

# Introducción al Método de Elementos Finitos Mixtos

GABRIEL N. GATICA

Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI<sup>2</sup>MA)

y Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Concepción

`ggatica@ing-mat.udec.cl/ggatica@ci2ma.udec.cl`

`http://colo-colo.ing-mat.udec.cl/~ggatica`

Mayo 2011

**Nota del autor**

En la redacción de este apunte se ha asumido un conocimiento básico sobre ANÁLISIS FUNCIONAL y TEORÍA DE DISTRIBUCIONES por parte del lector. En particular, se emplea la notación usual para ESPACIOS DE SOBOLEV y sus respectivas normas y semi-normas. No obstante, algunos resultados fundamentales sobre estos espacios se presentan con cierto detalle en la Sección 1.3.

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>5</b>
1.1. El Lema de Lax-Milgram . . . . .	5
1.1.1. Preliminares . . . . .	5
1.1.2. La versión clásica . . . . .	7
1.1.3. La versión general . . . . .	12
1.2. Ejemplos de formulaciones mixtas . . . . .	16
1.2.1. Un modelo unidimensional . . . . .	16
1.2.2. Un modelo en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	20
1.3. Trazas e identidades de Green . . . . .	22
1.3.1. Trazas de $H^1(\Omega)$ . . . . .	22
1.3.2. El espacio $H^{1/2}(\Gamma)$ . . . . .	24
1.3.3. Integración por partes e identidad de Green . . . . .	25
1.3.4. Trazas normales de $H(\text{div}; \Omega)$ . . . . .	27
<b>2. TEORÍA DE BABUŠKA-BREZZI</b>	<b>33</b>
2.1. La ecuación de operadores . . . . .	33
2.2. La condición inf-sup . . . . .	34
2.3. El resultado principal . . . . .	36
2.4. Ejemplos de aplicación . . . . .	40
2.4.1. El problema de Poisson . . . . .	41
2.4.2. El problema de Poisson con condiciones mixtas . . . . .	43
2.4.3. El problema de elasticidad lineal . . . . .	47
2.4.4. El problema de Poisson en formulación primal-mixta . . . . .	59
2.5. El esquema de Galerkin . . . . .	61

<b>3.</b>	<b>ESPACIOS DE RAVIART-THOMAS</b>	<b>71</b>
3.1.	Resultados preliminares . . . . .	71
3.2.	Espacios de polinomios . . . . .	76
3.3.	Espacios de Raviart-Thomas locales . . . . .	78
3.4.	Interpolación en $H(\text{div}; \Omega)$ . . . . .	82
3.4.1.	Operadores de interpolación global y local . . . . .	82
3.4.2.	La transformación de Piola . . . . .	85
3.4.3.	Deny-Lions, Bramble-Hilbert y resultados afines . . . . .	90
3.4.4.	Errores de interpolación . . . . .	97
<b>4.</b>	<b>MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS</b>	<b>103</b>
4.1.	Operadores de proyección . . . . .	103
4.2.	El problema de Poisson . . . . .	109
4.3.	El problema de Poisson / primal-mixto . . . . .	114
4.4.	El problema de Poisson con c.c. de Neumann . . . . .	122