueba puede resumirse mediante el siguiente esquema:*

$$\begin{aligned} \text{Problemas de Riemann} &\implies \text{Interacciones} \implies Q(t) \\ &\implies G(t) \implies TV \text{ acotada} \\ &\implies \text{Helly} \implies \text{Existencia.} \end{aligned}$$

Esta idea constituye uno de los pilares fundamentales de la teoría moderna de leyes de conservación hiperbólicas.

Observación 3.6.2 (El método de Glimm y el método de Godunov). *Existe una estrecha relación entre el método de Glimm y el método de Godunov. Ambos procedimientos construyen la solución global mediante una sucesión de problemas de Riemann locales.*

La diferencia esencial radica en la forma en que se actualiza la solución al final de cada paso temporal. Mientras que Godunov utiliza promedios celulares, introduciendo inevitablemente cierta difusión numérica, el método de Glimm emplea un muestreo aleatorio (random choice method), seleccionando un único punto dentro de cada celda. Esta elección preserva exactamente la estructura de las ondas elementales y constituye una herramienta matemática para demostrar resultados de existencia, más que un método numérico de uso práctico.

Por esta razón, el método de Glimm puede interpretarse como un análogo analítico del método de Godunov, en el cual la resolución exacta de problemas de Riemann desempeña el papel central.

Observación 3.6.3 (De Glimm a la teoría moderna). *El trabajo de Glimm (1965) constituye uno de los resultados fundamentales de la teoría moderna de leyes de conservación. Bajo la hipótesis de pequeña variación total del dato inicial, demostró la existencia global de soluciones entrópicas para sistemas estrictamente hiperbólicos mediante el método aleatorio y el funcional de interacción que hoy lleva su nombre.*

Durante las décadas siguientes, numerosos autores extendieron y perfeccionaron esta teoría. Entre las contribuciones más importantes destacan los trabajos de Nishida, Liu, Temple, Dafermos y DiPerna, quienes desarrollaron técnicas para el estudio de la estabilidad, la interacción de ondas y la selección de soluciones entrópicas.

*Finalmente, Bressan y colaboradores (1995–2000) reformularon toda la teoría mediante el método de front tracking, obteniendo un marco unificado de existencia, unicidad y estabilidad para soluciones de pequeña variación total. Esta teoría se encuentra expuesta sistemáticamente en la monografía *Hyperbolic Systems of Conservation Laws* (Oxford University Press, 2000), que constituye actualmente una referencia clásica sobre el tema.*

Observación 3.6.4 (El semigrupo de Bressan). *Uno de los principales resultados de la teoría moderna afirma que, bajo hipótesis estructurales apropiadas, las soluciones entrópicas generan un semigrupo global de aplicaciones.*

Más precisamente, si el sistema

$$U_t + F(U)_x = 0$$

es estrictamente hiperbólico y todos sus campos característicos son genuinamente no lineales o linealmente degenerados, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que para todo dato inicial

$$TV(U_0) < \delta,$$

el problema de Cauchy admite una única solución entrópica global

$$U(\cdot, t) = S_t U_0, \quad t \geq 0,$$

donde la familia de operadores $\{S_t\}_{t \geq 0}$ satisface las propiedades de un semigrupo,

$$S_0 = I, \quad S_{t+s} = S_t S_s,$$

y además es Lipschitz continua respecto de la norma L^1 :

$$\|S_t U_0 - S_t V_0\|_{L^1} \leq L \|U_0 - V_0\|_{L^1},$$

para alguna constante $L > 0$ independiente del tiempo.

Este resultado proporciona no solamente existencia global, sino también unicidad y dependencia continua respecto de los datos iniciales, completando así el problema de Cauchy para una amplia clase de sistemas hiperbólicos.

Las hipótesis de hiperbolicidad estricta y de genuina no linealidad o degeneración lineal son esenciales en la demostración, pues garantizan una estructura suficientemente regular de las curvas de onda y permiten controlar las interacciones mediante el funcional de Glimm.

Observación 3.6.5. La hipótesis de que cada campo característico sea genuinamente no lineal o linealmente degenerado se entiende globalmente en el dominio de estados considerado. Si una familia cambia de naturaleza (por ejemplo, pasa de ser genuinamente no lineal a linealmente degenerada), la teoría anterior deja de ser aplicable directamente y el problema del Cauchy resulta considerablemente más delicado. Existen resultados parciales para algunas clases de sistemas, pero una teoría tan completa como la de Glimm–Bressan aún no está disponible en ese contexto.

Ejercicios

Ejercicio 3.6.1. Considere un sistema estrictamente hiperbólico

$$U_t + F(U)_x = 0.$$

Sea $r_j(U)$ el vector propio derecho asociado al valor propio $\lambda_j(U)$.

1. Demuestre que las curvas integrales de r_j satisfacen

$$\frac{dU}{d\xi} = r_j(U).$$

2. Muestre que una función $w(U)$ es una invariante de Riemann de la familia j si y sólo si

$$\nabla w(U) \cdot r_j(U) = 0.$$

3. Interprete geométricamente esta condición.

Ejercicio 3.6.2. Considere el sistema de aguas someras

$$h_t + (hu)_x = 0,$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = 0.$$

1. Calcule los valores propios.
2. Calcule los vectores propios.
3. Deduzca las invariantes de Riemann

$$w_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh}.$$

4. Obtenga las ecuaciones de las curvas de rarefacción en el plano (h, u) .
5. Dibuje varias curvas de rarefacción.

Ejercicio 3.6.3. Para el sistema de aguas someras:

1. Escriba las condiciones de Rankine–Hugoniot.
2. Deduzca la velocidad de choque.
3. Obtenga la ecuación de las curvas de Hugoniot.
4. Dibuje las curvas de choque en el plano (h, u) .
5. Compare geométricamente las curvas de choque y rarefacción.

Ejercicio 3.6.4. Considere un problema de Riemann para el sistema de aguas someras.

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & x < 0, \\ U_R, & x > 0. \end{cases}$$

1. Demuestre que el estado intermedio U_M puede obtenerse como intersección de una curva de la familia 1 y una curva de la familia 2.
2. Deduzca la ecuación escalar para la profundidad h_M .
3. Explique por qué la ecuación puede resolverse mediante Newton.

Ejercicio 3.6.5. Considere dos rarefacciones de aguas someras.

1. Demuestre que puede aparecer una región de vacío.

2. Obtenga una condición explícita sobre los estados U_L y U_R .
3. Interprete físicamente el fenómeno.

Ejercicio 3.6.6. Considere el sistema de cromatografía

$$u_t + \left(\frac{u}{1+u+v} \right)_x = 0,$$

$$v_t + \left(\frac{v}{1+u+v} \right)_x = 0.$$

1. Calcule los valores propios.
2. Calcule los vectores propios.
3. Obtenga las invariantes de Riemann.
4. Muestre que las curvas de la primera familia satisfacen

$$\frac{v}{u} = \text{constante}.$$

5. Muestre que las curvas de la segunda familia satisfacen

$$u + v = \text{constante}.$$

Ejercicio 3.6.7. Considere nuevamente el modelo de cromatografía.

1. Deduzca las curvas de choque usando las condiciones de Rankine–Hugoniot.
2. Demuestre que coinciden con las curvas de rarefacción.
3. Verifique el criterio de entropía de Lax.
4. Determine cuándo una conexión corresponde a un choque y cuándo a una rarefacción.

Ejercicio 3.6.8. Considere la función

$$\eta(h, q) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} gh^2.$$

1. Calcule el Hessiano de η .
2. Verifique que η es convexa para $h > 0$.
3. Deduzca el flujo de entropía asociado.
4. Interprete físicamente la entropía obtenida.

Ejercicio 3.6.9. *Sea*

$$\Phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = T_p \circ \dots \circ T_1(U_L).$$

1. *Demuestre que*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_j}(0) = r_j(U_L).$$

2. *Calcule el Jacobiano de Φ .*

3. *Explique por qué el teorema de la función inversa implica existencia local de una solución del problema de Riemann.*

Ejercicio 3.6.10. *Considere el funcional de Glimm*

$$G(t) = TV(U(t)) + C Q(t).$$

1. *Explique el significado del potencial de interacción*

$$Q(t).$$

2. *Describa cualitativamente qué ocurre cuando dos ondas interactúan.*

3. *Explique por qué el funcional $G(t)$ debe decrecer.*

4. *Dibuje un esquema conceptual de la demostración del teorema de Glimm.*

Ejercicio 3.6.11 (*). *Demuestre que toda solución suave de un sistema de Temple permanece sobre la intersección de superficies de invariantes de Riemann apropiadas.*

Ejercicio 3.6.12 (*). *Lea el artículo de Gilquin, Laurens y Rosier (1996) y describa las principales diferencias entre los problemas de Riemann unidimensionales y multidimensionales para sistemas hiperbólicos lineales.*

Bibliografía

- [1] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem*. Oxford University Press, 2000.
- [2] C. M. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer, 4th edition, 2016.
- [3] J. Glimm. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18:697–715, 1965.
- [4] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer, 1996.
- [5] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 10:537–566, 1957.
- [6] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations*. Springer, 2nd edition, 1994.
- [8] B. Temple. Systems of conservation laws with invariant submanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 280:781–795, 1983.
- [9] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3rd edition, 2009.

Capítulo 4

Métodos Numéricos para Leyes de Conservación

Hasta ahora hemos estudiado la estructura matemática de los sistemas hiperbólicos: hiperbolicidad, curvas características, invariantes de Riemann, ondas de rarefacción, choques, discontinuidades de contacto y el problema de Riemann.

Una de las ideas fundamentales de la teoría moderna consiste en que los problemas de Riemann no sólo permiten describir soluciones exactas locales, sino que también constituyen el bloque básico de construcción de numerosos métodos numéricos.

La observación clave fue realizada por Godunov en 1959: si una solución general puede interpretarse localmente como una sucesión de problemas de Riemann, entonces es natural aproximar la ecuación resolviendo problemas de Riemann en cada interfaz de la malla.

Esta idea dio origen a toda una familia de métodos numéricos, conocidos como *métodos de captura de choques* (*shock-capturing methods*), entre los que se encuentran los métodos de Godunov, Roe, HLL, HLLC, WAF y numerosos esquemas modernos.

En este capítulo estudiaremos los principios básicos de estos métodos para leyes de conservación unidimensionales y sistemas hiperbólicos.

4.1. El método de Godunov para leyes de conservación escalares

Consideremos la ley de conservación escalar

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Sea una malla uniforme $x_i = i\Delta x$, y definamos las celdas

$$I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right].$$

Introducimos los promedios celulares

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u(x, t^n) dx.$$

Nuestro objetivo es construir una aproximación de estos promedios en tiempos sucesivos.

4.1.1. Reconstrucción constante

Supongamos conocidos los valores u_i^n . Godunov propuso reconstruir una función escalonada

$$u^\Delta(x, t^n) = u_i^n, \quad x \in I_i.$$

Es decir, la solución aproximada es constante en cada celda. Esta reconstrucción genera una discontinuidad en cada interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$. Por tanto, en cada interfaz aparece naturalmente un problema de Riemann local:

$$u(x, t^n) = \begin{cases} u_i^n, & x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ u_{i+1}^n, & x > x_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

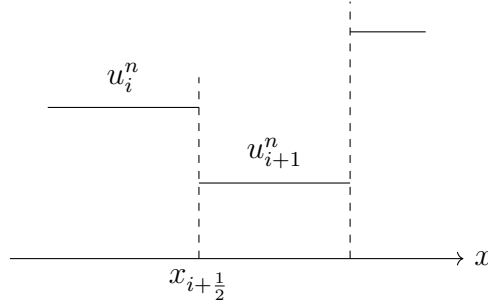


Figura 4.1: Reconstrucción constante de Godunov. Cada interfaz genera un problema de Riemann local.

4.1.2. Flujo de Godunov

Sea $u^*(x/t; u_L, u_R)$ la solución exacta del problema de Riemann. El flujo numérico de Godunov se define como

$$F_G(u_L, u_R) = f(u^*(0; u_L, u_R)).$$

Es decir, el flujo se evalúa en el estado que ocupa la interfaz $x/t = 0$. La actualización de los promedios celulares es entonces

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right),$$

donde

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_G(u_i^n, u_{i+1}^n).$$

Esta expresión tiene exactamente la forma de un método de volúmenes finitos.

Observación 4.1.1. *El método de Godunov puede interpretarse como una discretización por volúmenes finitos cuyos flujos numéricos se obtienen resolviendo exactamente problemas de Riemann en cada interfaz de la malla.*

Esta conexión entre problemas de Riemann y métodos numéricos constituye una de las ideas más importantes de la teoría moderna de leyes de conservación.

4.1.3. Ejemplo: la ecuación de advección lineal

Consideremos la ecuación

$$u_t + a u_x = 0,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es constante. El flujo es $f(u) = au$. En cada interfaz aparece el problema de Riemann

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0. \end{cases}$$

Sabemos que la solución exacta es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x - at < 0, \\ u_R, & x - at > 0. \end{cases}$$

Por tanto, el estado que ocupa la interfaz $x/t = 0$ depende únicamente del signo de a .

Si $a > 0$, las características se desplazan hacia la derecha. La interfaz recibe información únicamente desde la izquierda, por lo que $u^*(0) = u_L$. Luego

$$F_G(u_L, u_R) = f(u_L) = a u_L.$$

El método de Godunov se convierte en

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Éste es precisamente el esquema upwind clásico.

Si $a < 0$, las características se desplazan hacia la izquierda. La interfaz recibe información desde la derecha y, por tanto, $u^*(0) = u_R$. En consecuencia,

$$F_G(u_L, u_R) = a u_R.$$

El esquema resultante es

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n).$$

Nuevamente obtenemos un esquema upwind.

Observación 4.1.2. *El método de Godunov generaliza el concepto de esquema upwind.*

En la ecuación de advección lineal, el flujo de Godunov coincide exactamente con el flujo upwind:

$$F_G(u_L, u_R) = \begin{cases} a u_L, & a > 0, \\ a u_R, & a < 0. \end{cases}$$

Para leyes de conservación no lineales y sistemas hiperbólicos, el mismo principio continúa siendo válido: el flujo numérico se obtiene resolviendo localmente un problema de Riemann y evaluando el flujo en la interfaz.

Proposición 4.1.1. *Para una ley de conservación escalar*

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

el flujo de Godunov puede escribirse como

$$F_G(u_L, u_R) = \begin{cases} \min_{u_L \leq u \leq u_R} f(u), & u_L \leq u_R, \\ \max_{u_R \leq u \leq u_L} f(u), & u_L > u_R. \end{cases}$$

Esta expresión es válida incluso cuando el flujo f no es convexo.

Observación 4.1.3. *Cuando f es convexa, la fórmula anterior se deduce fácilmente a partir de la estructura simple de los problemas de Riemann escalares.*

Para flujos no convexos, la solución entrópica debe construirse mediante las envolventes convexas y cóncavas introducidas por Oleñnik. En este caso pueden aparecer combinaciones de choques y rarefacciones dentro de una misma solución de Riemann. Sin embargo, la fórmula del flujo de Godunov sigue siendo válida.

4.2. El método de Godunov para la ecuación de Burgers

Consideremos la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0.$$

El flujo es $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Dado un problema de Riemann

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

la solución exacta depende de la posición relativa de u_L y u_R . Por consiguiente, el flujo de Godunov debe analizarse caso por caso.

4.2.1. Rarefacción

Supongamos $u_L < u_R$. La solución del problema de Riemann es una rarefacción

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x/t < u_L, \\ x/t, & u_L \leq x/t \leq u_R, \\ u_R, & x/t > u_R. \end{cases}$$

El estado que ocupa la interfaz $x/t = 0$ depende de la posición del origen respecto del abanico.

Si $0 < u_L < u_R$, entonces $u^*(0) = u_L$. Por tanto, $F_G = \frac{1}{2}u_L^2$.

Si $u_L < u_R < 0$, entonces $u^*(0) = u_R$, y $F_G = \frac{1}{2}u_R^2$.

Si $u_L < 0 < u_R$, el origen pertenece al interior del abanico. Luego $u^*(0) = 0$, y $F_G = 0$.

4.2.2. Choque

Supongamos ahora $u_L > u_R$. La solución es un choque cuya velocidad viene dada por Rankine–Hugoniot:

$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

Si $s > 0$, el choque se desplaza hacia la derecha y la interfaz ve el estado izquierdo: $u^*(0) = u_L$. Por tanto, $F_G = \frac{1}{2}u_L^2$.

Si $s < 0$, la interfaz ve el estado derecho: $u^*(0) = u_R$. Entonces $F_G = \frac{1}{2}u_R^2$.

4.2.3. Fórmula explícita

Reuniendo todos los casos obtenemos

$$F_G(u_L, u_R) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_L^2, & u_L > u_R, \quad u_L + u_R > 0, \\ \frac{1}{2}u_R^2, & u_L > u_R, \quad u_L + u_R < 0, \\ \frac{1}{2}u_L^2, & 0 < u_L < u_R, \\ \frac{1}{2}u_R^2, & u_L < u_R < 0, \\ 0, & u_L < 0 < u_R. \end{cases}$$

Observación 4.2.1. Para Burgers,

$$F_G(u_L, u_R) = \begin{cases} \min_{u \in [u_L, u_R]} \frac{1}{2}u^2, & u_L \leq u_R, \\ \max_{u \in [u_R, u_L]} \frac{1}{2}u^2, & u_L > u_R. \end{cases}$$

Esta fórmula es un caso particular de la expresión general del flujo de Godunov para leyes de conservación escalares.

4.3. El método de Godunov para sistemas hiperbólicos

Consideremos ahora un sistema de leyes de conservación

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

donde $U(x, t) \in \mathbb{R}^m$. Sea una partición uniforme de la recta en celdas

$$I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right].$$

Como en el caso escalar, definimos los promedios celulares

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} U(x, t^n) dx.$$

Supondremos conocidos los valores U_i^n .

4.3.1. Reconstrucción constante

Godunov propuso reconstruir una función escalonada

$$U^\Delta(x, t^n) = U_i^n, \quad x \in I_i.$$

Esta reconstrucción genera una discontinuidad en cada interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$. Por tanto, en cada interfaz aparece un problema de Riemann local:

$$U(x, t^n) = \begin{cases} U_i^n, & x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ U_{i+1}^n, & x > x_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

4.3.2. Flujo de Godunov

Sea $U^*(\xi; U_L, U_R)$, $\xi = \frac{x}{t}$, la solución entrópica del problema de Riemann asociado a los estados U_L, U_R . El flujo de Godunov se define por

$$F_G(U_L, U_R) = F(U^*(0; U_L, U_R)).$$

Es decir, el flujo numérico se obtiene evaluando el flujo físico en el estado que ocupa la interfaz $\frac{x}{t} = 0$.

La actualización de los promedios celulares viene dada por

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right),$$

donde

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_G(U_i^n, U_{i+1}^n).$$

Esta expresión constituye el método de Godunov para sistemas.

4.3.3. La dificultad práctica

Aunque la definición del flujo de Godunov es conceptualmente simple, su implementación puede resultar costosa. En efecto, para calcular $F_G(U_L, U_R)$, es necesario resolver exactamente el problema de Riemann correspondiente. Para sistemas no lineales, esta tarea puede requerir:

- cálculo de valores y vectores propios;
- construcción de curvas de rarefacción;
- resolución de ecuaciones de Rankine–Hugoniot;
- determinación de estados intermedios;
- iteraciones de Newton.

Por ejemplo, para el sistema de aguas someras, el estado intermedio se obtiene resolviendo una ecuación no lineal para la profundidad h_M .

Por esta razón, en la práctica suelen utilizarse solucionadores aproximados de Riemann. Los dos solucionadores aproximados más utilizados son:

1. el solucionador de Roe;
2. el solucionador HLL.

Ambos intentan aproximar el flujo de Godunov evitando la resolución exacta del problema de Riemann.

4.4. El solucionador de Roe

El método de Godunov requiere resolver exactamente el problema de Riemann

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

asociado a dos estados constantes U_L , U_R . Sin embargo, para sistemas no lineales esta tarea puede resultar costosa. La idea de Roe consiste en reemplazar localmente el sistema no lineal por un sistema lineal equivalente, cuya solución de Riemann puede obtenerse explícitamente mediante descomposición espectral. De este modo, el problema de Riemann no lineal se aproxima por un problema de Riemann lineal.

4.4.1. Linearización de Roe

Buscamos una matriz $\tilde{A}(U_L, U_R)$ tal que

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L).$$

Esta condición garantiza que la linealización reproduce exactamente el salto de flujo entre ambos estados. Además, se exige que $\tilde{A}(U, U) = DF(U)$, y que $\tilde{A}$ sea diagonalizable con autovalores reales. La matriz $\tilde{A}$ se denomina matriz de Roe.

4.4.2. Problema de Riemann aproximado

Consideremos el sistema lineal

$$U_t + \tilde{A}U_x = 0.$$

Como vimos en el Capítulo 1, la solución del problema de Riemann puede obtenerse mediante la descomposición espectral $\tilde{A} = R\Lambda R^{-1}$. Si $\Delta U = U_R - U_L$, escribimos

$$\Delta U = \sum_{k=1}^m \alpha_k r_k.$$

Cada coeficiente α_k representa la intensidad de una onda elemental asociada al valor propio λ_k . La solución aproximada consiste entonces en una sucesión de ondas lineales que se propagan con velocidades $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

4.4.3. Flujo de Roe

4.4.4. Deducción del flujo de Roe desde el problema de Riemann lineal

El flujo de Roe puede entenderse como el flujo de Godunov aplicado no al sistema no lineal original, sino al sistema linealizado

$$U_t + \tilde{A}U_x = 0,$$

donde $\tilde{A} = \tilde{A}(U_L, U_R)$ es la matriz de Roe. Supongamos que $\tilde{A}$ es diagonalizable con valores propios reales: $\tilde{A} = R\Lambda R^{-1}$, donde $\Lambda = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$, y las columnas de R son los vectores propios derechos $\tilde{r}_k$. Dado el salto

$$\Delta U = U_R - U_L,$$

lo descomponemos en la base propia:

$$\Delta U = \sum_{k=1}^m \alpha_k \tilde{r}_k.$$

La solución del problema de Riemann lineal está formada por ondas que se propagan con velocidades $\tilde{\lambda}_k$. Por tanto, el estado que ocupa la interfaz $x/t = 0$ es

$$U^* = U_L + \sum_{\tilde{\lambda}_k < 0} \alpha_k \tilde{r}_k.$$

En efecto, las ondas con velocidad negativa ya han cruzado la interfaz desde la derecha hacia la izquierda, mientras que las ondas con velocidad positiva permanecen a la derecha de la interfaz. Como el sistema linealizado tiene flujo $\tilde{F}(U) = \tilde{A}U$, el flujo en la interfaz es $F^* = \tilde{A}U^*$. Luego

$$F^* = \tilde{A}U_L + \sum_{\tilde{\lambda}_k < 0} \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Introducimos las partes positiva y negativa de cada valor propio:

$$\tilde{\lambda}_k^+ = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_k + |\tilde{\lambda}_k|), \quad \tilde{\lambda}_k^- = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_k - |\tilde{\lambda}_k|).$$

Entonces

$$\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k^+ + \tilde{\lambda}_k^-,$$

y $\tilde{\lambda}_k^- = 0$, si $\tilde{\lambda}_k > 0$, $\tilde{\lambda}_k^+ = 0$, si $\tilde{\lambda}_k < 0$. Por tanto, el flujo puede escribirse como

$$F^* = \tilde{A}U_L + \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k^- \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Como

$$\tilde{A}\Delta U = \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{r}_k,$$

y $\Delta U = U_R - U_L$, tenemos

$$\tilde{A}U_R = \tilde{A}U_L + \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Usando ahora $\tilde{\lambda}_k^- = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_k - |\tilde{\lambda}_k|)$, obtenemos

$$F^* = \tilde{A}U_L + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \tilde{\lambda}_k \alpha_k \tilde{r}_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |\tilde{\lambda}_k| \alpha_k \tilde{r}_k.$$

El primer par de términos puede reescribirse como

$$\tilde{A}U_L + \frac{1}{2} \tilde{A}(U_R - U_L) = \frac{1}{2} (\tilde{A}U_L + \tilde{A}U_R).$$

Por tanto,

$$F^* = \frac{1}{2} (\tilde{A}U_L + \tilde{A}U_R) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |\tilde{\lambda}_k| \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Para el sistema linealizado,

$$\tilde{F}(U_L) = \tilde{A}U_L, \quad \tilde{F}(U_R) = \tilde{A}U_R.$$

En el método de Roe, además, la matriz $\tilde{A}$ satisface la propiedad

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_R - U_L).$$

Esto permite reemplazar el flujo linealizado por los flujos físicos en los estados U_L y U_R . Así se obtiene finalmente

$$F_{\text{Roe}}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} (F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |\tilde{\lambda}_k| \alpha_k \tilde{r}_k.$$

En forma matricial,

$$F_{\text{Roe}}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} (F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2} |\tilde{A}| (U_R - U_L),$$

donde

$$|\tilde{A}| = R|\Lambda|R^{-1}, \quad |\Lambda| = \text{diag}(|\tilde{\lambda}_1|, \dots, |\tilde{\lambda}_m|).$$

Observación 4.4.1. *La fórmula de Roe no es una corrección heurística del flujo centrado. Es exactamente el flujo de Godunov aplicado al problema de Riemann linealizado. El primer término,*

$$\frac{1}{2}(F(U_L) + F(U_R)),$$

corresponde a un flujo centrado, mientras que el segundo término,

$$\frac{1}{2}|\tilde{A}|(U_R - U_L),$$

es la disipación upwind asociada a la descomposición característica del sistema.

Observación 4.4.2. *La diferencia fundamental entre el flujo de Roe y el flujo de Lax-Friedrichs es que la disipación numérica de Roe depende de cada valor propio individual. Por consiguiente, Roe introduce únicamente la difusión necesaria en cada familia característica. Esto permite capturar choques y discontinuidades de contacto con mucha mayor precisión.*

4.4.5. Ejemplo: el sistema de aguas someras

Recordemos que

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad q = hu,$$

y

$$F(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}.$$

Observación 4.4.3. *Obsérvese que el solucionador de Roe utiliza exactamente la estructura espectral estudiada en los capítulos anteriores.*

En particular, las velocidades características aproximadas son las velocidades de las ondas gravitacionales

$$u \pm \sqrt{gh}.$$

Por esta razón, Roe reproduce con gran precisión la propagación de choques y rarefacciones en aguas someras.

El flujo de Roe entre $U_L = (h_L, q_L)$ y $U_R = (h_R, q_R)$ es

$$F_{\text{Roe}}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} (F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 |\tilde{\lambda}_k| \alpha_k \tilde{r}_k.$$

donde

$$u_L = \frac{q_L}{h_L}, \quad u_R = \frac{q_R}{h_R},$$

Antes de introducir las medias de Roe, conviene preguntarse cómo se obtienen estas cantidades. A primera vista podría parecer natural utilizar simplemente las medias aritméticas de h y u . Sin embargo, la linealización de Roe no busca aproximar el Jacobiano mediante un promedio cualquiera, sino construir una matriz $\tilde{A}(U_L, U_R)$ que reproduzca exactamente el salto del flujo entre los estados izquierdo y derecho. La condición fundamental que caracteriza la matriz de Roe es

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L).$$

Esta identidad determina las medias que deben emplearse en la construcción de $\tilde{A}$. En efecto, para el sistema de aguas someras, la primera componente de esta igualdad no proporciona ninguna información adicional, mientras que la segunda componente conduce a

$$\left(\frac{q_R^2}{h_R} - \frac{q_L^2}{h_L} \right) + \frac{1}{2} g(h_R^2 - h_L^2) = (g\tilde{h} - \tilde{u}^2)\Delta h + 2\tilde{u}\Delta q,$$

donde $\Delta h = h_R - h_L$, $\Delta q = q_R - q_L$. Consideremos únicamente el término gravitacional. Utilizando la identidad algebraica

$$h_R^2 - h_L^2 = (h_R + h_L)(h_R - h_L),$$

se obtiene

$$\frac{1}{2} g(h_R^2 - h_L^2) = g \left(\frac{h_R + h_L}{2} \right) (h_R - h_L) = g \left(\frac{h_R + h_L}{2} \right) \Delta h.$$

Por otra parte, la contribución correspondiente en la matriz de Roe es $g\tilde{h}\Delta h$. Para que la condición de Roe se satisfaga exactamente para cualquier par de estados U_L y U_R , ambos términos deben coincidir. En consecuencia,

$$g\tilde{h}\Delta h = g \left(\frac{h_R + h_L}{2} \right) \Delta h,$$

lo que implica inmediatamente

$$\tilde{h} = \frac{h_L + h_R}{2}.$$

Así, la media aritmética de la profundidad no constituye una elección heurística, sino que surge de manera natural al exigir que el término hidrostático del flujo, que es cuadrático en h , reproduzca exactamente el salto de flujo entre los estados izquierdo y derecho. La deducción de la media de la velocidad $\tilde{u}$ es más delicada, pues proviene del término convectivo $q^2/h = hu^2$, cuya factorización requiere una identidad algebraica más elaborada. mientras que el término convectivo $q^2/h = hu^2$ impone una condición mucho más sutil. Consideremos ahora el término convectivo de la condición de Roe,

$$\frac{q_R^2}{h_R} - \frac{q_L^2}{h_L} = -\tilde{u}^2 \Delta h + 2\tilde{u} \Delta q,$$

donde $q_i = h_i u_i$, $i = L, R$. Sustituyendo $q = hu$, obtenemos

$$h_R u_R^2 - h_L u_L^2 = -\tilde{u}^2 (h_R - h_L) + 2\tilde{u} (h_R u_R - h_L u_L).$$

Esta igualdad puede interpretarse como una ecuación cuadrática para la media desconocida $\tilde{u}$:

$$(h_R - h_L) \tilde{u}^2 - 2(h_R u_R - h_L u_L) \tilde{u} + (h_R u_R^2 - h_L u_L^2) = 0.$$

Aplicando la fórmula general para las raíces, se obtiene

$$\tilde{u} = \frac{h_R u_R - h_L u_L \pm \sqrt{h_L h_R} (u_R - u_L)}{h_R - h_L}.$$

Una factorización sencilla muestra que las dos soluciones pueden escribirse como

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R} u_R + \sqrt{h_L} u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \text{o bien} \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R} u_R - \sqrt{h_L} u_L}{\sqrt{h_R} - \sqrt{h_L}}.$$

A primera vista, ambas expresiones satisfacen la condición de Roe. Sin embargo, la segunda solución debe descartarse. En efecto, cuando los estados izquierdo y derecho tienden a coincidir, $(h_R, u_R) \rightarrow (h_L, u_L)$, el denominador $\sqrt{h_R} - \sqrt{h_L}$ tiende a cero, por lo que la segunda expresión deja de estar definida y no admite un límite continuo. En consecuencia, $\tilde{A}(U, U) \neq DF(U)$, violando una de las propiedades fundamentales exigidas a la matriz de Roe. Por el contrario, la primera expresión permanece perfectamente regular y satisface $\lim_{U_R \rightarrow U_L} \tilde{u} = u$, garantizando la consistencia de la linealización. Por esta razón, la media de Roe para la velocidad se define finalmente como

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_L} u_L + \sqrt{h_R} u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}.$$

Obsérvese que, al igual que la media aritmética para la profundidad, esta expresión no constituye una elección heurística, sino que surge de imponer la condición de linealización exacta del salto de flujo junto con la condición de consistencia $\tilde{A}(U, U) = DF(U)$.

Observación 4.4.4. *La expresión anterior para $\tilde{u}$ no fue obtenida por inspección. En su trabajo original, Roe introdujo una parametrización del estado mediante variables auxiliares en las cuales el flujo se vuelve cuadrático. Esta elección permite linealizar exactamente la diferencia de flujos entre dos estados y conduce de manera natural a la media ponderada por $\sqrt{h}$. Ideas análogas se utilizan en la construcción de la matriz de Roe para las ecuaciones de Euler de la dinámica de gases.*

Adicionalmente, $\tilde{c} = \sqrt{g\tilde{h}}$. Los valores propios de Roe son

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u} + \tilde{c},$$

y los vectores propios derechos son

$$\tilde{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \end{pmatrix}.$$

Si

$$\Delta U = U_R - U_L = \begin{pmatrix} \Delta h \\ \Delta q \end{pmatrix},$$

entonces

$$\Delta U = \alpha_1 \tilde{r}_1 + \alpha_2 \tilde{r}_2,$$

con

$$\alpha_1 = \frac{(\tilde{u} + \tilde{c})\Delta h - \Delta q}{2\tilde{c}}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta q - (\tilde{u} - \tilde{c})\Delta h}{2\tilde{c}}.$$

Por tanto, explícitamente,

$$F_{\text{Roe}}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_L^2}{h_L} + \frac{1}{2}gh_L^2 + \frac{q_R^2}{h_R} + \frac{1}{2}gh_R^2 \right) - \frac{1}{2} \left[|\tilde{\lambda}_1| \alpha_1 \tilde{r}_1 + |\tilde{\lambda}_2| \alpha_2 \tilde{r}_2 \right].$$

4.4.6. Corrección de entropía de Harten

Una de las principales limitaciones del solucionador de Roe es que, aunque reproduce correctamente los choques y las discontinuidades de contacto, puede violar la condición de entropía en presencia de rarefacciones transónicas. Recordemos que el método de Roe reemplaza el sistema no lineal por el sistema lineal

$$U_t + \tilde{A}(U_L, U_R)U_x = 0,$$

donde la matriz de Roe posee valores propios constantes $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m$. Sin embargo, en el problema no lineal las velocidades características varían continuamente a lo largo de una onda de rarefacción. La dificultad aparece cuando una familia característica cambia de signo entre los estados izquierdo y derecho,

$$\lambda_j(U_L) < 0 < \lambda_j(U_R).$$

Este fenómeno recibe el nombre de *rarefacción transónica*.

En la solución exacta del problema de Riemann, la velocidad característica pasa continuamente por el valor cero y el abanico de rarefacción contiene un estado para el cual $\lambda_j(U) = 0$. En cambio, el solucionador de Roe reemplaza todas las velocidades del abanico por un único valor constante $\tilde{\lambda}_j$. Como consecuencia, el método puede interpretar erróneamente la rarefacción como una discontinuidad propagándose con velocidad $\tilde{\lambda}_j$, produciendo una solución que viola la condición de entropía de Lax. Este fenómeno recibe el nombre de *entropy violating shock*.

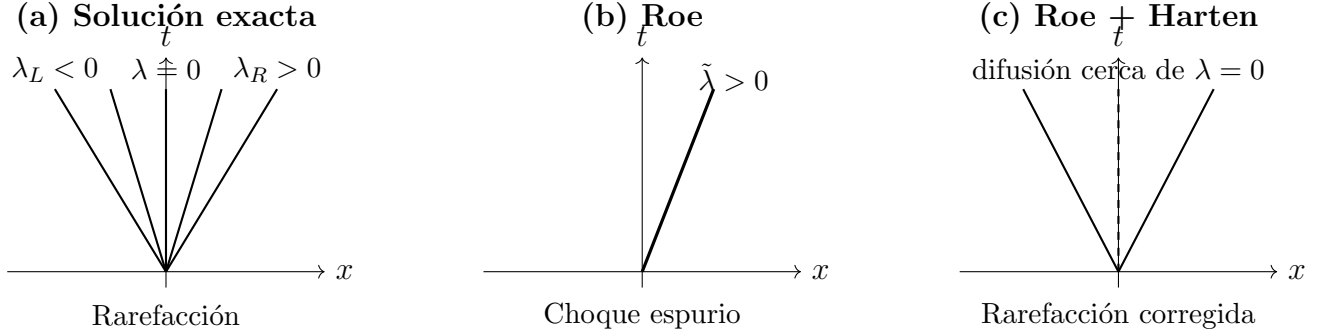


Figura 4.2: Rarefacción transónica y corrección de entropía de Harten. (a) En la solución exacta, las velocidades características cambian continuamente de signo y forman un abanico de rarefacción. (b) El solucionador de Roe reemplaza este abanico por una única velocidad característica, pudiendo generar un choque no entrópico. (c) La corrección de Harten incrementa la disipación numérica únicamente para autovalores próximos a cero, recuperando la solución entrópica correcta.

Para evitar este comportamiento, Harten propuso reemplazar el valor absoluto de cada valor propio por una función suavizada alrededor del origen. En lugar de utilizar $|\tilde{\lambda}_j|$, se define

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| \geq \delta, \\ \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta}, & |\lambda| < \delta, \end{cases}$$

donde $\delta > 0$ es un pequeño parámetro. La matriz de valores absolutos $|\tilde{A}| = R|\Lambda|R^{-1}$ se reemplaza entonces por

$$\Phi(\tilde{A}) = R \operatorname{diag} \left(\phi(\tilde{\lambda}_1), \dots, \phi(\tilde{\lambda}_m) \right) R^{-1}.$$

El flujo de Roe corregido queda finalmente

$$F_{\text{Roe}}^{EC} = \frac{1}{2} (F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2} \Phi(\tilde{A})(U_R - U_L).$$

Obsérvese que la función ϕ coincide con el valor absoluto para autovalores alejados del origen, por lo que la corrección únicamente modifica las ondas cuya velocidad característica es próxima a cero.

Desde un punto de vista físico, esta modificación introduce una pequeña cantidad adicional de disipación numérica en las rarefacciones transónicas, evitando la aparición de choques no entrópicos sin alterar significativamente la resolución del método en el resto del dominio.

La corrección de Harten constituye actualmente una parte estándar de la implementación práctica del solucionador de Roe para numerosos sistemas hiperbólicos, entre ellos las ecuaciones de Euler y el sistema de aguas someras.

Observación 4.4.5. *El término rarefacción transónica proviene de la dinámica de gases y hace referencia a una onda de rarefacción en la cual una velocidad característica cambia de signo dentro del abanico de ondas. En términos matemáticos, existe un estado intermedio U^* tal que*

$$\lambda_j(U_L) < 0 < \lambda_j(U_R), \quad \lambda_j(U^*) = 0.$$

En las ecuaciones de Euler, esta situación corresponde a una transición entre regímenes subsónicos y supersónicos. En el sistema de aguas someras, el fenómeno es análogo y representa el paso entre un flujo subcrítico y uno supercrítico (número de Froude igual a uno). Precisamente en estas situaciones el solucionador de Roe puede violar la condición de entropía, lo que motiva la introducción de la corrección de Harten.

4.4.7. Ejemplo: las ecuaciones de Euler para un gas perfecto

Consideremos las ecuaciones de Euler unidimensionales para un gas perfecto,

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix},$$

donde ρ es la densidad, u la velocidad y E la energía total por unidad de volumen.

El flujo es

$$F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix},$$

donde

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right).$$

Si escribimos $m = \rho u$, entonces

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}.$$

El Jacobiano del flujo $A(U) = DF(U)$ es

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ u \left(\frac{\gamma-1}{2}u^2 - H \right) & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix},$$

donde

$$H = \frac{E + p}{\rho}$$

es la entalpía total.

Los valores propios de $A(U)$ son

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(H - \frac{1}{2}u^2 \right)}$$

es la velocidad del sonido.

Una base de vectores propios derechos está dada por

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix}.$$

La primera y tercera familias representan ondas acústicas, mientras que la segunda familia corresponde a una discontinuidad de contacto.

Al igual que para el sistema de aguas someras, el método de Roe reemplaza el problema de Riemann no lineal por un sistema lineal

$$U_t + \tilde{A}U_x = 0,$$

donde la matriz $\tilde{A}$ debe satisfacer

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L).$$

Para las ecuaciones de Euler, las medias de Roe se definen por

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$

y

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.$$

La velocidad del sonido de Roe es

$$\tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \right)}.$$

Por tanto, los valores propios de la matriz de Roe son

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u} + \tilde{c}.$$

Los vectores propios derechos asociados son

$$\tilde{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \\ \tilde{H} - \tilde{u}\tilde{c} \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \\ \tilde{H} + \tilde{u}\tilde{c} \end{pmatrix}.$$

Dado

$$\Delta U = U_R - U_L = \begin{pmatrix} \Delta\rho \\ \Delta m \\ \Delta E \end{pmatrix},$$

se busca la descomposición

$$\Delta U = \alpha_1 \tilde{r}_1 + \alpha_2 \tilde{r}_2 + \alpha_3 \tilde{r}_3.$$

Para calcular las intensidades de onda, definimos

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\tilde{c}^2} \left(\Delta E - \tilde{u} \Delta m + \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \Delta \rho \right),$$

y

$$\chi = \frac{\Delta m - \tilde{u} \Delta \rho}{\tilde{c}}.$$

Entonces

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta - \chi), \quad \alpha_2 = \Delta\rho - \beta, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(\beta + \chi).$$

Finalmente, el flujo de Roe para las ecuaciones de Euler se escribe como

$$F_{\text{Roe}}(U_L, U_R) = \frac{1}{2} (F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\tilde{\lambda}_k| \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Es decir,

$$F_{\text{Roe}} = \frac{1}{2} (F(U_L) + F(U_R)) - \frac{1}{2} \left[|\tilde{\lambda}_1| \alpha_1 \tilde{r}_1 + |\tilde{\lambda}_2| \alpha_2 \tilde{r}_2 + |\tilde{\lambda}_3| \alpha_3 \tilde{r}_3 \right].$$

Esta fórmula tiene la misma estructura que en el sistema de aguas someras. La diferencia es que ahora intervienen tres familias características: dos ondas acústicas y una onda de contacto.

4.4.8. Ventajas y limitaciones del solucionador de Roe

El solucionador de Roe constituye uno de los métodos aproximados de Riemann más utilizados en dinámica de fluidos computacional debido a su excelente compromiso entre precisión y costo computacional.

Entre sus principales ventajas destacan:

- La matriz de Roe satisface exactamente la condición de linealización

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L),$$

lo que garantiza una representación muy precisa del salto de flujo entre los estados izquierdo y derecho.

- Conserva la estructura característica del sistema original, ya que la solución aproximada se construye mediante la descomposición espectral de la matriz de Roe.
- Resuelve exactamente el problema de Riemann cuando el sistema es lineal.
- Captura con gran precisión choques, ondas de rarefacción y, en particular, discontinuidades de contacto, introduciendo una cantidad mínima de disipación numérica.
- La difusión numérica se adapta automáticamente a cada familia característica mediante los valores propios $|\tilde{\lambda}_k|$, produciendo soluciones considerablemente más nítidas que esquemas más difusivos como Lax–Friedrichs.
- El costo computacional es moderado y resulta mucho menor que el de un solucionador exacto de Riemann, razón por la cual continúa siendo uno de los métodos más utilizados en dinámica de gases y aguas someras.

No obstante, el método también presenta algunas limitaciones importantes.

- La linealización puede producir estados intermedios no físicos, particularmente densidades o profundidades negativas en presencia de choques muy intensos.
- Puede violar la condición de entropía en rarefacciones transónicas, produciendo choques no entrópicos. Este inconveniente se corrige habitualmente mediante la corrección de entropía de Harten presentada en la subsección anterior.
- Requiere el cálculo explícito de los valores propios y vectores propios de la matriz de Roe, lo que puede resultar laborioso para sistemas complejos con muchas ecuaciones.
- La construcción de una matriz de Roe no siempre es posible. Para algunos modelos no existe una parametrización que satisfaga exactamente la condición de Roe, mientras que para otros dicha construcción puede ser muy complicada.
- En problemas con fuertes gradientes o cercanos al vacío, el método puede perder robustez, siendo necesario recurrir a solucionadores más difusivos pero más estables.

Estas limitaciones motivaron el desarrollo de otros solucionadores aproximados de Riemann. Entre ellos, el método HLL constituye probablemente la alternativa más importante, ya que evita el cálculo de autovectores y requiere únicamente una estimación de las velocidades extremas de propagación. Aunque introduce una mayor difusión numérica, presenta una robustez superior en numerosos problemas prácticos y es ampliamente utilizado en simulaciones de flujos compresibles y aguas someras.

4.5. El solucionador HLL

El solucionador HLL (*Harten–Lax–van Leer*) fue propuesto por Harten, Lax y van Leer en 1983 como una alternativa más robusta al solucionador de Roe.

Mientras que Roe intenta aproximar la solución completa del problema de Riemann mediante una linealización del sistema y la utilización de todos sus autovalores y autovectores, el método HLL adopta una filosofía mucho más simple.

La idea fundamental consiste en aproximar el abanico completo de ondas por únicamente dos velocidades de propagación, correspondientes a la onda más rápida que viaja hacia la izquierda y a la onda más rápida que viaja hacia la derecha.

En consecuencia, el método evita el cálculo explícito de los autovectores del sistema y únicamente requiere una estimación de las velocidades extremas del problema de Riemann.

Esta simplificación hace del solucionador HLL un método particularmente robusto y ampliamente utilizado en dinámica de gases, aguas someras, magnetohidrodinámica y otros sistemas hiperbólicos complejos.

4.5.1. Aproximación del problema de Riemann

Recordemos que la solución exacta de un problema de Riemann para un sistema hiperbólico está formada, en general, por varias ondas elementales (choques, rarefacciones y discontinuidades de contacto) que dividen el plano (x, t) en diversos estados constantes.

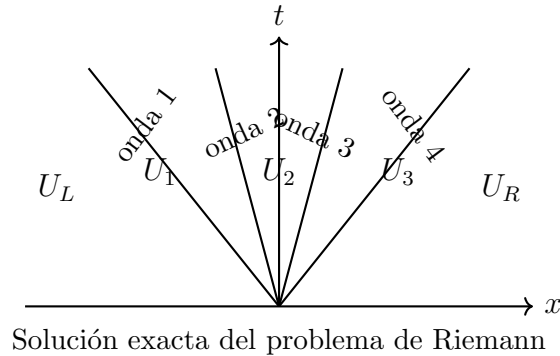


Figura 4.3: Estructura típica de una solución exacta de Riemann para un sistema hiperbólico: varias ondas separan distintos estados intermedios.

El método HLL reemplaza esta estructura por una aproximación mucho más simple, formada únicamente por dos ondas que se propagan con velocidades $S_L < 0$, $S_R > 0$, separando un único estado intermedio constante U^* . De este modo, la solución aproximada queda

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & \frac{x}{t} < S_L, \\ U^*, & S_L < \frac{x}{t} < S_R, \\ U_R, & \frac{x}{t} > S_R. \end{cases}$$

Obsérvese que todas las ondas intermedias del problema de Riemann original se reemplazan por un único estado constante.

4.5.2. Cálculo del estado intermedio

El estado intermedio U^* se obtiene imponiendo las condiciones de Rankine–Hugoniot sobre las dos ondas aproximadas. Sobre la onda izquierda,

$$F(U^*) - F(U_L) = S_L(U^* - U_L),$$

mientras que sobre la onda derecha,

$$F(U_R) - F(U^*) = S_R(U_R - U^*).$$

Eliminando el flujo desconocido $F(U^*)$, obtenemos

$$U^* = \frac{S_R U_R - S_L U_L - (F(U_R) - F(U_L))}{S_R - S_L}.$$

Este estado representa una aproximación promedio de todos los estados intermedios de la solución exacta.

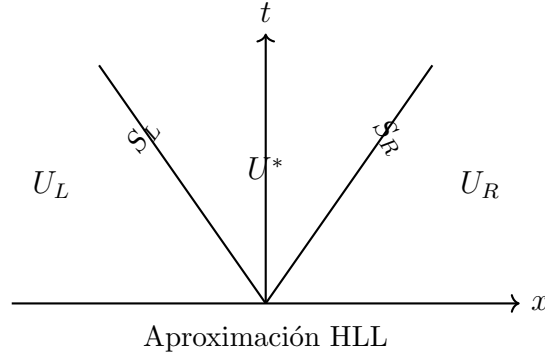


Figura 4.4: Aproximación HLL: todo el abanico de ondas intermedias se reemplaza por dos velocidades extremas S_L , S_R y un único estado intermedio U^* .

4.5.3. El flujo HLL

Aplicando nuevamente las condiciones de Rankine–Hugoniot, el flujo en la interfaz resulta

$$F_{HLL} = \frac{S_R F(U_L) - S_L F(U_R) + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L}.$$

Este flujo se utiliza cuando $S_L < 0 < S_R$. En los casos restantes,

$$F_{HLL} = \begin{cases} F(U_L), & S_L \geq 0, \\ F(U_R), & S_R \leq 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$F_{HLL} = \begin{cases} F(U_L), & S_L \geq 0, \\ \frac{S_R F(U_L) - S_L F(U_R) + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L}, & S_L < 0 < S_R, \\ F(U_R), & S_R \leq 0. \end{cases}$$

4.5.4. Estimación de las velocidades extremas

La precisión del método depende de la elección de las velocidades S_L y S_R . Una elección ampliamente utilizada consiste en tomar

$$S_L = \min(\lambda_1(U_L), \lambda_1(U_R)),$$

$$S_R = \max(\lambda_m(U_L), \lambda_m(U_R)),$$

donde λ_1 y λ_m representan el menor y el mayor valor propio del sistema, respectivamente. Para el sistema de aguas someras, por ejemplo,

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh},$$

de modo que

$$S_L = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u_R - \sqrt{gh_R}),$$

$$S_R = \max(u_L + \sqrt{gh_L}, u_R + \sqrt{gh_R}).$$

Observación 4.5.1. *El solucionador HLL únicamente conserva las velocidades extremas del abanico de ondas y elimina toda la estructura característica intermedia.*

Como consecuencia, introduce una mayor difusión numérica que el método de Roe y no reproduce exactamente las discontinuidades de contacto.

Esta limitación motivó posteriormente el desarrollo del solucionador HLLC (HLL-Contact), el cual incorpora una onda intermedia adicional con el objeto de recuperar las discontinuidades de contacto sin perder la robustez característica del método HLL.

4.6. El solucionador de Engquist–Osher

El flujo de Engquist–Osher, propuesto por Engquist y Osher en 1980, constituye una alternativa al flujo de Godunov que evita resolver explícitamente el problema de Riemann. La idea fundamental consiste en descomponer el flujo de acuerdo con el signo de las velocidades características, de manera análoga al esquema upwind para la ecuación de advección lineal.

Consideremos una ley de conservación escalar

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

y sea

$$a(u) = f'(u)$$

la velocidad característica. Se introducen las partes positiva y negativa de la velocidad

$$a^+(u) = \max(a(u), 0), \quad a^-(u) = \min(a(u), 0),$$

de modo que

$$a(u) = a^+(u) + a^-(u).$$

El flujo de Engquist–Osher se define entonces por

$$F_{EO}(u_L, u_R) = f(0) + \int_0^{u_L} a^+(s) ds + \int_0^{u_R} a^-(s) ds.$$

Obsérvese que este flujo depende únicamente del signo de las velocidades características y no requiere construir la solución del problema de Riemann.

Ejemplo: ecuación de Burgers. Para $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, se tiene $a(u) = u$. En consecuencia,

$$a^+(u) = \begin{cases} u, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0, \end{cases} \quad a^-(u) = \begin{cases} 0, & u \geq 0, \\ u, & u < 0. \end{cases}$$

Integrando, se obtiene la expresión explícita

$$F_{EO}(u_L, u_R) = \frac{1}{2}(\max(u_L, 0))^2 + \frac{1}{2}(\min(u_R, 0))^2.$$

Esta fórmula constituye una de las principales ventajas del método en el caso escalar.

Extensión a sistemas. Para un sistema hiperbólico

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

la situación es considerablemente más compleja. En efecto, el Jacobiano $A(U) = DF(U)$ depende del estado y debe descomponerse espectralmente,

$$A(U) = R(U)\Lambda(U)R(U)^{-1}.$$

Las partes positiva y negativa del Jacobiano se definen por

$$A^\pm(U) = R(U)\Lambda^\pm(U)R(U)^{-1},$$

donde $\Lambda^\pm = \text{diag}(\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_m^\pm)$. El flujo de Engquist–Osher generalizado se escribe entonces como

$$F_{EO}(U_L, U_R) = F(U_L) + \int_\Gamma A^-(U) dU,$$

donde Γ es una trayectoria que une U_L con U_R en el espacio de estados. En la práctica suele elegirse la trayectoria lineal

$$U(s) = U_L + s(U_R - U_L), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

evaluándose la integral mediante una cuadratura numérica. Por ejemplo, para el sistema de aguas someras, $U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$, el flujo de Engquist–Osher requiere integrar las matrices

$$A^\pm(U) = R(U)\Lambda^\pm(U)R(U)^{-1}$$

a lo largo de la trayectoria escogida. Esto hace que su implementación resulte más costosa que la del método de Roe o del método HLL.

Observación 4.6.1. *A diferencia del solucionador de Roe, el flujo de Engquist–Osher satisface de forma natural la condición de entropía y no requiere una corrección adicional como la propuesta por Harten. Sin embargo, la necesidad de evaluar una integral matricial hace que este método sea menos utilizado en sistemas de ecuaciones, especialmente cuando el número de variables es elevado.*

Comparación entre los principales solucionadores de Riemann

Método	Riemann exacto	Autovectores	Entropía	Contacto	Costo
Godunov	Sí	Sí	Sí	Excelente	Muy alto
Engquist–Osher	No	Sí	Sí	Buena	Alto
Roe	Aproximado	Sí	Requiere corrección	Excelente	Medio
HLL	No	No	Sí	Difusiva	Bajo

Cuadro 4.1: Comparación cualitativa entre algunos solucionadores aproximados de Riemann.

La Tabla 4.1 resume las principales características de los métodos descritos en este capítulo. Cada uno de estos métodos responde a una filosofía distinta. Godunov utiliza la solución exacta del problema de Riemann; Roe la aproxima mediante una linealización conservativa; Engquist–Osher evita resolver el problema de Riemann descomponiendo el flujo según el signo de las velocidades características; finalmente, HLL reemplaza todo el abanico de ondas por dos únicas velocidades extremas.

En la práctica, la elección del método depende del compromiso deseado entre precisión, robustez y costo computacional. Roe proporciona una excelente resolución de discontinuidades, mientras que HLL ofrece una mayor robustez en problemas con choques intensos o estados próximos al vacío. Por su parte, Engquist–Osher ocupa una posición intermedia, con muy buenas propiedades teóricas, aunque su extensión a sistemas resulta computacionalmente más costosa.

Ejercicios del Capítulo 4

Ejercicio 4.6.1. Deduzca el esquema de Godunov para la ecuación de advección lineal

$$u_t + au_x = 0.$$

Muestre que, si $a > 0$, se obtiene el esquema upwind hacia la izquierda, y si $a < 0$, el esquema upwind hacia la derecha.

Ejercicio 4.6.2. Considere la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0.$$

Deduzca el flujo de Godunov explícito distinguiendo los casos de choque y rarefacción.

Ejercicio 4.6.3. Para una ley escalar

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

verifique que el flujo de Godunov puede escribirse como

$$F_G(u_L, u_R) = \begin{cases} \min_{u_L \leq u \leq u_R} f(u), & u_L \leq u_R, \\ \max_{u_R \leq u \leq u_L} f(u), & u_L > u_R. \end{cases}$$

Comente su relación con la condición de entropía de Oleinik.

Ejercicio 4.6.4. Deduzca el flujo de Roe para el sistema lineal

$$U_t + AU_x = 0.$$

Muestre que

$$F_{\text{Roe}} = \frac{1}{2}(F_L + F_R) - \frac{1}{2}|A|(U_R - U_L).$$

Ejercicio 4.6.5. Para el sistema de aguas someras, demuestre que las medias de Roe

$$\tilde{h} = \frac{h_L + h_R}{2}, \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{h_L}u_L + \sqrt{h_R}u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}$$

satisfacen la condición

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L).$$

Ejercicio 4.6.6. Para las ecuaciones de Euler, calcule los valores propios y vectores propios del Jacobiano del flujo. Luego escriba el flujo de Roe en términos de

$$\tilde{u}, \quad \tilde{H}, \quad \tilde{c}.$$

Ejercicio 4.6.7. Explique por qué el solucionador de Roe puede violar la condición de entropía en rarefacciones transónicas. Implemente la corrección de Harten

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| \geq \delta, \\ \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta}, & |\lambda| < \delta. \end{cases}$$

Ejercicio 4.6.8. Deduzca el flujo HLL a partir de dos velocidades extremas S_L y S_R . Muestre que

$$F_{HLL} = \begin{cases} F(U_L), & S_L \geq 0, \\ \frac{S_R F(U_L) - S_L F(U_R) + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L}, & S_L < 0 < S_R, \\ F(U_R), & S_R \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 4.6.9. Compare numéricamente Roe y HLL para un problema de rotura de represa en aguas someras. Analice cuál método captura mejor la discontinuidad y cuál resulta más difusivo.

Ejercicio 4.6.10. Para Burgers, deduzca el flujo de Engquist–Osher

$$F_{EO}(u_L, u_R) = \frac{1}{2}(\max(u_L, 0))^2 + \frac{1}{2}(\min(u_R, 0))^2.$$

Compare este flujo con Godunov.

Ejercicio 4.6.11. Construya una tabla comparativa entre Godunov, Roe, HLL y Engquist–Osher indicando: costo computacional, necesidad de autovectores, robustez, difusión numérica y tratamiento de discontinuidades de contacto.

Bibliografía

- [1] B. Engquist and S. Osher. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Mathematics of Computation*, 34:45–75, 1980.
- [2] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer, 1996.
- [3] S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 47:271–306, 1959.
- [4] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.
- [5] A. Harten, P. D. Lax and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25:35–61, 1983.
- [6] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43:357–372, 1981.
- [8] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3rd edition, 2009.

Capítulo 5

Métodos bien balanceados

En los capítulos anteriores hemos estudiado leyes de conservación hiperbólicas homogéneas de la forma

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

desarrollando tanto la teoría del problema de Riemann como algunos de los principales métodos numéricos para su aproximación, entre ellos los esquemas de Godunov, Roe, HLL y Engquist–Osher.

Sin embargo, una gran cantidad de modelos de interés en mecánica de fluidos, hidráulica, geofísica y transporte de sedimentos incluyen además términos fuente, dando lugar a sistemas de la forma

$$U_t + F(U)_x = S(U, x),$$

donde el término fuente representa la acción de fuerzas externas, interacciones con el medio o variaciones geométricas del dominio.

Entre los ejemplos más importantes se encuentran:

- las ecuaciones de aguas someras con batimetría;
- las ecuaciones de Euler bajo la acción de la gravedad;
- los modelos de Saint–Venant para flujos en canales con pendiente;
- los modelos de aguas someras acoplados con transporte de sedimentos (Shallow Water–Exner);
- diversos modelos de flujo multifásico y de medios porosos.

Desde el punto de vista numérico, la presencia del término fuente introduce una dificultad completamente nueva. Mientras que en las leyes de conservación homogéneas toda la dinámica está gobernada únicamente por los flujos numéricos, en los sistemas con término fuente existe un delicado equilibrio entre el flujo conservativo y el término fuente.

En muchos problemas físicos existen soluciones estacionarias no triviales que satisfacen

$$F(U)_x = S(U, x).$$

En estas soluciones el flujo y el término fuente se compensan exactamente, aunque ninguno de ellos sea nulo por separado.

Desafortunadamente, una discretización independiente del flujo y del término fuente suele destruir este equilibrio. Como consecuencia, un esquema clásico puede generar velocidades espurias, ondas artificiales u oscilaciones numéricas incluso cuando la solución exacta permanece estrictamente estacionaria.

Esta observación motivó el desarrollo de los llamados *métodos bien balanceados* (*well-balanced schemes*), cuyo objetivo consiste en preservar exactamente determinados estados estacionarios del sistema continuo.

En este capítulo estudiaremos estas ideas en el contexto del sistema de aguas someras con relieve del fondo, uno de los modelos paradigmáticos de las leyes de conservación con términos fuente. A partir de este ejemplo se introducirán los conceptos fundamentales que sirven de base para la construcción de métodos bien balanceados modernos.

5.1. El sistema de aguas someras con batimetría

En los capítulos anteriores hemos estudiado el sistema clásico de aguas someras suponiendo un fondo horizontal. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones hidráulicas y geofísicas el fondo del río, lago o mar presenta variaciones espaciales que influyen de manera significativa sobre el flujo.

Sea $z(x)$ la elevación del fondo, medida respecto de un nivel de referencia fijo. La profundidad del agua se denota por $h(x, t)$, mientras que la elevación de la superficie libre viene dada por

$$\eta(x, t) = h(x, t) + z(x).$$

La variable conservativa continúa siendo

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad q = hu,$$

donde u representa la velocidad media del flujo.

Las ecuaciones de aguas someras con batimetría se escriben como

$$\begin{aligned} h_t + q_x &= 0, \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x &= -gh z_x. \end{aligned}$$

En forma vectorial,

$$U_t + F(U)_x = S(U, x),$$

con

$$F(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

y

$$S(U, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh z_x \end{pmatrix}.$$

El término fuente representa la fuerza gravitacional inducida por la pendiente del fondo. Cuando el fondo es horizontal, $z_x = 0$, el sistema se reduce al modelo homogéneo estudiado en los capítulos anteriores. Es importante observar que el término fuente depende explícitamente de la geometría del dominio. En consecuencia, el equilibrio entre el flujo conservativo y la fuente desempeña un papel fundamental en la dinámica del sistema y debe preservarse cuidadosamente en la discretización numérica.

5.2. Estados estacionarios y equilibrio de lago en reposo

Una diferencia fundamental entre las leyes de conservación homogéneas y los sistemas con término fuente es la existencia de soluciones estacionarias no triviales.

En efecto, un estado estacionario verifica $U_t = 0$, por lo que el sistema de aguas someras se reduce a $q_x = 0$, y

$$\left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = -gh z_x.$$

En general, estas ecuaciones admiten una gran variedad de soluciones estacionarias. Sin embargo, el equilibrio más importante desde el punto de vista físico corresponde al denominado *lago en reposo*. En este caso, $q = 0$, es decir, el agua permanece completamente inmóvil. La ecuación del momento se reduce entonces a

$$\left(\frac{1}{2}gh^2 \right)_x = -gh z_x.$$

Derivando,

$$gh h_x = -gh z_x.$$

Suponiendo $h > 0$, obtenemos $h_x = -z_x$, o, equivalentemente,

$$(h + z)_x = 0.$$

Por integración,

$$\boxed{h(x) + z(x) = \eta_0,}$$

donde η_0 es una constante. En consecuencia, el equilibrio de lago en reposo queda caracterizado por

$$\boxed{q = 0, \quad h + z = \text{constante.}}$$

Este resultado posee una interpretación física inmediata: aunque el fondo sea irregular, la superficie libre permanece completamente horizontal y el fluido se encuentra en equilibrio hidrostático. La Figura 5.1 ilustra esta situación.

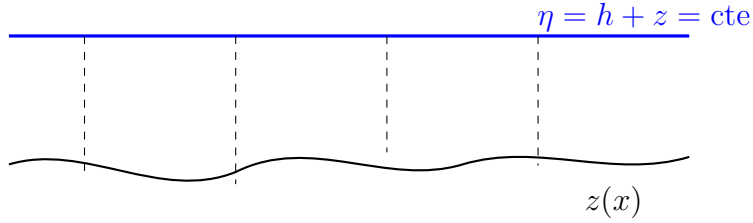


Figura 5.1: Equilibrio de lago en reposo. Aunque la batimetría es irregular, la superficie libre permanece horizontal.

Este equilibrio constituye la solución estacionaria más importante del sistema de aguas someras. Idealmente, un método numérico debería preservarlo de forma exacta. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, la mayoría de los esquemas clásicos destruyen este equilibrio debido a una discretización inconsistente entre el flujo y el término fuente. Esta observación motiva el desarrollo de los llamados esquemas *well-balanced*.

5.3. ¿Por qué falla un esquema de Godunov clásico?

A primera vista podría parecer natural discretizar el sistema de aguas someras con batimetría utilizando exactamente el mismo esquema de volúmenes finitos estudiado en el capítulo anterior. En efecto, escribiendo

$$U_t + F(U)_x = S(U, x),$$

el esquema de Godunov toma la forma

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right) + \Delta t S_i,$$

donde $F_{i+\frac{1}{2}}$ es un flujo numérico obtenido mediante la resolución de un problema de Riemann (exacto o aproximado), mientras que S_i es una aproximación del término fuente en la celda i . Sin embargo, esta discretización presenta un inconveniente fundamental: el flujo y el término fuente se aproximan de manera independiente, sin imponer que ambos permanezcan en equilibrio. Para comprender este fenómeno, consideremos el estado estacionario de lago en reposo,

$$q = 0, \quad h + z = \eta_0,$$

donde la superficie libre permanece completamente horizontal. En el problema continuo, este estado verifica exactamente

$$\left(\frac{1}{2} g h^2 \right)_x = -g h z_x,$$

es decir, el gradiente de presión hidrostática se compensa exactamente con la fuerza gravitacional inducida por la pendiente del fondo. Supongamos ahora que el fondo se discretiza mediante valores $z_i = z(x_i)$, mientras que la profundidad satisface

$$h_i + z_i = \eta_0.$$

Aunque el equilibrio continuo se verifica exactamente, los estados vecinos

$$U_i = \begin{pmatrix} h_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{i+1} = \begin{pmatrix} h_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

no coinciden debido a las variaciones de la batimetría. Como consecuencia, el solucionador de Riemann interpreta la diferencia entre U_i y U_{i+1} como una discontinuidad hidráulica y genera un flujo no nulo,

$$F_{i+\frac{1}{2}} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, el término fuente suele aproximarse mediante una fórmula independiente, por ejemplo,

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_i \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2\Delta x} \end{pmatrix},$$

la cual, en general, no compensa exactamente la diferencia entre los flujos numéricos. En consecuencia,

$$-\frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}) + S_i \neq 0,$$

aun cuando la solución exacta permanece perfectamente estacionaria. El resultado es la aparición de pequeñas velocidades artificiales, $q_i^{n+1} \neq 0$, que no tienen ningún significado físico y que pueden propagarse y amplificarse durante la simulación. Este fenómeno recibe el nombre de *desequilibrio numérico* (*numerical imbalance*) y constituye una de las principales fuentes de error en la simulación de flujos poco energéticos sobre fondos irregulares.

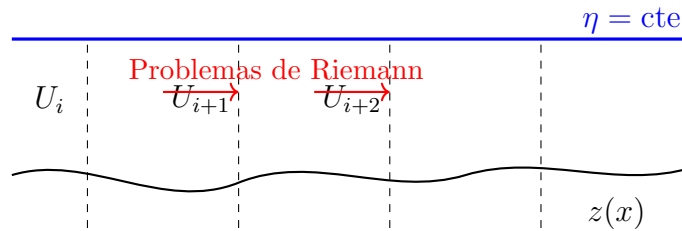


Figura 5.2: Aunque la superficie libre permanece horizontal, un solucionador de Riemann clásico interpreta las diferencias entre estados vecinos como ondas hidráulicas y genera flujos espurios.

Esta observación conduce naturalmente al concepto de esquema *well-balanced*. La idea consiste en modificar la construcción del flujo numérico de manera que, cuando la solución corresponda a un equilibrio estacionario como el lago en reposo,

$$q = 0, \quad h + z = \text{constante},$$

el esquema preserve exactamente dicho equilibrio, es decir,

$$U_i^{n+1} = U_i^n,$$

hasta precisión de máquina. En la siguiente sección estudiaremos uno de los métodos más exitosos para lograr este objetivo: la reconstrucción hidrostática propuesta por Audusse, Bouchut, Bristeau, Klein y Perthame (2004).

Proposición 5.3.1 (Necesidad de los esquemas well-balanced). *Considérese un sistema hiperbólico con término fuente*

$$U_t + F(U)_x = S(U, x),$$

y un esquema de volúmenes finitos de la forma

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right) + \Delta t S_i.$$

Si el flujo numérico $F_{i+\frac{1}{2}}$ y la discretización del término fuente S_i se construyen de manera independiente, entonces, en general, el esquema no preserva exactamente los estados estacionarios del problema continuo. En particular, un estado de equilibrio puede evolucionar numéricamente generando velocidades espurias.

En consecuencia, para preservar exactamente un equilibrio estacionario es necesario construir el flujo numérico y la discretización del término fuente de manera compatible.

Demostración. Sea $U(x)$ una solución estacionaria del sistema continuo. Entonces

$$F(U)_x = S(U, x).$$

Al discretizar el flujo y el término fuente de forma independiente, no existe, en general, ninguna razón para que se verifique la identidad discreta

$$-\frac{1}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right) + S_i = 0.$$

Como consecuencia,

$$U_i^{n+1} \neq U_i^n,$$

aun cuando la solución exacta permanezca estacionaria. En otras palabras, el esquema introduce una evolución artificial del equilibrio, produciendo errores que no tienen origen en el modelo físico sino en la discretización.

La única forma de evitar este fenómeno consiste en diseñar simultáneamente el flujo numérico y la aproximación del término fuente, de modo que ambos se compensen exactamente sobre los estados estacionarios que se desean preservar. Esta es precisamente la idea fundamental de los métodos *well-balanced*. $\square$

5.4. La idea de los métodos well-balanced

La proposición anterior muestra que un esquema clásico de volúmenes finitos no preserva, en general, los estados estacionarios del sistema continuo. El problema no reside en el solucionador de Riemann utilizado, sino en el hecho de que el flujo numérico y el término fuente son discretizados de manera independiente.

La idea fundamental de los métodos *well-balanced* consiste en construir simultáneamente ambas discretizaciones, de modo que se preserve exactamente un determinado estado estacionario del sistema.

En el caso del sistema de aguas someras con batimetría, el equilibrio de mayor interés físico es el denominado lago en reposo,

$$q = 0, \quad h + z = \eta_0,$$

donde la superficie libre permanece horizontal.

Definición 5.4.1. *Un esquema numérico para el sistema de aguas someras se dice well-balanced (o bien balanceado) si preserva exactamente el equilibrio de lago en reposo. Es decir, si el dato inicial verifica*

$$q_i^0 = 0, \quad h_i^0 + z_i = \eta_0,$$

entonces el esquema satisface

$$q_i^n = 0, \quad h_i^n + z_i = \eta_0,$$

para todo tiempo discreto t^n , salvo errores de redondeo.

Desde un punto de vista físico, esta propiedad significa que un lago en reposo permanece exactamente en reposo durante toda la simulación, independientemente de las variaciones de la batimetría.

Esta propiedad resulta particularmente importante cuando se desean resolver pequeñas perturbaciones alrededor de un equilibrio. En ausencia de un esquema well-balanced, los errores numéricos asociados a la discretización del término fuente pueden ser mucho mayores que la propia perturbación física, produciendo oscilaciones espurias y velocidades artificiales.

La construcción de un esquema bien balanceado puede abordarse de distintas formas. Una de las técnicas más exitosas, sencilla de implementar y compatible con la mayoría de los solucionadores de Riemann consiste en la denominada *reconstrucción hidrostática* (*hydrostatic reconstruction*), propuesta por Audusse, Bouchut, Bristeau, Klein y Perthame (2004).

5.5. Reconstrucción hidrostática de Audusse et al.

La idea de la reconstrucción hidrostática consiste en modificar los estados izquierdo y derecho antes de resolver el problema de Riemann en cada interfaz. Considérese la interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$, que separa las celdas i e $i+1$. En lugar de utilizar directamente los estados

$$U_L = \begin{pmatrix} h_i \\ q_i \end{pmatrix}, \quad U_R = \begin{pmatrix} h_{i+1} \\ q_{i+1} \end{pmatrix},$$

se reconstruyen primero las alturas de agua. Sea

$$z_{i+\frac{1}{2}} = \max(z_i, z_{i+1})$$

la mayor elevación del fondo en ambos lados de la interfaz. Se definen entonces las profundidades reconstruidas

$$h_{i+\frac{1}{2},L} = \max\left(0, h_i + z_i - z_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

y

$$h_{i+\frac{1}{2},R} = \max\left(0, h_{i+1} + z_{i+1} - z_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

Obsérvese que la reconstrucción no modifica la elevación de la superficie libre $h + z$, sino únicamente la profundidad utilizada por el solucionador de Riemann en la interfaz. Ambas profundidades se miden respecto del nivel del fondo más elevado,

$$z_{i+\frac{1}{2}} = \max(z_i, z_{i+1}),$$

de modo que la porción de agua situada por debajo de dicho nivel no participa en el intercambio de momento entre ambas celdas. Esta operación puede interpretarse como una reconstrucción de la columna hidrostática efectiva en la interfaz. Además, el operador $\max(0, \cdot)$ garantiza automáticamente

$$h_{i+\frac{1}{2},L} \geq 0, \quad h_{i+\frac{1}{2},R} \geq 0,$$

incluso en presencia de zonas secas. Los estados reconstruidos quedan finalmente

$$U_{i+\frac{1}{2},L}^* = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2},L} \\ h_{i+\frac{1}{2},L} u_i \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad U_{i+\frac{1}{2},R}^* = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2},R} \\ h_{i+\frac{1}{2},R} u_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Estos nuevos estados son los que se utilizan como datos izquierdo y derecho del problema de Riemann. Una vez resuelto el problema de Riemann reconstruido, se obtiene el flujo

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \mathcal{F}\left(U_{i+\frac{1}{2},L}^*, U_{i+\frac{1}{2},R}^*\right),$$

donde $\mathcal{F}$ representa cualquier solucionador aproximado de Riemann consistente (Godunov, Roe, HLL, HLLC, etc.). Sin embargo, este flujo ya no contiene exactamente la contribución del término de presión hidrostática, pues ha sido calculado utilizando las profundidades reconstruidas $h_{i+\frac{1}{2},L}$ y $h_{i+\frac{1}{2},R}$ en lugar de las profundidades originales. Es necesario, por tanto, introducir una corrección que restituya la parte del flujo hidrostático eliminada durante la reconstrucción. Para ello se definen los correctores

$$S_{i+\frac{1}{2},L} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} (h_i^2 - h_{i+\frac{1}{2},L}^2) \end{pmatrix},$$

y

$$S_{i+\frac{1}{2},R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} (h_{i+1}^2 - h_{i+\frac{1}{2},R}^2) \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que estos términos no constituyen una discretización independiente del término fuente $-ghz_x$. Por el contrario, representan la diferencia entre el flujo hidrostático original y el flujo construido con las profundidades reconstruidas. En este sentido, el método discretiza de manera compatible el flujo conservativo y el término fuente, preservando el equilibrio hidrostático del sistema continuo.

A partir de estos correctores se construyen dos flujos corregidos asociados a cada interfaz,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^L = F_{i+\frac{1}{2}}^* + S_{i+\frac{1}{2},L},$$

y

$$F_{i+\frac{1}{2}}^R = F_{i+\frac{1}{2}}^* + S_{i+\frac{1}{2},R}.$$

El primero corresponde al flujo utilizado por la celda situada a la izquierda de la interfaz, mientras que el segundo corresponde al flujo utilizado por la celda situada a la derecha.

Finalmente, el esquema de volúmenes finitos puede escribirse como

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^L - F_{i-\frac{1}{2}}^R).$$

Esta formulación pone de manifiesto que la reconstrucción hidrostática no modifica el solucionador de Riemann utilizado, sino únicamente los estados que se le suministran y la forma en que se corrige el flujo hidrostático en cada interfaz.

Teorema 5.5.1 (Propiedad well-balanced de la reconstrucción hidrostática). *Considérese el esquema de volúmenes finitos basado en la reconstrucción hidrostática de Audusse et al. Si el dato inicial corresponde a un estado de lago en reposo,*

$$q_i = 0, \quad h_i + z_i = \eta_0,$$

para toda celda i , entonces el esquema preserva exactamente dicho equilibrio. Es decir,

$$U_i^{n+1} = U_i^n,$$

para todo i y todo paso temporal n . Por consiguiente, el esquema es well-balanced.

Demostración. Supongamos que

$$q_i = 0, \quad h_i + z_i = \eta_0,$$

para toda celda i . Entonces

$$h_i = \eta_0 - z_i, \quad h_{i+1} = \eta_0 - z_{i+1}.$$

Sea

$$z_{i+\frac{1}{2}} = \max(z_i, z_{i+1}).$$

Por definición de la reconstrucción hidrostática,

$$h_{i+\frac{1}{2},L} = \max\left(0, \eta_0 - z_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

y

$$h_{i+\frac{1}{2},R} = \max\left(0, \eta_0 - z_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

Por tanto,

$$h_{i+\frac{1}{2},L} = h_{i+\frac{1}{2},R}.$$

Denotemos este valor común por

$$h_{i+\frac{1}{2}}^*.$$

Como además $q_i = q_{i+1} = 0$, se tiene

$$U_{i+\frac{1}{2},L}^* = U_{i+\frac{1}{2},R}^* = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}}^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego el problema de Riemann reconstruido es trivial. Por consistencia del solucionador de Riemann,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \mathcal{F}\left(U_{i+\frac{1}{2},L}^*, U_{i+\frac{1}{2},R}^*\right) = F\left(\begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}}^* \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

es decir,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left(h_{i+\frac{1}{2}}^*\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el flujo corregido utilizado por la celda i en la interfaz derecha $x_{i+\frac{1}{2}}$. Por definición,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^L = F_{i+\frac{1}{2}}^* + S_{i+\frac{1}{2},L}.$$

Usando la expresión del corrector,

$$S_{i+\frac{1}{2},L} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left(h_i^2 - \left(h_{i+\frac{1}{2}}^*\right)^2\right) \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$F_{i+\frac{1}{2}}^L = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left(h_{i+\frac{1}{2}}^*\right)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left(h_i^2 - \left(h_{i+\frac{1}{2}}^*\right)^2\right) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{F_{i+\frac{1}{2}}^L = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_i^2 \end{pmatrix}}.$$

De manera análoga, en la interfaz izquierda $x_{i-\frac{1}{2}}$, el flujo corregido que utiliza la celda i es

$$F_{i-\frac{1}{2}}^R = F_{i-\frac{1}{2}}^* + S_{i-\frac{1}{2},R}.$$

Repitiendo el mismo cálculo se obtiene

$$F_{i-\frac{1}{2}}^R = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}h_i^2 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^L - F_{i-\frac{1}{2}}^R = 0.$$

La actualización del esquema,

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^L - F_{i-\frac{1}{2}}^R \right),$$

queda entonces reducida a

$$U_i^{n+1} = U_i^n.$$

Esto demuestra que el equilibrio de lago en reposo se preserva exactamente. $\square$

Observación 5.5.1 (Origen de la idea well-balanced). *La reconstrucción hidrostática de Audusse et al. debe entenderse dentro de una línea de desarrollo más amplia sobre el tratamiento numérico de términos fuente en leyes de balance. Una idea central, ya presente en los trabajos de Greenberg y LeRoux, consiste en no discretizar el flujo y la fuente como objetos independientes, sino en construir una aproximación compatible que preserve ciertos estados estacionarios del sistema.*

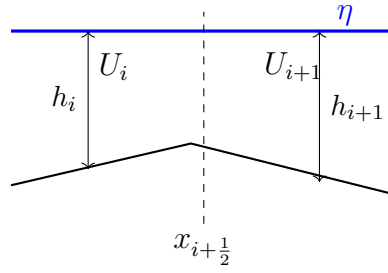
En el caso de las ecuaciones de aguas someras con batimetría, esta filosofía puede interpretarse como una manera de incorporar el salto del fondo dentro del problema de Riemann local. Dicho de otro modo, la topografía no se trata solamente como una fuente externa agregada al final del paso temporal, sino como parte de la estructura local del flujo a través de cada interfaz.

Desde esta perspectiva, la reconstrucción hidrostática de Audusse et al. ofrece una formulación especialmente simple: en lugar de modificar el solucionador de Riemann, se modifican los estados izquierdo y derecho que se entregan al solver, y se corrige de manera compatible el flujo hidrostático. Esto permite preservar el equilibrio de lago en reposo y, al mismo tiempo, mantener la positividad de la profundidad.

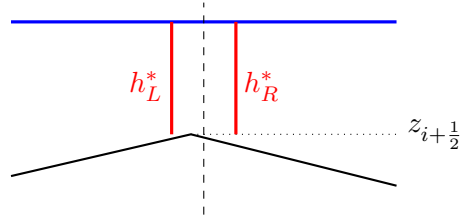
Observación 5.5.2 (Sistema aumentado). *Otra forma de justificar los métodos well-balanced consiste en introducir la batimetría como una variable adicional del sistema,*

$$z_t = 0.$$

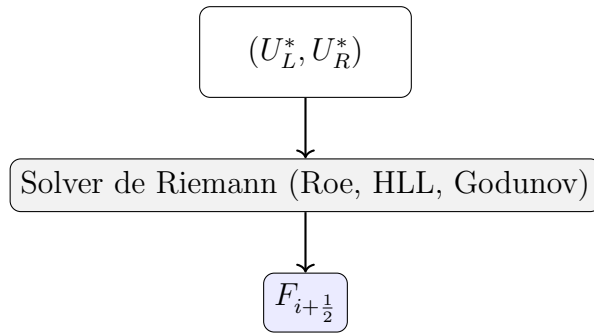
De este modo, el fondo se interpreta como una componente estacionaria de la solución. La discontinuidad de z en una interfaz aparece entonces como una onda de velocidad nula, y el equilibrio hidrostático puede ser entendido como una interacción exacta entre las ondas

(a) Estados originales

Los estados originales se entregan directamente al solucionador de Riemann.

(b) Reconstrucción

Se reemplazan las profundidades originales por profundidades reconstruidas respecto del fondo más elevado.

(c) Problema de Riemann

El solucionador de Riemann no se modifica. Únicamente cambian los estados de entrada.

Figura 5.3: Reconstrucción hidrostática de Audusse et al. (a) Los estados originales no satisfacen el equilibrio hidrostático en la interfaz. (b) Se reconstruyen las profundidades utilizando $z_{i+\frac{1}{2}} = \max(z_i, z_{i+1})$, preservando la superficie libre y la positividad del agua. (c) El solucionador de Riemann (Godunov, Roe, HLL, etc.) se aplica sin modificación alguna a los estados reconstruidos, obteniéndose un flujo numérico bien balanceado.

hidráulicas y esta onda estacionaria. Esta formulación, desarrollada sistemáticamente en el enfoque de Bouchut, proporciona un marco general para construir esquemas compatibles con estados estacionarios.

Observación 5.5.3 (Condición CFL). *La incorporación de la batimetría no modifica la condición CFL del esquema. En efecto, las velocidades características del sistema vienen determinadas por los valores propios del Jacobiano del flujo,*

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh},$$

los cuales son independientes del término fuente $-ghz_x$. Por consiguiente, tanto un esquema clásico como un esquema well-balanced utilizan la misma restricción temporal,

$$\Delta t \leq \text{CFL} \frac{\Delta x}{\max_i \left(|u_i| + \sqrt{gh_i} \right)}.$$

La ventaja de la reconstrucción hidrostática no consiste en permitir pasos temporales mayores, sino en preservar exactamente los estados de equilibrio del sistema. En consecuencia, el método evita la generación de velocidades espurias y mejora significativamente la calidad de la aproximación, sin alterar la condición de estabilidad CFL.

5.6. Ejemplos numéricos

En esta sección presentamos dos experimentos numéricos clásicos que ilustran las principales ventajas de los métodos well-balanced para el sistema de aguas someras con batimetría.

Aunque los resultados se muestran de manera cualitativa, ambos ejemplos constituyen pruebas estándar utilizadas en la literatura para validar nuevos esquemas numéricos.

5.6.1. Ejemplo 1: lago en reposo

Consideremos un dominio unidimensional

$$0 \leq x \leq L,$$

con una batimetría irregular $z(x)$, por ejemplo

$$z(x) = \left\{ 0.2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right), \quad 0 \leq x \leq L, \right.$$

y condiciones iniciales

$$q(x, 0) = 0,$$

$$h(x, 0) + z(x) = 1.$$

La solución exacta permanece estacionaria para todo tiempo,

$$q(x, t) = 0, \quad h(x, t) + z(x) = 1.$$

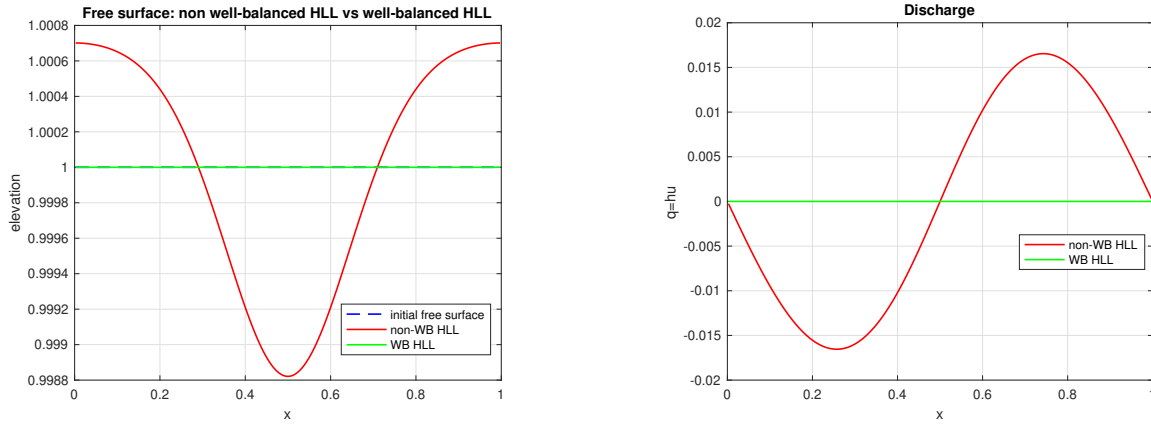
Si se utiliza un esquema clásico de Godunov junto con una discretización independiente del término fuente, aparecen pequeñas velocidades numéricas espurias que rompen el equilibrio hidrostático.

Por el contrario, un esquema well-balanced preserva exactamente el estado estacionario hasta precisión de máquina,

$$q_i^n = 0, \quad h_i^n + z_i = 1,$$

para todo n .

Este experimento constituye la prueba básica que debe superar cualquier método well-balanced.



(a) Superficie libre.

(b) Caudal.

Figura 5.4: Ejemplo 1: lago en reposo sobre una batimetría irregular. La solución exacta satisface $q = 0$ y $h + z = \eta_0$ para todo tiempo. El esquema clásico no bien balanceado genera perturbaciones espurias tanto en la superficie libre como en el caudal, mientras que la reconstrucción hidrostática preserva el equilibrio hasta precisión de máquina.

5.6.2. Ejemplo 2: pequeña perturbación sobre un lago en reposo

Consideremos nuevamente un lago inicialmente en equilibrio,

$$q(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) + z(x) = 1,$$

al cual se añade una pequeña perturbación gaussiana

$$h(x, 0) = 1 - z(x) + 10^{-3} \exp\left(-\frac{(x - L/2)^2}{\sigma^2}\right).$$

La amplitud de la perturbación es varios órdenes de magnitud menor que la profundidad del agua.

En un esquema no well-balanced, los errores producidos por la discretización del término fuente pueden ser mayores que la propia perturbación física, enmascarando completamente la propagación de las ondas.

En cambio, un esquema bien balanceado conserva exactamente el equilibrio de fondo y únicamente propaga la pequeña perturbación introducida.

Este ejemplo pone de manifiesto una de las principales aplicaciones de los métodos well-balanced: la simulación de ondas de pequeña amplitud sobre estados casi estacionarios.

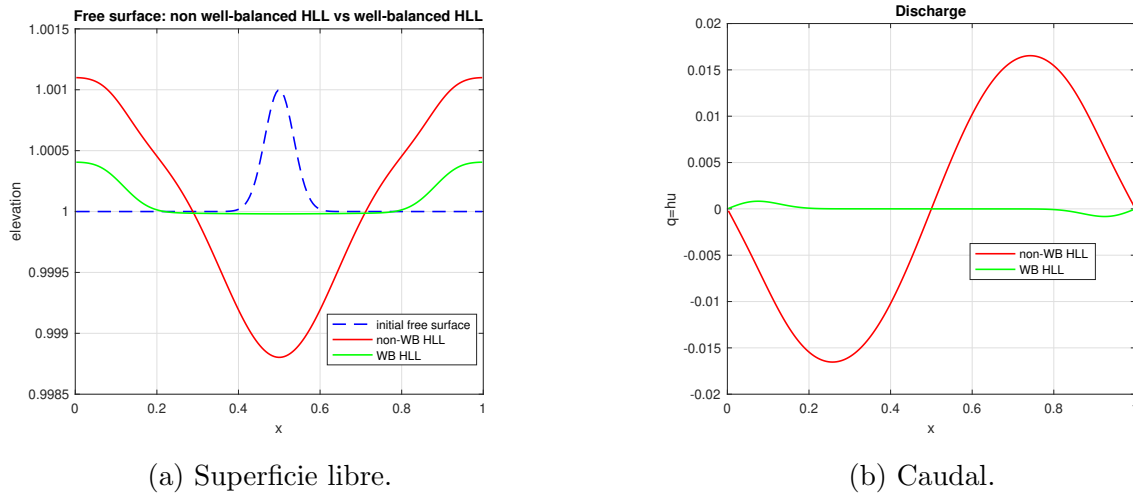


Figura 5.5: Ejemplo 2: propagación de una pequeña perturbación sobre un lago inicialmente en reposo. La amplitud de la perturbación es varios órdenes de magnitud menor que la profundidad media del agua. El esquema clásico introduce errores espurios debidos al desacoplamiento entre el flujo conservativo y el término fuente, los cuales alteran la propagación de la perturbación. En contraste, el esquema well-balanced preserva exactamente el equilibrio hidrostático de fondo y resuelve únicamente la dinámica asociada a la perturbación física, permitiendo capturar con mayor precisión ondas de pequeña amplitud sobre estados casi estacionarios.

Observación 5.6.1. *En aplicaciones reales, como la propagación de tsunamis, las inundaciones fluviales o las marejadas costeras, la amplitud de las perturbaciones suele ser muy pequeña en comparación con la profundidad media del agua. En estas situaciones, la utilización de esquemas well-balanced resulta esencial para obtener resultados físicamente fiables.*

5.7. Comentarios finales y bibliografía

Los métodos well-balanced constituyen uno de los desarrollos más importantes de las últimas décadas en el análisis numérico de leyes de conservación con términos fuente.

Su idea fundamental consiste en preservar exactamente determinados estados estacionarios del sistema continuo mediante una discretización compatible del flujo conservativo y del término fuente.

En el caso del sistema de aguas someras, el equilibrio de lago en reposo representa el ejemplo paradigmático. La reconstrucción hidrostática propuesta por Audusse et al. (2004) permite incorporar esta propiedad utilizando prácticamente cualquier solucionador aproximado de Riemann, como Roe, HLL o Godunov.

Actualmente existen numerosas extensiones de esta filosofía a problemas más complejos, entre ellos los modelos de Saint–Venant para cauces con pendiente, los sistemas de aguas someras multicapa, las ecuaciones de Euler con gravedad, los modelos acoplados Shallow Water–Exner y diversos sistemas de transporte en medios porosos.

El desarrollo de métodos well-balanced continúa siendo un área activa de investigación, especialmente en el contexto de esquemas de alto orden, métodos discontinuous Galerkin y técnicas de reconstrucción no oscilatoria.

Ejercicios del Capítulo 5

Ejercicio 5.7.1 (El equilibrio de lago en reposo). *Considérese el sistema de aguas someras con batimetría*

$$\begin{aligned} h_t + q_x &= 0, \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x &= -gh z_x. \end{aligned}$$

1. Demuestre que el estado

$$q = 0, \quad h + z = \eta_0,$$

es una solución estacionaria del sistema.

2. Interprete físicamente el significado de esta solución.
3. Considere una batimetría cualquiera $z(x)$. Dibuje esquemáticamente el perfil del fondo y la superficie libre correspondiente al equilibrio de lago en reposo.
4. Explique por qué un esquema de volúmenes finitos que discretiza independientemente el flujo y el término fuente no preserva, en general, este equilibrio.

Ejercicio 5.7.2 (Reconstrucción hidrostática). *Considérese una interfaz $x_{i+\frac{1}{2}}$ entre dos celdas consecutivas, con datos*

$$(h_i, u_i, z_i), \quad (h_{i+1}, u_{i+1}, z_{i+1}).$$

1. Demuestre que la reconstrucción hidrostática de Audusse et al.

$$z_{i+\frac{1}{2}} = \max(z_i, z_{i+1}),$$

$$h_{i+\frac{1}{2},L} = \max\left(0, h_i + z_i - z_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

$$h_{i+\frac{1}{2},R} = \max\left(0, h_{i+1} + z_{i+1} - z_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

garantiza que

$$h_{i+\frac{1}{2},L} \geq 0, \quad h_{i+\frac{1}{2},R} \geq 0.$$

2. *Muestre que, si inicialmente*

$$q = 0, \quad h + z = \eta_0,$$

los estados reconstruidos satisfacen

$$h_{i+\frac{1}{2},L} = h_{i+\frac{1}{2},R}.$$

Explique por qué esta propiedad permite preservar exactamente el equilibrio de lago en reposo.

3. *Discuta cuál es la principal ventaja de este procedimiento frente a una discretización clásica del término fuente.*
4. *Explique por qué la reconstrucción hidrostática permite utilizar sin modificaciones los solucionadores de Riemann estudiados en el capítulo anterior (Godunov, Roe, HLL, etc.). ¿Qué parte del algoritmo cambia y cuál permanece inalterada?*

Bibliografía

- [1] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6):2050–2065, 2004.
- [2] A. Bermúdez and M. E. Vázquez-Cendón. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers & Fluids*, 23:1049–1071, 1994.
- [3] F. Bouchut. *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws and Well-Balanced Schemes for Sources*. Birkhäuser, 2004.
- [4] M. J. Castro, J. A. García-Rodríguez, J. M. González-Vida, J. Macías, C. Parés and M. E. Vázquez-Cendón. Numerical treatment of source terms in shallow water equations. *Computers & Fluids*, 35:1073–1084, 2006.
- [5] A. Chinnayya, A.-Y. LeRoux and N. Seguin. A well-balanced numerical scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography: the resonance phenomenon. *International Journal on Finite Volumes*, 1(1), 2004.
- [6] J. M. Greenberg and A.-Y. Le Roux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33:1–16, 1996.
- [7] R. J. LeVeque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods. *Journal of Computational Physics*, 146:346–365, 1998.
- [8] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] E. F. Toro. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley, 2001.

Apéndice A

Implementación en Matlab del esquema well-balanced

Con el objeto de ilustrar los conceptos desarrollados en el Capítulo 5, presentamos a continuación una implementación sencilla del método well-balanced basado en la reconstrucción hidrostática de Audusse *et al.*.

El código ha sido escrito con fines exclusivamente docentes. Por esta razón, se trata deliberadamente de un esquema de primer orden en el espacio y en el tiempo, utiliza condiciones de borde periódicas y evita optimizaciones de programación que podrían dificultar su comprensión.

Su objetivo no es proporcionar un código de producción para simulaciones científicas, sino mostrar de la forma más transparente posible cómo se implementan la reconstrucción hidrostática, el solucionador aproximado de Riemann HLL y la corrección del flujo necesaria para preservar exactamente el equilibrio de lago en reposo.

El lector puede modificar libremente la batimetría, las condiciones iniciales, la resolución de la malla o el número de Courant para explorar el comportamiento del método y comparar sus resultados con los obtenidos mediante un esquema clásico no well-balanced.

```
%=====
% SW_HLL_WellBalanced_Audusse_demo.m
%
% Shallow Water equations with bottom topography:
%
%    $h_t + q_x = 0,$ 
%    $q_t + (q^2/h + 1/2 g h^2)_x = - g h z_x.$ 
%
% Comparison between:
%   (1) a classical non well-balanced HLL scheme,
%   (2) the hydrostatic reconstruction of Audusse et al. with HLL.
%
% The script contains two tests:
%   testCase = 1 : lake at rest,
```

```

%   testCase = 2 : small perturbation of a lake at rest.
%
% The well-balanced scheme should preserve testCase = 1 up to roundoff.
%=====

clear; close all; clc;

%-----
% Parameters
%-----
g      = 9.81;
L      = 1.0;
N      = 200;
CFL    = 0.45;
Tfinal = 0.20;
testCase = 1;      % 1 = lake at rest, 2 = small perturbation

xmin = 0.0;
xmax = L;
dx   = (xmax-xmin)/N;
x    = linspace(xmin+0.5*dx,xmax-0.5*dx,N)';

%-----
% Bottom topography
%-----
z = 0.20*(1.0 - cos(2*pi*x/L));
eta0 = 1.0;

switch testCase
    case 1
        h0 = eta0 - z;
    case 2
        sigma = 0.05;
        perturb = 1e-3*exp(-((x-0.5*L).^2)/(sigma^2));
        h0 = eta0 - z + perturb;
    otherwise
        error('Unknown testCase. Use 1 or 2.');
```

end

```

q0 = zeros(N,1);

% Initial data for both schemes
hN = h0; qN = q0;      % non well-balanced scheme
hW = h0; qW = q0;      % well-balanced hydrostatic reconstruction

%-----
```

```

% Time integration
%-----
t = 0.0;
iter = 0;

while t < Tfinal
    smaxN = maxWaveSpeed(hN,qN,g);
    smaxW = maxWaveSpeed(hW,qW,g);
    dt = CFL*dx/max(smaxN,smaxW);
    if t + dt > Tfinal
        dt = Tfinal - t;
    end

    [hN,qN] = stepNaiveHLL(hN,qN,z,g,dx,dt);
    [hW,qW] = stepHydrostaticHLL(hW,qW,z,g,dx,dt);

    t = t + dt;
    iter = iter + 1;
end

%-----
% Diagnostics
%-----
etaN = hN + z;
etaW = hW + z;

fprintf('\nShallow water with topography\n');
fprintf('N = %d, final time = %.4f, iterations = %d\n',N,t,iter);
fprintf('Test case %d\n',testCase);

if testCase == 1
    fprintf('Non-WB HLL: max |eta-eta0| = %.3e, max |q| = %.3e\n', ...
        max(abs(etaN-eta0)), max(abs(qN)));
    fprintf('WB HLL:      max |eta-eta0| = %.3e, max |q| = %.3e\n', ...
        max(abs(etaW-eta0)), max(abs(qW)));
else
    fprintf('Non-WB HLL: max |eta-eta_initial| = %.3e, max |q| = %.3e\n', ...
        max(abs(etaN-(h0+z))), max(abs(qN)));
    fprintf('WB HLL:      max |eta-eta_initial| = %.3e, max |q| = %.3e\n', ...
        max(abs(etaW-(h0+z))), max(abs(qW)));
end

%-----
% Figures
%-----

```

```

figure('Color','w');
plot(x,z,'k','LineWidth',1.5); hold on;
plot(x,h0+z,'b--','LineWidth',1.2);
plot(x,etaN,'r','LineWidth',1.2);
plot(x,etaW,'g','LineWidth',1.2);
grid on;
xlabel('x'); ylabel('elevation');
legend('bottom z(x)','initial free surface','non-WB HLL','WB HLL','Location','best');
title('Free surface: non well-balanced HLL vs well-balanced HLL');

```

```

figure('Color','w');
plot(x,qN,'r','LineWidth',1.2); hold on;
plot(x,qW,'g','LineWidth',1.2);
grid on;
xlabel('x'); ylabel('q=hu');
legend('non-WB HLL','WB HLL','Location','best');
title('Discharge');

```

```

%=====
% Local functions
%=====

```

```

function smax = maxWaveSpeed(h,q,g)
    hsafe = max(h,1e-14);
    u = q./hsafe;
    c = sqrt(g*hsafe);
    smax = max(abs(u)+c);
end

```

```

%-----
% Classical non well-balanced HLL scheme.
% The source term is discretized independently by a centered difference.
% Periodic boundary conditions are used for simplicity.
%-----

```

```

function [hnew,qnew] = stepNaiveHLL(h,q,z,g,dx,dt)
    N = length(h);
    Flux = zeros(N,2);      % Flux(i,:) = flux at interface i+1/2

    for i = 1:N
        ip = periodicIndex(i+1,N);
        UL = [h(i); q(i)];
        UR = [h(ip); q(ip)];
        Flux(i,:) = hllFlux(UL,UR,g)';
    end
end

```

```

hnew = h;
qnew = q;

for i = 1:N
    im = periodicIndex(i-1,N);
    ip = periodicIndex(i+1,N);

    % Centered independent approximation of -g h z_x
    dzdx = (z(ip)-z(im))/(2*dx);
    Source = [0; -g*h(i)*dzdx];

    U = [h(i); q(i)];
    Unew = U - dt/dx*(Flux(i,:)'-Flux(im,:)) + dt*Source;

    hnew(i) = max(Unew(1),1e-14);
    qnew(i) = Unew(2);
end
end

%-----
% Well-balanced HLL scheme with hydrostatic reconstruction.
%
% At each interface i+1/2:
%   Fstar = HLL(U_L^*,U_R^*)
%   F^L    = Fstar + S_L
%   F^R    = Fstar + S_R
%
% Cell i update:
%   U_i^{n+1} = U_i^n - dt/dx ( F^L_{i+1/2} - F^R_{i-1/2} ).
%-----
function [hnew,qnew] = stepHydrostaticHLL(h,q,z,g,dx,dt)
    N = length(h);

    FluxL = zeros(N,2); % FluxL(i,:) = F^L_{i+1/2}
    FluxR = zeros(N,2); % FluxR(i,:) = F^R_{i+1/2}

    for i = 1:N
        ip = periodicIndex(i+1,N);

        hL = h(i);    qL = q(i);    zL = z(i);
        hR = h(ip);    qR = q(ip);    zR = z(ip);

        uL = qL/max(hL,1e-14);
        uR = qR/max(hR,1e-14);
    end
end

```

```

    zstar = max(zL,zR);

    hLstar = max(0.0, hL + zL - zstar);
    hRstar = max(0.0, hR + zR - zstar);

    ULstar = [hLstar; hLstar*uL];
    URstar = [hRstar; hRstar*uR];

    Fstar = hllFlux(ULstar,URstar,g);

    SL = [0; 0.5*g*(hL^2 - hLstar^2)];
    SR = [0; 0.5*g*(hR^2 - hRstar^2)];

    FluxL(i,:) = (Fstar + SL)';
    FluxR(i,:) = (Fstar + SR)';
end

hnew = h;
qnew = q;

for i = 1:N
    im = periodicIndex(i-1,N);
    U = [h(i); q(i)];

    Unew = U - dt/dx*(FluxL(i,:)'-FluxR(im,:))';

    hnew(i) = max(Unew(1),1e-14);
    qnew(i) = Unew(2);
end
end

%-----
% HLL flux for homogeneous shallow water equations.
%-----
function F = hllFlux(UL,UR,g)
    hL = max(UL(1),1e-14);
    qL = UL(2);
    uL = qL/hL;
    cL = sqrt(g*hL);

    hR = max(UR(1),1e-14);
    qR = UR(2);
    uR = qR/hR;
    cR = sqrt(g*hR);

```

```

FL = [qL;
      qL*uL + 0.5*g*hL^2];

FR = [qR;
      qR*uR + 0.5*g*hR^2];

sL = min(uL-cL,uR-cR);
sR = max(uL+cL,uR+cR);

if sL >= 0
    F = FL;
elseif sR <= 0
    F = FR;
else
    F = (sR*FL - sL*FR + sL*sR*(UR-UL))/(sR-sL);
end
end

function j = periodicIndex(i,N)
    j = mod(i-1,N) + 1;
end

```