
Cálculo IV

Apuntes
Curso Código 525212
Segundo Semestre 2023

Raimund Bürger
Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA)
& Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Casilla 160-C
Concepción, Chile

1 de enero de 2024

Índice general

Capítulo 1. El espacio de los números complejos	7
1.1. El cuerpo de los números complejos	7
1.2. Inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$	10
1.3. $\mathbb{C}$ como espacio vectorial bi-dimensional	12
1.4. Números complejos conjugados, valores absolutos	12
1.5. Representación de números complejos en forma polar	14
1.6. Potencias y raíces de números complejos	17
1.7. $\mathbb{C}$ como espacio métrico	18
1.8. Sucesiones de números en $\mathbb{C}$	20
1.9. La esfera de Riemann y el plano complejo extendido $\tilde{\mathbb{C}}$	21
1.10. $\tilde{\mathbb{C}}$ como espacio topológico	22
1.11. Curvas y regiones en $\mathbb{C}$	26
1.12. Ejercicios	28
Capítulo 2. Funciones de una variable compleja	39
2.1. Introducción	39
2.2. Series infinitas de números complejos	41
2.3. Las funciones e^z , $\cos z$ y $\sin z$	45
2.4. Transformaciones fraccionarias lineales	49
2.4.1. Definición de las transformaciones fraccionarias lineales	50
2.4.2. Traslaciones, rotaciones, homotecias, y la inversión	51
2.4.3. La representación compleja de rectas y circunferencias	52
2.4.4. La invarianza de la razón doble	55
2.4.5. El grupo de las transformaciones fraccionarias lineales (grupo de Möbius)	57
2.4.6. Puntos fijos y representación normal	59
2.4.7. Representación normal de transformaciones fraccionarias lineales	60
2.5. Ejercicios	62
Capítulo 3. La diferenciabilidad de funciones complejas	67
3.1. Definición de la derivada y regularidad	67
3.2. Reglas de diferenciación	69
3.3. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann	70
3.4. La conexión con la diferenciabilidad real	71
3.5. La regularidad y las ecuaciones de Cauchy-Riemann	72
3.6. Preservación de ángulos y aplicaciones localmente conformes	73
3.7. Biyectividad local	76

3.8.	Aplicaciones conformes	78
3.9.	“Funciones multivaluadas” y superficies de Riemann	78
3.9.1.	Potencia y raíz	79
3.9.2.	Función exponencial y logaritmo	81
3.9.3.	Potencia general	83
3.10.	Ejercicios	84
Capítulo 4.	Integración compleja	89
4.1.	Módulo de continuidad y funciones de variación acotada	89
4.2.	La definición de la integral de Riemann-Stieltjes (RS)	90
4.3.	La existencia de la integral de RS	91
4.4.	Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes	93
4.5.	La computación de integrales de Riemann-Stieltjes	95
4.6.	Integrales de línea complejas	95
4.7.	El teorema integral de Cauchy	99
4.8.	El teorema de Cauchy en regiones más generales	105
4.9.	Fórmula integral de Cauchy	107
4.10.	Integrales de Cauchy y la existencia de derivadas de orden superior	109
4.11.	Primitivas y el teorema de Morera	113
4.12.	El teorema de Liouville y el teorema fundamental del álgebra	115
4.13.	El principio del máximo	117
4.14.	Ejercicios	119
Capítulo 5.	Series de potencias y series de Taylor	135
5.1.	Sucesiones de funciones	135
5.2.	Series de funciones	138
5.3.	Series de potencias	140
5.4.	Expansión en serie de Taylor de una función regular	143
5.5.	Continuación analítica y teorema de la identidad	144
5.6.	El teorema de Casorati-Weierstrass	148
5.7.	Teorema del límite de Abel	149
5.8.	Ejercicios	154
Capítulo 6.	Series de Laurent y singularidades aisladas	157
6.1.	Series de Laurent	157
6.2.	Expansión de Laurent de una función regular	159
6.3.	Singularidades aisladas	162
6.4.	Singularidades evitables	164
6.5.	Polos	164
6.6.	Singularidades esenciales	166
6.7.	Ejercicios	167
Capítulo 7.	El teorema de los residuos y sus aplicaciones	173
7.1.	El teorema de los residuos	173
7.2.	Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	176

Índice general	5
7.3. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) \, dx$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) \, dx$	178
7.4. Integrales del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) \, dx$	181
7.5. Otros ejemplos de aplicaciones del cálculo de residuos	182
7.6. El principio del argumento y el teorema de Rouché	186
7.7. Ejercicios	188
Bibliografía	197

Capítulo 1

El espacio de los números complejos

En el Cálculo I extendimos el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales porque el cuerpo $\mathbb{Q}$ nos pareció insatisfactorio en muchos aspectos. Una de las motivaciones principales de extender $\mathbb{Q}$ era la existencia de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no poseen límite en $\mathbb{Q}$. No obstante, el cuerpo $\mathbb{R}$ aún no satisface todos los deseos, considerando que una ecuación tan simple como

$$x^2 + 1 = 0$$

no posee solución en $\mathbb{R}$. Para resolver este problema extenderemos ahora el cuerpo $\mathbb{R}$ al cuerpo $\mathbb{C}$ de los *números complejos*. Al contrario de la extensión de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, la cual esencialmente es un proceso analítico (asegurando la convergencia de sucesiones de Cauchy), la presente extensión es mucho más simple y de naturaleza algebraica.

1.1. El cuerpo de los números complejos

Definimos un número complejo como par de números reales.

Definición 1.1.

1. Un número complejo z es un par de números $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, donde x se llama parte real de z , e y se llama parte imaginaria de z . Escribimos

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z),$$

donde si no hay confusión omitiremos las paréntesis, escribiendo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

2. Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se dicen iguales si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
3. El conjunto de los números complejos es denotado por $\mathbb{C}$.

Esta definición nos permite visualizar el conjunto $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $\mathbb{C}$ también es denotado *plano de números de Gauss*, ver Figura 1.1.

Hasta ahora hemos definido $\mathbb{C}$ sólo como conjunto, donde en forma un poco apresurada denotamos los elementos como números. Demostraremos ahora que mediante definiciones apropiadas de la adición y de la multiplicación el conjunto $\mathbb{C}$ efectivamente se convierte en un *cuerpo*, donde a continuación recordamos la definición de un cuerpo.

Definición 1.2. Un cuerpo es un conjunto K en el que se han definido dos operaciones, $+$ y $\cdot$, llamadas suma y multiplicación respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades:

1. El conjunto K es cerrado para la adición y la multiplicación (o más formalmente, $+$ y $\cdot$ son operaciones matemáticas en K), es decir

$$\text{para todo } a, b \in K: \quad a + b \in K \text{ y } a \cdot b \in K.$$

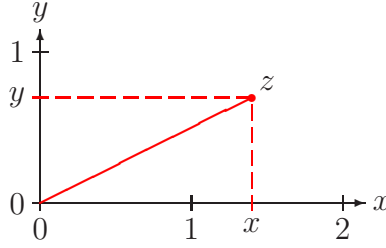


FIGURA 1.1. Visualización del conjunto $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}^2$ (plano de números de Gauss).

2. *Asociatividad de la adición y la multiplicación:*

$$\text{para todo } a, b, c \in K: \quad a + (b + c) = (a + b) + c; \quad (1.1)$$

$$\text{para todo } a, b, c \in K: \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c. \quad (1.2)$$

3. *Conmutatividad de la adición y la multiplicación:*

$$\text{para todo } a, b \in K: \quad a + b = b + a; \quad (1.3)$$

$$\text{para todo } a, b \in K: \quad a \cdot b = b \cdot a. \quad (1.4)$$

4. *Existencia de un elemento neutro para la adición y la multiplicación:*

$$\text{existe un elemento } 0 \in K \text{ tal que para todo } a \in K, \quad a + 0 = a; \quad (1.5)$$

$$\text{existe un elemento } 1 \in K \text{ tal que para todo } a \in K, \quad 1 \cdot a = a. \quad (1.6)$$

5. *Existencia de elemento opuesto y de inversos:*

$$\text{Para todo } a \in K \text{ existe un elemento } -a \in K \text{ tal que } a + (-a) = 0; \quad (1.7)$$

$$\text{para todo } a \in K, \quad a \neq 0 \text{ existe un elemento } a^{-1} \in K \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = 1. \quad (1.8)$$

6. *Distributividad de la multiplicación respecto de la adición:*

$$\text{para todo } a, b, c \in K: \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c). \quad (1.9)$$

Definición 1.3. Sean $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ y $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$.

1. Se define la suma $z_1 + z_2$ por el número complejo

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

2. Se define el producto $z_1 z_2$ por el número complejo

$$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Teorema 1.1. El conjunto $\mathbb{C}$ conjuntamente con las operaciones de adición y multiplicación definidas en la Definición 1.3 forma un cuerpo.

Demostración. Sean ahora $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ y $z_3 = (x_3, y_3)$ números complejos arbitrarios. Notamos primeramente que $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$, ya que la suma y el producto de dos números complejos (es decir, de dos pares de números reales) nuevamente entrega un número complejo (un par de números reales). Por otro lado, calculamos

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$$

$$\begin{aligned}
&= (z_1 + z_2) + z_3, \\
(z_1 z_2) z_3 &= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_3 y_1 y_2 + x_3 x_2 y_1) \\
&= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 x_3 y_2, x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - y_2 y_3 y_1) \\
&= z_1(z_2 z_3),
\end{aligned}$$

lo que demuestra la asociatividad de la adición y la multiplicación, (1.1) y (1.2);

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1, \\
z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, y_1 x_2 + y_2 x_1) = z_2 z_1,
\end{aligned}$$

lo que demuestra la conmutatividad de la adición y la multiplicación, (1.3) y (1.4); eligiendo el número complejo $0 = (0, 0)$ como elemento neutro de la adición (elemento nulo), tenemos

$$z_1 + 0 = (x_1 + 0, y_1 + 0) = (x_1, y_1) = z_1$$

y eligiendo como elemento neutro de la multiplicación (unidad) en $\mathbb{C}$ el número complejo $e = (1, 0)$,

$$ez_1 = (x_1, y_1) = z_1,$$

lo que verifica la existencia de un elemento neutro para la adición y la multiplicación, (1.5) y (1.6); eligiendo como elemento inverso de la adición (elemento opuesto) el número complejo $-z_1 = (-x_1, -y_1)$ obtenemos

$$z_1 + (-z_1) = (x_1 + (-x_1), y_1 + (-y_1)) = (0, 0),$$

lo que comprueba (1.7); si $z_1 \neq 0$, entonces $x_1 \neq 0$ o $y_1 \neq 0$ y por lo tanto $x_1^2 + y_1^2 > 0$. Si como elemento inverso de la multiplicación elegimos

$$z_1^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right),$$

entonces

$$z_1(z_1^{-1}) = \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{-x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) = (1, 0) = e,$$

lo que demuestra (1.8), y finalmente,

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) z_3 &= (x_1 x_3 + x_2 x_3 - y_1 y_3 - y_2 y_3, x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2) \\
&= (x_1 x_3 - y_1 y_3, x_1 y_3 + x_3 y_1) + (x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) = z_1 z_3 + z_2 z_3,
\end{aligned}$$

lo que comprueba (1.9), la distributividad de la multiplicación respecto de la adición. ■

A raíz de lo anterior hemos demostrado que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, por lo tanto se pueden aplicar todas las reglas para el cálculo en un cuerpo general. En particular, para $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ y $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ las ecuaciones

$$z_1 + z = z_2; \quad z_1 z = z_2 \quad (z_1 \neq 0)$$

poseen soluciones únicas dadas por

$$z = z_2 + (-z_1) = z_2 - z_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

y

$$z = z_2(z_1^{-1}) = \frac{z_2}{z_1} = (x_2, y_2) \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2} \right) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{-x_2 y_1 + x_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} \right),$$

respectivamente.

Enfatizamos que al contrario del cuerpo $\mathbb{R}$, *no* podemos definir un orden sobre $\mathbb{C}$. Al respecto recordamos los siguientes conceptos.

Definición 1.4. Sea X un conjunto y $\leq$ una relación binaria sobre X . Entonces esta relación se dice orden sobre X si satisface lo siguiente para todo $a, b, c \in X$:

1. Si $a \in X$, entonces $a \leq a$ (reflexividad).
2. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$ (transitividad).
3. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$ (antisimetría).
4. Para todo $a, b \in X$, $a \leq b$ o $b \leq a$ (totalidad o completitud).

Notamos que un orden sobre un conjunto X también se llama *orden total*, donde notamos que la condición de totalidad implica reflexividad, esto es, $a \leq a$ para todo $a \in X$, por lo tanto, un orden total es también un orden parcial, esto es, una relación binaria reflexiva, antisimétrica, y transitiva. Un orden total, entonces, puede también definirse como un orden parcial que sea “total”, es decir que cumpla con la condición de totalidad.

Definición 1.5. Sea K un cuerpo con las operaciones de adición y multiplicación denotadas por “+” y “·”, respectivamente, y sea $\leq$ un orden (u orden total) sobre K . Entonces se dice que $(K, \leq)$ es un cuerpo ordenado si se verifican los siguientes axiomas:

$$\text{para todo } a, b, c \in K: \quad \text{si } a \leq b, \text{ entonces } a + c \leq b + c. \quad (1.10)$$

$$\text{para todo } a, b \in K: \quad \text{si } a \geq 0 \text{ y } b \geq 0, \text{ entonces } ab \geq 0. \quad (1.11)$$

Teorema 1.2. Ningún orden total sobre $\mathbb{C}$ le puede dar estructura de cuerpo ordenado.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{C}$ fuera un cuerpo ordenado con el orden $\leq$. Como $e \neq 0$, tenemos $e > 0$ o $e < 0$. En el primer caso ($e > 0$) tenemos $e^2 = e \cdot e \geq 0$ (por (1.11)), y como $e \neq 0$, $e \cdot e = e > 0$. Pero para el número complejo $z = (0, 1)$, que es diferente del elemento nulo de la adición obtendríamos

$$0 < z^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -e,$$

lo que implica $e < 0$, una contradicción, la cual implica que es imposible definir un orden sobre $\mathbb{C}$. ■

Concluimos que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, pero no es un cuerpo ordenado. Es decir, las relaciones “mayor que” o “menor que” no tienen sentido para números complejos.

1.2. Inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

El cuerpo $\mathbb{C}$ consiste en pares de números reales. Nos interesa ahora si $\mathbb{C}$ efectivamente es una extensión de $\mathbb{R}$, es decir si podemos “recuperar” los números reales dentro de los números complejos. Para discusión el concepto del *isomorfismo* será muy importante.

Definición 1.6. Se dice que dos cuerpos K_1 y K_2 son isomorfos si existe una aplicación biyectiva

$$F : D(F) = K_1 \ni x \mapsto F(x) \in K_2 = B(F)$$

(donde $D(F)$ y $B(F)$ denotan el dominio y la imagen de F , respectivamente) tal que para todo $x, y \in K_1$ se verifica

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \quad F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y).$$

Teorema 1.3. El conjunto $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} := \{z \in \mathbb{C} \mid z = (x, 0)\}$ forma un cuerpo con respecto a las operaciones de $\mathbb{C}$.

Demostración. Tarea. ■

Teorema 1.4. Los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ son isomorfos.

Demostración. Consideremos la aplicación $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ definida por $F(x) := (x, 0)$ con $D(F) = \mathbb{R}$.

1. Evidentemente, la aplicación F es biyectiva con $B(F) = \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.
2. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$F(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = F(x) + F(y),$$

$$F(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = F(x) \cdot F(y).$$

Concluimos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ son isomorfos. ■

De acuerdo a lo anterior, no importa si calculamos en $\mathbb{R}$ de acuerdo a las reglas del cálculo de $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ con las reglas del cálculo en $\mathbb{C}$. Por tal razón identificamos los números reales con los números real-complejos y escribimos $(x, 0) = x$, en particular $0 = (0, 0) = 0$ y $e = (1, 0) = 1$. Además, usualmente se denota el número complejo

$$i := (0, 1)$$

como *unidad imaginaria*. Para el cuadrado de i obtenemos

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

es decir i es una solución de la ecuación $z^2 + 1 = 0$. Como

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0),$$

podemos escribir la representación normal

$$z = x + iy.$$

Indicamos a continuación las representaciones normales de sumas, productos y cocientes de números complejos.

Teorema 1.5. Sean $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Entonces

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

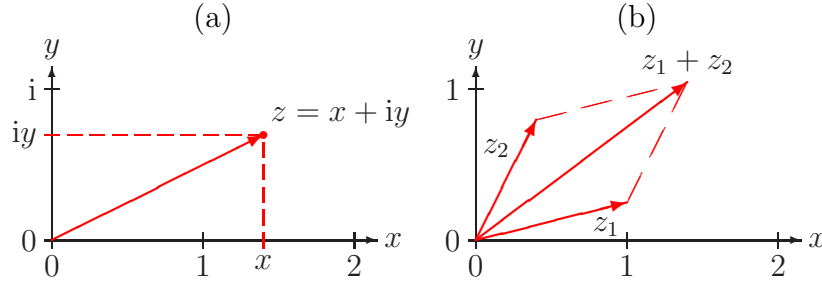


FIGURA 1.2. (a) Visualización de los números complejos por vectores del espacio $\mathbb{V}^2$, (b) visualización de la adición de dos números complejos.

Demostración. Trivial. ■

1.3. $\mathbb{C}$ como espacio vectorial bi-dimensional

Demostraremos ahora que $\mathbb{C}$ también es un espacio vectorial bi-dimensional si definimos la adición de dos vectores en el espacio vectorial por la adición en $\mathbb{C}$ y la multiplicación escalar en el espacio vectorial por la multiplicación en $\mathbb{C}$ por un número complejo real.

Teorema 1.6. *El cuerpo $\mathbb{C}$ conjuntamente con la adición en $\mathbb{C}$ y la multiplicación escalar*

$$\lambda z = (\lambda, 0)(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

forma un espacio vectorial bi-dimensional sobre $\mathbb{R}$ con la base $\{1, i\}$.

Demostración. Como la adición es idéntica a la adición en $\mathbb{C}$ y la multiplicación escalar es definida por (1.12) como caso particular de la multiplicación en $\mathbb{C}$ las propiedades de un cuerpo (ver Definición 1.2) y la representación normal inmediatamente implican las propiedades de un espacio vectorial. ■

En lo siguiente visualizaremos los números complejos tanto por puntos en $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 1.1) como por vectores en $\mathbb{V}^2$ (ver Figura 1.2 (a)). Mediante la representación vectorial también podemos visualizar la adición de dos números complejos (Figura 1.2 (b)), la cual exactamente corresponde a la adición vectorial en $\mathbb{V}^2$.

1.4. Números complejos conjugados, valores absolutos

Para el cálculo de los números complejos definiremos ahora el *conjugado* de un número complejo.

Definición 1.7. *Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ el número*

$$\bar{z} := x - iy$$

se llama conjugado de z .

Para las operaciones de números complejos conjugados se tienen las siguientes reglas.

Teorema 1.7. Para $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tienen las siguientes reglas:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad (1.13)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \quad (1.14)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0); \quad (1.15)$$

$$\overline{(\bar{z})} = z; \quad (1.16)$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \quad (1.17)$$

Demostración. Tarea. ■

Para el estudio de números complejos el concepto del *valor absoluto* o *módulo* de un número complejo es muy importante.

Definición 1.8. Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ el número real

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

se llama *valor absoluto* o *módulo* de z .

Teorema 1.8. Para $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tenemos las siguientes reglas:

$$|z| \geq 0 \text{ y } |z| = 0 \text{ si y sólo si } z = 0; \quad (1.18)$$

$$|z| = |\bar{z}| \text{ y } |z| = \sqrt{z\bar{z}}; \quad (1.19)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|. \quad (1.20)$$

Demostración. La demostración de (1.18) es trivial. Para demostrar (1.19), notamos que si $z = x + iy$, entonces

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\bar{z}|$$

y además,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Finalmente, de acuerdo a (1.19) y el Teorema 1.7,

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})} = \sqrt{z_1 z_2 (\bar{z}_1 \bar{z}_2)} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \cdot \sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1| \cdot |z_2|,$$

lo que demuestra (1.20). ■

Tal como en el caso real tenemos la desigualdad triangular.

Teorema 1.9. Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tienen las siguientes desigualdades:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$|z_1 + z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|.$$

Demostración. Tarea. ■

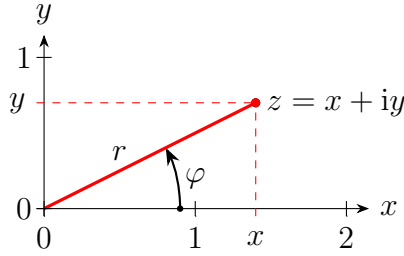


FIGURA 1.3. Representación en coordenadas polares $z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ de un número complejo $z = x + iy$.

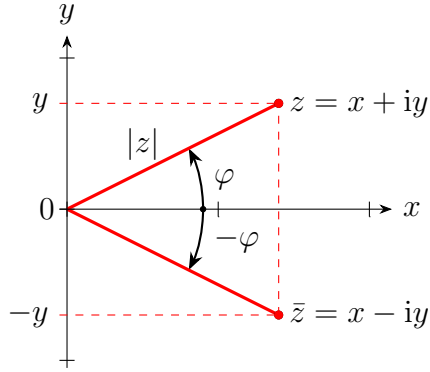


FIGURA 1.4. Representación en coordenadas polares de z y $\bar{z}$.

1.5. Representación de números complejos en forma polar

A parte del sistema de coordenadas cartesianas frecuentemente utilizaremos un sistema de coordenadas polares (r, φ) para describir puntos en $\mathbb{C}$. Si $z = (x, y) \neq 0$, entonces existen $r \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi,$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

y φ denota el ángulo, determinado hasta un múltiplo de 2π , formado entre el eje x positivo y el vector z , ver Figura 1.3.

Definición 1.9.

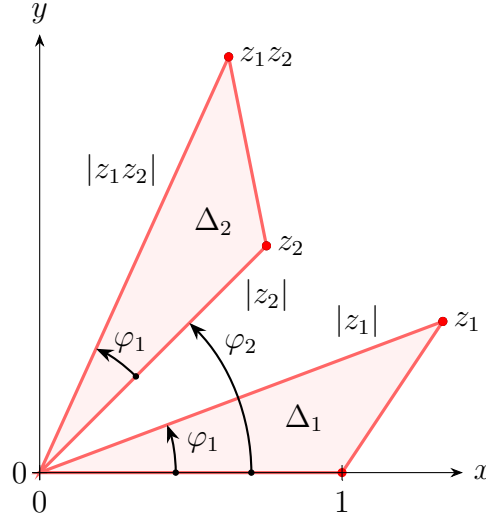
1. Una representación

$$z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \quad (z \neq 0)$$

se llama representación en coordenadas polares del número z .

2. Para $0 \leq \varphi < 2\pi$ definimos $\varphi = \arg_0 z$, el argumento de z .

Teorema 1.10. Si $z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, entonces $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi))$.

FIGURA 1.5. Construcción geométrica de $z_1 z_2$.

Demostración. Obtenemos

$$\bar{z} = \overline{r(\cos \varphi + i \sen \varphi)} = r(\cos \varphi - i \sen \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sen(-\varphi))$$

(ver Figura 1.4). ■

Ya vimos que la representación vectorial nos permite visualizar la suma y la diferencia de dos números complejos. Demostraremos ahora que mediante la representación en coordenadas polares también podemos visualizar el producto y el cociente de dos números complejos.

Teorema 1.11. Sean $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sen \varphi_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sen \varphi_2)$, entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sen(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Demostración. Utilizando los teoremas de adición

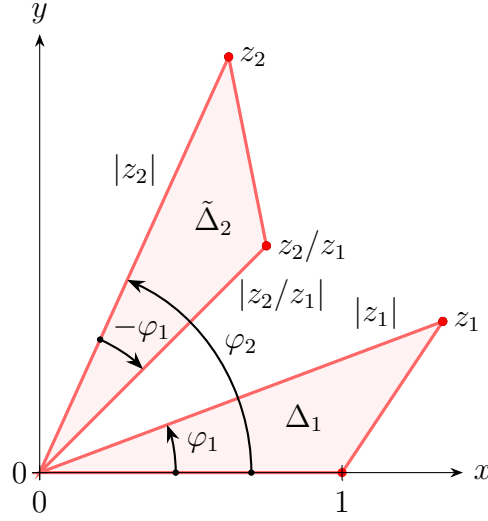
$$\sen(x \pm y) = \sen x \cos y \pm \cos x \sen y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sen x \sen y$$

(válidos para todo $x, y \in \mathbb{R}$) obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sen \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sen \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sen \varphi_1 \sen \varphi_2 + i(\sen \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sen \varphi_2 \cos \varphi_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sen(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$
■

A partir del Teorema 1.11 resulta una construcción geométrica simple de $z_1 z_2$, ver Figura 1.5. Nos podemos limitar al caso $z_1 \neq 0$ y $z_2 \neq 0$. Debido a la ecuación

$$\frac{|z_1 z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}$$

FIGURA 1.6. Construcción geométrica de z_2/z_1 .

los triángulos Δ_1 (con vértices 0, 1 y z_1) y Δ_2 (con vértices 0, z_2 y $z_1 z_2$) son similares. Es decir, para z_1 y z_2 dados podemos fácilmente determinar $z_1 z_2$ mediante la construcción del triángulo Δ_2 .

Teorema 1.12. Sean $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \neq 0$ y $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$, entonces

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} (\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)).$$

Demostración. En este caso calculamos

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{r_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)}{r_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)} = \frac{r_2}{r_1} \frac{(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)(\cos \varphi_1 - i \operatorname{sen} \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_1 + \operatorname{sen}^2 \varphi_1} \\ &= \frac{r_2}{r_1} (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_1 + i(\operatorname{sen} \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_1)) \\ &= \frac{r_2}{r_1} (\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)). \end{aligned}$$

■

Tal como en el caso de la multiplicación resulta nuevamente una construcción geométrica simple de z_2/z_1 , ver Figura 1.6. Nos podemos limitar al caso $z_2 \neq 0$ (y, por supuesto, $z_1 \neq 0$). Debido a la ecuación

$$\frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{|z_2/z_1|}{1}$$

los triángulos Δ_1 (con vértices 0, 1 y z_1) y $\tilde{\Delta}_2$ (con vértices 0, z_2/z_1 y z_2) son similares. Es decir, para z_1 y z_2 dados podemos determinar fácilmente z_2/z_1 (mediante la construcción del triángulo $\tilde{\Delta}_2$).

1.6. Potencias y raíces de números complejos

Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo, para todo $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}_0$ la potencia z^n es definida por

$$z^0 = 1, \quad z^n = \prod_{\nu=1}^n z \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Queremos calcular la representación de z^n en coordenadas polares.

Teorema 1.13. Sean $z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $n \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)).$$

Demostración. Demostraremos el enunciado por inducción sobre n .

1. El enunciado es trivial para $n = 0$.
2. Sea $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi))$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = \left(r^n (\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)) \right) (r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)) \\ &= r^{n+1} \left(\cos(n\varphi) \cos \varphi - \operatorname{sen}(n\varphi) \operatorname{sen} \varphi + i (\operatorname{sen}(n\varphi) \cos \varphi + \cos(n\varphi) \operatorname{sen} \varphi) \right) \\ &= r^{n+1} \left(\cos((n+1)\varphi) + i \operatorname{sen}((n+1)\varphi) \right). \end{aligned}$$

■

Para $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos, tal como en el caso de números reales,

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n},$$

luego tenemos el resultado general

Teorema 1.14. Sea $z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$z^m = r^m (\cos(m\varphi) + i \operatorname{sen}(m\varphi)).$$

Demostración. Tarea. ■

Comentario 1.1. Si $z \in \mathbb{C}$ con el valor absoluto $|z| = 1$, es decir $z = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$, y $n \in \mathbb{Z}$, entonces el Teorema 1.14 implica la fórmula de De Moivre

$$(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi).$$

Queremos ahora estudiar la solución de la ecuación

$$z^n = \zeta, \quad z, \zeta \in \mathbb{C}; \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.21)$$

Definición 1.10. Una solución z de $z^n = \zeta$ se llama n -ésima raíz de ζ .

En el caso $\zeta = 0$ la única solución es, obviamente, $z = 0$. Si $\zeta \neq 0$, entonces el planteo

$$\zeta = \rho(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi), \quad z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

y el Teorema 1.13 entregan

$$r^n (\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)) = \rho(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi),$$

lo que implica $r^n = \rho$ y $n\varphi = \psi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), es decir

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi.$$

Entonces una solución de la ecuación considerada posee la forma

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pero entre estos números, solamente $z_0, \dots, z_{n-1}$ son diferentes a pares, ya que si ponemos $k = \kappa n + \nu$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, entonces

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) &= \cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\kappa n + 2\nu}{n}\pi\right) = \cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\nu}{n}\pi\right), \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\kappa n + 2\nu}{n}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\nu}{n}\pi\right). \end{aligned}$$

A su vez, los números complejos $z_0, \dots, z_{n-1}$ también son soluciones de $z^n = \zeta$. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *Para $n \in \mathbb{N}$, $\zeta \neq 0$ la ecuación*

$$z^n = \zeta = \rho(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi)$$

posee exactamente n raíces diferentes dadas por

$$z_\nu = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\nu}{n}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\nu}{n}\pi\right) \right), \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Observamos que las raíces de $z^n = \zeta$ forman los vértices de una polígono regular de n vértices, localizadas sobre la circunferencia $|z| = \sqrt[n]{\rho}$ (ver Figura 1.7). En el caso particular $\zeta = 1$ ($\rho = 1$, $\psi = 0$) obtenemos como soluciones de $z^n = 1$ las llamadas raíces n -ésimas de la unidad:

$$z_\nu = \cos\left(\frac{2\nu}{n}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\nu}{n}\pi\right), \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1$$

(ver Figura 1.8 para el caso $n = 5$).

1.7. $\mathbb{C}$ como espacio métrico

En la Sección 1.4 definimos el valor absoluto de un número complejo. Tal como en el caso real, este valor absoluto inmediatamente define una métrica. Para tal efecto sólo tenemos que definir la distancia de dos puntos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$:

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Esto efectivamente es una métrica; la distancia de los números complejos z_1 y z_2 es idéntica a la distancia euclidiana de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.16. *El conjunto $\mathbb{C}$ conjuntamente con la métrica $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ es idéntico al espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$.*

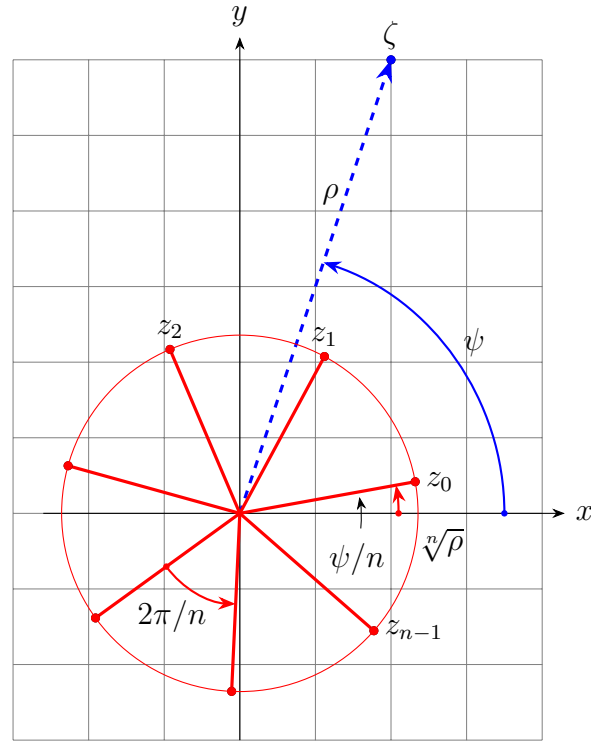


FIGURA 1.7. Soluciones $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ de la ecuación $z^n = \zeta$. (En esta figura, $\zeta = 1 + 3i$ y $n = 7$.)

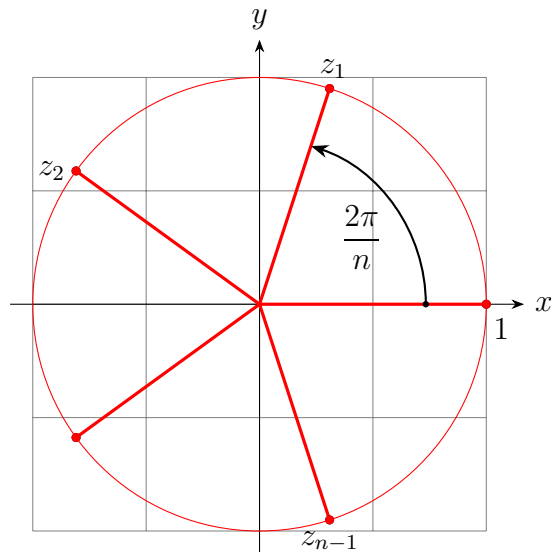


FIGURA 1.8. Raíces n -ésimas de la unidad, ilustradas para el caso $n = 5$.

En virtud de lo anterior, todas definiciones, propiedades y teoremas establecidas en el Cálculo I, II y III para espacios métricos en general y para $\mathbb{R}^n$ en particular siguen válidos.

Comentamos que ahora la ε -vecindad de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es dada por

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z \mid d(z, z_0) < \varepsilon\} = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

y representa un disco abierto con centro z_0 y radio ε . Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice *acotado* si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $|z| < M$ para todo $z \in S$. Finalmente, los conjuntos abiertos, cerrados y compactos en $\mathbb{C}$ son idénticos a los conjuntos abiertos, cerrados y compactos en $\mathbb{R}$.

1.8. Sucesiones de números en $\mathbb{C}$

Queremos estudiar sucesiones de números en $\mathbb{C}$. El concepto de *convergencia* sigue siendo el concepto de la convergencia en espacios métricos generales.

Definición 1.11. Una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ se dice convergente al límite $z \in \mathbb{C}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_\varepsilon$,

$$d(z_n, z) = |z_n - z| < \varepsilon.$$

En este caso escribimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

o $z_n \rightarrow z$ cuando $n \rightarrow \infty$. Una sucesión que no converge se llama *divergente*.

Debido a la equivalencia de esta distancia con la métrica euclidiana del espacio $\mathbb{R}^2$ obtenemos inmediatamente a partir del teorema de la convergencia de coordenadas que una sucesión converge si y sólo si las sucesiones de las partes reales e imaginarias convergen independientemente.

Teorema 1.17. Una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ converge al límite $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re} z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im} z.$$

También el concepto de una sucesión de Cauchy se aplica sin modificaciones.

Definición 1.12. Una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ se llama sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N_\varepsilon$,

$$d(z_n, z_m) = |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

A partir del Teorema 1.17 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.18 (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión de números complejos converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Como un espacio métrico M se dice *completo* si cada sucesión de Cauchy converge en M , el Teorema 1.18 afirma que que $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo.

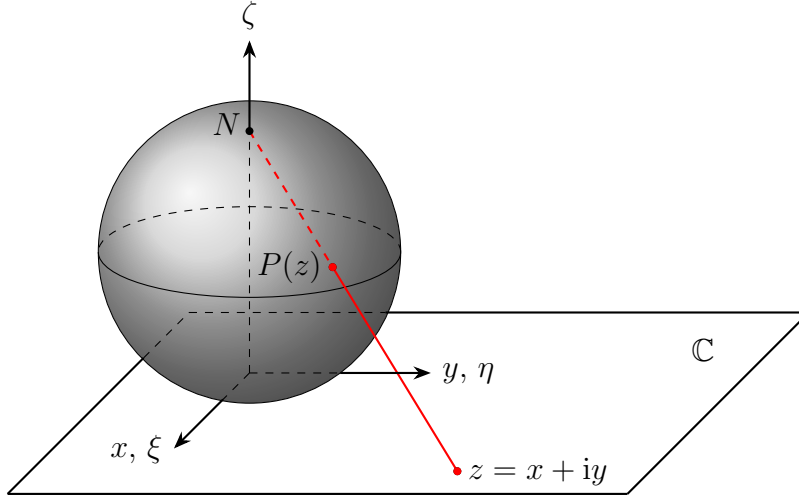


FIGURA 1.9. La esfera de Riemann

1.9. La esfera de Riemann y el plano complejo extendido $\tilde{\mathbb{C}}$

Discutiremos en esta sección otra visualización de los números complejos estableciendo una relación biyectiva entre los puntos del plano complejo de Gauss y los puntos de una esfera mediante una proyección estereográfica. Para tal efecto insertamos el espacio $\mathbb{C}$ en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ en el cual definimos un sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) en tal forma que el eje ξ coincide con el eje x y el eje η coincide con el eje y . En $\mathbb{R}^3$ consideramos ahora la esfera con centro $(0, 0, 1/2)$ y el radio $1/2$. La esfera (es decir, la superficie de la bola correspondiente) es dada por la ecuación

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

o equivalentemente,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

El punto $N = (0, 0, 1)$ sobre la esfera es denominado *polo norte*. Ahora proyectamos el plano complejo $\mathbb{C}$ en forma estereográfica sobre la esfera. Para tal efecto determinamos la recta que conecta un punto $z \in \mathbb{C}$ dado con N . Esta recta intersecta la esfera en exactamente un punto denominado por $P(z)$ (ver Figura 1.9). De esta manera se genera una biyección entre los puntos de $\mathbb{C}$ con los puntos de la esfera, con la excepción del polo norte N .

Teorema 1.19.

1. Para $z = x + iy$ dado se tiene

$$P(z) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

2. Para $(\xi, \eta, \zeta) \neq N$ dado,

$$z = P^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi}{1 - \zeta} + i \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

Demostración. Consideramos en $\mathbb{R}^3$ la recta g por los puntos $(0, 0, 1)$ y $(x, y, 0)$. Entonces $(\xi, \eta, \zeta) \in g$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\xi = \lambda x, \quad \eta = \lambda y, \quad \zeta = 1 - \lambda. \quad (1.22)$$

1. Para $z = x + iy$ dado obtenemos a partir de (1.22)

$$\xi = x(1 - \zeta), \quad \eta = y(1 - \zeta),$$

y como $P(z)$ pertenece a la esfera, tenemos, además,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = x^2(1 - \zeta)^2 + y^2(1 - \zeta)^2 - \zeta(1 - \zeta) = 0.$$

Como $\zeta \neq 1$, esto inmediatamente implica

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

además,

$$\xi = x(1 - \zeta) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \eta = y(1 - \zeta) = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}.$$

2. Para $P(z) = (\xi, \eta, \zeta) \neq N$ dado obtenemos a partir de (1.22) que $\lambda = 1 - \zeta \neq 0$, luego

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

■

La proyección estereográfica sugiere extender el plano complejo $\mathbb{C}$ agregándole un punto separado que formalmente puede ser identificado por el polo norte. Este elemento lo llamaremos “punto ∞ .”

Definición 1.13. El conjunto $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se dice plano complejo extendido.

Comentario 1.2. El conjunto $\tilde{\mathbb{C}}$ corresponde a los puntos sobre la esfera de números, incluyendo el polo norte. Esta esfera, entonces, se llama esfera de Riemann. El punto ∞ no es un número complejo; no obstante se acuerdan las siguientes reglas de cálculo:

$$z \pm \infty = \infty \quad (z \in \mathbb{C}); \quad z \cdot \infty = \infty \quad (z \in \tilde{\mathbb{C}}, z \neq 0);$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad (z \in \mathbb{C}); \quad \frac{z}{0} = \infty \quad (z \in \tilde{\mathbb{C}}, z \neq 0).$$

Las expresiones “ $0/0$ ”, “ $0 \cdot \infty$ ” e “ ∞/∞ ” siguen indefinidas.

1.10. $\tilde{\mathbb{C}}$ como espacio topológico

Ya constatamos que $\mathbb{C}$ conjuntamente con la métrica $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ es un espacio métrico. Esta métrica no se aplica a $\tilde{\mathbb{C}}$, ya que no se puede reemplazar z_1 o z_2 por ∞ . No obstante, es importante tener a disposición también en $\tilde{\mathbb{C}}$ los conceptos de la convergencia de sucesiones y de la continuidad de funciones. Esto se puede lograr mediante el concepto del espacio topológico que es una generalización del concepto del espacio métrico. En los cursos Cálculo I a III definimos para espacios métricos las vecindades, los puntos interiores y los conjuntos abiertos mediante el concepto de las ε -vecindades definidas por una métrica. Como resultado más importante se demostró que la unión de un número arbitrario de conjuntos y

la intersección de un número finito de conjuntos abiertos forman, en cada caso, nuevamente un conjunto abierto. Utilizaremos esta propiedad de conjuntos abiertos en espacios métricos para definir un espacio topológico.

Definición 1.14. Sea X un conjunto arbitrario y sea $\mathcal{T}$ un sistema de subconjuntos de X . Si $\mathcal{T}$ satisface:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$,
2. la unión de cualquier número arbitrario de elementos de $\mathcal{T}$ nuevamente es un elemento de $\mathcal{T}$,
3. la intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathcal{T}$ nuevamente es un elemento de $\mathcal{T}$,

entonces se dice que el conjunto X conjuntamente con el sistema de conjuntos $\mathcal{T}$ es un espacio topológico, denotado por $X = (X, \mathcal{T})$.

De acuerdo a los comentarios al inicio de esta sección podemos constatar lo siguiente.

Teorema 1.20. Cada espacio métrico es un espacio topológico.

Comentario 1.3. El inverso de este teorema es falso: no todas las topologías son generadas por una métrica, por lo tanto existen espacios topológicos que no son espacios métricos.

Ahora podemos transferir literalmente los conceptos de un conjunto cerrado, de un recubrimiento abierto, y de la compacidad desde un espacio métrico hacia un espacio topológico, dado que para sus respectivas definiciones solamente se utiliza el concepto de un conjunto abierto.

La distinción de ciertos subconjuntos de X como conjuntos abiertos (aquellos que pertenecen a la topología $\mathcal{T}$) nos permite inmediatamente introducir los conceptos de la vecindad de un punto y de un punto interior.

Definición 1.15. Sea $X = (X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Entonces un conjunto $U \subset X$ se llama vecindad de x si existe un conjunto abierto $X_0 \in \mathcal{T}$ tal que $x \in X_0 \subset U$. En este caso x se llama punto interior de U .

Esta definición nos permite directamente transferir el concepto de un punto de acumulación de un conjunto. Análogamente podemos definir el concepto de la convergencia de sucesiones de puntos en espacios topológicos.

Definición 1.16. Sea $X = (X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X converge a $x \in X$ si para cada vecindad X_0 de x existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in X_0$ para todo $n > N_0$.

Por supuesto, esta definición se reduce a la definición habitual de la convergencia si se trata de un espacio métrico.

Ahora, para definir una topología sobre $\tilde{\mathbb{C}}$, basta definir los conjuntos abiertos en $\tilde{\mathbb{C}}$.

Definición 1.17. Sea $Z \subset \tilde{\mathbb{C}}$.

1. Si $\infty \notin Z$, entonces Z se dice abierto si Z es abierto con respecto a $\mathbb{C}$.

2. Si $\infty \in Z$, entonces Z se dice abierto si el complemento

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbb{C}}}(Z) := \tilde{\mathbb{C}} \setminus Z$$

es compacto con respecto a $\mathbb{C}$.

Teorema 1.21. *Los conjuntos abiertos definidos en la Definición 1.17 forman una topología sobre $\tilde{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Tarea. ■

Queremos aclarar cuales son las vecindades de ∞ .

Teorema 1.22. *Un conjunto $Z \subset \tilde{\mathbb{C}}$ con $\infty \in Z$ es una vecindad de ∞ si y sólo si Z contiene el exterior de una circunferencia con centro 0, es decir existe $r \geq 0$ tal que $Z \supset \{z \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}$.*

Demostración.

1. Si Z es una vecindad de ∞ , entonces existe un conjunto abierto U con $\infty \in U \subset Z$ para la cual $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbb{C}}}(U)$ es compacto. Como $\mathcal{C}_{\tilde{\mathbb{C}}}(U)$ es compacto, existe una constante r tal que

$$\mathcal{C}_{\tilde{\mathbb{C}}}(U) \subset \{z \mid |z| \leq r\},$$

es decir

$$Z \supset U \supset \{z \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}.$$

2. El enunciado inverso es una consecuencia de la definición de una vecindad, y que evidentemente cada conjunto $\{\infty\} \cup \{z \mid |z| > r\}$ es un conjunto abierto de $\tilde{\mathbb{C}}$. ■

A partir del Teorema 1.22 obtenemos la siguiente interpretación del enunciado “ $z_n \rightarrow \infty$.”

Teorema 1.23. *Se tiene $z_n \rightarrow \infty$ si y sólo si para cada r existe $N_r \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_r$ se tiene $|z_n| > r$.*

El espacio $\mathbb{C}$ no es compacto (recordemos que los conjuntos compactos en $\mathbb{C}$ son los conjuntos acotados y cerrados, y $\mathbb{C}$ no es acotado). No obstante tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.24. *El plano complejo extendido $\tilde{\mathbb{C}}$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos abiertos de $\tilde{\mathbb{C}}$ forma un recubrimiento de $\tilde{\mathbb{C}}$. Entonces existe por lo menos un conjunto $Z_\infty \in \mathcal{F}$ con $\infty \in Z_\infty$. De acuerdo al Teorema 1.22 existe un $r > 0$ tal que $\{z \mid |z| > r\} \subset Z_\infty$ (ver Figura 1.10). Para el conjunto compacto $\{z \mid |z| \leq r\}$ existe un recubrimiento parcial finito $Z_1, \dots, Z_n$ de conjuntos en $\mathcal{F}_0 = \{Z \setminus \{\infty\} \mid Z \in \mathcal{F}\}$:

$$\bigcup_{i=1}^n Z_i \supset \{z \mid |z| \leq r\}.$$

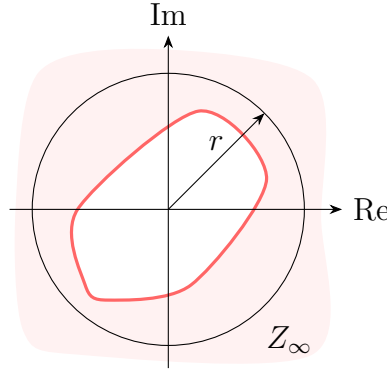


FIGURA 1.10. Ilustración de la demostración del Teorema 1.24.

De acuerdo a lo anterior,

$$\left(\bigcup_{i=1}^n Z_i \right) \cup Z_\infty \supset \tilde{\mathbb{C}},$$

es decir los conjuntos $Z_1, \dots, Z_n, Z_\infty$ forman un recubrimiento finito de $\tilde{\mathbb{C}}$, por lo tanto $\tilde{\mathbb{C}}$ es compacto. ■

Con respecto a la existencia de puntos de acumulación de un subconjunto de $\tilde{\mathbb{C}}$ demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 1.25 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Sea $M \subset \tilde{\mathbb{C}}$ un conjunto de un número infinito de elementos. Entonces M posee por lo menos un punto de acumulación en $\tilde{\mathbb{C}}$. Además, se tiene:*

1. *Si $M \cap \mathbb{C}$ es acotado en $\mathbb{C}$, entonces todos sus puntos de acumulación son finitos.*
2. *Si $M \cap \mathbb{C}$ no es acotado en $\mathbb{C}$, entonces ∞ es un punto de acumulación de M .*

Demostración. Definimos $M^* := M \cap \mathbb{C}$.

1. Sea M^* acotado en $\mathbb{C}$, y sea $|z| < K$ para todo $z \in M^*$.
 - a) En este caso existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de M^* con $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Si $z_n = x_n + iy_n$ con $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones reales acotadas. Entonces, de acuerdo a resultados conocidos de sucesiones de números reales (cada sucesión real y acotada posee una subsucesión convergente) existen una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tales que $x_{n_k} \rightarrow x_0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Como la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es acotada, existe una subsucesión $\{y_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ tales que $y_{n_{k_l}} \rightarrow y_0$ cuando $l \rightarrow \infty$. Concluimos que

$$x_{n_{k_l}} + iy_{n_{k_l}} =: z_{n_{k_l}} \rightarrow z_0 := x_0 + iy_0 \quad \text{cuando } l \rightarrow \infty,$$

y este $z_0 \in \mathbb{C}$ debe ser un punto de acumulación en M . Por lo tanto, M posee por lo menos un punto de acumulación en $\mathbb{C}$.

- b) Si $\tilde{z}_0$ es un punto de acumulación de M , entonces queda claro que necesariamente $|\tilde{z}_0| \leq K$.

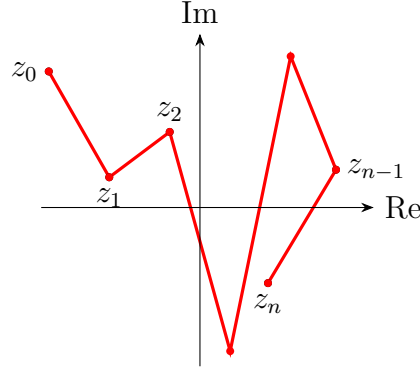


FIGURA 1.11. Trazado poligonal (Ejemplo 1.1).

2. Sea M^* no acotado en $\mathbb{C}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in M_n^*$ tal que $|z_n| \geq n$. Para esta sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene $z_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego ∞ es un punto de acumulación de M .

■

Finalmente definiremos los conceptos de un punto exterior y de un punto de frontera (o punto de borde) de un conjunto $M \subset \tilde{\mathbb{C}}$.

Definición 1.18. Sea $M \subset \tilde{\mathbb{C}}$. Entonces un punto $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ se dice

1. punto exterior de M si z_0 es un punto interior de $\mathbb{C}_{\tilde{\mathbb{C}}}(M)$;
2. punto de frontera de M si cada vecindad de z_0 contiene tanto puntos de M como puntos de $\mathbb{C}_{\tilde{\mathbb{C}}}(M)$. El conjunto de todos los puntos de frontera de M se llama frontera de M , denotada por ∂M .

1.11. Curvas y regiones en $\mathbb{C}$

Una curva en $\mathbb{C}$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ y es definida de acuerdo a los conceptos del Cálculo III. Aquí revisaremos la definición utilizando notación compleja.

Definición 1.19. Sea $z = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y sea z continua sobre $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

1. El conjunto de puntos

$$K := \{z \mid z = z(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]\}$$

se llama curva en $\mathbb{C}$; el par $(z, [\alpha, \beta])$ se llama representación paramétrica o parametrización de K .

2. El punto $z(\alpha)$ se llama punto inicial de K , y el punto $z(\beta)$, punto final de K .
3. Si $z(\alpha) = z(\beta)$, entonces la curva se dice cerrada.
4. Si $z(t_1) = z(t_2)$ para $\alpha \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta$ sólo si $t_1 = t_2$ o $t_1 = \alpha, t_2 = \beta$, entonces K se dice curva de Jordan.

Ejemplo 1.1.

1. La curva K más simple es un segmento recto que conecta dos puntos z_0 y z_1 . Una parametrización con z_0 como punto inicial y z_1 como punto final es dada por $z(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $t \in [0, 1]$.
2. Si $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, entonces las ecuaciones

$$z_\nu(t) = (\nu + 1 - nt)z_\nu + (nt - \nu)z_{\nu+1}, \quad t \in \left[\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}\right]$$

representan para $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ los segmentos lineales entre z_ν y $z_{\nu+1}$. La función $z = z(t)$ definida sobre $[0, 1]$ por

$$z(t) = z_\nu(t) \quad \text{para } t \in \left[\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}\right), \quad 0 \leq \nu \leq n-1; \quad z(1) = z_n$$

representa el trazado poligonal que conecta los puntos $z_0, z_1, \dots, z_n$ (ver Figura 1.11).

Formularemos también otros conceptos conocidos a partir del Cálculo III.

Definición 1.20. Sea K una curva en $\mathbb{C}$ representada por $(z, [\alpha, \beta])$.

1. Si existe $z'(t) = \{x'(t), y'(t)\}$ y $z'(t) \neq 0$, entonces

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$$

se dice vector tangencial en el punto $z(t)$ con respecto a la representación $(z, [\alpha, \beta])$.

2. La recta $T := \{z \mid z = z(t) + \lambda z'(t), \lambda \in \mathbb{R}\}$ se llama tangente a la curva K en el punto $z(t)$.

Definición 1.21. Sea K una curva en $\mathbb{C}$ representada por $(z, [\alpha, \beta])$.

1. La curva K se dice suave si $T_z(t)$ existe sobre $[\alpha, \beta]$ y allí las componentes de $z'(t)$ son continuas.
2. La curva K se dice suave a trozos si existe una partición $P = \{t_0, \dots, t_m\}$ de $[\alpha, \beta]$ tal que K es suave sobre cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$.

Definición 1.22. Sea K una curva en $\mathbb{C}$ con la parametrización $(z, [\alpha, \beta])$.

1. La curva K se dice rectificable si existe una constante M tal que para todas las particiones $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[\alpha, \beta]$,

$$L_P(K) := \sum_{i=1}^n |z(t_i) - z(t_{i-1})| \leq M.$$

2. Si K es rectificable, entonces la cantidad

$$L(K) := \sup_P L_P(K)$$

se llama longitud de arco (o brevemente, longitud) de K .

Tal como en el Cálculo III obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.26. Sea K una curva representada por $(z = (x, y), [\alpha, \beta])$. La curva K es rectificable si y sólo si ambas funciones x e y son de variación acotada sobre $[\alpha, \beta]$.

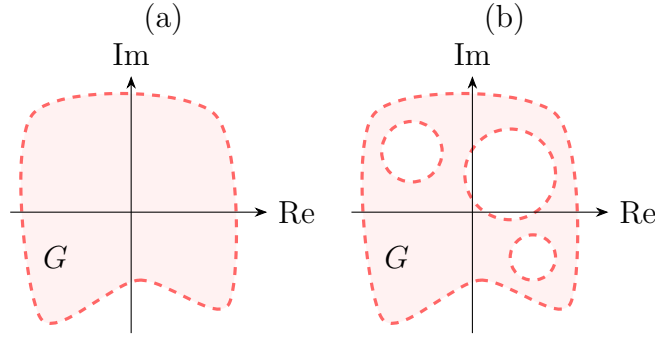


FIGURA 1.12. (a) Región G simplemente conexa, (b) región G conexa, pero no simplemente conexa.

Si K es una curva suave representada por $(z = (x, y), [\alpha, \beta])$, entonces K es rectificable y su longitud $L(K)$ es dada por

$$L(K) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt.$$

A parte de curvas trataremos frecuentemente con *regiones*. Tal como en $\mathbb{R}^2$ un subconjunto de $\mathbb{C}$ se dice *región* si es abierto y conexo. De gran importancia son los conjuntos *simplemente conexos* (ver Figura 1.12).

Definición 1.23. Una región G se dice simplemente conexa si cada trazado poligonal, simplemente cerrado en G incluye solamente puntos de G .

Teorema 1.27 (Teorema de la curva de Jordan). Sea K una curva de Jordan cerrada. Entonces el complemento de K con respecto a $\tilde{\mathbb{C}}$ consiste en dos conjuntos abiertos distintos $I(K)$ y $A(K)$. El conjunto $I(K)$ es una región acotada y simplemente conexa en $\mathbb{C}$ y $A(K) \setminus \{\infty\}$ es una región en $\mathbb{C}$ que es no acotada en $\mathbb{C}$. Las regiones $I(K)$ y $A(K)$ se dicen región interior y región exterior con respecto a K , respectivamente.

El Teorema de la curva de Jordan es plausible, pero la demostración es, sorprendentemente, muy complicada.

Se dice que una curva de Jordan cerrada K posee orientación positiva si al transcurrir K la región interior $I(K)$ siempre se ubica a la izquierda. Para circunferencias orientadas positivamente se utiliza la notación

$$K_r(z_0) := \{z \mid z = z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t); t \in [0, 2\pi]\}.$$

1.12. Ejercicios

Problema 1.1. Demostrar el Teorema 1.3.

Problema 1.2. Demostrar el Teorema 1.7.

Problema 1.3. Demostrar el Teorema 1.9.

Problema 1.4. Demostrar el Teorema 1.14.

Problema 1.5. Demostrar el Teorema 1.21.

Problema 1.6 (Tarea 1, curso 2023).

a) Sean $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calcular las expresiones:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & |3z_1 - 4z_2|, \\ \text{(ii)} & z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8, \\ \text{(iii)} & (\bar{z}_3)^4, \end{array} \quad \text{(iv)} \quad \left| \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right|^2.$$

b) Escribir los siguientes números complejos en forma polar:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 2 + 2\sqrt{3}i, \\ \text{(ii)} & -5 + 5i, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & -\sqrt{6} - \sqrt{2}i, \\ \text{(iv)} & -3i. \end{array}$$

Solución sugerida.

a) (i)

$$\begin{aligned} |3z_1 - 4z_2| &= |3(2 + i) - 4(3 - 2i)| = |6 + 3i - 12 + 8i| \\ &= |-6 + 11i| = \sqrt{(-6)^2 + 11^2} = \sqrt{157} \approx 12,5300. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 &= (2 + i)^3 - 3(2 + i)^2 + 4(2 + i) - 8 \\ &= (2^3 + 3 \cdot 2^2i + 3 \cdot 2i^2 + i^3) - 3(4 + 4i + i^2) + 8 + 4i - 8 \\ &= 8 + 12i - 6 - i - 12 - 12i + 3 + 8 + 4i - 8 = -7 + 3i. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} (\bar{z}_3)^4 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^4 = \left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \left| \frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} \right|^2 &= \left| \frac{2(3 - 2i) + (2 + i) - 5 - i}{2(2 + i) - (3 - 2i) + 3 - i} \right|^2 \\ &= \left| \frac{3 - 4i}{4 + 3i} \right|^2 = \frac{|3 - 4i|^2}{|4 + 3i|^2} = \frac{(\sqrt{3^2 + (-4)^2})^2}{(\sqrt{4^2 + 3^2})^2} = 1. \end{aligned}$$

b) (i) El valor absoluto r y el ángulo polar θ en la representación polar $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ están dados por

$$r = |2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = 4, \quad \theta = \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{4} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/3.$$

- (ii) El valor absoluto r y el ángulo polar θ están dados por

$$r = |-5 + 5i| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}, \quad \theta = 3\pi/4.$$

- (iii) El valor absoluto r y el ángulo polar θ están dados por

$$r = |-\sqrt{6} - \sqrt{2}i| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2}, \quad \theta = 7\pi/6.$$

- (iv) El valor absoluto r y el ángulo polar θ están dados por

$$r = |-3i| = |0 - 3i| = \sqrt{0 + 9} = 3, \quad \theta = 3\pi/2.$$

Problema 1.7 (Tarea 1, curso 2023). Demostrar que $\mathbb{C}$ es isomorfo al espacio de todas las matrices reales de la forma

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.23)$$

Solución sugerida. Denotamos por $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ el espacio de todas las matrices $\mathbf{M}$ de la forma (1.23). Se consideran los cuerpos $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ de los números complejos con la adición y la multiplicación de números complejos, y el conjunto $(\mathcal{M}; +, \cdot)$ de las matrices de la forma indicada con la suma y el producto habitual de matrices 2×2 . Consideremos la aplicación

$$\varphi: \mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \mathbf{M}(x, y) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Para demostrar que φ es un isomorfismo hay que demostrar que φ es una aplicación biyectiva y luego que φ es compatible con las operaciones “+” y “ $\cdot$ ” en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{M}$, respectivamente.

1. Para demostrar que φ es biyectiva, demostramos que es inyectiva y sobreyectiva.

- (i) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$). Si $z_1 \neq z_2$, entonces

$$\varphi(z_1) = \mathbf{M}(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}(x_2, y_2) = \varphi(z_2),$$

es decir $z_1 \neq z_2 \Rightarrow \varphi(z_1) \neq \varphi(z_2)$, por lo tanto φ es inyectiva.

- (ii) Sea $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ arbitraria, entonces necesariamente esta matriz es de la forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{bmatrix}$$

para $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$; por lo tanto podemos escribir $\mathbf{M} = \varphi(z_0)$ con $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.

Concluimos que φ es sobreyectiva y en virtud del ítem (i), biyectiva.

2. Para demostrar que φ define un isomorfismo, hay que demostrar que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \quad (1.24)$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \quad \varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2). \quad (1.25)$$

- (i) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$). Entonces

$$\varphi(z_1 + z_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

con la adición habitual de matrices en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Esto demuestra (1.24).

- (ii) Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ con $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, 3$). Según definición, si $z_3 = z_1 \cdot z_2$, entonces $x_3 = x_1x_2 - y_1y_2$, $y_3 = x_1y_2 + x_2y_1$. Por otro lado,

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{bmatrix},$$

donde utilizamos la multiplicación habitual de matrices en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, es decir

$$\begin{aligned} \varphi(z_1 \cdot z_2) &= \varphi(z_3) = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ -y_3 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2). \end{aligned}$$

Esto demuestra (1.25), y concluimos que φ efectivamente es un isomorfismo.

Problema 1.8 (Tarea 1, curso 2023).

- a) Demostrar las siguientes identidades:

- (i) $\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$,
- (ii) $\sin(5\theta)/\sin \theta = 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1$ ($\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$),
- (iii) $\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos(4\theta) + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}$.

- b) Calcular $((1 + \sqrt{3}i)/(1 - \sqrt{3}i))^{10}$.

Solución sugerida.

- a) (i) De acuerdo a la fórmula de De Moivre,

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) + i \sin(5\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cos^k \theta + (i \sin \theta)^{5-k} \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &\quad + i(5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta), \end{aligned} \tag{1.26}$$

luego, comparando las partes reales,

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta. \end{aligned}$$

- (ii) Comparando las partes imaginarias en (1.26), obtenemos

$$\sin(5\theta) = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$$

o dividiendo por $\sin \theta$, lo que es posible si $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(5\theta)}{\sin \theta} &= 5 \cos^4 \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \\ &= 5 \cos^4 \theta - 10 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1. \end{aligned}$$

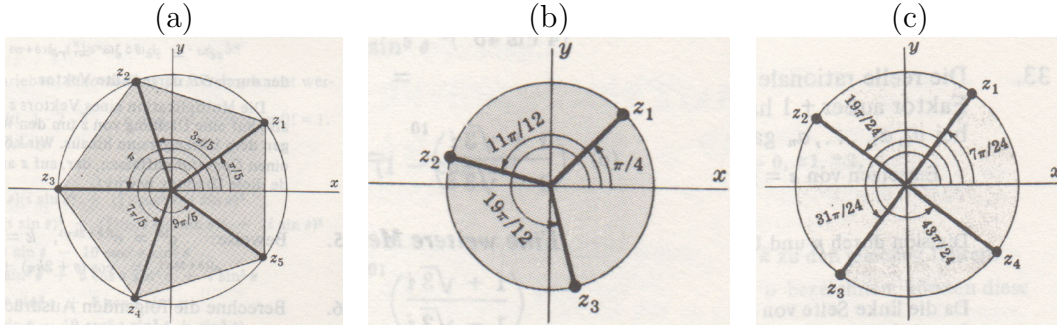


FIGURA 1.13. Ilustración de la solución del Problema 1.9 (a) parte (a), (b) parte (b), ítem (i), (c) parte (b), ítem (ii).

(iii) Aquí obtenemos

$$\begin{aligned}
 \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\
 &= \frac{1}{16} ((e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3 e^{-i\theta} + 6(e^{i\theta})^2 (e^{-i\theta})^2 + 4e^{i\theta} (e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4) \\
 &= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\
 &= \frac{1}{8} \frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + \frac{3}{8} = \frac{\cos(4\theta)}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

b) Utilizando las representaciones en forma polar $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm\pi i/3}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{10} &= \left(\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{-\pi i/3}} \right)^{10} = (e^{2\pi i/3})^{10} = e^{20\pi i/3} = e^{6\pi i} e^{2\pi i/3} = e^{2\pi i/3} \\
 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.
 \end{aligned}$$

Problema 1.9 (Tarea 1, curso 2023).

- Determinar todas las soluciones de $z^5 = -32$ y representarlas en el plano complejo.
- Calcular todas las siguientes raíces y representarlas en el plano complejo:

(i) $(-1 + i)^{1/3}$,

(ii) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$.

Solución sugerida.

- En forma polar tenemos $-32 = 32(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$. Sea $z = r(\cos \theta + i\sin \theta)$, entonces de acuerdo a la fórmula de De Moivre,

$$z^5 = r^5 (\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)) = 32(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)), k \in \mathbb{Z},$$

por lo tanto $r^5 = 32$ y $5\theta = \pi + 2k\pi$, lo que implica $r = 2$ y $\theta = (\pi + 2k\pi/5)$, $k = 0, 1, \dots, 4$. Por lo tanto las soluciones de $z^5 = -32$ son los números

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 4.$$

Específicamente, si denotamos las soluciones por $z_1, \dots, z_5$, correspondientes a $k = 0, 1, \dots, 4$, obtenemos una figura similar a la Figura 1.13 (a).

b) (i) A partir de

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

obtenemos

$$(-1 + i)^{1/3} = 2^{1/6} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Si denotamos por z_1 , z_2 y z_3 la solución correspondiente a $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$, respectivamente, obtenemos una figura similar a la Figura 1.13 (b).

(ii) A partir de

$$-2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

obtenemos

$$(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4} = 4^{1/4} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, \dots, 3.$$

Si denotamos por z_1 , z_2 , z_3 y z_4 la solución correspondiente a $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ y $k = 3$, respectivamente, obtenemos una figura similar a la Figura 1.13 (c).

Problema 1.10 (Evaluación 1, curso 2023). Determinar y visualizar todas las soluciones de las ecuaciones

a) $z^5 = 3 + 4i$,

b) $e^{z^2+1} = 1$.

Solución sugerida.

a) Notando que

$$3 + 4i = 5(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad \theta = \arcsin \frac{4}{5} \approx 0,9273$$

y que $5^{1/5} \approx 1,3797$ obtenemos las soluciones

$$z_\nu = 5^{1/5} \left(\cos \left(\frac{1}{5} \arcsin \frac{4}{5} + \frac{2\nu}{5} \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{5} \arcsin \frac{4}{5} + \frac{2\nu}{5} \pi \right) \right), \quad \nu = 0, \dots, 4,$$

es decir $z_0 \approx 1,3561 + 0,2544i$, $z_1 \approx 0,1771 + 1,3683i$, $z_2 \approx -1,2466 + 0,5912i$, $z_3 \approx -0,9475 - 1,0029i$, $z_4 \approx 0,6610 - 1,2111i$. Ver Figura 1.14.

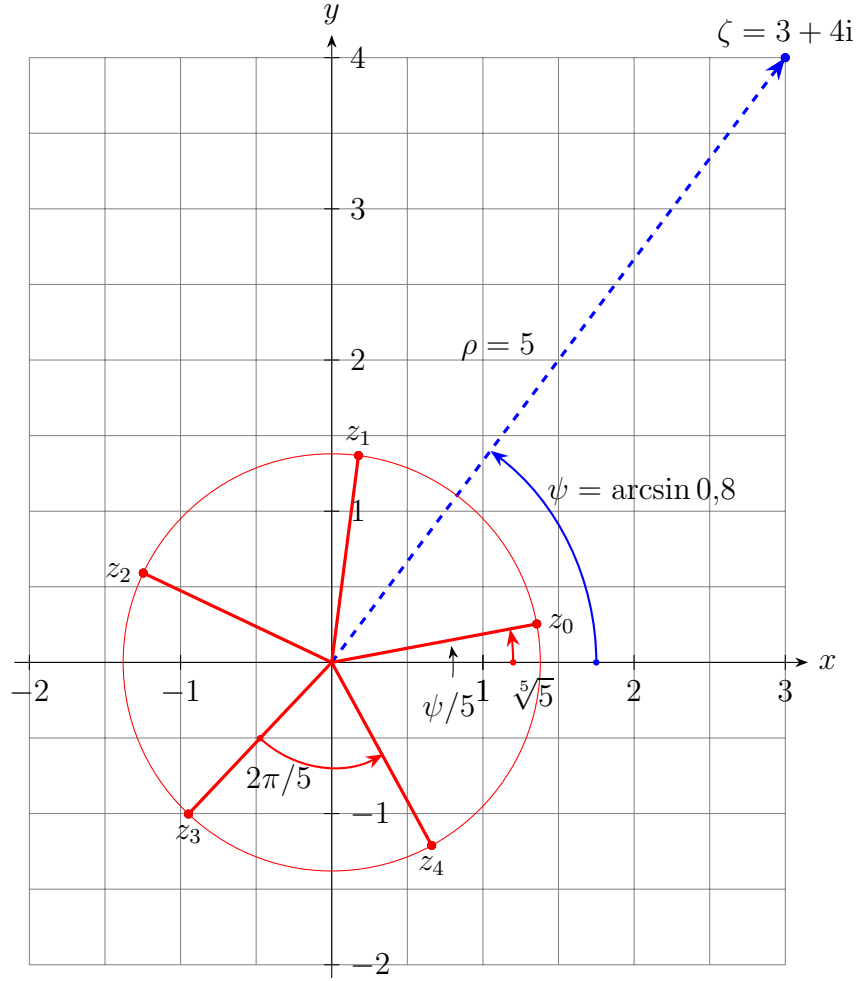


FIGURA 1.14. Ilustración de la solución del Problema 1.10 (a).

- b) Consideremos primeramente la ecuación $e^p = 1$, para luego resolver $z^2 + 1 = p$. Es sabido que las soluciones de $e^p = 1$ son los números $p_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$ (tomando en cuenta que una solución es $p = 0$ y la función $z \mapsto e^z$ es $2\pi i$ -periódica). Consideremos ahora la ecuación $z_k^2 + 1 = p_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), la cual para cada valor de k posee dos soluciones, denotadas por $z_{k,0}$ y $z_{k,1}$. Para resolver esta ecuación, es decir

$$z_k^2 = p_k - 1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

notamos primeramente que $p_k - 1 = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, donde

$$r_k = |p_k - 1| = |2\pi i k - 1| = \sqrt{1 + 4\pi^2 k^2},$$

$$\theta_k = \arg(p_k - 1) = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{2\pi k}{r_k} & \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, \\ \pi + \arcsin \frac{2\pi(-k)}{r_k} & \text{para } k = -1, -2, \dots \end{cases}$$

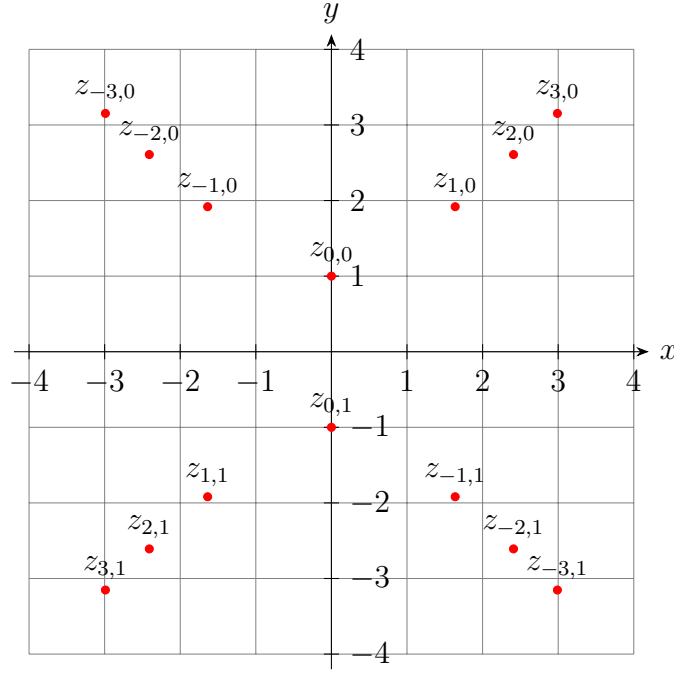


FIGURA 1.15. Ilustración de la solución del Problema 1.10 (b).

$$= \pi - \arcsin \frac{2\pi k}{r_k} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}.$$

Con estas constantes obtenemos todas las soluciones:

$$\begin{aligned} z_{k,0} &= r_k^{1/2} \left(\cos \left(\frac{\theta_k}{2} + 0 \cdot \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_k}{2} + 0 \cdot \frac{2\pi}{2} \right) \right) \\ &= r_k^{1/2} \left(\cos \frac{\theta_k}{2} + i \sin \frac{\theta_k}{2} \right), \\ z_{k,1} &= r_k^{1/2} \left(\cos \left(\frac{\theta_k}{2} + 1 \cdot \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_k}{2} + 1 \cdot \frac{2\pi}{2} \right) \right) \\ &= r_k^{1/2} \left(\cos \left(\frac{\theta_k}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta_k}{2} + \pi \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Obtenemos para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$:

$$\begin{aligned} z_{0,0} &= i, \quad z_{0,1} = -i; \\ z_{-1,0} &\approx -1,6374 + 1,9186i, \quad z_{-1,1} \approx 1,6374 - 1,9186i; \\ z_{1,0} &\approx 1,6374 + 1,9186i, \quad z_{1,1} \approx -1,6374 - 1,9186i; \\ z_{-2,0} &\approx -2,4090 + 2,6083i, \quad z_{-2,1} \approx 2,4090 - 2,6083i; \\ z_{2,0} &\approx 2,4090 + 2,6083i, \quad z_{2,1} \approx -2,4090 - 2,6083i; \\ z_{-3,0} &\approx -2,9897 + 3,1525i, \quad z_{-3,1} \approx 2,9897 - 3,1525i; \\ z_{3,0} &\approx 2,9897 + 3,1525i, \quad z_{3,1} \approx -2,9897 - 3,1525i, \end{aligned}$$

ver Figura 1.15.

Problema 1.11 (Tarea 1, curso 2023). Para $z, z' \in \tilde{\mathbb{C}}$ definimos

$$\delta(z, z') := \begin{cases} \frac{|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}} & \text{para } z, z' \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} & \text{para } z \in \mathbb{C}, z' = \infty, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z'|^2}} & \text{para } z = \infty, z' \in \mathbb{C}, \\ 0 & \text{para } z = z' = \infty. \end{cases}$$

Demostrar que $(\tilde{\mathbb{C}}, \delta)$ es un espacio métrico.

Solución sugerida. Hay que verificar que la función δ define una métrica sobre $\tilde{C}$.

1. La función δ es no negativa y $\delta(z_1, z_2) = 0$ sólo si $z_1 = z_2 \in \mathbb{C}$ o $z_1 = z_2 = \infty$.
2. Para $z_1, z_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$ se tiene obviamente $\delta(z_1, z_2) = \delta(z_2, z_1)$.
3. Para verificar la desigualdad triangular

$$\delta(z_1, z_2) \leq \delta(z_1, z_3) + \delta(z_2, z_3) \quad \text{para todo } z_1, z_2, z_3 \in \tilde{\mathbb{C}}$$

basta considerar el caso $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$ (los demás casos son triviales).

(i) Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)(1 + z_3 \bar{z}_3) &= z_1 - z_2 + z_1 z_3 \bar{z}_3 - z_2 z_3 \bar{z}_3 \\ &= z_1 - z_3 + z_3 - z_2 + z_1 z_2 \bar{z}_3 - z_1 z_2 \bar{z}_3 + z_1 z_3 \bar{z}_3 - z_2 z_3 \bar{z}_3 \\ &= (z_1 - z_3)(1 + z_2 \bar{z}_3) + (z_3 - z_2)(1 + z_1 \bar{z}_3) \end{aligned}$$

implica

$$|z_1 - z_2|(1 + |z_3|^2) \leq |z_1 - z_3|(1 + |z_2 \bar{z}_3|) + |z_3 - z_2|(1 + |z_1 \bar{z}_3|). \quad (1.27)$$

Ahora notamos que para todo $u, v \in \mathbb{C}$, $|\bar{u} - v|^2 \geq 0$ o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \bar{u}u - \bar{u}v - uv + v\bar{v} &\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad uv + \bar{u}v \leq |u|^2 + |v|^2 \\ \Leftrightarrow \quad 1 + uv + \bar{u}v + u\bar{u}v\bar{v} &\leq 1 + |u|^2 + |v|^2 + |u|^2|v|^2 \\ \Leftrightarrow \quad (1 + uv)(1 + \bar{u}v) &\leq (1 + |u|^2)(1 + |v|^2). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Aplicando (1.28) para $u = z_2$, $v = \bar{z}_3$ obtenemos

$$|1 + z_2 \bar{z}_3|^2 = (1 + z_2 \bar{z}_3)(1 + \bar{z}_2 z_3) \leq (1 + |z_2|^2)(1 + |z_3|^2)$$

y análogamente

$$|1 + z_1 \bar{z}_3|^2 = (1 + z_1 \bar{z}_3)(1 + \bar{z}_1 z_3) \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_3|^2)$$

A partir de (1.27) obtenemos ahora

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|(1 + |z_3|^2) &\leq |z_1 - z_3|\sqrt{1 + |z_2|^2}\sqrt{1 + |z_3|^2} \\ &\quad + |z_3 - z_2|\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_3|^2} \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} \leq \frac{|z_1 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_3|^2}} + \frac{|z_3 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_2|^2}\sqrt{1 + |z_3|^2}}, \quad (1.29)$$

es decir la desigualdad triangular.

- (ii) El segundo caso por considerar es $z_1 = \infty$, $z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, donde basta tomar en cuenta que para $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $\varphi_1 \in \mathbb{R}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta(z_1, z_2) &= \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} = \frac{|z_1| |e^{i\varphi_1} - z_2/|z_1||}{|z_1| \sqrt{\frac{1}{|z_1|^2} + 1} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \\ &= \frac{|e^{i\varphi_1} - z_2/|z_1||}{\sqrt{1/|z_1|^2 + 1} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \xrightarrow{|z_1| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + |z_2|^2}} = \delta(\infty, z_2) \end{aligned}$$

Cómo para z_i fijo, $i = 2, 3$, tenemos $\delta(\infty, z_i) = \lim_{|z_1| \rightarrow \infty} \delta(z_1, z_i)$, es decir considerando el límite $|z_1| \rightarrow \infty$ en (1.29) llegamos a $\delta(\infty, z_2) \leq \delta(\infty, z_3) + \delta(z_2, z_3)$.

- (iii) Por simetría la discusión anterior también cubre el caso $z_2 = \infty$, $z_1, z_3 \in \mathbb{C}$.
 (iv) Por argumentos análogos el enunciado sigue también para $z_3 = \infty$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Problema 1.12 (Tarea 2, curso 2023).

- a) Para $a, b > 0$ sea la curva K definida por

$$K = \{z \mid z = a \cos t + ib \sin t, t \in [-\pi, \pi]\}.$$

Demostrar que K es rectificable.

- b) Sea la curva K definida por

$$K = \{z \mid z(t) = t(\cos(1/t) + i \sin(1/t)), 0 < t \leq 1, z(0) = 0\}.$$

Demostrar que K es una curva de Jordan.

- c) ¿La curva K de la parte (b) es rectificable?

Solución sugerida.

- a) Podemos utilizar el Teorema 1.26. En nuestro caso, la variación total de las funciones $x : [-\pi, \pi] \ni t \mapsto a \cos t$ y $y : [-\pi, \pi] \ni t \mapsto b \sin t$ es $2a$ y $2b$, respectivamente, por lo tanto ambas funciones son de variación acotada y K efectivamente es rectificable.
 b) Para demostrar que K es una curva de Jordan, hay que verificar que (1) si $z(t) = x(t) + iy(t)$, entonces x, y son funciones continuas sobre $[0, 1]$, y (2) si $z(t_1) = z(t_2)$, entonces $t_1 = t_2$ o $t_1 \in \{0, 1\}$, $t_2 = 1 - t_1$. En nuestro caso, $x(t) = t \cos(1/t)$, $y(t) = t \sin(1/t)$.
 1. Las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son continuas sobre $(0, 1]$, además se verifica fácilmente que $x(t), y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, $t > 0$, así que ambas funciones son continuas sobre $[0, 1]$.
 2. Como $z(1) = \cos 1 + i \sin 1 \neq 0 = z(0)$ y $z(t) \neq 0$ para $t > 0$, hay que demostrar que $z(t_1) = z(t_2)$ implica $t_1 = t_2$ para $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. Aquí basta notar que

$$z(t_1) = z(t_2) \quad \Rightarrow \quad |z(t_1)| = |z(t_2)| \quad \Leftrightarrow \quad |t_1| = |t_2|,$$

lo que para $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ implica $t_1 = t_2$. Concluimos que K efectivamente es una curva de Jordan.

c) La curva K no es rectificable. Para demostrar esto consideremos la partición $P^{(n)} = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[0, 1]$ con $t_0 := 0$ y $t_k := 1/((n-k)\pi + 1)$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned}
 & |z(t_k) - z(t_{k-1})|^2 \\
 &= \left(t_k \cos\left(\frac{1}{t_k}\right) - t_{k-1} \cos\left(\frac{1}{t_{k-1}}\right) \right)^2 + \left(t_k \sin\left(\frac{1}{t_k}\right) - t_{k-1} \sin\left(\frac{1}{t_{k-1}}\right) \right)^2 \\
 &= t_k^2 + t_{k-1}^2 - 2t_k t_{k-1} \left(\cos\left(\frac{1}{t_k}\right) \cos\left(\frac{1}{t_{k-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{t_k}\right) \sin\left(\frac{1}{t_{k-1}}\right) \right) \\
 &= t_k^2 + t_{k-1}^2 - 2t_k t_{k-1} \cos\left(\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k-1}}\right) \\
 &= t_k^2 + t_{k-1}^2 - 2t_k t_{k-1} \cos(-\pi) = (t_k + t_{k-1})^2
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 L_{P^{(n)}}(K) &= \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| \geq \sum_{k=2}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| \\
 &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(n-k)\pi + 1} + \frac{1}{(n-(k-1))\pi + 1} \right) \\
 &\geq \sum_{k=2}^n \frac{2}{(n-(k-1))\pi + 1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k\pi + 1} \\
 &\geq \frac{1}{\pi} H(n-1), \quad H(n) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

Como $H(n)$ es la suma parcial de la serie armónica y es sabido que $H(n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, vemos que $L_{P^{(n)}}(K) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo tanto K no es rectificable.

Funciones de una variable compleja

2.1. Introducción

Consideraremos ahora aplicaciones $f : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$. La continuidad de una función de este tipo es un caso especial de la continuidad de una aplicación de un espacio topológico en otro.

Definición 2.1. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$.

1. La aplicación f se dice continua en $x_0 \in D(f)$ si para cada vecindad $V \subset Y$ con $y_0 = f(x_0) \in V$ existe una vecindad $U \subset X$ de x_0 tal que para todo $x \in U \cap D(f)$ se tiene $f(x) \in V$.
2. La aplicación f se dice continua sobre $X_0 \subset D(f)$ si f es continua en todos los puntos $x_0 \in X_0$.

Comentamos que si X e Y son espacios métricos, esta definición recupera la definición habitual de la continuidad (expresada en términos de ε y δ , etc.).

Para las aplicaciones es muy útil el siguiente teorema que expresa la equivalencia de la definición de la continuidad en términos de vecindades con el concepto de la continuidad basada en sucesiones.

Teorema 2.1. Sea $f : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$. Entonces f es continua en $z_0 \in D(f)$ (en el sentido de la Definición 2.1) si y sólo si para cada sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(f)$ con $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración.

1. Sea f continua en z_0 , entonces para una vecindad $V(f(z_0))$ de $f(z_0)$ existe una vecindad $U(z_0)$ de z_0 tal que $f(z) \in V(f(z_0))$ para todo $z \in U(z_0) \cap D(f)$. Sea ahora $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en $D(f)$ con $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in U(z_0)$ para todo $n > N$. Para estos valores de n se tiene entonces $f(z_n) \in V(f(z_0))$, lo que implica que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$.
2. Supongamos ahora que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ para cada sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(f)$ tal que $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Supongamos que f no fuera continua en z_0 . Entonces para cierta vecindad $V(f(z_0))$ no existe ninguna vecindad $U(z_0)$ tal que para todo $z \in U(z_0) \cap D(f)$ se tiene $f(z) \in V(f(z_0))$. Si para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U^{(n)}(z_0) := \begin{cases} U_{1/n}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < 1/n\} & \text{si } z_0 \in \mathbb{C}, \\ \{z \mid |z| > n\} & \text{si } z_0 = \infty, \end{cases}$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in U^{(n)}(z_0)$ con $f(z_n) \notin V(f(z_0))$. En tal caso, $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero por otro lado, $f(z_n) \not\rightarrow f(z_0)$, lo que se contradice con la hipótesis.

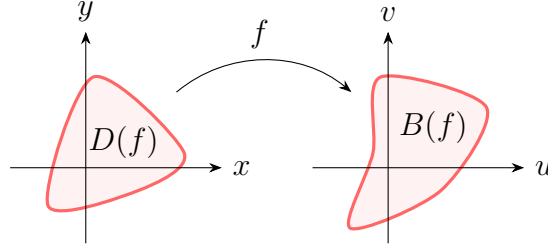


FIGURA 2.1. Parte real u y parte imaginaria v de una función $f : \mathbb{C} \supset D(f) \rightarrow B(f) \subset \mathbb{C}$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ (ver Definición 2.3).

Ejemplo 2.1. La función $f(z) = 1/z$ con $D(f) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ es continua sobre $D(f)$. Para comprobar esto, consideremos $z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, entonces para cada sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(f)$ con $z_n \rightarrow z_0$ se tiene que

$$f(z_n) = \frac{1}{z_n} \rightarrow \frac{1}{z_0} = f(z_0) \quad \text{si } z_0 \neq \infty; \quad f(z_n) = \frac{1}{z_n} \rightarrow 0 = f(\infty) \quad \text{si } z_0 = \infty.$$

Definiremos ahora límites de funciones.

Definición 2.2. Sea $f : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ y $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ un punto de acumulación de $D(f)$. Definimos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c \quad (c \in \tilde{\mathbb{C}})$$

si para cada sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(f) \setminus \{z_0\}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c.$$

El siguiente teorema es análogo al resultado establecido para el $\mathbb{R}^n$ y establece la conexión entre la existencia de límites y la continuidad.

Teorema 2.2. Sea $f : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$. Si $z_0 \in D(f)$ es un punto de acumulación de $D(f)$, entonces f es continua en z_0 si y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Incluimos el punto ∞ principalmente por el motivo de la discusión de las llamadas transformaciones fraccionarias lineales (ver Sección 2.4). Queremos ahora estudiar las aplicaciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Tal aplicación, evidentemente, es una aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Escribimos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde u se llama parte real y v parte imaginaria de la función f , ver Figura 2.1.

De acuerdo a la discusión en el Cálculo III tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3. Sea $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f es continua en $z_0 = (x_0, y_0) \in D(f)$ si y sólo si ambas funciones u y v son continuas en (x_0, y_0) .

2.2. Series infinitas de números complejos

Queremos ahora estudiar series infinitas de números complejos. Las definiciones y los teoremas decisivos son análogos al caso real.

Definición 2.4. Sea $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Entonces la sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$s_n = \sum_{\nu=1}^n z_\nu$$

se dice serie infinita, denotada por $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$. La suma s_n se llama n -ésima suma parcial de la serie.

Definición 2.5. Se dice que la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ converge a la suma s si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. En este caso escribimos

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu = s.$$

Una serie que no converge se llama divergente.

Comentamos que frecuentemente estudiaremos series de la forma $\sum_{\nu=n_0}^{\infty} z_\nu$, donde la suma comienza por un índice $n_0 \in \mathbb{Z}$.

El teorema sobre la convergencia por coordenadas de sucesiones puede ser aplicado a series en la siguiente forma.

Teorema 2.4. Sea $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ para $\nu \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ converge si y sólo si ambas series $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ y $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu$ convergen. En este caso,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu + i \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu.$$

Demostración.

1. De acuerdo al Teorema 1.17 la sucesión

$$s_n = \sum_{\nu=1}^n z_\nu$$

converge si y sólo si ambas sucesiones

$$\operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{\nu=1}^n z_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} \left(\sum_{\nu=1}^n z_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^n y_\nu$$

convergen, es decir si ambas series $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ y $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu$ convergen.

2. De acuerdo al Teorema 1.17,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n y_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\nu} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n y_{\nu}.$$

■

Teorema 2.5 (Criterio de convergencia de Cauchy). *La serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu}$ converge si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe N_{ε} tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m > N_{\varepsilon}$,*

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^n z_{\nu} \right| < \varepsilon.$$

Demostración. El enunciado es una consecuencia inmediata de

$$s_n - s_m = \sum_{\nu=1}^n z_{\nu} - \sum_{\nu=1}^m z_{\nu} = \sum_{\nu=m+1}^n z_{\nu}$$

y del criterio de convergencia de Cauchy para sucesiones (Teorema 1.18). ■

Tal como en el caso real, el criterio de convergencia de Cauchy implica que los miembros de una serie convergente necesariamente forman una sucesión nula.

Definición 2.6. *La serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu}$ se dice*

1. *absolutamente convergente si $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_{\nu}|$ converge, y*
2. *condicionalmente convergente si es convergente pero no absolutamente convergente.*

Además, tal como en el caso real tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *Si la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu}$ es absolutamente convergente, también es convergente.*

Demostración. En virtud de

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^n z_{\nu} \right| \leq \sum_{\nu=m+1}^n |z_{\nu}|$$

el enunciado es una consecuencia inmediata del criterio de convergencia de Cauchy. ■

Con respecto a las partes real e imaginaria tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Sea $z_{\nu} = x_{\nu} + iy_{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Entonces la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu}$ es absolutamente convergente si y sólo si ambas series $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\nu}$ y $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_{\nu}$ son absolutamente convergentes.*

Demostración.

1. Si $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_{\nu}|$ es convergente, entonces debido a $|x_{\nu}| \leq |z_{\nu}|$ e $|y_{\nu}| \leq |z_{\nu}|$ también $\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_{\nu}|$ y $\sum_{\nu=1}^{\infty} |y_{\nu}|$ son convergentes.
2. Si ambas series $\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_{\nu}|$ y $\sum_{\nu=1}^{\infty} |y_{\nu}|$ son convergentes, entonces debido a $|z_{\nu}| \leq |x_{\nu}| + |y_{\nu}|$ también la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_{\nu}|$ es convergente.

■

Comentamos que para decidir sobre la convergencia absoluta de $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu}$ cualquier criterio para series reales con sumandos no negativos puede ser utilizado. En particular se pueden aplicar el criterio de la raíz y el criterio del cociente, tal como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2. Consideremos la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!}. \quad (2.1)$$

Esta serie converge trivialmente para $z = 0$. Para $z \neq 0$ tenemos

$$\frac{|z^{\nu+1}|}{(\nu+1)!} \cdot \frac{\nu!}{|z^{\nu}|} = \frac{|z|}{\nu+1} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0,$$

por lo tanto de acuerdo al criterio del cociente la serie (2.1) es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.3. Consideremos la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}. \quad (2.2)$$

Esta serie converge trivialmente para $z = 0$. Para $z \neq 0$ podemos nuevamente aplicar el criterio del cociente para demostrar que la serie (2.2) es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.4. Consideremos la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu}}{(2\nu)!}. \quad (2.3)$$

Esta serie converge trivialmente para $z = 0$. Para $z \neq 0$ podemos nuevamente aplicar el criterio del cociente para demostrar que la serie (2.2) es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Para la multiplicación de series tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.8 (Teorema de Mertens para series complejas). Sea la serie

$$s = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_{\nu}$$

absolutamente convergente y

$$s' = \sum_{\nu=0}^{\infty} z'_{\nu}$$

convergente, entonces para el producto de Cauchy se tiene

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} = s \cdot s', \quad \text{donde} \quad c_{\nu} := \sum_{\mu=0}^{\nu} z_{\nu-\mu} z'_{\mu}.$$

La demostración del Teorema 2.8 está basada en el teorema análogo para series reales.

Teorema 2.9 (Teorema de Mertens para series reales). Sean $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ y $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}$ series convergentes reales, es decir $a_{\nu}, b_{\nu} \in \mathbb{R}$ para todo $\nu \in \mathbb{N}_0$. Sea

$$A := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}, \quad B := \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}.$$

Además consideramos el producto de Cauchy de ambas series definido por la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n, \quad \text{donde} \quad d_n := \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu} b_{\nu} = \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

Si una de las series es incluso absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ converge, y se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = AB.$$

Demostración del Teorema 2.9. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ es absolutamente convergente. Sea

$$A_n := \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}, \quad B_n := \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}, \quad d_n := \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu} b_{\nu} = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} b_{n-\nu},$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n d_{\nu} &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 = \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu} (B_{\nu} - B) + B \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A,$$

basta demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu}(B_\nu - B) = 0. \quad (2.4)$$

Para tal efecto consideremos $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|B_\nu - B| < \varepsilon$ para todo $\nu > N$. Ahora, si $n > N$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu}(B_\nu - B) \right| &\leq \sum_{\nu=0}^N |a_{n-\nu}| |B_\nu - B| + \sum_{\nu=N+1}^n |a_{n-\nu}| |B_\nu - B| \\ &\leq \max_{0 \leq \nu \leq N} |B_\nu - B| \sum_{\nu=0}^N |a_{n-\nu}| + \varepsilon \sum_{\nu=N+1}^n |a_{n-\nu}| \\ &\leq \max_{0 \leq \nu \leq N} |B_\nu - B| \sum_{\nu=0}^N |a_{n-\nu}| + \varepsilon \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|. \end{aligned}$$

Si fijamos N , entonces a partir de $a_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu}(B_\nu - B) \right| \leq \varepsilon \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|.$$

Como $\varepsilon > 0$ ha sido elegido arbitrario, obtenemos (2.4), lo que concluye la demostración del teorema. ■

Demostración del Teorema 2.8. Para $\nu \in \mathbb{N}_0$ sea $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ y $z'_\nu = x'_\nu + iy'_\nu$. Entonces de acuerdo al Teorema 2.7, ambas series $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ y $\sum_{\nu=0}^{\infty} y_\nu$ son ambas absolutamente convergentes y de acuerdo al Teorema 2.4, ambas series $\sum_{\nu=0}^{\infty} x'_\nu$ y $\sum_{\nu=0}^{\infty} y'_\nu$ son ambas convergentes; además,

$$c_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} x_{\nu-\mu} x'_\mu - \sum_{\mu=0}^{\nu} y_{\nu-\mu} y'_\mu + i \sum_{\mu=0}^{\nu} x_{\nu-\mu} y'_\mu + i \sum_{\mu=0}^{\nu} y_{\nu-\mu} x'_\mu.$$

A partir del Teorema 2.9 y del Teorema 2.4 obtenemos a partir de esta identidad la convergencia de la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ a la suma $s \cdot s'$. ■

2.3. Las funciones e^z , $\cos z$ y $\sin z$

Los ejemplos 2.2, 2.3 y 2.4 coinciden para $x \in \mathbb{R}$ con las series para e^x , $\sin x$, y $\cos x$, respectivamente. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.7. Para $z \in \mathbb{C}$ definimos

$$e^z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}, \quad (2.5)$$

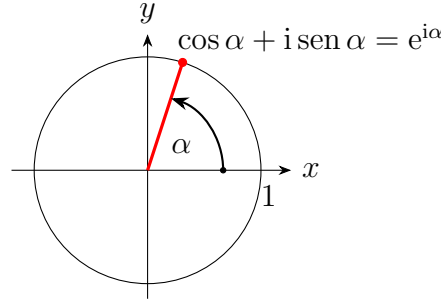


FIGURA 2.2. Ilustración del Teorema 2.11.

$$\cos z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad (2.6)$$

$$\sin z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}. \quad (2.7)$$

Para la función exponencial $e^z \equiv \exp(z)$ podemos, mediante la multiplicación de series, verificar la ecuación funcional característica también para argumentos complejos.

Teorema 2.10. *Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.8,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z_1^{\nu}}{\nu!} \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z_2^{\mu}}{\mu!} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{z_1^{\nu-\mu} z_2^{\mu}}{(\nu-\mu)! \mu!} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\nu!}{(\nu-\mu)! \mu!} z_1^{\nu-\mu} z_2^{\mu} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^{\nu}}{\nu!} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

■

Las expresiones de interés particular son $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.11. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ (ver Figura 2.2).*

Demostración. En virtud de

$$i^{\nu} = \begin{cases} (-1)^{\mu} & \text{si } \nu = 2\mu, \mu \in \mathbb{N}_0, \\ i(-1)^{\mu} & \text{si } \nu = 2\mu + 1, \mu \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

obtenemos

$$e^{i\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\alpha^{2\mu}}{(2\mu)!} + i \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\alpha^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

■

A partir de lo anterior obtenemos inmediatamente una representación muy simple de e^z .

Teorema 2.12. *Si $z = x + iy$, entonces $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.*

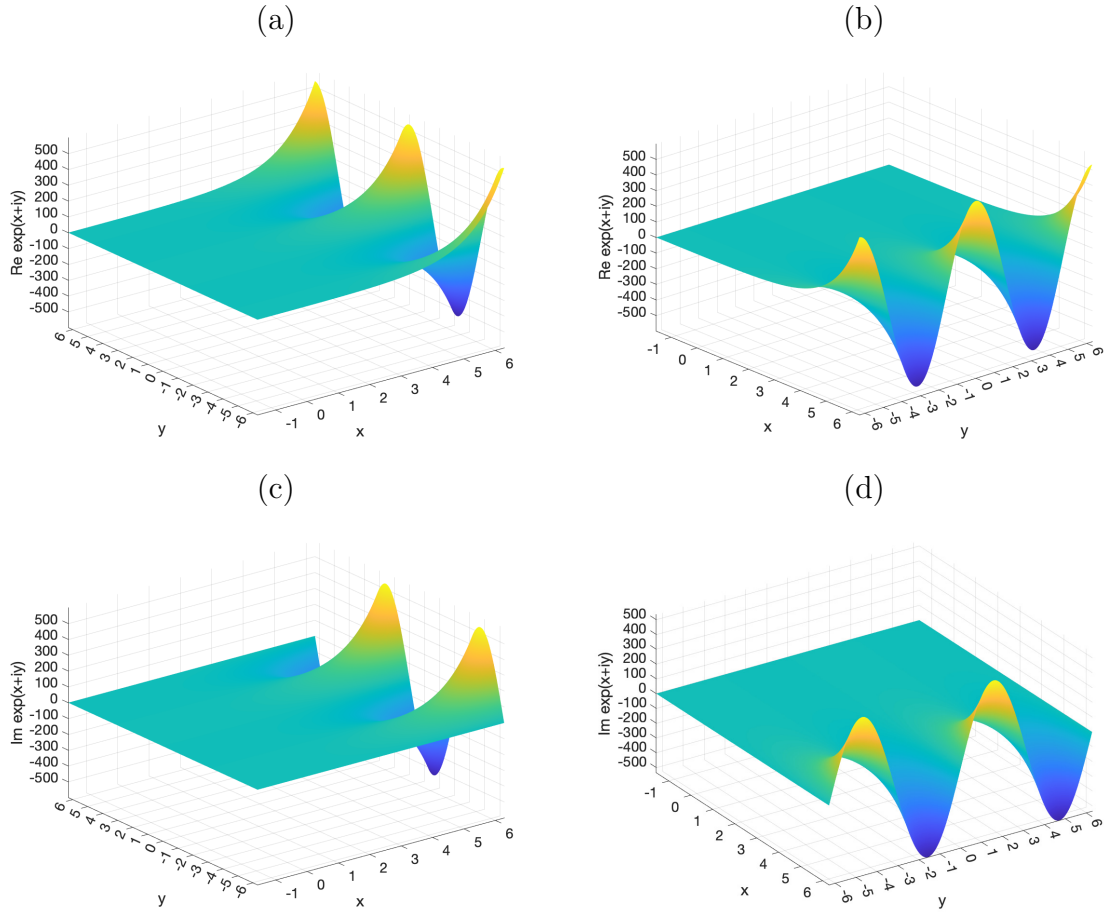


FIGURA 2.3. (a, b) Parte real y (c, d) parte imaginaria de la función $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sen y)$.

Demostración. A partir de los Teoremas 2.10 y 2.11 obtenemos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sen y).$$

■

Comentamos que los Teoremas 2.10 y 2.11 inmediatamente implican que la función e^z es periódica con el período $2\pi i$, ya que

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos(2\pi) + i \sen(2\pi)) = e^z,$$

ver Figura 2.3.

Las funciones e^z , $\cos z$ y $\sen z$ aparentemente no están relacionadas entre sí para $z \in \mathbb{R}$, pero para $z \in \mathbb{C}$ satisfacen las identidades formuladas en el siguiente teorema.

Teorema 2.13. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad (2.8)$$

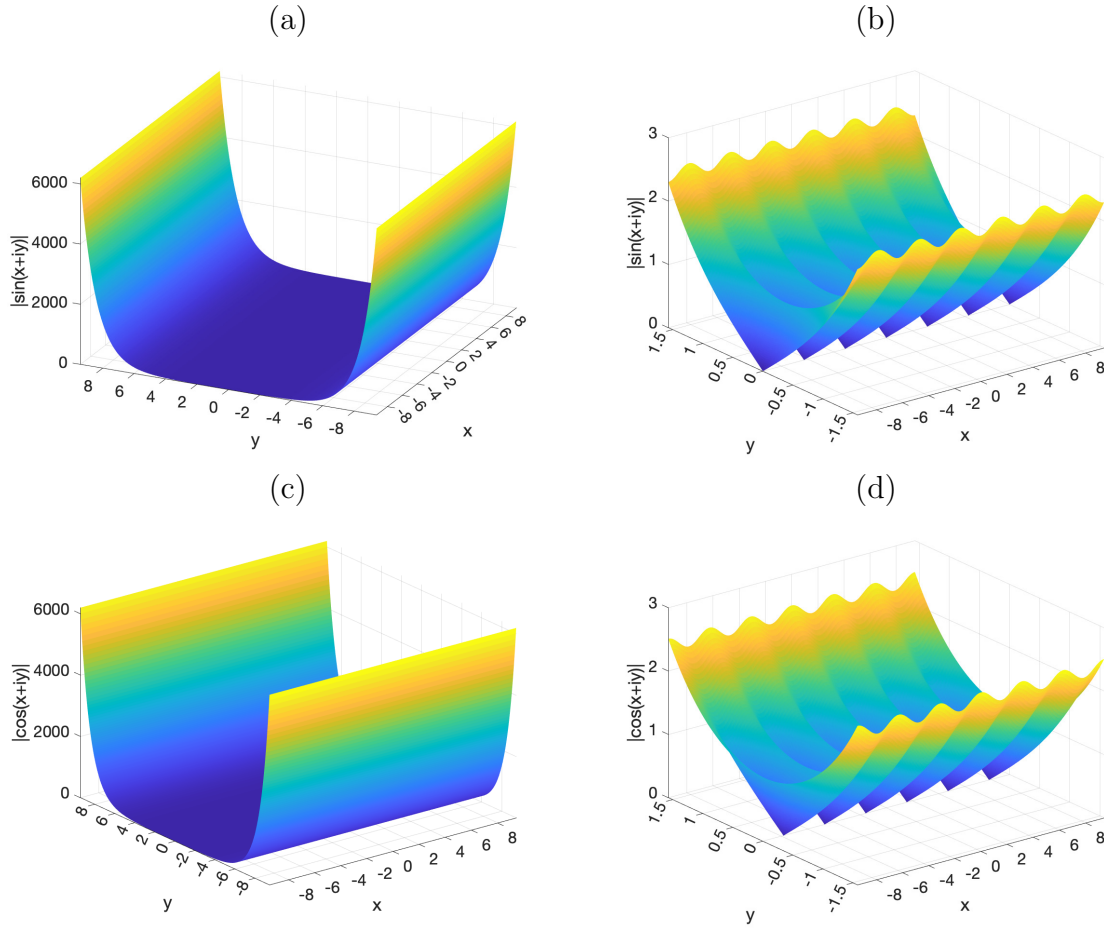


FIGURA 2.4. Valores absolutos (a, b) de la función $\text{sen } z = \text{sen}(x + iy)$, (c, d) de la función $\text{cos } z = \text{cos}(x + iy)$.

$$\text{sen } z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \quad (2.9)$$

Demostración. Para demostrar (2.8) calculamos

$$e^{iz} + e^{-iz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{(iz)^{\nu}}{\nu!} + \frac{(-iz)^{\nu}}{\nu!} \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (i^{\nu} + (-i)^{\nu}) \frac{z^{\nu}}{\nu!} = 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} z^{2\mu}}{(2\mu)!} = 2 \cos z.$$

La demostración de (2.9) es análoga. ■

Comentario 2.1. Notamos que en el plano complejo, las funciones $\text{sen } z$ y $\text{cos } z$ son no acotadas, lo que evidencia la discusión de las fórmulas (2.8) y (2.9) para $\text{Im } z \rightarrow \infty$ o $\text{Im } z \rightarrow -\infty$, ver también Figura 2.4. Esta propiedad, conjuntamente con la periodicidad de la función e^z , representa comportamientos muy diferentes de las funciones $\text{sen } z$, $\text{cos } z$ y e^z de lo que se conoce para el caso $z \in \mathbb{R}$.

A partir de este resultado obtenemos los teoremas de adición para $\text{cos } z$ y $\text{sen } z$.

Teorema 2.14. *Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1. \quad (2.11)$$

Demostración. Tarea. ■

El Teorema 2.14 implica que las funciones $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son periódicas con el período 2π porque

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \cos(2\pi) - \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(2\pi) = \cos z,$$

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z \cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi) \cos z = \operatorname{sen} z.$$

Teorema 2.15. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1.$$

Demostración.

1. A partir de las definiciones de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ obtenemos inmediatamente

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z.$$

2. Se tiene

$$1 = \cos 0 = \cos(z - z) = \cos z \cos(-z) - \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(-z) = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z.$$

■

Finalmente demostramos la continuidad de las funciones consideradas.

Teorema 2.16. *Las funciones e^z , $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son continuas sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración.

1. De acuerdo al Teorema 2.12,

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = u(x, y) + iv(x, y).$$

Como u y v son continuas sobre $\mathbb{R}^2$, el Teorema 2.3 implica la continuidad de e^z sobre $\mathbb{C}$.

2. En virtud del Teorema 2.13 la continuidad de las funciones e^{iz} y e^{-iz} implica la continuidad de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ sobre $\mathbb{C}$.

■

2.4. Transformaciones fraccionarias lineales

Las *transformaciones fraccionarias lineales*, conocidas también como *transformaciones de Möbius*, forman una clase particular de funciones y representan un buen ejemplo introductorio de las aplicaciones de $\hat{\mathbb{C}}$ ya que su teoría es cerrada y sus resultados pueden ser visualizados geoméricamente.

2.4.1. Definición de las transformaciones fraccionarias lineales.

Definición 2.8. Para $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \quad (2.12)$$

la aplicación

$$l: \tilde{\mathbb{C}} = D(f) \ni z \mapsto l(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \tilde{\mathbb{C}}$$

se llama transformación fraccionaria lineal.

Comentario 2.2. De acuerdo a nuestro convenio, ponemos en el caso $c \neq 0$

$$l(-d/c) = \frac{a(-d/c) + b}{0} = \infty, \quad l(\infty) = \frac{a + b/\infty}{c + d/\infty} = a/c$$

y en el caso $c = 0$, $l(\infty) = \infty$.

Comentario 2.3. El requerimiento (2.12), es decir la no singularidad de la matriz de coeficientes

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2},$$

asegura que

$$w = l(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.13)$$

efectivamente define una aplicación no trivial, ya que esta condición no sólo excluye que a y b , o c y d se anulen simultáneamente, sino que también excluye que $w = l(z)$ sea igual una constante. Tenemos que considerar también que la matriz $\mathbf{M}$ asociada a una transformación fraccionaria lineal l dada es definida en forma única sólo hasta la multiplicación de los cuatro coeficientes por un factor $\lambda \neq 0$ común, ya que para todo $\lambda \neq 0$,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}.$$

Esta observación puede ser aprovechada para normalizar la matriz $\mathbf{M}$ en tal forma que $\det \mathbf{M} = 1$. En tal caso la matriz de coeficientes de la transformación fraccionaria lineal es determinada en forma única hasta un factor ± 1 .

Teorema 2.17. Una transformación fraccionaria lineal (2.13) describe una aplicación biyectiva $\tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$. La aplicación inversa $z = l^{-1}(w)$ nuevamente es una transformación fraccionaria lineal dada por

$$z = l^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}. \quad (2.14)$$

Demostración.

1. Sea $c \neq 0$. Para la aplicación inversa definimos $l^{-1}(a/c) = \infty$ y $l^{-1}(\infty) = -d/c$. Para todo $z \neq -d/c$ la identidad

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

implica que $z(wc - a) = -dw + b$, luego para $w \neq a/c$,

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Es decir, z es determinado en forma única para todo $w \neq a/c$.

2. Sea $c = 0$. Definimos $l^{-1}(\infty) = \infty$. Para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

inmediatamente implica que

$$z = \frac{dw - b}{a};$$

como $a \neq 0$, el valor de z es determinado en forma única.

En ambos casos, z es determinado por w en forma única y l^{-1} posee la forma (2.14). ■

Teorema 2.18. *Una transformación fraccionaria lineal es continua sobre $\tilde{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ y $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

1. Si $c = 0$, es decir la transformación fraccionaria lineal es de la forma $l(z) = a'z + b'$ con $a' = a/d$ y $b' = b/d$, entonces

$$l(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} a'z_0 + b' & \text{si } z_0 \neq \infty, \\ \infty & \text{si } z_0 = \infty. \end{cases}$$

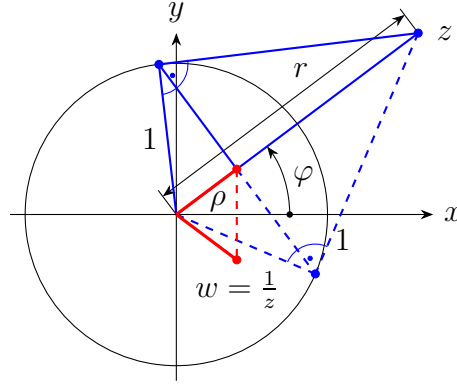
2. En el caso $c \neq 0$ obtenemos

$$l(z_n) = \frac{az_n + b}{cz_n + d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} & \text{si } z_0 \neq -d/c, z_0 \neq \infty, \\ \infty & \text{si } z_0 = -d/c, \\ a/c & \text{si } z_0 = \infty. \end{cases}$$

Esto implica el enunciado. ■

2.4.2. Traslaciones, rotaciones, homotecias, y la inversión. Consideremos ahora cuatro transformaciones fraccionarias lineales fáciles de analizar.

1. La *traslación* $w = z + b$ efectúa una traslación del plano. Notamos que la traslación asigna a cada punto $z \in \mathbb{C}$ un punto $z + b \in \mathbb{C}$ que posee la distancia $|b|$ de z ; el punto ∞ es asignado a si mismo.
2. Una *rotación* corresponde a $w = az$ con $a \in \mathbb{C}$ con $|a| = 1$, es decir $a = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta aplicación efectúa una rotación por el ángulo α .
3. Una *homotecia* es una aplicación $w = az$ con $a \in \mathbb{R}_+$. En el caso $a > 1$ se habla de una *dilatación*; si $0 < a < 1$, se denomina *contracción*.

FIGURA 2.5. Ilustración de la inversión de z .

4. La inversión $w = 1/z$ corresponde para $z = re^{i\varphi}$ a

$$w = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Para la construcción de este número hay que ejecutar una inversión respecto a la circunferencia unitaria y luego una inversión respecto al eje real, ver Figura 2.5.

Teorema 2.19. *Cada transformación fraccionaria lineal es una composición de rotaciones, homotecias, traslaciones y una inversión.*

Demostración. Consideremos primeramente el caso $c \neq 0$, donde podemos escribir

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = -\frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c};$$

para $c = 0$ tenemos

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

■

2.4.3. La representación compleja de rectas y circunferencias.

Teorema 2.20. *Las rectas y circunferencias en $\mathbb{C}$ son precisamente los conjuntos de puntos que satisfacen una ecuación*

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (2.15)$$

donde $A, C \in \mathbb{R}$ y $AC < |B|^2$. Aquí se trata de rectas para $A = 0$ y de circunferencias para $A \neq 0$.

Demostración.

1. Partimos de la ecuación (2.15).

- a) Si $A \neq 0$, podemos dividir (2.15) por A para obtener

$$z\bar{z} + \frac{B}{A}z + \frac{\bar{B}}{A}\bar{z} + \frac{C}{A} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) + \frac{C}{A} - \frac{|B|^2}{A^2} = 0.$$

Esta última ecuación es equivalente con la ecuación

$$\left| z - \left(-\frac{\bar{B}}{A} \right) \right|^2 = \frac{1}{A^2} (|B|^2 - AC),$$

la cual representa una circunferencia con centro $-\bar{B}/A$ y el radio

$$R = \frac{1}{|A|} \sqrt{|B|^2 - AC}.$$

b) Si $A = 0$, entonces para $z = x + iy$ obtenemos a partir de $Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$:

$$x(B + \bar{B}) + iy(B - \bar{B}) + C = 0 \Leftrightarrow 2(\operatorname{Re} B)x - 2(\operatorname{Im} B)y + C = 0.$$

Esta ecuación representa una recta.

2. a) Consideremos la circunferencia $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$, entonces $z \in K_R(z_0) \Leftrightarrow |z - z_0| = R$ o equivalentemente,

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2,$$

es decir obtenemos una ecuación del tipo (2.15) con $A = 1$, $B = -\bar{z}_0$, $C = |z_0|^2 - R^2$ y $AC = |z_0|^2 - R^2 < |z_0|^2 = |B|^2$.

b) Sea una recta dada por la ecuación

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{R}),$$

donde $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Para $z = x + iy$ podemos escribir equivalentemente

$$a \frac{z + \bar{z}}{2} - ib \frac{z - \bar{z}}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)\bar{z} + c = 0,$$

es decir obtenemos una ecuación del tipo (2.15) con

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2}(a - ib), \quad C = c, \quad AC = 0 < \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = |B|^2.$$

■

En lo siguiente consideraremos también rectas como circunferencias (es decir como circunferencias degeneradas que pasan por ∞). Demostraremos ahora una propiedad importante de transformaciones fraccionarias lineales.

Teorema 2.21. *Cada transformación fraccionaria lineal*

$$l(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{donde} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

convierte circunferencias en circunferencias.

Demostración. Sea

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \tag{2.16}$$

la ecuación de una circunferencia o de una recta en el plano z .

1. En el caso de una aplicación $w = az + b$ obtenemos al insertar $z = (w - b)/a$ en (2.16) la ecuación

$$A \frac{w - b}{a} \frac{\bar{w} - \bar{b}}{\bar{a}} + B \frac{w - b}{a} + \bar{B} \frac{\bar{w} - \bar{b}}{\bar{a}} + C = 0$$

o equivalentemente,

$$\frac{A}{|a|^2} w \bar{w} + \left(\frac{B}{a} - \frac{A}{|a|^2} \bar{b} \right) w + \left(\frac{\bar{B}}{\bar{a}} - \frac{A}{|a|^2} b \right) \bar{w} + C + \frac{A}{|a|^2} |b|^2 - B \frac{b}{a} - \bar{B} \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = 0.$$

Definiendo

$$A' := \frac{A}{|a|^2}, \quad B' := \frac{B}{a} - \frac{A}{|a|^2} \bar{b}, \quad C' := C + \frac{A}{|a|^2} |b|^2 - B \frac{b}{a} - \bar{B} \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

esta ecuación se convierte en

$$A' w \bar{w} + B' w + \bar{B}' \bar{w} + C' = 0 \quad (2.17)$$

donde $A' \in \mathbb{R}$; además $C' \in \mathbb{R}$ porque

$$C' = C + \frac{A}{|a|^2} |b|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(B \frac{b}{a} \right).$$

Además,

$$\begin{aligned} |B'|^2 &= \frac{|B|^2}{|a|^2} - \frac{AB}{a|a|^2} b - \frac{A\bar{B}}{\bar{a}|a|^2} \bar{b} + \frac{A^2|b|^2}{|a|^4}, \\ A'C' &= \frac{AC}{|a|^2} + \frac{A^2}{|a|^4} |b|^2 - \frac{AB}{a|a|^2} b - \frac{A\bar{B}}{\bar{a}|a|^2} \bar{b}, \end{aligned}$$

luego

$$|B'|^2 - A'C' = \frac{1}{|a|^2} (|B|^2 - AC) > 0,$$

por lo tanto (2.16) representa una circunferencia o una recta en el plano w .

2. En el caso de la aplicación $w = 1/z$ obtenemos al insertar $z = 1/w$ en (2.16) la ecuación

$$A \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} + B \frac{1}{w} + \bar{B} \frac{1}{\bar{w}} + C = 0$$

o equivalentemente,

$$A + B\bar{w} + \bar{B}w + Cw\bar{w} = 0.$$

Definiendo

$$A' := C, \quad B' := \bar{B}, \quad C' := A$$

podemos escribir esta ecuación como

$$A' w \bar{w} + B' w + \bar{B}' \bar{w} + C' = 0, \quad (2.18)$$

donde $A', C' \in \mathbb{R}$ y

$$|B'|^2 - A'C' = |B|^2 - AC > 0.$$

Concluimos que nuevamente (2.18) representa una circunferencia o una recta en el plano w .

Como de acuerdo al Teorema 2.19, cada transformación fraccionaria lineal es compuesta por las aplicaciones discutidas en los puntos 1. y 2., el teorema está demostrado. ■

2.4.4. La invarianza de la razón doble. Una propiedad importante de las transformaciones fraccionarias lineales es el hecho de que no cambian la llamada razón doble de cuatro puntos.

Definición 2.9. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos diferentes a pares de $\tilde{\mathbb{C}}$. Entonces la cantidad

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \begin{cases} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} & \text{si } z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, \\ \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} & \text{si } z_1 = \infty, \\ \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} & \text{si } z_2 = \infty, \\ \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} & \text{si } z_3 = \infty, \\ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} & \text{si } z_4 = \infty \end{cases}$$

se llama razón doble de los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 .

Comentario 2.4. Evidentemente, los casos $z_i = \infty$ ($i = 1, 2, 3, 4$) surgen a partir del límite correspondiente del primer caso.

Teorema 2.22 (Invarianza de la razón doble bajo transformaciones fraccionarias lineales). Sea l una transformación fraccionaria lineal arbitraria y sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos diferentes a pares de $\tilde{\mathbb{C}}$. Entonces

$$(l(z_1), l(z_2), l(z_3), l(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Demostración. Sea $w_i := l(z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Debido a la biyectividad de l los números w_i son diferentes a pares.

1. Consideremos primeramente la aplicación $w = az + b$.

a) Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \neq \infty$. Entonces

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \frac{w_4 - w_2}{w_4 - w_1} = \frac{a(z_3 - z_1)}{a(z_3 - z_2)} \frac{a(z_4 - z_2)}{a(z_4 - z_1)} = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

b) Sea $z_4 = \infty$. Entonces $w_4 = \infty$, luego

$$(w_1, w_2, w_3, \infty) = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{a(z_3 - z_1)}{a(z_3 - z_2)} = (z_1, z_2, z_3, \infty).$$

c) Las demostraciones de los casos $z_1 = \infty$, $z_2 = \infty$ y $z_3 = \infty$ son análogas.

2. Consideremos ahora la inversión $w = 1/z$.

a) Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \neq 0, \infty$. Entonces

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

b) Sean $z_1, z_2, z_3 \neq \infty, z_4 = 0$. Entonces $w_4 = \infty$ y

$$(w_1, w_2, w_3, \infty) = \frac{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{0 - z_2}{0 - z_1} = (z_1, z_2, z_3, 0).$$

c) Sean $z_1, z_2, z_3 \neq 0, z_4 = \infty$. Entonces $w_4 = 0$ y

$$(w_1, w_2, w_3, 0) = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \frac{0 - w_2}{0 - w_1} = \frac{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = (z_1, z_2, z_3, \infty).$$

d) Sean $z_3 = \infty$ y $z_4 = 0$. Entonces $w_3 = 0, w_4 = \infty$, y

$$(w_1, w_2, 0, \infty) = \frac{0 - w_1}{0 - w_2} = \frac{-\frac{1}{z_1}}{-\frac{1}{z_2}} = \frac{0 - z_2}{0 - z_1} = (z_1, z_2, \infty, 0).$$

e) Las demostraciones de los demás casos donde otros números z_i son iguales a 0 o ∞ son análogas.

Como cada transformación fraccionaria lineal es compuesta por las aplicaciones discutidas en los puntos 1. y 2., el teorema está demostrado. ■

Teorema 2.23. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos diferentes a pares de $\tilde{\mathbb{C}}$. Entonces su razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) es real si y sólo si los cuatro puntos están localizados sobre una misma recta (es decir, están alineados) o sobre una misma circunferencia (es decir, son concíclicos).

Demostración.

1. Sea $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

a) Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Consideremos la aplicación

$$w = l(z) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_1}.$$

Sea $w_i = l(z_i)$, $i = 1, \dots, 4$, entonces $w_1 = \infty, w_2 = 0$ y $w_3 = 1$. Entonces en virtud de

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (\infty, 0, 1, w_4) = \frac{w_4 - 0}{1 - 0} = w_4$$

y del hecho de que también $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}$ (de acuerdo al Teorema 2.22), concluimos que $w_4 \in \mathbb{R}$, es decir los cuatro puntos están localizados sobre el eje real del plano w . Entonces, de acuerdo a los Teoremas 2.17 y 2.21 la imagen

inversa de esta recta es una circunferencia o una recta. Sobre esta circunferencia o recta también están localizados los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 .

b) Sea $z_1, z_2, z_4 \in \mathbb{C}$ y $z_3 = \infty$. Consideremos ahora la aplicación

$$w = l(z) := \frac{z - z_2}{z - z_1}.$$

Ahora tenemos $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$ y $w_3 = 1$. El resto de la demostración sigue como en la parte (a).

c) Las demostraciones de los casos donde $z_1 = \infty$, $z_2 = \infty$ o $z_4 = \infty$ son análogas.

2. Supongamos ahora que los cuatro puntos están alineados o son concíclicos. Sean, por ejemplo, $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, y consideremos

$$w := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_1}.$$

Evidentemente $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$ y $w_3 = 1$. En virtud del Teorema 2.21 también w_4 debe pertenecer al eje real. En este caso concluimos que

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (\infty, 0, 1, w_4) = w_4$$

es real. ■

2.4.5. El grupo de las transformaciones fraccionarias lineales (grupo de Möbius).

Recordemos el concepto de un grupo.

Definición 2.10. Sea $G \neq \emptyset$ un conjunto dotado de una operación interna $\circ$ tal que para cada $a, b \in G$ se tiene $a \circ b \in G$. El par $(G; \circ)$, o simplemente G , se dice grupo si se cumple:

1. La operación $\circ$ es asociativa:

$$\text{para todo } a, b, c \in G: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c); \quad (2.19)$$

2. Existencia de un elemento neutro:

$$\text{existe } e \in G \text{ tal que para todo } a \in G: a \circ e = e \circ a = a; \quad (2.20)$$

3. Existencia del elemento inverso:

$$\text{para todo } a \in G \text{ existe } a^{-1} \in G \text{ tal que } a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e. \quad (2.21)$$

El grupo se llama conmutativo o abeliano si

$$\text{para todo } a, b \in G: a \circ b = b \circ a. \quad (2.22)$$

Comentario 2.5. Si $(K; +, \cdot)$ es un cuerpo arbitrario, entonces $(K; +)$ es un grupo conmutativo y $(K \setminus \{0\}; \cdot)$ es un grupo conmutativo.

Comentario 2.6. Cualquier espacio vectorial V con la operación de adición de vectores forma un grupo conmutativo.

Teorema 2.24. El conjunto L de las transformaciones fraccionarias lineales (o transformaciones de Möbius) $l: \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ con la composición como operación forma un grupo $L = (L; \circ)$. Este grupo también es conocido como grupo de Möbius.

Demostración.

1. Definimos la composición $l_2 \circ l_1$ para $l_1, l_2 \in L$ como operación sobre L , es decir para todo $z \in \tilde{\mathbb{C}}$, $(l_2 \circ l_1)(z) = l_2(l_1(z))$. Por lo tanto hay que demostrar si $l_1, l_2 \in L$, entonces efectivamente también $l_2 \circ l_1 \in L$. Sean entonces dadas las transformaciones fraccionarias lineales

$$l_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad l_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Obtenemos entonces la composición

$$\begin{aligned} l_3(z) = l_2(l_1(z)) &= \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} =: \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}. \end{aligned}$$

Queda por demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pero

$$\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. La asociatividad (2.19) es una consecuencia inmediata del hecho de que es válida para la composición de aplicaciones arbitrarias (ver Cálculo I).
3. Evidentemente, el elemento neutro (ver (2.20)) viene dado por la aplicación idéntica

$$l(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

4. Sea un elemento arbitrario $l \in L$ dado por

$$l(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

entonces su inverso l^{-1} (ver (2.21)) está dado por

$$l^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

■

Comentario 2.7. Hemos demostrado que $(L; \circ)$ es un grupo, pero este grupo no es conmutativo (abeliano). Por ejemplo, eligiendo

$$l_1(z) := \frac{1}{z}, \quad l_2(z) = z + 1$$

obtenemos

$$(l_1 \circ l_2)(z) = \frac{1}{z+1}, \quad (l_2 \circ l_1)(z) = \frac{1}{z} + 1 \neq (l_1 \circ l_2)(z).$$

2.4.6. Puntos fijos y representación normal.

Definición 2.11. Para una transformación fraccionaria lineal $w = l(z)$ un elemento $\zeta \in \tilde{\mathbb{C}}$ se llama punto fijo de l si $l(\zeta) = \zeta$.

El siguiente teorema es evidente.

Teorema 2.25. Para la aplicación idéntica $l(z) = z$ cada $\zeta \in \tilde{\mathbb{C}}$ es un punto fijo.

Teorema 2.26. Cada transformación fraccionaria lineal diferente de la aplicación idéntica posee a lo más dos puntos fijos.

Demostración.

1. Sea $l(z) = az + b$ con $(a, b) \neq (1, 0)$.
 - a) Observamos que $\zeta = \infty$ es un punto fijo de esta aplicación.
 - b) Un punto $\zeta \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de l si y sólo si $\zeta = a\zeta + b$ o equivalentemente, $\zeta(1 - a) = b$. Es decir, solamente para $a \neq 1$ obtenemos un segundo punto fijo $\zeta = b/(1 - a)$.
2. Sea ahora

$$l(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (c \neq 0).$$

- a) Como $l(\infty) = a/c$ podemos asegurar que ∞ no es un punto fijo de l ; como $l(-d/c) = \infty$, el número $-d/c$ no es un punto fijo de l tampoco.
- b) Un punto $-d/c \neq \zeta \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de l si y sólo si

$$\zeta = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \Leftrightarrow c\zeta^2 + (d - a)\zeta - b = 0.$$

Esta ecuación cuadrática entrega los puntos fijos

$$\zeta_1 = \frac{a - d}{2c} + \frac{1}{2c} \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}, \quad \zeta_2 = \frac{a - d}{2c} - \frac{1}{2c} \sqrt{(a - d)^2 + 4bc},$$

los cuales coinciden en el caso $(a - d)^2 = -4bc$. ■

Comentario 2.8.

1. El punto ∞ es punto fijo de l si y sólo si l posee la forma $l(z) = az + b$.
2. La aplicación $l(z) = az$, $a \neq 1$, es la única transformación fraccionaria lineal que posee los puntos fijos 0 e ∞ .
3. La aplicación $l(z) = z + b$, $b \neq 0$, es la única transformación fraccionaria lineal que posee solamente el punto fijo ∞ .

Utilizando el Teorema 2.26 podemos demostrar ahora que existe exactamente una transformación fraccionaria lineal que asigna tres puntos dados a tres puntos dados.

Teorema 2.27. Sean dados tres puntos diferentes a pares z_1, z_2, z_3 y tres puntos diferentes a pares w_1, w_2, w_3 . Entonces existe exactamente una transformación fraccionaria lineal $w = l(z)$ con $w_i = l(z_i)$ para $i = 1, 2, 3$.

Demostración.

1. Para la transformación fraccionaria lineal

$$l_1(z) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

tenemos $l_1(z_1) = \infty$, $l_1(z_2) = 0$ y $l_1(z_3) = 1$. Por otro lado, para

$$l_2(w) = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \frac{w - w_2}{w - w_1}$$

se tiene $l_2(w_1) = \infty$, $l_2(w_2) = 0$ y $l_2(w_3) = 1$. Formando la transformación fraccionaria lineal l según

$$w = l(z) = l_2^{-1}(l_1(z)),$$

entonces $l(z_1) = w_1$, $l(z_2) = w_2$ y $l(z_3) = w_3$.

2. Sea $\tilde{l}$ una transformación fraccionaria lineal arbitraria con $\tilde{l}(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, entonces $\tilde{l}^{-1}(l(z))$ posee los puntos fijos z_1 , z_2 y z_3 . Entonces, de acuerdo al Teorema 2.26, $\tilde{l}^{-1}(l(z)) = z$, y por lo tanto $l(z) = \tilde{l}(z)$.

■

Ejemplo 2.5. Queremos determinar la transformación fraccionaria lineal $w = l(z)$ (determinada en forma única según el Teorema 2.27) con $w_i = l(z_i)$, $i = 1, 2, 3$, para

$$z_1 = 2, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -2; \quad w_1 = 1, \quad w_2 = i, \quad w_3 = -1.$$

Utilizando el Teorema 2.22 obtenemos para $z_4 = z$, $w_4 = w = l(z)$:

$$\frac{-1 - 1}{-1 - i} \frac{w - i}{w - 1} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \frac{w - w_2}{w - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_1} = \frac{-2 - 2}{-2 - i} \frac{z - i}{z - 2}.$$

Despejando w a partir de esta ecuación obtenemos

$$w = l(z) = \frac{3z + 2i}{iz + 6}.$$

2.4.7. Representación normal de transformaciones fraccionarias lineales. Concluimos la discusión de transformaciones fraccionarias lineales en este capítulo demostrando que una transformación fraccionaria lineal es determinada hasta una constante por sus puntos fijos, empezando por el caso de que ∞ es un punto fijo.

Teorema 2.28. Sea ∞ un punto fijo de la transformación fraccionaria lineal $w = l(z)$ diferente de la identidad.

1. Si no existe otro punto fijo, entonces con una constante $k \neq 0$ se tiene que

$$w = z + k.$$

2. Si $\zeta \in \mathbb{C}$ es otro punto fijo, entonces con alguna constante $k \neq 0, 1$,

$$w - \zeta = k(z - \zeta).$$

Demostración.

1. Si no existe otro punto fijo, entonces de acuerdo al ítem 3. del Comentario 2.8 la aplicación l posee la forma $w = z + b$ ($b \neq 0$). El enunciado sigue para $k = b$.

2. Si $\zeta \in \mathbb{C}$ es otro punto fijo, entonces de acuerdo al ítem 1. del Comentario 2.8 la aplicación l posee la forma $w = az + b$, donde $a \neq 0$ y $a \neq 1$. Para el punto fijo ζ se tiene $\zeta = a\zeta + b$ y por lo tanto

$$w - \zeta = az + b - (a\zeta + b) = a(z - \zeta).$$

El enunciado sigue para $k = a$. ■

Trataremos ahora el caso de que ∞ no es un punto fijo.

Teorema 2.29. *Supongamos que ∞ no es punto fijo de la transformación fraccionaria lineal $w = l(z)$.*

1. *Si ζ es el punto fijo único, entonces existe una constante $k \neq 0$ tal que*

$$\frac{1}{w - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} + k.$$

2. *Si ζ_1 y ζ_2 son puntos fijos, entonces existe una constante $k \neq 0$ tal que*

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = k \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}.$$

Demostración.

1. Sea ζ el punto fijo único. Consideremos las sustituciones

$$W = \frac{1}{w - \zeta}, \quad Z = \frac{1}{z - \zeta},$$

las que convierten el punto fijo ζ en ∞ . La relación entre Z y W es

$$W = L(Z) = \frac{\tilde{A}Z + \tilde{B}}{\tilde{C}Z + \tilde{D}}, \quad \text{donde} \quad \tilde{A}\tilde{D} - \tilde{B}\tilde{C} \neq 0.$$

Esta transformación fraccionaria lineal posee solamente el punto fijo ∞ , por lo tanto debe existir $k \neq 0$ tal que $L(Z) = Z + k$, es decir

$$\frac{1}{w - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} + k.$$

2. Sean $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ los puntos fijos. Las sustituciones

$$W = \frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2}, \quad Z = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$$

convierten los puntos fijos ζ_1 y ζ_2 en 0 e ∞ , respectivamente. Como las transformaciones fraccionarias lineales forman un grupo, se tiene

$$W = L(Z) = \frac{\tilde{A}Z + \tilde{B}}{\tilde{C}Z + \tilde{D}}, \quad \text{donde} \quad \tilde{A}\tilde{D} - \tilde{B}\tilde{C} \neq 0.$$

Esta aplicación posee los puntos fijos 0 e ∞ ; entonces de acuerdo al ítem 2. del Comentario 2.8 la aplicación L posee la forma $L(Z) = kZ$ con $k \neq 0$, es decir

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = k \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}.$$



2.5. Ejercicios

Problema 2.1. Demostrar el Teorema 2.14.

Problema 2.2 (Tarea 2, curso 2023).

- a) Se consideran las siguientes funciones definidas para $z \neq 0$:

$$f_1(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{z}{|z|}, \quad f_3(z) = \frac{z \cdot \operatorname{Re} z}{|z|}.$$

Analizar los límites cuando $z \rightarrow 0$.

- b) Analizar si la función $f(z) = e^{-1/|z|}$ es continua sobre $0 < |z| < 1$. ¿La función f es uniformemente continua sobre este conjunto?

Solución sugerida.

- a) Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones reales con $x_n, y_n \neq 0$ y $x_n, y_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

1. Tenemos

$$f_1(x_n) = \frac{\operatorname{Re} x_n}{x_n} = \frac{x_n}{x_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x_n) = 1, \quad (2.23)$$

$$f_1(iy_n) = \frac{\operatorname{Re}(iy_n)}{y_n} = \frac{0}{y_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(iy_n) = 0. \quad (2.24)$$

Como ambos límites son diferentes, no existe el límite de $f_1(z)$ cuando $z \rightarrow 0$.

2. Consideremos una sucesión $\{x_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\{x_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$) de elementos positivos (negativos) e $y_n = 0$, donde $z_n^\pm := x_n^\pm + iy_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$f_2(z_n^+) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(z_n^+) = 1, \quad f_2(z_n^-) = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(z_n^-) = -1,$$

por lo tanto tal como en el caso (1), ambos límites son diferentes, y no existe el límite de $f_2(z)$ cuando $z \rightarrow 0$.

3. Aquí

$$\begin{aligned} |f_3(z_n)| &= \left| \frac{(x_n + iy_n)x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| = \left| \frac{x_n^2}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} + i \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \\ &= \left(\frac{x_n^4}{x_n^2 + y_n^2} + \frac{x_n^2 y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right)^{1/2} \leq \left(x_n^2 + \frac{y_n^2}{1 + y_n^2/x_n^2} \right)^{1/2} \\ &\leq (x_n^2 + y_n^2)^{1/2} = |x_n + iy_n| = |z_n|, \end{aligned}$$

lo que implica que si $z_n \rightarrow 0$, entonces $f_3(z_n) \rightarrow 0$, luego

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_3(z) = 0.$$

- b) Notamos primeramente que la función $z \mapsto |z|$ es continua sobre $\mathbb{C}$, ya que de acuerdo al segundo ítem del Teorema 1.9, $||z_1| - |z_2|| < |z_1 - z_2|$; por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ dado, se tiene $||z_1| - |z_2|| < \varepsilon$ si $|z_1 - z_2| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$. De acuerdo a lo anterior, basta demostrar que la función $f(r) = e^{-1/r}$ es continua sobre $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Esto es el caso

considerando que $f(r) = e^{-1/r}$ es una composición de funciones continuas para estos valores de r .

Una función g es *uniformemente continua* sobre $R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall z_1, z_2 \in R : |z_1 - z_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(z_1) - g(z_2)| < \varepsilon,$$

es decir al contrario de la definición de la continuidad, δ_ε debe ser independiente de z_1 o z_2 . En nuestro caso,

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \exp\left(-\frac{1}{|z_1|}\right) - \exp\left(-\frac{1}{|z_2|}\right) \right| \\ &= \exp\left(-\frac{1}{|z_1|}\right) \left| 1 - \exp\left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_2|}\right) \right| \\ &\leq \left| 1 - \exp\left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_2|}\right) \right|. \end{aligned}$$

Basta considerar $|z_1| \leq |z_2|$ (sino intercambiamos z_1 y z_2), luego

$$\left| 1 - \exp\left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_2|}\right) \right| = \exp\left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_2|}\right) - 1 \quad (2.25)$$

y

$$(|z_2| - |z_1|)(1 - |z_1||z_2|) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_2|} \leq |z_2| - |z_1| = |z_2 - z_1|. \quad (2.26)$$

Como $\exp \alpha \geq 1 + \alpha$ o equivalentemente, $\exp \alpha - 1 \geq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, concluimos que (combinando (2.25) y (2.26))

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \exp\left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_2|}\right) - 1 \leq e^{|z_2 - z_1|} - 1.$$

Sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$, entonces $|e^y - 1| < \varepsilon$, por lo tanto si $|z_2 - z_1| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, lo que demuestra que f es uniformemente continua sobre R .

Problema 2.3 (Tarea 2, curso 2023).

a) Analizar la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\cos \frac{\nu\pi}{4} + i \sin \frac{\nu\pi}{4} \right), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^\nu} \left(\cos \frac{\nu\pi}{4} + i \sin \frac{\nu\pi}{4} \right).$$

b) Demostrar que la siguiente serie converge para todo z con $|z| = 1$, $z \neq -1$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} z^\nu}{\nu}.$$

Solución sugerida.

a) Sea en cada caso la serie denotada por

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu. \quad (2.27)$$

1. La serie es absolutamente convergente, ya que

$$|a_\nu| = \frac{1}{(\sqrt{2})^\nu} \Rightarrow \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^\nu} \right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(1+i)^\nu} \right| = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^\nu};$$

la última serie converge porque es una serie geométrica $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ con $|q| = 1/\sqrt{2} < 1$.

2. Una condición necesaria para que la serie (2.27) converja es $a_\nu \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow \infty$. Pero aquí tenemos, por ejemplo, $a_{8k} = 1$ y $a_{8k+2} = i$ para $k \in \mathbb{N}_0$, luego $a_\nu \not\rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow \infty$ y la serie no converge.

3. Notamos que

$$|a_\nu| = \frac{1}{(\sqrt{2})^\nu} \left| \cos \frac{\nu\pi}{4} + i \sin \frac{\nu\pi}{4} \right| = \frac{1}{(\sqrt{2})^\nu}$$

por lo tanto la serie es absolutamente convergente tal como se demostró en el primer caso.

b) Consideremos las series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu, \quad a_\nu := (-1)^{\nu+1} z^\nu; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu, \quad b_\nu := \frac{1}{\nu};$$

así la serie dada puede ser escrita como

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu. \tag{2.28}$$

Notamos primeramente que

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu = - \sum_{\nu=0}^n (-z)^\nu = - \frac{1 - (-z)^{n+1}}{1 - (-z)} = - \frac{1 + (-z)^n}{1 + z};$$

esta suma es bien definida para $z \neq -1$. Obtenemos, además, utilizando que $|z| = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=m}^n a_\nu &= - \frac{(-z)^n - (-z)^m}{1 + z}; \\ \left| \sum_{\nu=m}^n a_\nu \right| &= |z^m| \left| \frac{1 - (-z)^{n-m}}{1 + z} \right| = \left| \frac{1 - (-z)^{n-m}}{1 + z} \right| \leq \frac{2}{|1 + z|}. \end{aligned}$$

Para demostrar que la serie dada (2.28) converge, consideremos la fórmula

$$\sum_{\nu=m}^n a_\nu b_\nu = \left(\sum_{\nu=m}^n a_\nu \right) b_n - \sum_{\nu=m}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{k=m}^{\nu} a_k \right) (b_{\nu+1} - b_\nu) \right\}$$

(sumación por partes, fácil de verificar). Aquí obtenemos

$$\left| \sum_{\nu=m}^n a_\nu b_\nu \right| \leq \left| \sum_{\nu=m}^n a_\nu \right| b_n + \left| \sum_{\nu=m}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{k=m}^{\nu} a_k \right) (b_{\nu+1} - b_\nu) \right\} \right|$$

$$\leq \frac{2}{|1+z|}b_n + \frac{2}{|1+z|} \sum_{\nu=m}^{n-1} (b_\nu - b_{\nu+1}) = \frac{2b_m}{|1+z|} = \frac{2}{m|1+z|}.$$

Cómo $b_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, podemos para $\varepsilon > 0$ elegir $N_\varepsilon = 2/(\varepsilon|1+z|)$ para asegurar que si $m, n > N_\varepsilon$, entonces

$$\left| \sum_{\nu=m}^n a_\nu b_\nu \right| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que la sucesión de sumas parciales de (2.28) es una sucesión de Cauchy, por lo tanto la serie (2.28) converge de acuerdo al criterio de Cauchy.

Problema 2.4 (Evaluación 1, curso 2023).

- Determinar la transformación fraccionaria lineal que asigna a los puntos $z_1 = -2i$, $z_2 = 0$ y $z_3 = 2i$ los puntos $w_1 = -1$, $w_2 = i$ y $w_3 = 1$, respectivamente.
- ¿Cuál es la imagen del eje imaginario bajo la aplicación de la parte (a)?

Aviso: se sabe que para una transformación fraccionaria lineal

$$l(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

y cuatro puntos diferentes a pares $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, se conserva la invarianza de la razón doble, es decir si

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1},$$

entonces $(l(z_1), l(z_2), l(z_3), l(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Solución sugerida.

- Seguimos el procedimiento del Ejemplo 2.5 y utilizando el aviso obtenemos para $z_4 = z$, $w_4 = w = l(z)$ a partir de

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \frac{w - w_2}{w - w_1}$$

la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{2i - (-2i)}{2i} \frac{z}{z - (-2i)} &= \frac{1 - (-1)}{1 - i} \frac{w - i}{w - (-1)} \\ \Leftrightarrow \frac{4i}{2i} \frac{z}{z + 2i} &= \frac{2}{1 - i} \frac{w - i}{w + 1}. \end{aligned}$$

Despejando w a partir de esta ecuación obtenemos

$$w = l(z) = \frac{z - 2}{iz + 2i} = \frac{iz - 2i}{-z - 2} = \frac{2i - iz}{z + 2}.$$

- (Alternativa 1) Sabemos que la imagen de una recta o circunferencia bajo una transformación fraccionaria lineal es una recta o circunferencia. Dado que los tres puntos z_1 , z_2 y z_3 pertenecen al eje imaginario, la imagen del eje imaginario es la recta o circunferencia que pasa por w_1 , w_2 y w_3 . Estos puntos no son colineales, por lo tanto

la imagen es una circunferencia. Como $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$, la imagen del eje imaginario es la circunferencia unitaria $K_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

b) (Alternativa 2) El eje imaginario está representado por $\operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$. Además,

$$w = \frac{z - 2}{iz + 2i} \Leftrightarrow z = \frac{2iw + 2}{1 - iw}.$$

Insertando esto en $z + \bar{z} = 0$ obtenemos

$$\frac{2iw + 2}{1 - iw} + \frac{-2i\bar{w} + 2}{1 + i\bar{w}} = 0.$$

Multiplicando por $(1 - iw)(1 + i\bar{w})$ obtenemos

$$(2iw + 2)(1 + i\bar{w}) + (-2i\bar{w} + 2)(1 - iw) = 0$$

Después de cancelaciones obtenemos $4w\bar{w} = 4$ o equivalentemente, $|w|^2 = 1$ (y el mismo resultado).

Capítulo 3

La diferenciabilidad de funciones complejas

3.1. Definición de la derivada y regularidad

Definición 3.1. Se considera una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. La función f se dice diferenciable en z_0 si z_0 es un punto interior de $D(f)$ y el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{df}{dz}(z_0).$$

2. La función f se dice diferenciable sobre el conjunto M si f es diferenciable en cada punto $z_0 \in M$.
3. La función $f' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con

$$D(f') = \left\{ z_0 \left| \frac{df}{dz}(z_0) \text{ existe y es finito} \right. \right\}, \quad f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

se dice derivada de f .

Tal como en el caso real las derivadas de orden mayor se definen en forma recursiva:

$$f'' := (f')', \dots, f^{(n)} := (f^{(n-1)})'.$$

La función f misma también es denotada por $f = f^{(0)}$. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.

1. Para $a \in \mathbb{C}$ la función f con $f(z) = a$, es decir $f \equiv a$, es diferenciable sobre $\mathbb{C}$ con $f'(z) = 0$, es decir $f' \equiv 0$.
2. Para $n \in \mathbb{N}$ la función f con $f(z) = z^n$ es diferenciable sobre $\mathbb{C}$ con $f'(z) = nz^{n-1}$.

Demostración. Tarea. ■

Consideremos ahora dos ejemplos de funciones que son continuas sobre $\mathbb{C}$, pero *no* son diferenciables.

Teorema 3.2.

1. La función f definida por $f(z) = \operatorname{Re} z$ sobre $D(f) = \mathbb{C}$ no es diferenciable en ningún punto $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. La función f definida por $f(z) = |z|^2$ sobre $D(f) = \mathbb{C}$ es diferenciable solamente en $z_0 = 0$.

Demostración.

1. Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.

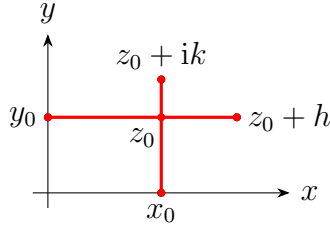


FIGURA 3.1. Aproximaciones horizontal y vertical de z_0 (demostración del Teorema 3.2).

- a) Para $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ definimos $z = z_0 + h = x_0 + h + iy_0$ (aproximación horizontal de z_0 ; ver Figura 3.1). Obtenemos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1.$$

- b) Para $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ definimos $z = z_0 + ik = x_0 + i(y_0 + k)$ (aproximación vertical de z_0). Obtenemos ahora

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x_0 - x_0}{ik} = 0.$$

A partir de (a) y (b) concluimos que f no es diferenciable en z_0 .

2. a) Para $z_0 = 0$ tenemos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0.$$

- b) Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$. Para $z = z_0 + h = x_0 + h + iy_0$ con $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ obtenemos cuando $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|x_0 + h + iy_0|^2 - |x_0 + iy_0|^2}{h} = 2x_0 + h \rightarrow 2x_0.$$

Considerando $z = z_0 + ik = x_0 + i(y_0 + k)$ con $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ obtenemos cuando $k \rightarrow 0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|x_0 + i(y_0 + k)|^2 - |x_0 + iy_0|^2}{ik} = \frac{2y_0 + k}{i} \rightarrow -2iy_0.$$

Si f fuera diferenciable en z_0 tendríamos que $2x_0 = -2iy_0$, lo que es imposible porque $z_0 \neq 0$. ■

Los dos teoremas siguientes son análogos a sus contrapartes en el caso real.

Teorema 3.3. Si f es diferenciable en z_0 , entonces f es continua en z_0 .

Demostración. Tarea. ■

Teorema 3.4. *Una función f es diferenciable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si y sólo si existen un número $c \in \mathbb{C}$ y una función f_0 definida sobre una vecindad $U(z_0)$ de z_0 con $U(z_0) \subset D(f)$ tal que para todo $z \in U(z_0)$,*

$$\begin{aligned} f_0(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f_0(z) = 0, \\ f(z) &= f(z_0) + c(z - z_0) + |z - z_0|f_0(z). \end{aligned}$$

Se tiene $c = f'(z_0)$.

Demostración. Tarea. ■

Resulta que en la teoría de funciones (complejas) la diferenciableidad de una función en un sólo punto no es una propiedad muy interesante. El concepto que realmente importa es la *regularidad*.

Definición 3.2. *Se considera una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.*

1. *La función f se dice regular en $z_0 \in D(f)$ si f es diferenciable en una vecindad de z_0 .*
2. *La función f se dice regular sobre un conjunto $M \subset D(f)$ si f es regular en cada punto de M .*

3.2. Reglas de diferenciación

Las siguientes reglas de la diferenciación de sumas, productos y cocientes de funciones son idénticas con las reglas correspondientes de funciones reales. Las demostraciones de los siguientes dos teoremas son análogas al caso real.

Teorema 3.5. *Sean las funciones f y g diferenciables en z_0 . Entonces*

1. *$f + g$ es diferenciable en z_0 con*

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0);$$

2. *$f \cdot g$ es diferenciable en z_0 con*

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0);$$

3. *si $g(z_0) \neq 0$, también f/g es diferenciable en z_0 con*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Teorema 3.6. *Sea la función $h = g \circ f$ definida sobre un conjunto $M \subset \mathbb{C}$. Si f es diferenciable en $z_0 \in M$ y g es diferenciable en $w_0 = f(z_0)$, entonces $h = g \circ f$ es diferenciable en z_0 con*

$$h'(z_0) = (g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

3.3. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

La definición de la derivada en $\mathbb{C}$ es completamente análoga a la definición de la derivada de una función de una variable real. Pero también podemos interpretar una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para tal efecto escribimos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y consideramos la aplicación

$$f = (u, v) : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Queremos analizar ahora como la diferenciabilidad de f se expresa en términos de la parte real u y la parte imaginaria v .

Teorema 3.7 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). *Sea $f = u + iv$ diferenciable en $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces en (x_0, y_0) existen las derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y .*

1. *Se tiene*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad (3.1a)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (3.1b)$$

Estas ecuaciones diferenciales parciales se dicen ecuaciones de Cauchy-Riemann.

2. *Se tiene*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \quad (3.2)$$

Demostración.

1. a) Sea $z = z_0 + h = x_0 + h + iy_0$ con $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Entonces para todo h suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Como el lado izquierdo converge a $f'(z_0)$ cuando $h \rightarrow 0$, en el lado derecho las partes real e imaginaria deben converger. De acuerdo a la definición de la derivada parcial tenemos

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0),$$

lo que demuestra la primera identidad en (3.2).

b) Considerando $z = z_0 + ik = x_0 + i(y_0 + k)$ con $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ podemos demostrar la segunda fórmula de (3.2) en forma análoga.

2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann siguen a partir de una comparación de las partes real e imaginaria de ambas representaciones de $f'(z_0)$. ■

Ejemplo 3.1. *Sea la función f real en una vecindad $U(z_0)$ de z_0 y diferenciable en z_0 . Entonces*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = 0,$$

ya que $v_x(x_0, y_0) = 0$ y $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = 0$.

Ejemplo 3.2. La función $f(z) = \operatorname{Re} z$, $D(f) = \mathbb{C}$ no es diferenciable para ningún $z \in \mathbb{C}$, ya que con $u(x, y) = x$, $v(x, y) = 0$ se tiene $u_x = 1$, $v_y = 0$, es decir f no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3.1); por lo tanto f no puede ser diferenciable en ningún punto.

Ejemplo 3.3. La función $f(z) = \bar{z}$, $D(f) = \mathbb{C}$ no es diferenciable para ningún $z \in \mathbb{C}$, ya que con $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ se tiene $u_x = 1$, $v_y = -1$, es decir f no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3.1); por lo tanto f no puede ser diferenciable en ningún punto.

3.4. La conexión con la diferenciabilidad real

Ya enfatizamos en algunas instancias que una aplicación $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ también puede ser entendida como aplicación $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para una aplicación de este tipo ya especificamos el concepto de la diferenciabilidad (Cálculo III). Aquí reiteramos esta definición para el caso particular presente.

Definición 3.3. Sean $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y (x_0, y_0) un punto interior de $D(f)$. La función $f = (u, v)$ se dice diferenciable en (x_0, y_0) si en (x_0, y_0) las derivadas parciales de u y v existen y sobre una vecindad $U(x_0, y_0)$ de (x_0, y_0) existen dos funciones u_0 y v_0 tales que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_0(x, y) = u_0(x_0, y_0) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_0(x, y) = v_0(x_0, y_0) = 0$$

y sobre $U(x_0, y_0)$ se tiene

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + d((x, y), (x_0, y_0))u_0(x, y), \\ v(x, y) &= v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + d((x, y), (x_0, y_0))v_0(x, y). \end{aligned}$$

Evidentemente, esta definición no incluye ningún otro tipo de hipótesis sobre la conexión entre u y v . Pero como la satisfacción de las ecuaciones de Cauchy-Riemann es una condición necesaria para la diferenciabilidad de f en $z_0 = (x_0, y_0)$, la diferenciabilidad real de u y v no implica la diferenciabilidad compleja de f . No obstante tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.8. Sean $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $z_0 = (x_0, y_0)$ un punto interior de $D(f)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La función f es diferenciable en el sentido complejo (según la Definición 3.1) en z_0 .
2. La aplicación (u, v) es diferenciable en el sentido real en (x_0, y_0) con

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (3.3)$$

Demostración.

1. Sea f diferenciable en el sentido complejo en z_0 . Entonces de acuerdo al Teorema 3.4,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0|f_0(z)$$

sobre una vecindad $U(z_0)$ de z_0 . Si ponemos $f_0(z) = u_0(x, y) + iv_0(x, y)$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_0(x, y) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_0(x, y) = 0, \quad (3.4)$$

y en virtud de $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) \\ &\quad + (u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0))((x - x_0) + i(y - y_0)) \\ &\quad + d((x, y), (x_0, y_0))(u_0(x, y) + iv_0(x, y)), \end{aligned}$$

luego utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + d((x, y), (x_0, y_0))u_0(x, y), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + d((x, y), (x_0, y_0))v_0(x, y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

2. Si la aplicación (u, v) es diferenciable en el sentido real en (x_0, y_0) , es decir si las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6) son válidas sobre una vecindad $U((x_0, y_0))$ de (x_0, y_0) y si además las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3.3) son válidas, entonces

$$\begin{aligned} &\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{u(x, y) + iv(x, y) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{z - z_0} \\ &= \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{z - z_0} \\ &= \frac{u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + d((x, y), (x_0, y_0))u_0(x, y)}{z - z_0} \\ &\quad + i \frac{v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + d((x, y), (x_0, y_0))v_0(x, y)}{z - z_0} \\ &= u_x(x_0, y_0) \frac{x - x_0 + i(y - y_0)}{z - z_0} + iv_x(x_0, y_0) \frac{x - x_0 + i(y - y_0)}{z - z_0} \\ &\quad + \frac{d((x, y), (x_0, y_0))}{z - z_0} (u_0(x, y) + iv_0(x, y)). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{x - x_0 + i(y - y_0)}{z - z_0} = 1, \quad \left| \frac{d((x, y), (x_0, y_0))}{z - z_0} \right| = 1,$$

esto implica la existencia de

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

■

3.5. La regularidad y las ecuaciones de Cauchy-Riemann

La definición de la regularidad y el Teorema 3.7 inmediatamente implican el siguiente teorema.

Teorema 3.9. Si $f = u + iv$ es regular en z_0 , entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son válidas sobre una vecindad abierta $U(z_0)$ de z_0 .

Bajo una hipótesis adicional también la inversión del Teorema 3.9 es válida.

Teorema 3.10. Si sobre una vecindad abierta $U(z_0)$ de z_0 las ecuaciones de Cauchy-Riemann son válidas para funciones u y v y estas funciones poseen derivadas parciales continuas u_x , u_y , v_x y v_y (es decir, u y v son continuamente parcialmente derivables), entonces $f = u + iv$ es regular en z_0 .

Demostración. Como u y v son continuamente parcialmente derivables sobre $U(z_0)$, la función $f = (u, v)$ es diferenciable sobre este mismo conjunto (resultado del Cálculo III) en el sentido de la Definición 3.3. Como además las ecuaciones de Cauchy-Riemann son válidas, el Teorema 3.8 implica la diferenciabilidad compleja de f en cada punto de $U(z_0)$, la cual de acuerdo a la Definición 3.2 implica la regularidad de f en x_0 . ■

El siguiente teorema formula una aplicación importante del Teorema 3.10.

Teorema 3.11. Las funciones e^z , $\sen z$ y $\cos z$ son regulares sobre $\mathbb{C}$ y se tiene

$$(e^z)' = e^z, \quad (\sen z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sen z.$$

Demostración.

1. Sabemos que $e^z = e^x \cos y + ie^x \sen y = u(x, y) + iv(x, y)$. Las funciones u y v son continuamente parcialmente derivables sobre $\mathbb{R}^2$, y obtenemos

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sen y, \quad v_x = e^x \sen y, \quad v_y = e^x \cos y,$$

es decir las ecuaciones de Cauchy-Riemann están satisfechas, luego e^z es regular sobre $\mathbb{C}$ de acuerdo al Teorema 3.10. Además, de acuerdo al Teorema 3.7,

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sen y = e^z.$$

2. De acuerdo al Teorema 2.13,

$$\sen z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

luego

$$\begin{aligned} (\sen z)' &= \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z, \\ (\cos z)' &= \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sen z. \end{aligned}$$

■

3.6. Preservación de ángulos y aplicaciones localmente conformes

En lo siguiente consideramos una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua y estudiaremos primeramente el concepto de preservación de ángulos en un punto $z_0 \in D(f)$. Para tal efecto consideremos dos curvas en $D(f)$ con las parametrizaciones $z_1(t)$ y $z_2(t)$ para $t \in [-1, 1]$ con $z_1(0) = z_2(0) = z_0$. Consideremos, además, las curvas

$$w_1(t) = f(z_1(t)), \quad w_2(t) = f(z_2(t)), \quad t \in [-1, 1]$$

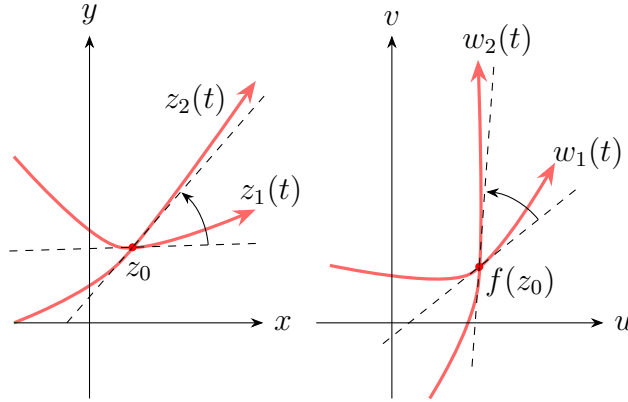


FIGURA 3.2. Preservación de ángulos.

que ahora pasan por el punto $f(z_0)$. Si estos pares de curvas poseen tangentes en z_0 y $f(z_0)$, respectivamente, entonces podemos comparar los ángulos incluidos por los pares de tangentes respectivos. El caso en el cual estos ángulos coinciden es de interés particular (ver Figura 3.2).

Definición 3.4. Se considera una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Sea z_0 un punto interior de $D(f)$ y sea f continua sobre una vecindad de z_0 . Se dice que la función f preserva ángulos si para todo par de curvas $z_1(t)$, $z_2(t)$ con $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ que posean tangentes en z_0 también las curvas $w_1(t) = f(z_1(t))$ y $w_2(t) = f(z_2(t))$ poseen tangentes en $f(z_0)$ y los ángulos entre ambos pares de tangentes coinciden en tamaño y orientación.

Definición 3.5. Una función f se dice localmente conforme en un punto interior z_0 de $D(f)$ si la función f preserva ángulos en z_0 y

$$\text{existe un número } \gamma > 0 \text{ tal que } \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \gamma. \quad (3.7)$$

Comentario 3.1. La condición (3.7) se pronuncia sobre el comportamiento de la distorsión de los valores absolutos bajo la aplicación f . Efectivamente, si f verifica (3.7) en un punto z_0 , entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad $U(z_0) \subset D(f)$ de z_0 tal que para todo $z \in U(z_0)$,

$$(\gamma - \varepsilon)|z - z_0| < |f(z) - f(z_0)| < (\gamma + \varepsilon)|z - z_0|.$$

Ejemplo 3.4. Se considera la función $f(z) = \bar{z}$, la cual satisface (3.7) para todo $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ ya que

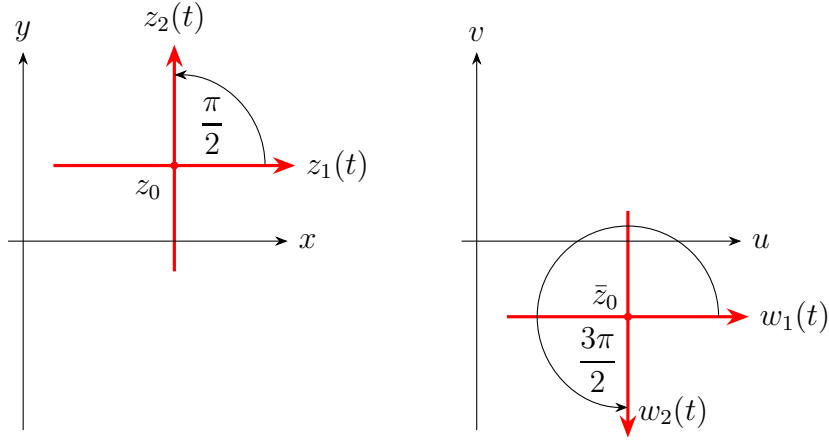
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right| = 1 > 0.$$

No obstante, esta función no preserva ángulos para ningún $z_0 \in \mathbb{C}$, por ejemplo si consideramos las curvas

$$z_1(t) = z_0 + t, \quad z_2(t) = z_0 + it, \quad t \in [-1, 1],$$

las cuales incluyen el ángulo $\pi/2$, obtenemos las curvas $w_i(t) = f(z_i(t))$, $i = 1, 2$ dadas por

$$w_1(t) = \overline{z_0 + t} = \bar{z}_0 + t, \quad w_2(t) = \overline{z_0 + it} = \bar{z}_0 - it,$$

FIGURA 3.3. La función $f(z) = \bar{z}$ no preserva ángulos (Ejemplo 3.4).

las cuales incluyen el ángulo $3\pi/2$ (ver Figura 3.3).

El siguiente teorema importante establece la relación entre la regularidad y la conformidad local.

Teorema 3.12. *Si la función f es regular en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es localmente conforme en z_0 .*

Demostración.

1. Para $t \in [-1, 1]$ consideremos dos curvas $z_1(t)$ y $z_2(t)$ con $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ que posean tangentes en z_0 . Esto significa que $z'_1(0)$ y $z'_2(0)$ existen y

$$z'_1(0) \neq 0, \quad z'_2(0) \neq 0. \quad (3.8)$$

Consideremos las curvas $w_1(t) = f(z_1(t))$ y $w_2(t) = f(z_2(t))$. En virtud de (3.8) y

$$w'_1(0) = f'(z_0)z'_1(0), \quad w'_2(0) = f'(z_0)z'_2(0)$$

las curvas $w_1(t)$ y $w_2(t)$ poseen tangentes para $t = 0$, y

$$\frac{w'_2(0)}{w'_1(0)} = \frac{z'_2(0)}{z'_1(0)}. \quad (3.9)$$

Si ponemos

$$z'_\nu(0) = |z'_\nu(0)|e^{i\varphi_\nu}; \quad w'_\nu(0) = |w'_\nu(0)|e^{i\psi_\nu}, \quad \nu = 1, 2,$$

entonces obtenemos a partir de (3.9)

$$\left| \frac{z'_2(0)}{z'_1(0)} \right| e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = \left| \frac{w'_2(0)}{w'_1(0)} \right| e^{i(\psi_2 - \psi_1)},$$

es decir

$$e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = e^{i(\psi_2 - \psi_1)},$$

y a partir de la periodicidad de la función exponencial para un número entero k , concluimos que

$$\psi_2 - \psi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 + 2k\pi,$$

es decir los ángulos entre ambos pares de tangentes coinciden en tamaño y orientación. Es decir, la función f preserva ángulos.

2. La función f satisface (3.7) porque

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)| =: \gamma > 0.$$

■

Comentario 3.2. Si f es regular en z_0 y $f'(z_0) = 0$, entonces f no es localmente conforme en z_0 ya que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)| = 0.$$

Además, se puede demostrar que f no preserva ángulos en z_0 .

Ejemplo 3.5. La función $f(z) = e^z$ es regular sobre $\mathbb{C}$. Como $f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0$ la función f es localmente conforme en cada punto $z_0 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.6. Consideremos una transformación fraccionaria lineal

$$l(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc \neq 0$.

1. Si $c = 0$, entonces

$$l(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

y en virtud de $l'(z) = a/d \neq 0$ la función l es localmente conforme en cada $z_0 \in \mathbb{C}$.

2. Si $c \neq 0$, entonces l es regular sobre $\mathbb{C}$ con la excepción de $-d/c$. Como

$$l'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

la aplicación l es localmente conforme en cada punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

3.7. Biyectividad local

Deseamos demostrar ahora que una función f que es regular en $z_0 \in D(f)$ con $f'(z_0) \neq 0$ es localmente biyectiva en z_0 , es decir posee una inversa sobre una vecindad de z_0 . Para tal efecto utilizaremos el siguiente teorema cuya demostración se postergará ya que nuestros presentes conocimientos aún no son suficientes.

Teorema 3.13. Si la función $f = u + iv$ es regular en z_0 , entonces las funciones u_x , u_y , v_x y v_y son continuas sobre una vecindad U_0 de z_0 .

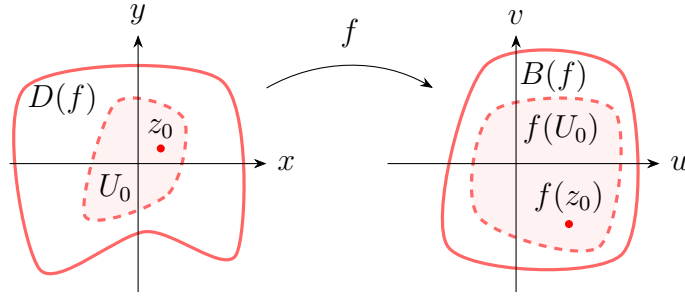


FIGURA 3.4. Ilustración de la biyectividad local (Teorema 3.14).

Comentario 3.3. Según la Definición 3.2, la regularidad de f en z_0 implica que f es diferenciable sobre una vecindad U_0 de z_0 . A su vez, de acuerdo al Teorema 3.7, podemos deducir a partir de la diferenciabilidad la existencia de las derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y . No obstante hasta ahora no hemos podido deducir la continuidad de estas derivadas parciales.

Comentario 3.4. El Teorema 3.13 inmediatamente implica que f' es continua sobre una vecindad de z_0 . Más adelante demostraremos que f' incluso es regular en z_0 .

Podemos ahora demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.14. Si f es regular en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es biyectiva en z_0 , es decir f mapea un vecindad U_0 de z_0 en forma biyectiva a $f(U_0)$. La función inversa $f^{-1}(w)$ es regular en $w_0 = f(z_0)$ con

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}. \quad (3.10)$$

Demostración.

1. De acuerdo al Teorema 3.13 la regularidad de f en z_0 implica la existencia de una vecindad $\tilde{U}_0$ de z_0 sobre la cual u_x , u_y , v_x y v_y son continuas. Posiblemente achicando $\tilde{U}_0$ y tomando en cuenta que $f'(z_0) \neq 0$ podemos lograr que

$$\begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix} = u_x^2(x, y) + v_x^2(x, y) = |f'(z)|^2 \neq 0 \quad \text{sobre } \tilde{U}_0.$$

Pero en este caso podemos aplicar el teorema principal de funciones inversas [2, Teorema 3.3] para concluir que $f = (u, v)$ mapea una vecindad U_0 de z_0 con $U_0 \subset \tilde{U}$ en forma biyectiva sobre $f(U_0)$.

2. Sean $w = f(z)$ y $\tilde{w} = f(\tilde{z})$, entonces la diferenciabilidad de f^{-1} para todo $w \in f(U_0)$ es una consecuencia inmediata de

$$\lim_{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{f^{-1}(\tilde{w}) - f^{-1}(w)}{\tilde{w} - w} = \lim_{\tilde{z} \rightarrow z} \frac{1}{\frac{f(\tilde{z}) - f(z)}{\tilde{z} - z}} = \frac{1}{f'(z)},$$

lo cual implica (3.10). ■

3.8. Aplicaciones conformes

Consideremos nuevamente aplicaciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. A parte de la conformidad local el concepto de la conformidad (global) es muy importante.

Definición 3.6. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f mapea una región $G_z \subset D(f)$ en forma (globalmente) conforme a una región $G_w = f(G_z)$ si

1. la función f es localmente conforme en cada punto $z_0 \in G_z$ y
2. la aplicación $f : G_z \rightarrow G_w$ es biyectiva.

Comentario 3.5. La conformidad local de una función en cada punto $z_0 \in D(f)$ no implica la conformidad global. Por ejemplo, la función $f(z) = e^z$ es localmente conforme en cada $z_0 \in \mathbb{C}$, pero como $e^z = e^{z+2\pi i}$, la función f no es biyectiva.

El siguiente teorema, el teorema de la aplicación de Riemann, también llamado teorema del mapeo de Riemann o teorema de representación conforme de Riemann, nos informa qué tipo de regiones pueden ser mapeadas una a otra en forma conforme.

Teorema 3.15 (Teorema de la aplicación de Riemann). Sean $G_z \subset \mathbb{C}$ y $G_w \subset \mathbb{C}$ regiones simplemente conexas y $G_z \neq \mathbb{C}$, $G_w \neq \mathbb{C}$. Entonces existe una aplicación conforme $f : G_z \rightarrow G_w$.

Demostración. La demostración del teorema es bastante complicada y no puede ser llevada a cabo utilizando las herramientas desarrolladas hasta ahora. ■

3.9. “Funciones multivaluadas” y superficies de Riemann

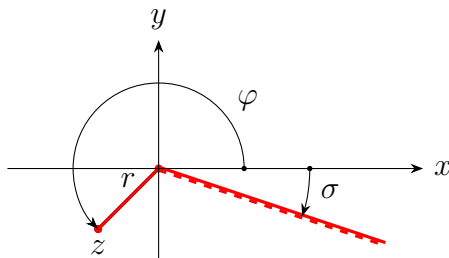
Vimos que una función f regular en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$ es localmente biyectiva, es decir localmente posee una función inversa f^{-1} . Discutiremos ahora la biyectividad global de funciones. Para tal efecto consideremos la función $w = f(z) = z^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ que es regular sobre $\mathbb{C}$ con $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ para $z \neq 0$, es decir esta función f es localmente biyectiva en cada punto $z \neq 0$. Pero si consideramos la “función inversa”, es decir si tratamos despejar z a partir de la ecuación

$$z^n = w$$

para $w = |w|e^{i\psi}$ ($0 \leq \psi < 2\pi$) fijo, entonces obtenemos n valores z , a saber:

$$\begin{aligned} z_0 &= |w|^{1/n} \exp\left(i\frac{\psi}{n}\right), \\ z_1 &= |w|^{1/n} \exp\left(i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{1}{n} \cdot 2\pi\right)\right), \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= |w|^{1/n} \exp\left(i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot 2\pi\right)\right). \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, la “función inversa” $\sqrt[n]{w}$ asigna a cada valor $w \neq 0$ un número total de n valores z , es decir la “función inversa” no es univaluada, sino que multivaluada; precisamente, es n -valuada.

FIGURA 3.5. Ilustración de una σ -raya.

Comentario 3.6. Escribimos la palabra “función inversa” en comillas dado que de acuerdo a nuestra definición de una función, ésta debe ser univaluada.

Para poder describir esta y otras “funciones multivaluadas” analíticamente, utilizaremos la representación en coordenadas polares. El hecho de que la “función” $\sqrt[n]{w}$ es multivaluada es estrechamente ligado a la ambigüedad de la representación en coordenadas polares.

Sea ahora σ un ángulo arbitrario con $-2\pi < \sigma \leq 0$. Este ángulo define en el plano z una raya en forma única, la σ -raya (ver Figura 3.5). Ahora cada punto z puede ser representado en forma única en coordenadas polares por $r = |z|$ y el ángulo φ , donde $\sigma \leq \varphi < \sigma + 2\pi$.

Definición 3.7. Sea σ dado, $-2\pi < \sigma \leq 0$. En la representación $z = re^{i\varphi}$, donde $\sigma \leq \varphi < \sigma + 2\pi$, definimos

$$\varphi =: \arg_{\sigma} z.$$

Además denotamos el espacio angular definido en esta forma por

$$W_{\sigma} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi}, \sigma \leq \varphi < \sigma + 2\pi, 0 < r < \infty\}.$$

Comentario 3.7. Para cada σ se asigna al punto $z = 1$ el ángulo $\varphi = 0$.

Comentario 3.8. También se dice que hemos cortado el plano a lo largo de la σ -raya.

Estos conceptos nos permiten describir las “funciones multivaluadas” más importantes.

3.9.1. Potencia y raíz. Consideremos la aplicación $w = z^n$. Cada espacio angular

$$W_n(\sigma, k) := \left\{ z = re^{i\varphi} \mid \frac{\sigma}{n} + k\frac{2\pi}{n} \leq \varphi < \frac{\sigma}{n} + (k+1)\frac{2\pi}{n}, 0 < r < \infty \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

es mapeado sobre el plano w cortado a lo largo de la σ -raya, denotado por W_{σ} , ver Figura 3.6 (para el ejemplo del caso $n = 6$). Entonces obtenemos n aplicaciones inversas, o tal como también se dice, n ramas de la función inversa, denotadas por

$$(w^{1/n})_{(\sigma, k)} := |w|^{1/n} \exp\left(i\left(\frac{1}{n} \arg_{\sigma} w + k\frac{2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

donde la rama $(w^{1/n})_{(\sigma, k)}$ mapea el plano cortado a lo largo de la σ -raya, denotado por W_{σ} , sobre el espacio angular $W_n(\sigma, k)$. Para $k = 0$ definimos

$$(w^{1/n})_{(\sigma, 0)} = w_{\sigma}^{1/n} = |w|^{1/n} \exp\left(i\frac{\arg_{\sigma} w}{n}\right)$$

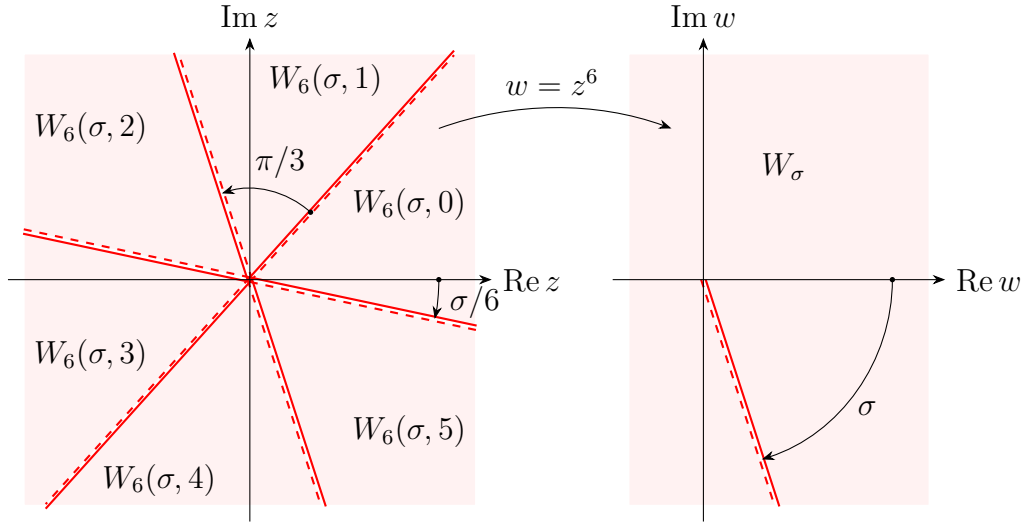


FIGURA 3.6. Aplicación $w = z^n$ para $n = 6$ y espacios angulares $W_6(\sigma, k)$, $k = 0, \dots, 5$, y W_σ ilustrados para $\sigma = -2\pi/5$.

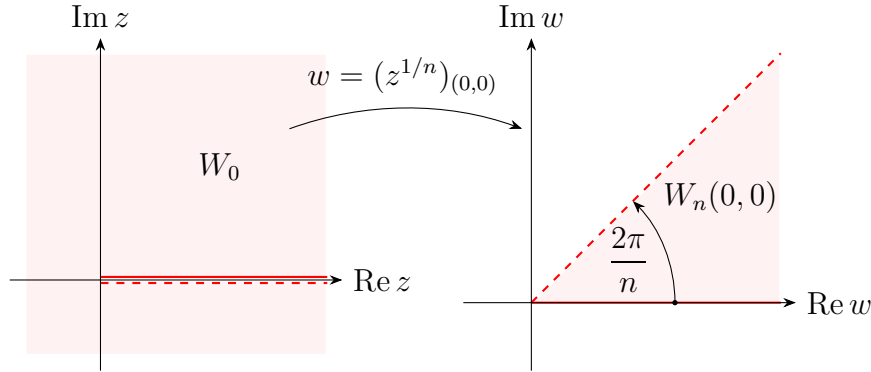


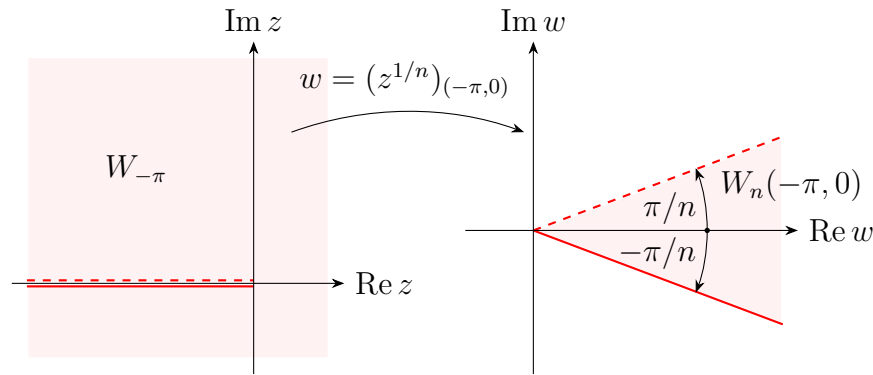
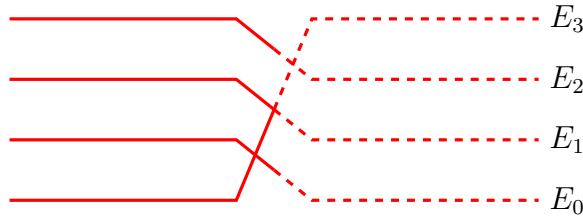
FIGURA 3.7. Rama principal $(w^{1/n})_{(\sigma,0)}$ para $n = 8$ y $\sigma = 0$.

y hablamos de la rama principal de la función raíz con respecto a σ .

Ejemplo 3.7. Sea $\sigma = 0$. La Figura 3.7 ilustra los conjuntos $W_{\sigma=0}$ y $W_n(0, 0)$ para $n = 8$.

Ejemplo 3.8. Sea $\sigma = -\pi$. La Figura 3.8 ilustra los conjuntos $W_{\sigma=-\pi}$ y $W_n(-\pi, 0)$ para $n = 8$.

Para la descripción de la aplicación $w = z^n$ definiremos ahora las llamadas superficies de Riemann en la siguiente forma. Utilizamos n ejemplares del w -plano, llamados hojas, denotados $E_0, \dots, E_{n-1}$, cortadas a lo largo de la σ -raya. Sea ahora S una raya que atraviesa el espacio angular $W_n(\sigma, 0)$, entonces la raya imagen $f(S)$ atraviesa el primer w -plano (hoja) E_0 . Ahora si S entra al segundo espacio $W_n(\sigma, 1)$, entonces hacemos entrar la raya imagen $f(S)$ en el segundo plano (la segunda hoja) E_1 . De esta manera pegamos el borde punteado del corte de E_0 al borde sólido del corte de E_1 . Continuamos de esta forma y finalmente

FIGURA 3.8. Rama principal $(w^{1/n})_{(\sigma, 0)}$ para $n = 8$ y $\sigma = -\pi$.FIGURA 3.9. Composición de la superficie de Riemann asociada con $w = z^n$ por hojas $E_0, \dots, E_{n-1}$, ilustrada para $n = 4$.

nos imaginamos el borde punteado de E_{n-1} pegado al borde sólido de E_0 . Esto entrega la situación ilustrada en la Figura 3.9 para $n = 4$.

Nos imaginamos todas las n hojas fusionadas en el origen y el punto ∞ . Ahora, sobre esta superficie de Riemann, la función inversa $z = f^{-1}(w) = w^{1/n}$ es definida en forma unívoca. Cada hoja corresponde a una rama de la función y sobre cada hoja la función es unívoca.

El concepto de superficies de Riemann tiene la ventaja de que los valores múltiples de las “funciones multivaluadas” se obtienen de una manera continua.

Comentario 3.9. Para la construcción de la presente superficie de Riemann, que depende de σ , los puntos de los planos w sobre las σ -rayas aparecen como una especie de puntos “singulares” ya que en estos se “cambia” desde una hoja a la siguiente. Para otro valor de σ tales puntos de la superficie de Riemann nueva serán puntos “normales”. Por otro lado, la conexión de la última hoja a través de las otras hojas es bastante ficticia. Por tal motivo utilizaremos esta construcción de una superficie de Riemann solamente como ilustración útil.

3.9.2. Función exponencial y logaritmo. Como segundo ejemplo consideremos la aplicación $w = e^z$. Aquí cada franja

$$S(\sigma, k) := \{z = x + iy \mid -\infty < x < \infty, \sigma + k2\pi \leq y < \sigma + (k+1)2\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

es mapeada al plano W_σ (cortada a lo largo de la σ -raya), ver Figura 3.10. Entonces obtenemos una infinidad de aplicaciones inversas, denotadas por

$$\log_{(\sigma, k)} w = \ln |w| + i(\arg_\sigma w + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

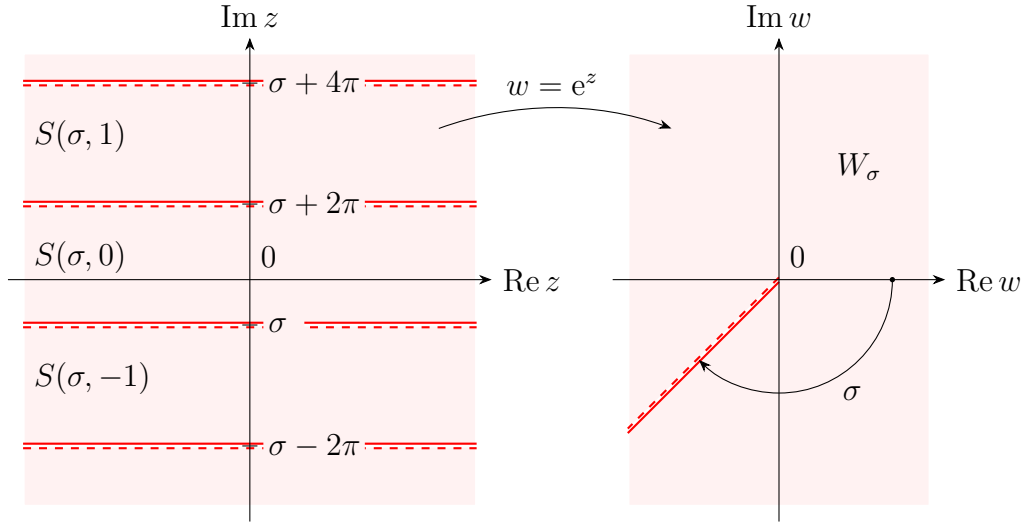


FIGURA 3.10. Aplicación $w = e^z$ y franjas $S(\sigma, -1)$, $S(\sigma, 0)$ y $S(\sigma, 1)$, ilustradas para $\sigma = -3\pi/4$.

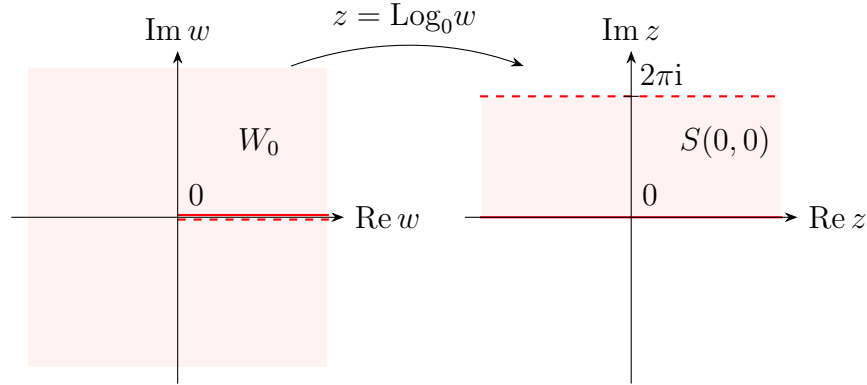


FIGURA 3.11. Aplicación $z = \text{Log}_0 w$ y franja $S(0, 0)$ (Ejemplo 3.9).

Para $k = 0$ escribimos

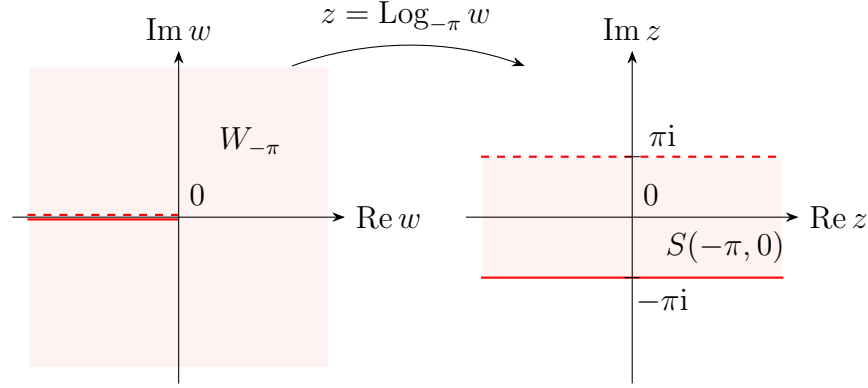
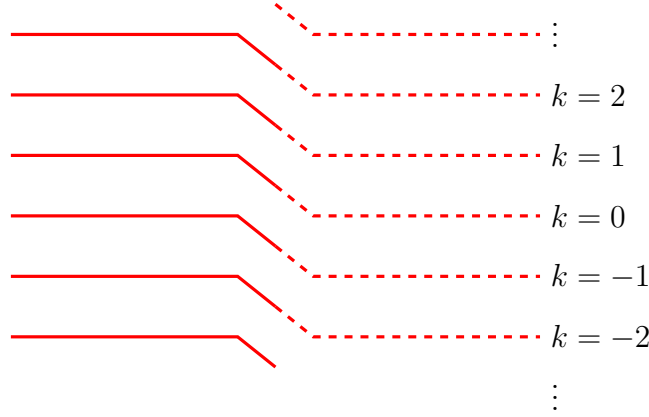
$$\log_{(\sigma, 0)} =: \text{Log}_\sigma z \quad (3.11)$$

(donde escribimos “ Log_σ ” para evitar confusión con “ $\log_\sigma$ ”, lo que significa “logaritmo con respecto a la base σ ”) y nos referimos al valor principal del logaritmo con respecto a σ . Éste ha sido definido en tal forma que para todo $z = x > 0$,

$$\text{Log}_\sigma z = \ln x.$$

Ejemplo 3.9. Consideremos $\sigma = 0$. Aquí al plano w cortado a lo largo del eje real positivo le corresponde la franja fundamental $S(0, 0)$ dibujada en la Figura 3.11.

Ejemplo 3.10. Consideremos $\sigma = -\pi$. Aquí al plano w cortado a lo largo del eje real positivo le corresponde la franja fundamental $S(-\pi, 0)$ dibujada en la Figura 3.12.

FIGURA 3.12. Aplicación $z = \text{Log}_{-\pi} w$ y franja $S(-\pi, 0)$ (Ejemplo 3.10).FIGURA 3.13. Composición de la superficie de Riemann asociada con $w = e^z$.

Para la diferenciación del logaritmo consideremos $w_0 \neq 0$. Consideremos un valor σ arbitrario tal que la raya definida por σ no pasa por w_0 . Entonces para una rama arbitraria fija obtenemos, poniendo $z_0 = \log_{(\sigma, k)} w_0$:

$$(\log_{(\sigma, k)} w)' \big|_{w=w_0} = \frac{1}{(e^z)' \big|_{z=z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}.$$

Para la descripción global de la aplicación $w = e^z$ podemos proceder tal como para la raíz, pero necesitaremos ahora un número infinito de planos y obtenemos la situación dibujada en la Figura 3.13.

3.9.3. Potencia general. En el caso real definimos la potencia x^α para $x > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Extendemos esta definición al caso complejo mediante

$$z^a = e^{a \log z} = \exp(a \log z).$$

Debido a la presencia de $\log z$ esta función obviamente es otra función infinitamente multivaluada. Si nuevamente elegimos $\sigma \in (-2\pi, 0]$ obtenemos una rama unívoca

$$(z^a)_{(\sigma, k)} := \exp(a \log_{(\sigma, k)} z).$$

Como rama principal nuevamente identificamos la rama con $k = 0$. Esta es definida en tal forma que para $z = x > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$z^a = \exp(a \log_{(\sigma,0)} z) = \exp(a \operatorname{Log}_\sigma z) = \exp(a \ln x) = x^a,$$

es decir la rama principal entrega la definición real para z real. Para la diferenciación obtenemos para $z \neq 0$ arbitrario, y eligiendo σ en forma adecuada,

$$\left((z^a)_{(\sigma,k)}\right)' = \left(\exp(a \log_{(\sigma,k)} z)\right)' = \exp(a \log_{(\sigma,k)} z) \cdot \frac{a}{z} = a(z^{a-1})_{(\sigma,k)}.$$

Comentario 3.10. Como caso especial importante obtenemos para $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, nuevamente la n -ésima raíz

$$(z^{1/n})_{(\sigma,k)} = \exp\left(\frac{1}{n} \log_{(\sigma,k)} z\right).$$

3.10. Ejercicios

Problema 3.1. Demostrar el Teorema 3.1.

Problema 3.2. Demostrar el Teorema 3.3.

Problema 3.3. Demostrar el Teorema 3.4.

Problema 3.4 (Evaluación 1, curso 2023).

- Sean $f(z) = z^4$ y $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. ¿La función f es uniformemente continua sobre D ? ¿Es diferenciable sobre D ? ¿Es regular en alguna vecindad de $z = 0$?
- Sea $g(z) = 1/z^2$. ¿La función f es uniformemente continua sobre $D \setminus \{0\}$?
- Analizar si existe el límite de las siguientes funciones (definidas para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) cuando $z \rightarrow 0$. En los casos donde este límite existe, ¿cómo hay que definir la función en $z = 0$ para que sea continua?

$$f_1(z) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{|z^2|}{|z|^2}, \quad f_3(z) = \frac{|z|^2 \operatorname{Re} z}{z}.$$

Solución sugerida.

- (i) La función sí es uniformemente continua sobre D . Para demostrar esto hay que demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z^4 - z_0^4| < \varepsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$, donde δ depende *solamente* de ε , pero *no depende* del punto z_0 elegido en la región. Si $z, z_0 \in D$, entonces

$$\begin{aligned} |z^4 - z_0^4| &= |z^2 + z_0^2| |z^2 - z_0^2| = |z^2 + z_0^2| |z + z_0| |z - z_0| \\ &\leq (|z|^2 + |z_0|^2) (|z| + |z_0|) |z - z_0| < 4|z - z_0|. \end{aligned}$$

Concluimos que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|z^4 - z_0^4| < 4\delta$. Si elegimos $\delta = \varepsilon/4$, entonces $|z^4 - z_0^4| < \varepsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$, donde δ depende solamente de ε , pero no de z_0 .

- (ii) Para verificar la diferenciabilidad podemos utilizar, por ejemplo, que si $z = x + iy$, entonces $z^4 = x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4$, es decir $z^4 = u(x, y) + iv(x, y)$ con

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3.$$

Ambas funciones u y v son claramente diferenciables como funciones reales en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; además,

$$\begin{aligned} u_x &= 4x^3 - 12xy^2, & u_y &= -12x^2y + 4y^3, \\ v_x &= 12x^2y - 4y^3, & v_y &= 4x^3 - 12xy^2, \end{aligned}$$

es decir las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ están satisfechas.

Por lo tanto f es diferenciable en todo $\mathbb{C}$. En particular es diferenciable en D .

- (iii) De acuerdo a lo anterior, la función f es regular en *cualquier* vecindad de $z = 0$.
 b) La función no es uniformemente continua sobre D . Para ver esto, sean $z_0 \neq 0$ y $z_0 + \zeta \neq 0$ dos puntos en D tales que $|z_0 + \zeta - z_0| = |\zeta| = \delta$. Entonces la cantidad

$$\begin{aligned} |g(z_0) - g(z_0 + \zeta)| &= \left| \frac{1}{z_0^2} - \frac{1}{(z_0 + \zeta)^2} \right| \\ &= \frac{|2z_0\zeta + \zeta^2|}{|z_0|^2|z_0 + \zeta|^2} \geq \frac{|\zeta|}{|z_0|^2|z_0 + \zeta|^2} = \frac{\delta}{|z_0||z_0 + \zeta|} \end{aligned}$$

puede ser arbitrariamente grande si elegimos z_0 suficientemente cerca de 0. Por lo tanto la función g no puede ser uniformemente continua en D .

c)

1. Consideremos sucesiones $\{z_n\}_{n \in \mathbb{C}}$ con $z_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, $z_n \neq 0$. Para $z_n = x_n \in \mathbb{R}$ con $x_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, $x_n \neq 0$ tenemos

$$f_1(z_n) = f_1(x_n) = \frac{1}{2} \frac{x_n}{x_n} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, para $z_n = iy_n \in \mathbb{R}$ con $y_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, $y_n \neq 0$ tenemos

$$f_1(z_n) = f_1(iy_n) = \frac{1}{2} \frac{y_n}{-iy_n} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{i}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

Como ambos límites son diferentes, la función no puede ser definida en $z = 0$ por ningún valor para que sea continua.

2. Notamos primeramente que si $z = x + iy$, $z \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{|x^2 + 2ixy - y^2|}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^2}}{x^2 + y^2} = 1, \end{aligned}$$

por lo tanto el límite existe y es igual a uno. Obviamente, definiendo $f_2(0) = 1$ resulta una función continua (efectivamente, constante).

3. Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{C}}$ con $z_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, $z_n \neq 0$. Entonces

$$|f_3(z_n)| = \left| \frac{|z_n|^2 \operatorname{Re} z_n}{|z_n|} \right| = |z_n| |\operatorname{Re} z_n| \leq |z_n|^2,$$

luego $|f_3(z_n)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $f_3(z_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto podemos convertir f_3 en una función continua definiendo $f_3(0) = 0$.

Problema 3.5 (Tarea 3, curso 2023). Determinar todos los $z = x + iy$ para los cuales las siguientes funciones son diferenciables:

a) $f(z) = x^2 + 3y^2 + 2ixy,$

b) $f(z) = (x - iy)(2 - x^2 - y^2).$

Solución sugerida.

a) La función es de la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = x^2 + 3y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Ambas funciones poseen derivadas parciales; a saber:

$$u_x = 2x, \quad u_y = 6y, \quad v_x = 2y, \quad v_y = 2x.$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ están satisfechas para aquellos puntos (x, y) donde $2x = 2x$ y $6y = -2y$, es decir para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y = 0$. Por lo tanto, concluimos que f es diferenciable sobre

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0\}.$$

b) La función es de la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = x(2 - x^2 - y^2)$, $v(x, y) = -y(2 - x^2 - y^2)$. Ambas funciones poseen derivadas parciales; a saber:

$$\begin{aligned} u_x &= 2 - x^2 - y^2 - 2x^2 = 2 - 3x^2 - y^2, & u_y &= -2xy, & v_x &= 2xy, \\ v_y &= -2 + x^2 + y^2 - y \cdot (-2y) = -2 + x^2 + 3y^2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ están satisfechas para aquellos puntos (x, y) donde $2 - 3x^2 - y^2 = -2 + x^2 + 3y^2$ y $-2xy = -2xy$. La segunda de estas ecuaciones no impone ninguna restricción. La primera está satisfecha para $4x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, es decir sobre la circunferencia unitaria. Por lo tanto, concluimos que f es diferenciable sobre

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Problema 3.6 (Tarea 3, curso 2023). Sea $z = x + iy$ y $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $D(f) = \mathbb{C}$. Demostrar que

- a) la función f no es diferenciable en ninguna parte,
- b) en $z_0 = 0$ las ecuaciones de Cauchy-Riemann están satisfechas.

Solución sugerida.

a) Consideremos primero la función sobre $D^+ := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid xy > 0\}$. Para $(x, y) \in D^+$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con

$$u_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \neq 0, \quad u_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \neq 0, \quad v_x = v_y = 0,$$

asi que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no están satisfechas en ninguna parte de D^+ y por lo tanto f no es diferenciable en ninguna parte de D^+ . Sobre $D^- := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid xy < 0\}$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con

$$u_x(x, y) = -\frac{y}{2\sqrt{-xy}} \neq 0, \quad u_y(x, y) = -\frac{x}{2\sqrt{-xy}} \neq 0, \quad v_x = v_y = 0,$$

asi que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no están satisfechas en ninguna parte de D^- tampoco. Sobre $D_0 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid xy = 0\} \setminus \{0\}$, basta considerar el caso $x \neq 0$, $y = 0$ (el caso $x = 0$, $y \neq 0$ es análogo). Para $z = (x, y) \in D_0$, $f(x, y) = f(x, 0) = 0$. Sea $z_n = x + h_n + ih_n^2$, donde $h_n \in \mathbb{R}$ para todo n y $h_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, asi que $z_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Sea $h_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(x, 0)}{z_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|x + h_n| h_n^2}}{h_n + ih_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|h_n| \sqrt{|x + h_n|}}{h_n (1 + ih_n)} = \sqrt{|x|};$$

pero si $h_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(x, 0)}{z_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|x + h_n| h_n^2}}{h_n + ih_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|h_n| \sqrt{|x + h_n|}}{h_n (1 + ih_n)} = -\sqrt{|x|};$$

como $x \neq 0$, los límites son diferentes; concluimos que f tampoco es diferenciable sobre D_0 .

Queda por inspeccionar el punto $z = 0$. Para tal efecto supongamos que $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, y $x_n^2 + y_n^2 \neq 0$. Supongamos que $x_n = y_n = w_n$, con $w_n \rightarrow 0$, $w_n \neq 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(0)}{z_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|w_n|^2}}{w_n(1 + i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|w_n|^2}}{w_n(1 + i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_n|}{w_n} \frac{1}{1 + i}.$$

Si $w_n > 0$, este límite es igual a $1/(1 + i)$; si $w_n < 0$, este límite es igual a $-1/(1 + i)$. Por lo tanto, el límite depende de la elección de w_n , luego f no es diferenciable en $z = 0$. Esto concluye la demostración de que f no es diferenciable en ninguna parte.

- b) Escribimos $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Como la función $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ es real, obtenemos $v \equiv 0$ y por lo tanto $v_x = 0$, $v_y = 0$, y $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Calculamos, además, para $h \in \mathbb{R}$

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = 0, \quad u_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = 0,$$

por lo tanto verificamos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ sí están satisfechas en $z = 0$.

Problema 3.7 (Tarea 3, curso 2023). Determinar todas las funciones f diferenciables sobre $\mathbb{C}$ de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$.

Solución sugerida. Se buscan funciones del tipo $f(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$ con $U(x, y) = u(x)$, $V(x, y) = v(y)$. Aquí

$$U_x(x, y) = u'(x), \quad U_y(x, y) = 0, \quad V_x(x, y) = 0, \quad V_y(x, y) = v'(y).$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ están satisfechas si y sólo si

$$u'(x) = v'(y).$$

Dado que el lado izquierdo de esta igualdad es una función de x y el lado derecho es una función de y y la identidad debe ser válida para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, concluimos que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$u'(x) = v'(y) = c,$$

es decir $u(x) = cx + \alpha$, $v(y) = cy + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, lo que implica que $f(x, y) = c(x + iy) + \alpha + i\beta$, es decir si $\mathbb{C} \ni a := \alpha + i\beta$, la función f debe ser de la forma

$$f(z) = cz + a, \quad c \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Problema 3.8 (Tarea 3, curso 2023). Sean las funciones f y g regulares en z_0 ; $f(z_0) = g(z_0) = 0$; y $g'(z_0) \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Solución sugerida. Como $f(z_0) = g(z_0) = 0$ podemos escribir el límite como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}.$$

Como ambas funciones son regulares en z_0 y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0) \neq 0,$$

concluimos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Capítulo 4

Integración compleja

Existen diversos planteos de la construcción de la teoría de integración compleja. Aquí se optó por desarrollar la teoría de la integral de Riemann-Stieltjes (RS) basada en sumas de Riemann-Stieltjes. Este planteo también incluye la integral de RS real, la cual es de importancia para muchas aplicaciones. Una presentación de la teoría de la integral de RS también se encuentra en [7, Capítulo 6].

4.1. Módulo de continuidad y funciones de variación acotada

Para discutir la integral de RS consideremos primero el concepto del módulo de continuidad.

Definición 4.1. Si la función f es acotada sobre el conjunto $B \subset \mathbb{C}$, entonces definimos para $\delta > 0$

$$\mu_B(\delta, f) := \sup_{\substack{|z_1 - z_2| < \delta \\ z_1, z_2 \in B}} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

La función $\delta \mapsto \mu_B(\delta, f)$ se llama módulo de continuidad de f con respecto al conjunto B .

Mediante el teorema sobre la continuidad uniforme (ver Cálculo I) obtenemos inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 4.1. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua sobre el conjunto compacto $B \subset \mathbb{C}$. Entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mu_B(\delta, f) = 0.$$

En lo siguiente desarrollaremos la teoría de funciones complejas de variación acotada. Esta teoría es completamente análoga a la teoría de funciones reales de variación acotada, ya que a parte del valor absoluto solamente se utiliza la desigualdad triangular.

Definición 4.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre $[a, b]$.

1. Si existe una constante $M > 0$ tal que para todas particiones $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ se tiene que

$$V_P(f) := \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq M,$$

entonces la función f se dice de variación acotada sobre $[a, b]$. También se escribe $f \in BV[a, b]$.

2. Si $f \in BV[a, b]$, entonces

$$\sup_P V_p(f) =: \overset{b}{V}_a(f)$$

se dice variación total de f sobre $[a, b]$.

Tal como en el caso real tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. Sea $f \in BV[a, b]$. Entonces f es acotada sobre $[a, b]$.

Demostración. Ver la demostración de [2, Teorema 6.2]. ■

Teorema 4.3. Sean $f \in BV[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$. Entonces $f \pm g \in BV[a, b]$ y $f \cdot g \in BV[a, b]$.

Demostración. Tarea. ■

Tenemos, además, el siguiente teorema importante acerca de la aditividad de la variación total.

Teorema 4.4. Sean $f \in BV[a, b]$ y $c \in (a, b)$, entonces

1. $f \in BV[a, c]$ y $f \in BV[c, b]$,
2. $\overset{b}{V}_a(f) = \overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f)$.

Demostración. Ver la demostración de [2, Teorema 6.4]. ■

El siguiente teorema demuestra que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de variación acotada si y sólo si sus partes real e imaginaria son de variación acotada.

Teorema 4.5. Sea $f = u + iv : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $f \in BV[a, b]$ si y sólo si $u \in BV[a, b]$ y $v \in BV[a, b]$.

Demostración. Ver la demostración de [2, Teorema 6.7]. ■

4.2. La definición de la integral de Riemann-Stieltjes (RS)

Definición 4.3. Sean las funciones f y g acotadas sobre $[a, b]$. Sea, además, $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea τ_k un número arbitrario de $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, \dots, n$). Sea $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Entonces la cantidad

$$S_P(f, g; \boldsymbol{\tau}) := \sum_{k=1}^n f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) = \sum_P f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))$$

suma de Riemann-Stieltjes (RS) de f con respecto a g relativa a la partición P .

La siguiente es la definición de la convergencia de sumas de RS y por lo tanto de la integral de RS (ver [2]).

Definición 4.4. Para una partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de un intervalo $[a, b]$ con

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

definimos la norma de P por

$$\|P\| := \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|.$$

Definición 4.5. Si existen un número $I \in \mathbb{C}$ y para cada $\varepsilon > 0$ un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para $\|P\| < \delta_\varepsilon$ y bajo elección arbitraria de los τ_k se tiene que

$$|S(f, g; \tau) - I| < \varepsilon,$$

entonces ponemos

$$I = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, g; \tau).$$

El número

$$I = \int_a^b f(t) dg(t)$$

se dice integral de RS de f con respecto a g sobre $[a, b]$.

Comentario 4.1. Para una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y la función $g(t) = t$ las sumas de RS entregan las sumas de Riemann conocidas y la integral de RS se reduce a la integral de Riemann conocida. Es decir el concepto de la integral de RS efectivamente representa una generalización de la integral de Riemann.

4.3. La existencia de la integral de RS

Teorema 4.6. Si $f \in C[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$, entonces existe la integral

$$I := \int_a^b f(t) dg(t). \quad (4.1)$$

Demostración. En lo siguiente utilizaremos que una partición $P' = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_{n'}\}$ de un intervalo $[a, b]$ es un refinamiento de la partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ si $P' \supset P$ (es decir, cada punto de P también pertenece a P').

1. Sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición con $\|P\| < \delta$ y sea $P' = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_{n'}\}$ un refinamiento de P .
 - a) Para cada k ($k = 1, \dots, n$) denotamos los puntos de la partición P' que pertenezcan al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ por

$$t'_{j_{k-1}} = t_{k-1}, \quad t'_{j_{k-1}+1}, \dots, t'_{j_k} = t_k.$$

A partir de

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (g(t'_j) - g(t'_{j-1}))$$

obtenemos, con elección arbitraria de los puntos intermedios τ_k ($k = 1, \dots, n$) y τ'_k ($k = 1, \dots, n'$), la identidad

$$\begin{aligned} & \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} f(\tau'_j)(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) - f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \\ &= \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (f(\tau'_j) - f(\tau_k))(g(t'_j) - g(t'_{j-1})). \end{aligned}$$

b) Sumando sobre k obtenemos

$$\begin{aligned} & |S_{P'}(f, g; \boldsymbol{\tau}') - S_P(f, g; \boldsymbol{\tau})| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (f(\tau'_j) - f(\tau_k)) (g(t'_j) - g(t'_{j-1})) \right) \right| \\ &\leq \mu_{[a,b]}(\delta, f) \overset{b}{\underset{a}{V}}(g). \end{aligned}$$

2. Sean P' y P'' dos particiones de $[a, b]$ con $\|P'\| < \delta$ y $\|P''\| < \delta$, entonces consideremos su *refinamiento común* $P = P' \cup P''$. Para una elección arbitraria de los puntos intermedios con respecto a P' , P'' y P tendremos entonces

$$\begin{aligned} & |S_{P'}(f, g; \boldsymbol{\tau}') - S_{P''}(f, g; \boldsymbol{\tau}'')| \\ &\leq |S_{P'}(f, g; \boldsymbol{\tau}') - S_P(f, g; \boldsymbol{\tau})| + |S_P(f, g; \boldsymbol{\tau}) - S_{P''}(f, g; \boldsymbol{\tau}'')| \\ &\leq 2\mu_{[a,b]}(\delta, f) \overset{b}{\underset{a}{V}}(g). \end{aligned} \tag{4.2}$$

3. Sea ahora dado $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$2\mu_{[a,b]}(\delta, f) \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \varepsilon.$$

a) Sea ahora $P^{(m)}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P^{(m)}\| = 0,$$

y sea para cada partición $P^{(m)}$ un conjunto de puntos intermedios arbitrarios dado por $\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \{\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_{n_m}^{(m)}\}$.

b) Ahora para cada $\delta > 0$ existe N_δ tal que $\|P^{(m)}\| < \delta$ para todo $m > N_\delta$. Esto significa que para todo m, k con $m > N_\delta$ y $k > N_\delta$,

$$|S_{P^{(k)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(k)}) - S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)})| \leq 2\mu_{[a,b]}(\delta, f) \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \varepsilon.$$

De acuerdo a lo anterior, la sucesión $\{S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)})\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto existe un número $I \in \mathbb{C}$ tal que

$$I = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)}).$$

c) Si en (4.2) ponemos $P'' = P^{(m)}$, entonces obtenemos para $m \rightarrow \infty$ para todas las particiones P' con $\|P'\| < \delta$ bajo elección arbitraria de los puntos intermedios $\boldsymbol{\tau}' = \{\tau'_1, \dots, \tau'_{n'}\}$,

$$|S_{P'}(f, g; \boldsymbol{\tau}') - I| < \varepsilon,$$

lo cual implica la existencia de la integral (4.1). ■

Comentario 4.2. Ambas funciones f y g pueden ser reales; por otro lado, también para una función compleja la integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

es definida.

4.4. Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes

A partir de la definición de la integral de RS y con la ayuda de las sumas de RS obtenemos inmediatamente las siguientes reglas de cálculo importantes.

Teorema 4.7. Sean $f_1, f_2 \in C[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$, entonces para $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ arbitrarios,

$$\int_a^b (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dg(t) = c_1 \int_a^b f_1(t) dg(t) + c_2 \int_a^b f_2(t) dg(t). \quad (4.3)$$

Demostración.

1. Como $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in C[a, b]$, la integral del lado izquierdo de (4.3) existe.
2. Ahora el enunciado sigue a partir de

$$S_P(c_1 f_1 + c_2 f_2, g; \tau) = c_1 S_P(f_1, g; \tau) + c_2 S_P(f_2, g; \tau)$$

en el caso límite $\|P\| \rightarrow 0$. ■

Teorema 4.8. Sean $f \in C[a, b]$ y $g_1, g_2 \in BV[a, b]$, entonces para $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ arbitrarios,

$$\int_a^b f(t) d(c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)) = c_1 \int_a^b f(t) dg_1(t) + c_2 \int_a^b f(t) dg_2(t). \quad (4.4)$$

Demostración.

1. Como $c_1 g_1 + c_2 g_2 \in BV[a, b]$, la integral del lado izquierdo de (4.4) existe.
2. Ahora el enunciado sigue a partir de

$$S_P(f, c_1 g_1 + c_2 g_2; \tau) = c_1 S_P(f, g_1; \tau) + c_2 S_P(f, g_2; \tau)$$

en el caso límite $\|P\| \rightarrow 0$. ■

La siguiente estimación se utiliza frecuentemente.

Teorema 4.9. Si $f \in C[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \max_{[a, b]} |f(t)| V_a^b(g). \quad (4.5)$$

Demostración. La desigualdad (4.5) sigue cuando $\|P\| \rightarrow 0$ a partir de la estimación

$$|S_P(f, g; \tau)| = \left| \sum_P f(\tau_k) (g(t_k) - g(t_{k-1})) \right|$$

$$\leq \sum_P |f(\tau_k)| |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq \max_{[a,b]} |f(t)| \mathring{V}_a^b(g).$$

■

Si $g \in BV[a, b]$, también $t \mapsto \mathring{V}_a^t(g) \in BV[a, b]$, por lo tanto también existe la integral de RS $\int_a^b f(t) d \mathring{V}_a^t(g)$. Efectivamente, definimos lo siguiente.

Definición 4.6. Si $f \in C[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$, entonces definimos

$$\int_a^b f(t) d \mathring{V}_a^t(g) =: \int_a^b f(t) |dg(t)|.$$

Utilizando esta abreviatura podemos formular el siguiente teorema.

Teorema 4.10. Si $f \in C[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \int_a^b |f(t)| |dg(t)|.$$

Demostración. El enunciado sigue cuando $\|P\| \rightarrow 0$ a partir de

$$\begin{aligned} |S_P(f, g; \tau)| &= \left| \sum_P f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| \leq \sum_P |f(\tau_k)| |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\ &\leq \sum_P |f(\tau_k)| \mathring{V}_{t_{k-1}}^{t_k}(g) = \sum_P |f(\tau_k)| \left(\mathring{V}_a^{t_k}(g) - \mathring{V}_a^{t_{k-1}}(g) \right). \end{aligned}$$

■

Tenemos para la integral de RS la aditividad con respecto al intervalo de integración.

Teorema 4.11. Si $f \in C[a, b]$, $g \in BV[a, b]$ y $c \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^c f(t) dg(t) + \int_c^b f(t) dg(t). \quad (4.6)$$

Demostración.

1. De acuerdo al Teorema 4.4, $g \in BV[a, c]$ y $g \in BV[c, b]$, por lo tanto ambas integrales del lado derecho de (4.6) existen.
2. Sea ahora P una partición arbitraria de $[a, b]$ con $c \in P$. Si denotamos las particiones parciales sobre $[a, c]$ y $[c, b]$ por P_a^c y P_c^b , respectivamente, entonces el enunciado es una consecuencia inmediata (cuando $\|P\| \rightarrow 0$) de

$$S_P(f, g; \tau) = S_{P_a^c}(f, g; \tau) + S_{P_c^b}(f, g; \tau).$$

■

4.5. La computación de integrales de Riemann-Stieltjes

En la sección 4.3 demostramos que la integral de RS (4.1) existe siempre que $f \in C[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$. Esto es solamente un enunciado de existencia. Demostraremos ahora que si $g \in C^1[a, b]$, la computación de una integral de RS puede ser reducida a la computación de cuatro integrales de Riemann reales.

Teorema 4.12. Sean $f \in C[a, b]$ y $g \in C^1[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

Demostración.

1. Supongamos primeramente que las funciones f y g asumen valores reales. Entonces, si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, de acuerdo al teorema del valor intermedio para todo $k = 1, \dots, n$ existe $\tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$ tal que

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Para esta elección $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ de los puntos intermedios,

$$S_P(f, g; \tau) = \sum_P f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) = \sum_P f(\tau_k)g'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Esta última expresión es una suma de Riemann para el producto (continuo) fg' . Entonces el enunciado sigue si consideramos el límite $\|P\| \rightarrow 0$.

2. Si $f = u + iv$ y $g = x + iy$, entonces a partir de los Teoremas 4.7 y 4.8, el ítem 1. y del hecho de que $g \in C^1[a, b]$ si y sólo si $x \in C^1[a, b]$ e $y \in C^1[a, b]$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) dg(t) \\ &= \int_a^b u(t) dg(t) + i \int_a^b v(t) dg(t) \\ &= \int_a^b u(t) dx(t) + i \int_a^b u(t) dy(t) + i \int_a^b v(t) dx(t) + i^2 \int_a^b v(t) dy(t) \\ &= \int_a^b u(t)x'(t) dt - \int_a^b v(t)y'(t) dt + i \int_a^b u(t)y'(t) dt + i \int_a^b v(t)x'(t) dt \\ &= \int_a^b f(t)g'(t) dt. \end{aligned}$$

■

4.6. Integrales de línea complejas

La teoría de integración compleja se enfoca en las integrales de línea complejas, aplicando la teoría de las integrales de Riemann-Stieltjes complejos. Sea

$$K = \{z \mid z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta]\} \quad (4.7)$$

una curva rectificable, entonces $x, y \in BV[\alpha, \beta]$. Si, además, f es continua sobre K , entonces también $f \circ z \in C[\alpha, \beta]$. Esto permite la definición de una integral de línea compleja.

Definición 4.7. Sea la curva K dada por (4.7) rectificable y sea f continua sobre K , entonces definimos

$$\int_K f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) dz(t).$$

Esta integral se llama integral de línea compleja de f a lo largo de la curva K .

Comentario 4.3. Si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de $[\alpha, \beta]$ y $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ para $k = 1, \dots, n$, entonces esto induce una partición de la curva K y una elección de “puntos intermedios” sobre K . Si ponemos $z(t_k) =: z_k$ para $k = 0, \dots, n$ y $z(\tau_k) =: \zeta_k$, obtenemos las siguientes sumas de RS para la función $f \circ z$:

$$S_P(f \circ z, z; \tau) = \sum_P f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})) = \sum_P f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Esto corresponde exactamente a la formación de una suma de Riemann en el caso real.

Las propiedades de la integral de RS también serán válidos para las integrales de Riemann. A partir del Teorema 4.6 obtenemos inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 4.13. Sean K una curva rectificable y f continua sobre K , entonces existe la integral

$$\int_K f(z) dz.$$

El siguiente teorema es una aplicación de este teorema de existencia.

Teorema 4.14. Sea K una curva rectificable con el punto inicial a y el punto final b . Entonces

$$\int_K dz = b - a, \tag{4.8}$$

$$\int_K z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \tag{4.9}$$

Demostración. De acuerdo al Teorema 4.13, ambas integrales existen. Sea la curva K dada por $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ y sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[\alpha, \beta]$.

1. Se tiene

$$\int_K dz = \int_{\alpha}^{\beta} dz(t) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_P (z(t_k) - z(t_{k-1})) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} (z(t_n) - z(t_0)) = b - a.$$

2. Como la integral $\int_K z dz$ existe, podemos utilizar sumas de RS para su computación donde podemos elegir los puntos intermedios $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ en forma particular. Elijiendo $\tau_k = t_{k-1}$ obtenemos

$$\int_K z dz = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) dz(t) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_P z(t_{k-1})(z(t_k) - z(t_{k-1})),$$

y para $\tau_k = t_k$ obtenemos igualmente

$$\int_K z \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) \, dz(t) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_P z(t_k) (z(t_k) - z(t_{k-1})).$$

Esto implica

$$\begin{aligned} 2 \int_K z \, dz &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_P (z(t_k) + z(t_{k-1})) (z(t_k) - z(t_{k-1})) \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_P \left((z(t_k))^2 - (z(t_{k-1}))^2 \right) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left((z(t_n))^2 - (z(t_0))^2 \right) \\ &= (z(\beta))^2 - (z(\alpha))^2 = b^2 - a^2. \end{aligned}$$

■

Comentario 4.4. El Teorema 4.14 implica que para curvas K rectificables cerradas ($a = b$),

$$\int_K dz = 0, \quad \int_K z \, dz = 0.$$

A partir del Teorema 4.7 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.15. Sea K una curva rectificable y sean f_1 y f_2 continuas sobre K , entonces para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$,

$$\int_K (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)) \, dz = c_1 \int_K f_1(z) \, dz + c_2 \int_K f_2(z) \, dz.$$

Si tomamos en cuenta que la longitud $L(K)$ de una curva rectificable K es dada por

$$V_{\alpha}^{\beta}(z) = \sup_P \sum_P |z(t_k) - z(t_{k-1})| = L(K),$$

entonces el Teorema 4.9 inmediatamente implica el siguiente resultado.

Teorema 4.16. Sea K una curva rectificable y sea f continua sobre K , entonces

$$\left| \int_K f(z) \, dz \right| \leq \max_K |f(z)| L(K).$$

A su vez, a partir del Teorema 4.10 podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 4.17. Sea $K = \{z \mid z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ una curva rectificable y sea f continua sobre K , entonces

$$\left| \int_K f(z) \, dz \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| |dz(t)|.$$

El siguiente teorema es una consecuencia del Teorema 4.12. La ecuación (4.10) es la fórmula más importante para la computación de integrales de línea.

Teorema 4.18. Sea $K = \{z \mid z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ una curva, sea $z'(t)$ continua sobre $[\alpha, \beta]$ y sea f continua sobre K , entonces

$$\int_K f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (4.10)$$

Una aplicación del Teorema 4.18 es el siguiente resultado.

Teorema 4.19. Sea $m \in \mathbb{Z}$, entonces para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ y todo $R > 0$,

$$\int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq -1, \\ 2\pi i & \text{si } m = -1. \end{cases}$$

Demostración. La circunferencia $K_R(z_0)$ es una curva suave parametrizada por

$$z(t) = z_0 + Re^{it} = z_0 + R(\cos t + i \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

En virtud de

$$z'(t) = -R \sin t + iR \cos t = iRe^{it}$$

obtenemos a partir del Teorema 4.18

$$\begin{aligned} \int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz &= \int_0^{2\pi} R^m e^{imt} \cdot iR \cdot e^{it} dt = iR^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt \\ &= iR^{m+1} \int_0^{2\pi} (\cos((m+1)t) + i \sin((m+1)t)) dt. \end{aligned}$$

A partir de lo anterior obtenemos para $m \neq -1$

$$\int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz = iR^{m+1} \left(\frac{\sin((m+1)t)}{m+1} - i \frac{\cos((m+1)t)}{m+1} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

y para $m = -1$

$$\int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^{-1} dz = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

■

Para la descomposición de una curva en dos curvas parciales obtenemos a partir del Teorema 4.11 el siguiente teorema.

Teorema 4.20. Si una curva rectificable K es descompuesta en dos curvas parciales K_1 y K_2 , entonces

$$\int_K f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_2} f(z) dz.$$

Un resultado análogo en el sentido de que la curva K es descompuesta en un número finito de curvas parciales $K_1, \dots, K_n$.

Para curvas transcurridas en el sentido retrógrado obtenemos el siguiente teorema.

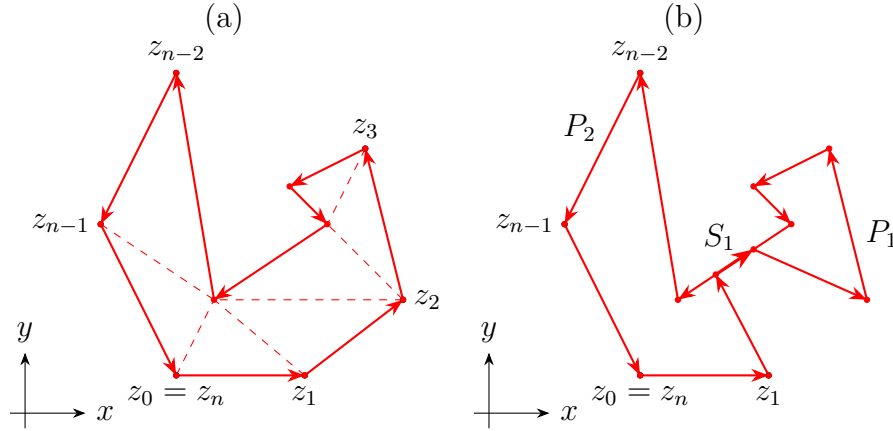


FIGURA 4.1. Ilustración del Teorema 4.22: (a) polígono P simplemente cerrado, (b) polígono P cerrado, pero no simplemente cerrado.

Teorema 4.21. *Sea K una curva rectificable, entonces*

$$\int_{-K} f(z) dz = - \int_K f(z) dz.$$

4.7. El teorema integral de Cauchy

En esta sección demostraremos un de los teoremas más importantes del cálculo, el teorema integral de Cauchy. Este teorema manifiesta que bajo ciertas presuposiciones, la integral sobre una curva cerrada siempre es igual a cero,

$$\int_K f(z) dz = 0.$$

Demostraremos este teorema en dos pasos, comenzando por el caso donde K es un polígono cerrado, y luego para el caso general mediante la aproximación de la curva por un polígono.

Para la formulación del teorema de Cauchy para polígonos necesitamos un teorema sobre la triangulación de polígonos.

Teorema 4.22. *Sean G una región simplemente conexa y P un polígono cerrado que enteramente corre por G ($P \subset G$).*

1. *Si P es simplemente cerrado (ver Figura 4.1 (a)), entonces P puede ser descompuesto mediante diagonales en un número finito de triángulos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ que pertenecen enteramente a G , es decir $\Delta_i \subset G$ para $i = 1, \dots, n$.*
2. *En el caso general (ver Figura 4.1 (b)) existe un número finito de polígonos simplemente cerrados $P_1, \dots, P_N$ y un número finito de segmentos lineales transcurridos en ambos sentidos $S_1, \dots, S_M$ tales que*

$$P = \left(\bigcup_{n=1}^N P_n \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^M S_m \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^M (-S_m) \right).$$

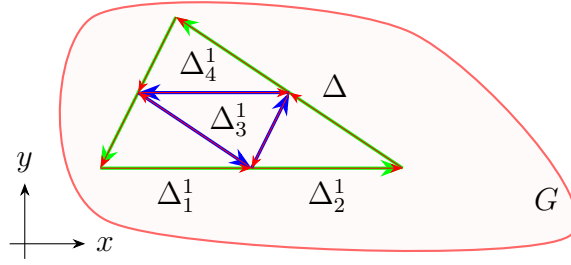


FIGURA 4.2. Ilustración de la demostración del Teorema 4.23: polígono (triángulo) $P = \Delta$ (verde) y triángulos congruentes Δ_1^1 , Δ_2^1 , Δ_3^1 y Δ_4^1 obtenidos por subdivisión (Δ_1^1 , Δ_2^1 y Δ_4^1 en color rojo, y Δ_3^1 en color azul).

No presentamos la demostración sorprendentemente complicada de este teorema (ver, por ejemplo, [5, Appendix B]) cuyo enunciado es muy plausible. Con la ayuda del Teorema 4.22 podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.23 (Teorema integral de Cauchy para polígonos). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y sea f regular sobre G . Entonces para cada polígono cerrado P que enteramente corre en G ,*

$$\int_P f(z) dz = 0.$$

Demostración.

1. Demostraremos el teorema primeramente para el caso que $P = \Delta$ es un triángulo. Definimos

$$I := \left| \int_{\Delta} f(z) dz \right|$$

y denotamos por $L(\Delta)$ su perímetro.

- a) A partir de Δ generamos cuatro triángulos congruentes Δ_1^1 , Δ_2^1 , Δ_3^1 y Δ_4^1 conectando los puntos medios de los tres lados de Δ . En este caso

$$\int_{\Delta} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\Delta_k^1} f(z) dz,$$

ya que cada uno de los segmentos lineales (que conectando los puntos medios de Δ) es transcurrido dos veces en sentidos opuestos, por lo tanto se cancelan las integrales sobre estos segmentos lineales. Obtenemos

$$I = \left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\Delta_k^1} f(z) dz \right|.$$

De acuerdo a lo anterior podemos elegir entre los triángulos Δ_1^1 , Δ_2^1 , Δ_3^1 y Δ_4^1 un triángulo, denotado por Δ_1 , para el cual

$$\left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} I.$$

Por otro lado, para el perímetro de Δ_1 se tiene $L(\Delta_1) = L(\Delta)/2^1$.

- b) En el siguiente paso generamos cuatro triángulos congruentes $\Delta_1^2, \dots, \Delta_4^2$ a partir de Δ_1 , nuevamente conectando los puntos medios de los lados de Δ_1 . Entre estos triángulos podemos elegir un triángulo, denotado Δ_2 , para el cual

$$\left| \int_{\Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^2} I.$$

Para el perímetro de Δ_2 se tiene $L(\Delta_2) = L(\Delta)/2^2$.

- c) Continuando de esta forma obtenemos una sucesión $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de triángulos anidados Δ_n . Todos los triángulos corren en G y se tiene

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^n} I, \quad L(\Delta_n) = \frac{1}{2^n} L(\Delta).$$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos z_n en el interior de Δ_n . Entonces la sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento z_0 que para cada $n \in \mathbb{N}$ pertenece a Δ_n o su interior. Como G es simplemente conexo, sabemos que $z_0 \in G$.

- d) Sea ahora $\varepsilon > 0$ dado. Como f es regular en z_0 , para este ε existe una vecindad $U_\delta(z_0)$ de z_0 tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|. \quad (4.11)$$

Para todo n suficientemente grande cada triángulo Δ_n conjuntamente con su interior está contenido en $U_\delta(z_0)$. A partir del Teorema 4.14 obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ &\quad + |f(z_0)| \left| \int_{\Delta_n} dz \right| + |f'(z_0)| \left| \int_{\Delta_n} (z - z_0) dz \right| \\ &= \left| \int_{\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right|. \end{aligned}$$

Para todo $z \in \Delta_n$, y considerando que z_0 pertenece al interior o a la frontera de Δ_n , tenemos $|z - z_0| < L(\Delta_n)$, y obtenemos a partir de (4.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} I &\leq \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ &< \varepsilon (L(\Delta_n))^2 = \frac{\varepsilon (L(\Delta))^2}{4^n}. \end{aligned}$$

Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$I < \varepsilon (L(\Delta))^2,$$

lo que implica que $I = 0$.

2. Demostraremos el teorema ahora para el caso que P es un polígono simplemente cerrado. De acuerdo al ítem 1. del Teorema 4.22, P puede ser descompuesto en un

número finito de triángulos $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(N)}$ los que todos corren en G . Además,

$$\int_P f(z) dz = \sum_{n=1}^N \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz,$$

ya que las diagonales son transcurridas dos veces en sentidos opuestos durante la integración y las integrales sobre éstas se cancelan. A partir de 1. obtenemos entonces

$$\int_P f(z) dz = 0.$$

3. Queda por discutir el caso donde P es un polígono arbitrario cerrado. De acuerdo al ítem 2. del Teorema 4.22,

$$P = \left(\bigcup_{n=1}^N P_n \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^M S_m \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^M (-S_m) \right),$$

y utilizando el ítem 2. de la presente demostración,

$$\int_P f(z) dz = \sum_{n=1}^N \int_{P_n} f(z) dz + \sum_{m=1}^M \left(\int_{S_m} f(z) dz + \int_{-S_m} f(z) dz \right) = 0.$$

■

Ahora podemos demostrar el teorema integral de Cauchy general.

Teorema 4.24 (Teorema integral de Cauchy). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y sea f regular sobre G . Entonces para cada curva K cerrada y rectificable que enteramente corre por G ,*

$$\int_K f(z) dz = 0. \quad (4.12)$$

Demostración. Sea $K = \{z \mid z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$. Demostraremos el teorema aproximando la curva K por un polígono cerrado.

1. Como el conjunto K es compacto, K posee una distancia positiva desde la frontera ∂G . Por lo tanto, existen un conjunto compacto B y un número $r > 0$ tal que

$$\overline{U_r(z)} \subset B \subset G \quad \text{para todo } z \in K.$$

2. Sea $\varepsilon > 0$ dado.

- a) Entonces, existe δ con $0 < \delta < r$ tal que

$$\mu_B(\delta, f) < \frac{\varepsilon}{2L(K)}.$$

- b) Existe, además, una partición $\{t_0, \dots, t_n\}$ de $[\alpha, \beta]$ tal que las siguientes relaciones son válidas simultáneamente (donde $z_k := z(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$):

$$|z_k - z_{k-1}| < \delta, \quad k = 1, \dots, n; \quad \left| \int_K f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Si P es el polígono cerrado que pasa por $z_0, z_1, \dots, z_n$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_P f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\overline{z_{k-1}, z_k}} (f(z) - f(z_{k-1})) dz \right| \\ &\leq \mu_B(\delta, f) L(K) < \frac{\varepsilon}{2L(K)} L(K) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

d) Combinando b) y c) obtenemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_K f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| \\ &\leq \left| \int_K f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) - \int_P f(z) dz \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que, mediante el Teorema 4.23,

$$\left| \int_K f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ fue elegido arbitrario, llegamos a (4.12); esto concluye la demostración del Teorema 4.24. ■

Comentario 4.5. En la demostración clásica de Cauchy (1789–1857) había que presuponer, a parte de la regularidad (holomorfía) de f en G , la continuidad de f' . Goursat (1858–1936) reconoció que la presuposición de la continuidad de f era prescindible. Sólo después de los trabajos de Goursat (alrededor del año 1900) pudo empezar el análisis complejo.

Comentario 4.6. El enunciado del Teorema 4.24 ya no es válido si G no es simplemente conexo. Por ejemplo, la función $f(z) = 1/z$ es regular sobre $G := \{z \mid 1/2 < |z| < 2\}$, pero de acuerdo al Teorema 4.19,

$$\int_{K_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Comentario 4.7. Las presuposiciones del teorema integral de Cauchy (Teorema 4.24) son suficientes, pero no necesarias. Por ejemplo, la función definida sobre $G := U_2(0)$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z = 0, \\ 1/z^2 & \text{para } z \neq 0 \end{cases}$$

no es regular sobre G , pero nuevamente acuerdo al Teorema 4.19,

$$\int_{K_1(0)} \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

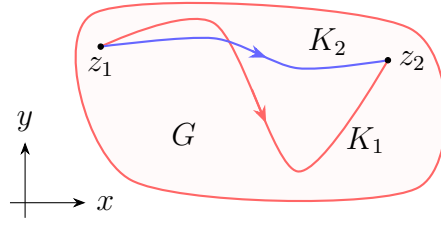


FIGURA 4.3. Ilustración de la demostración del Teorema 4.26.

El siguiente teorema, demostrado por ejemplo en [1, p. 119], es una generalización del teorema integral de Cauchy que constata que bajo hipótesis apropiadas sobre f y G la integral puede ser tomada sobre la frontera de G .

Teorema 4.25. *Sea K una curva de Jordan cerrada y rectificable y sea G es interior de K , $G = I(K)$. Sea f regular sobre G y continua sobre $G \cup K$. Entonces*

$$\int_K f(z) dz = 0.$$

En lo siguiente estudiaremos una formulación equivalente del teorema integral de Cauchy. Para tal efecto definimos primeramente la independencia del camino de integrales de línea (ver [2, Def. 6.13]):

Definición 4.8. *Sea f continua en la región $G \subset \mathbb{C}$. Si $z_1, z_2 \in G$ y supongamos que la integral*

$$\int_{K(z_1, z_2)} f(z) dz$$

posee el mismo valor para todas las curvas $K(z_1, z_2)$ que corren en G y conecten los puntos z_1 y z_2 , entonces la integral sobre f en G se dice independiente del camino, y la denotamos por

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz.$$

Teorema 4.26. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y sea f regular sobre G . Entonces la integral sobre f en G es independiente del camino.*

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in G$. Si K_1 y K_2 son curvas rectificables que conectan z_1 con z_2 (ver Figura 4.3), y si $K = K_1 \cup (-K_2)$, entonces

$$0 = \int_K f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \int_{-K_2} f(z) dz,$$

y obtenemos

$$\int_{K_1} f(z) dz = - \int_{-K_2} f(z) dz = \int_{K_2} f(z) dz.$$

■

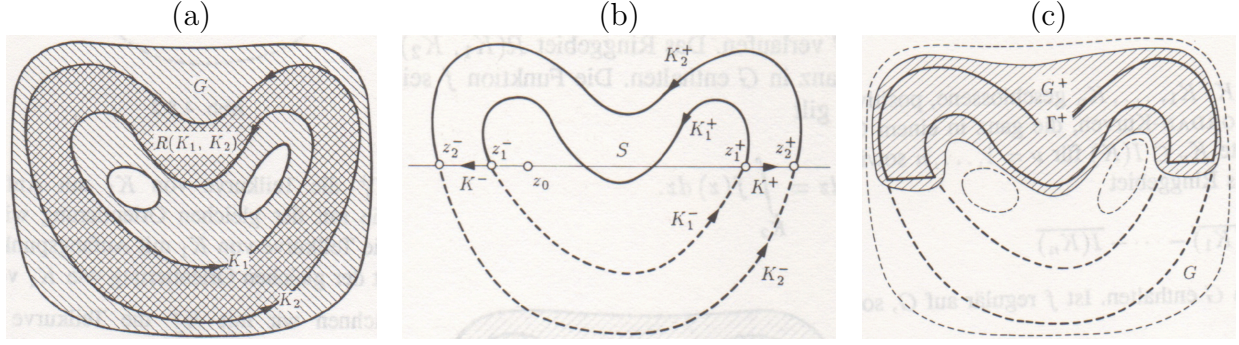


FIGURA 4.4. Ilustración del Teorema 4.27 y su demostración.

Ejemplo 4.1. La función e^z es regular sobre $\mathbb{C}$. Sea K la curva con la representación paramétrica

$$z(t) = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1, 1].$$

Entonces de acuerdo al Teorema 4.26,

$$\int_K e^z dz = \int_{-1,1} e^z dz = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1} = 2 \sinh 1.$$

4.8. El teorema de Cauchy en regiones más generales

Demostraremos ahora algunos resultados que son consecuencias del teorema integral de Cauchy y que serán aplicados más adelante. En particular consideraremos funciones regulares (holomorfas) en regiones no necesariamente simplemente conexos.

Teorema 4.27. Sean K_1 y K_2 dos curvas de Jordan cerradas, rectificables, y orientadas positivas con $K_1 \subset I(K_2)$, las que corren enteramente en una región G (ver Figura 4.4 (a)). Supongamos que la región “anular” $R(K_1, K_2)$ es completamente contenida en G . Sea la función f regular en G . Entonces

$$\int_{K_1} f(z) dz = \int_{K_2} f(z) dz.$$

Demostración.

1. Sea z_0 un punto arbitrario con $z_0 \in I(K_1)$; como $I(K_1) \subset I(K_2)$, también $z_0 \in I(K_2)$. Sea S la recta por z_0 paralela al eje real. Sean S^+ y S^- las mitades de S a derecha y a izquierda de z_0 , respectivamente. La raya S^+ interseca con K_1 por lo menos una vez. Como S^+ y K_1 son cerrados, existe una última intersección z_1^+ de S^+ con K_1 . Análogamente, S^+ interseca con K_2 por lo menos una vez; se denota por z_2^+ el primer punto de intersección de S^+ con K_2 . El segmento lineal

$$K^+ := \overline{z_1^+, z_2^+}$$

pertenece enteramente a $R(K_1, K_2)$, con la excepción de los extremos z_1^+ y z_2^+ (ver Figura 4.4 (b)).

Análogamente sean z_1^- el último punto de intersección de S^- con K_1 y z_2^- el primer punto de intersección de S^- con K_2 . El segmento lineal

$$K^- := \overline{z_1^-, z_2^-}$$

pertenece enteramente a $R(K_1, K_2)$, con la excepción de los extremos z_1^- y z_2^- .

2. Sea K_1^+ la curva parcial de K_1 con punto inicial z_1^+ y punto final z_1^- que posea la misma orientación que K_1 . Además, sea K_1^- la curva parcial de K_1 con punto inicial z_1^- y punto final z_1^+ que igualmente posea la misma orientación que K_1 . Por otro lado, sea K_2^+ la curva parcial de K_2 con punto inicial z_2^+ y punto final z_2^- que posea la misma orientación que K_2 , y sea K_2^- la curva parcial de K_2 con punto inicial z_2^- y punto final z_2^+ que igualmente posea la misma orientación que K_2 .
3. Consideremos ahora la curva

$$\Gamma^+ := K_2^+ \cup (-K^-) \cup (-K_1^+) \cup K^+.$$

Ésta es una curva de Jordan cerrada y rectificable (ver Figura 4.4 (c)). La función f es regular en $I(\Gamma^+) \cup \Gamma^+$ y por lo tanto existe una región simplemente conexa G^+ con $\Gamma^+ \subset G^+ \subset G$. De acuerdo al teorema integral de Cauchy (Teorema 4.24),

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = 0.$$

Considerando la curva

$$\Gamma^- := K_2^- \cup (-K^+) \cup (-K_1^-) \cup K^-$$

obtenemos análogamente

$$\int_{\Gamma^-} f(z) dz = 0.$$

Concluimos que (omitiendo el integrando por brevedad)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma^+} + \int_{\Gamma^-} = \int_{K_2^+} - \int_{K^-} - \int_{K_1^+} + \int_{K^+} + \int_{K_2^-} - \int_{K^+} - \int_{K_1^-} + \int_{K^-} \\ &= \int_{K_2^+} + \int_{K_2^-} - \int_{K_1^+} - \int_{K_1^-} = \int_{K_2} f(z) dz - \int_{K_1} f(z) dz, \end{aligned}$$

es decir

$$\int_{K_1} f(z) dz = \int_{K_2} f(z) dz,$$

lo que concluye la demostración del teorema. ■

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 4.27.

Teorema 4.28. Sean $K, K_1, \dots, K_n$ curvas de Jordan cerradas, rectificables, y orientadas positivamente que corren enteramente en una región G . Sea $K_\nu \subset I(K)$ para $\nu = 1, \dots, n$ y $K_\nu \subset A(K_\mu)$ para $\nu \neq \mu$. Supongamos que la región “anular”

$$R := I(K) \setminus (\overline{I(K_1)} \cup \dots \cup \overline{I(K_n)})$$

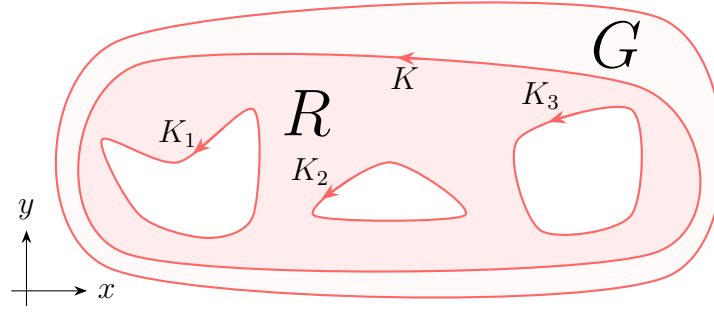
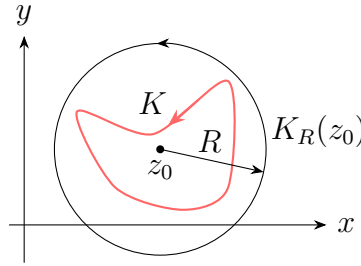
FIGURA 4.5. Situación descrita en el Teorema 4.28 (ilustrada aquí para $n = 3$).

FIGURA 4.6. Ilustración de la demostración del Teorema 4.29.

completamente contenida en G (ver Figura 4.5). Si la función f regular en G , entonces

$$\int_K f(z) dz = \sum_{\nu=1}^n \int_{K_\nu} f(z) dz.$$

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 4.27. ■

El siguiente teorema es una aplicación de estos últimos teoremas.

Teorema 4.29. Sea K una curva de Jordan cerrada, rectificable y orientada positivamente con $z_0 \in I(K)$, entonces

$$\int_K \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

Demostración. Sea $R > 0$ elegido suficientemente grande tal que la circunferencia $K_R(z_0)$ contiene la curva K en su interior (ver Figura 4.6). Entonces de acuerdo al Teorema 4.19,

$$\int_K \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{K_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

■

4.9. Fórmula integral de Cauchy

Una de las consecuencias más importantes del teorema integral de Cauchy es el hecho de que una función regular (holomorfa) puede ser representada en el interior de una región G

mediante sus valores sobre la frontera de G . Esto significa que los valores de f en el interior de G ya están determinados completamente por los valores de f sobre la frontera de G .

Teorema 4.30 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea la función f regular en la región G . Sea K una curva de Jordan cerrada, rectificable y orientada positivamente contenida conjuntamente con su interior $I(K)$ enteramente en G . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0) & \text{para todo } z_0 \in I(K), \\ 0 & \text{para todo } z_0 \in A(K). \end{cases} \quad (4.13)$$

Demostración.

1. a) Sea $z_0 \in I(K)$. Entonces la función $z \mapsto f(z)/(z - z_0)$ es regular sobre $G \setminus \{z_0\}$. Sea ahora $\rho_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que la circunferencia $K_\rho(z_0)$ es contenida en $I(K)$ para todo $\rho \in (0, \rho_0)$, entonces de acuerdo al Teorema 4.27,

$$\int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{para todo } \rho \in (0, \rho_0).$$

- b) Como f es continua en z_0 , para $\varepsilon > 0$ existe $\rho_\varepsilon \in (0, \rho_0)$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad \text{para todo } z \text{ con } |z - z_0| < \rho_\varepsilon.$$

Ahora para

2. Ahora para todo $\rho \in (0, \rho_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| &= \left| \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{K_\rho(z_0)} \frac{dz}{z - z_0} \right| \\ &= \left| \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{\rho} 2\pi \rho = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos el enunciado (4.13) para el caso $z_0 \in I(K)$.

3. Si $z_0 \in A(K)$, entonces la función $z \mapsto f(z)/(z - z_0)$ es regular sobre $\overline{I(K)}$, por lo tanto se obtiene el enunciado (4.13) para el caso $z_0 \in A(K)$. ■

El siguiente teorema formula una consecuencia inmediata de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 4.31. *Sea f regular sobre la región G y sea $z_0 \in G$. Sea además la circunferencia $K_\rho(z_0)$ elegida tal que $K_\rho(z_0)$ y su interior pertenezcan a G . Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

Demostración. Podemos parametrizar $K_\rho(z_0)$ por $z(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, luego a partir de la fórmula integral de Cauchy y el Teorema 4.18,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt. \quad \blacksquare$$

Comentario 4.8. El Teorema 4.31 expresa una propiedad del promedio de funciones regulares: el valor de una función regular en el centro de una circunferencia es igual al “promedio aritmético” de los valores de f sobre esta circunferencia.

4.10. Integrales de Cauchy y la existencia de derivadas de orden superior

El propósito de esta sección es demostrar que una función regular (holomorfa) en una región es diferenciable un número arbitrario de veces, y por lo tanto también sus derivadas nuevamente son funciones regulares. Para tal efecto consideremos una generalización de la integral discutida en el Teorema 4.30.

Definición 4.9. Sea K una curva no necesariamente cerrada y rectificable y sea f una función continua sobre K . Entonces para $z \notin K$ la integral

$$\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

se dice integral de Cauchy.

Queremos estudiar ahora las propiedades de estas integrales de Cauchy.

Teorema 4.32. Sea la función F definida por una integral de Cauchy:

$$F(z) := \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Entonces sobre cada región G que no contiene ningún punto de K ($G \cap K = \emptyset$) la función F es diferenciable un número arbitrario de veces, y

$$F^{(n)}(z) = n! \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} dz \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Comentario 4.9. En virtud de

$$\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

el Teorema 4.32 constata que la derivación y la integración pueden ser intercambiadas.

Demostración del Teorema 4.32. Sea G un dominio con $G \cap K = \emptyset$. Procedemos por inducción sobre n .

1. Como $F^{(0)}(z) = F(z)$, el teorema es obviamente correcto para $n = 0$.
2. Sea $n \geq 0$ y supongamos que la función F es $(n - 1)$ veces diferenciable sobre G . Supongamos que

$$F^{(n-1)}(z) = (n - 1)! \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta \quad \text{para todo } z \in G.$$

- a) Sea $z_0 \in G$ un punto arbitrario pero fijo. Entonces existe $\rho > 0$ tal que

$$\overline{U_\rho(z_0)} = \{z \mid |z - z_0| \leq \rho\} \subset G.$$

Si $\delta > 0$ es la distancia entre $\overline{U_\rho(z_0)}$ y K , entonces $|\zeta - z| \geq \delta$ para todo $z \in \overline{U_\rho(z_0)}$ y todo $\zeta \in K$. En particular, $|\zeta - z_0| \geq \delta$.

b) Ahora obtenemos para todo $z \in \overline{U_\rho(z_0)}$ con $z \neq z_0$:

$$\begin{aligned} D(z) &:= \frac{F^{(n-1)}(z) - F^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0} = \frac{(n-1)!}{z - z_0} \int_K f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right) d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{z - z_0} \int_K f(\zeta) \frac{(\zeta - z + z - z_0)^n - (\zeta - z)^n}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)^n} d\zeta. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} (\zeta - z + z - z_0)^n - (\zeta - z)^n &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (\zeta - z)^{n-\nu} (z - z_0)^\nu - (\zeta - z)^n \\ &= n(\zeta - z)^{n-1} (z - z_0) + n(z - z_0)^2 P(z, \zeta), \end{aligned}$$

donde $P(z, \zeta)$ es un polinomio adecuado que es uniformemente acotado para todo $z \in \overline{U_\rho(z_0)}$ y todo $\zeta \in K$:

$$|P(z, \zeta)| \leq M.$$

Obtenemos entonces $D(z) = D_1(z) + D_2(z)$, donde

$$\begin{aligned} D_1(z) &:= n! \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^n} d\zeta, \\ D_2(z) &:= n!(z - z_0) \int_K \frac{f(\zeta)P(z, \zeta)}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)^n} d\zeta. \end{aligned}$$

c) Para $D_1(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\left| D_1(z) - n! \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &= n! \left| \int_K f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) d\zeta \right| \\ &= n! \left| \int_K \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta \right| \leq n! |z - z_0| \max_K |f(\zeta)| \frac{1}{\delta^{n+2}} L(K), \end{aligned}$$

lo que implica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} D_1(z) = n! \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

d) Por otro lado para $D_2(z)$ obtenemos

$$|D_2(z)| = n! |z - z_0| \left| \int_K \frac{f(\zeta)P(z, \zeta)}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)^n} d\zeta \right| \leq n! |z - z_0| \max_K |f(\zeta)| \frac{M}{\delta^{2n}} L(K).$$

Esto implica que $\lim_{z \rightarrow z_0} D_2(z) = 0$, entonces obtenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = n! \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Como $z_0 \in G$ es arbitrario resulta el enunciado. ■

Con la ayuda del Teorema 4.32 podemos fácilmente demostrar la existencia de derivadas de orden superior de una función regular.

Teorema 4.33 (Fórmula integral de Cauchy extendida). *Sea la función f regular sobre la región G . Entonces:*

1. *Todas las derivadas $f^{(n)}(z)$ ($n \in \mathbb{N}$) existen sobre G y son funciones regulares sobre G .*
2. *Sea K una curva de Jordan cerrada, rectificable, y orientada positivamente contenida en G conjuntamente con su interior $I(K)$. Entonces la fórmula integral de Cauchy extendida es válida:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Demostración.

1. Sea z_0 un punto arbitrario de G . Entonces existe $\rho > 0$ tal que la circunferencia $K_\rho(z_0)$ conjuntamente con su interior $I(K_\rho(z_0))$ esté contenida en G . Entonces de acuerdo al Teorema 4.30 tenemos para todo $z \in I(K_\rho(z_0))$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ahora, con la ayuda del Teorema 4.32 podemos concluir, en particular, que f es diferenciable en z_0 un número arbitrario de veces, y que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

2. Si $z_0 \in I(K)$, entonces a partir del Teorema 4.27 obtenemos para todo ρ suficientemente pequeño

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = f^{(n)}(z_0).$$

Como z_0 ha sido elegido arbitrariamente el teorema está demostrado. ■

El hecho de que todas las derivadas de una función f regular (holomorfa) son, a su vez, funciones regulares (holomorfas) tiene una consecuencia interesante con respecto a las funciones $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$. Para tal efecto recordemos la definición de una función armónica.

Definición 4.10. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región. Una función $\varphi = \varphi(x, y) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice armónica sobre G si $\varphi \in C^2(G)$ y*

$$\Delta\varphi := \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

El símbolo $\Delta\varphi$ se dice laplaciano de φ .

Las funciones armónicas juegan un rol importante en muchas áreas de la física matemática. Con respecto a la Definición 4.10 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.34. *Sea la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ regular sobre una región $G \subset \mathbb{C}$. Entonces u y v son armónicas sobre G .*

Demostración. De acuerdo al Teorema 3.7,

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y) \quad \text{para todo } z = x + iy \in G.$$

Como todas las derivadas de f son regulares resulta que u y v poseen derivadas parciales continuas de orden arbitrario sobre G . En particular, se tiene de acuerdo al teorema de Schwarz

$$u_{xy} = u_{yx}, \quad v_{xy} = v_{yx}.$$

A partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ concluimos que

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}, \quad v_{xx} = -u_{yx} = -u_{xy} = -v_{yy},$$

es decir $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$ sobre G . ■

Podemos, además, demostrar el siguiente teorema importante.

Teorema 4.35. *Sea la función f regular en la región G . Entonces f es constante ($f \equiv \text{const.}$) si y sólo si $f'(z) = 0$ para todo $z \in G$.*

Demostración.

1. Si f es constante en G , entonces $f'(z) = 0$ para todo $z \in G$.
2. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 0$ sobre G . Con la ayuda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos entonces $\nabla u = \nabla v = \vec{0}$. Como u y v poseen derivadas parciales continuas de orden arbitrario, a partir de [2, Teorema 2.16] concluimos que u y v son constantes, por lo tanto también f es constante. ■

A partir de la fórmula integral de Cauchy obtenemos, además, una cota de $|f^{(n)}(z)|$ siempre que se conozca una cota de $|f(z)|$.

Teorema 4.36 (Desigualdad de Cauchy). *Sea la función f regular sobre la región G . Sea la circunferencia $K_\rho(z_0)$ contenida en G conjuntamente con su interior, y sea*

$$m(\rho) := \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|.$$

Entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{\rho^n} m(\rho) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. De acuerdo al Teorema 4.33,

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} m(\rho) \frac{1}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{n!}{\rho^n} m(\rho). \quad \text{■}$$

4.11. Primitivas y el teorema de Morera

Definición 4.11. Sea G una región. Sean las funciones f y F definidas sobre G , y sea F diferenciable sobre G . Si

$$F'(z) = f(z) \quad \text{para todo } z \in G,$$

entonces F se dice primitiva de f sobre G .

El siguiente teorema es análogo al resultado conocido del cálculo de funciones reales de una variable e informa sobre la totalidad de primitivas que una función f dada puede poseer.

Teorema 4.37. Sean F_1 y F_2 primitivas de f sobre G . Entonces con una constante c apropiada se tiene $F_1(z) = F_2(z) + c$ sobre G .

Demostración. La función $\Phi(z) := F_1(z) - F_2(z)$ satisface $\Phi'(z) = 0$ sobre G . Entonces de acuerdo al Teorema 4.35, Φ es constante sobre G . ■

En lo siguiente queremos analizar el problema de condiciones suficientes para la existencia de primitivas. Para tal efecto supongamos que la función f es continua sobre la región G y que la integral sobre f en G es independiente del camino. Para $z_0 \in G$ fijo y $z \in G$ variable obtenemos la función

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad (4.14)$$

cuyas propiedades deseamos estudiar.

Teorema 4.38. Sea G una región, sea la función f continua sobre G y sea la integral sobre f en G independiente del camino. Entonces para $z_0 \in G$ fijo la función $F = F(z)$ definida por (4.14) para $z \in G$ es una primitiva de f .

Demostración. Sean $z \in G$ y $\varepsilon > 0$ dados. Como G es abierto y f es continua en z existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo ζ con $|\zeta - z| < \delta_\varepsilon$ se tiene $\zeta \in G$ y $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Para $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$ consideremos el cociente de diferencias

$$D(h) := \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right).$$

Si $|h| < \delta_\varepsilon$ y considerando la curva de integración desde z_0 a $z+h$ via z , eligiendo entre z y $z+h$ el segmento lineal $\zeta(t) = z + th$ ($t \in [0, 1]$),

$$D(h) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h dt = \int_0^1 f(z+th) dt,$$

luego

$$|D(h) - f(z)| = \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| < \varepsilon \cdot 1,$$

lo que implica que F es diferenciable en z , y $F'(z) = f(z)$. ■

Tal como en el caso real podemos en el análisis complejo utilizar primitivas para la determinación de integrales definidas.

Teorema 4.39. *Sea G una región simplemente conexa. Sea f regular sobre G y sea F una primitiva de f sobre G . Entonces*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = F(z_2) - F(z_1) \quad \text{para todo } z_1, z_2 \in G.$$

Demostración. De acuerdo a los Teoremas 4.38 y 4.26 también

$$\tilde{F}(z) := \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta$$

es una primitiva de f sobre G , entonces de acuerdo al Teorema 4.37, $\tilde{F}(z) = F(z) + c$ con cierta constante c . Para $z = z_1$ obtenemos $\tilde{F}(z_1) = 0 = F(z_1) + c$, luego para $z = z_2$,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = F(z_2) + c = F(z_2) - F(z_1).$$

■

Ejemplo 4.2. *Queremos calcular la integral*

$$I := \int_{\overline{1,i}} \frac{dz}{z^2}.$$

Como la función $f(z) = 1/z^2$ es regular en la región simplemente conexa

$$G := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \mid x \leq 0, y = 0\}$$

y $\overline{1,i} \subset G$, se tiene

$$I = -\frac{1}{z} \Big|_{z=1}^{z=i} = -\frac{1}{i} + 1 = 1 + i.$$

Queremos estudiar una inversión del teorema integral de Cauchy (Teorema 4.24). Recordemos que este teorema constata a partir de la regularidad (holomorfía) de f que la integral sobre cualquier curva K en G cerrada y rectificable se anula:

$$\int_K f(z) dz = 0. \tag{4.15}$$

El siguiente teorema deduce la regularidad a partir de esta última condición.

Teorema 4.40 (Teorema de Morera). *Sea G una región, sea f continua sobre G , y sea (4.15) válido para toda curva cerrada y rectificable $K \subset G$. Entonces f es regular sobre G .*

Demostración. A partir de la hipótesis (4.15) se deduce la independencia del camino de la integral en G , por lo tanto para algún $z_0 \in G$ la función $F(z)$ definida por (4.14) es una primitiva de f , luego F es regular sobre G con $F'(z) = f(z)$. Pero como de acuerdo al Teorema 4.33, la función F es diferenciable un número arbitrario de veces sobre G , en particular se tiene $F''(z) = f'(z)$, es decir f es regular sobre G . ■

4.12. El teorema de Liouville y el teorema fundamental del álgebra

Definición 4.12. Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que es regular sobre $\mathbb{C}$ se dice entera.

Las funciones e^z , $\sen z$, $\cos z$ y todos los polinomios son funciones enteras. El siguiente teorema formula el primer resultado importante sobre funciones enteras.

Teorema 4.41 (Teorema de Liouville). Una función entera acotada es constante.

Demostración. Sea f una función entera con $|f(z)| < M$ sobre $\mathbb{C}$. Si z_0 es un número complejo arbitrario y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces para $R = M/\varepsilon$ la desigualdad de Cauchy (ver Teorema 4.36)

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \max_{|z-z_0|=R} |f(z)| < \frac{M}{R} < \varepsilon.$$

Esto implica que $f'(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, luego f es constante. ■

Comentario 4.10. Si f es una función entera que no es constante, entonces existe una sucesión $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $|z_k| \rightarrow \infty$ y $f(z_k) \rightarrow \infty$.

Ejemplo 4.3. Consideremos $f(z) = e^z$. Para $z_k = k$ tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{z_k} = \infty.$$

Ejemplo 4.4. Consideremos $f(z) = \sen z$. Para $z_k = ki$ se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sen z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (e^{iz_k} - e^{-iz_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (e^{-k} - e^k) = \infty.$$

Para polinomios $P(z)$ incluso podemos demostrar que para cada sucesión $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $z_k \rightarrow \infty$ se tiene $P(z_k) \rightarrow \infty$. Esto es una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 4.42. Sean $n \in \mathbb{N}$ y

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu \tag{4.16}$$

un polinomio del grado n (es decir con $a_n \neq 0$). Entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{a_n z^n} = 1.$$

Demostración. Para $z \neq 0$ tenemos

$$\frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{a_n} \frac{z^\nu}{z^n} = \sum_{\nu=1}^n \frac{a_{n-\nu}}{a_n} \frac{1}{z^\nu} = \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu}{z^\nu}, \quad \text{donde } b_\nu := \frac{a_{n-\nu}}{a_n}.$$

Para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo ζ con $|\zeta| < \delta$ se tiene

$$\left| \sum_{\nu=1}^n b_\nu \zeta^\nu \right| < \varepsilon.$$

Esto implica que para todo z con $|z| > 1/\delta$

$$\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu}{z^\nu} \right| < \varepsilon,$$

lo cual concluye la demostración del teorema. ■

Comentario 4.11. *Este resultado constata que un polinomio $P(z)$ del grado n dado por (4.16) se comporta para valores grandes de $|z|$ como $a_n z^n$, donde enfatizamos que el Teorema 4.42 implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe R_ε tal que para todo z con $|z| > R_\varepsilon$,*

$$\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| < \varepsilon$$

o equivalentemente,

$$(1 - \varepsilon)|a_n z^n| < |P(z)| < (1 + \varepsilon)|a_n z^n|.$$

La aplicación de los Teoremas 4.41 y 4.42 nos permite demostrar el siguiente teorema importante.

Teorema 4.43 (Teorema fundamental del álgebra). *Cada polinomio $P(z)$ del grado $n \geq 1$ posee por lo menos una raíz.*

Demostración. Sea $P(z)$ el polinomio dado por (4.16) del grado $n \geq 1$. Supongamos que $P(z)$ no posee raíz, es decir $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $1/P(z)$ es una función entera. De acuerdo al Comentario 4.11 existe para $\varepsilon = 1/2$ un número $R_{1/2} > 0$ tal que

$$|P(z)| > \frac{1}{2}|a_n||z|^n \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| > R_{1/2}.$$

Esto significa que para una constante M_1 apropiada,

$$\frac{1}{|P(z)|} < \frac{2}{|a_n||z|^n} < \frac{2}{|a_n|R_{1/2}^n} = M_1 \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| > R_{1/2}. \quad (4.17)$$

Por otro lado, como $1/P(z)$ es regular en $\{z \mid |z| \leq R_{1/2}\}$, existe una constante M_2 tal que

$$\frac{1}{|P(z)|} < M_2 \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| \leq R_{1/2}. \quad (4.18)$$

Combinando (4.17) y (4.18) llegamos a la conclusión de que $1/P$ es una función acotada entera, lo que de acuerdo al teorema de Liouville (Teorema 4.41), $1/P(z)$ y por lo tanto $P(z)$ es una constante, lo que se contradice con el hecho de que el grado de $P(z)$ es por lo menos uno. Por lo tanto, $P(z)$ debe poseer por lo menos una raíz. ■

Comentario 4.12. *El teorema fundamental del álgebra (Teorema 4.43) inmediatamente implica que cada polinomio $P_n(z)$ del grado $n \geq 1$ puede ser representado en la forma*

$$P_n(z) = a_n(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \cdots (z - \zeta_n) \quad (4.19)$$

y por lo tanto posee exactamente n raíces (las cuales pueden ser múltiples). En el caso $n = 1$ la representación en la forma (4.19) es trivial. De acuerdo al Teorema 4.43, para $n > 1$ un

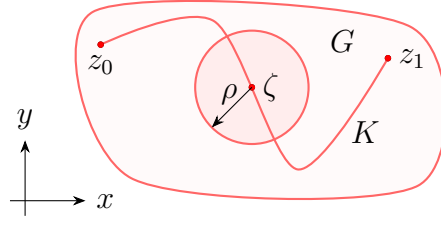


FIGURA 4.7. Ilustración de la demostración del Teorema 4.44.

polinomio $P_n(z)$ del grado n posee por lo menos una raíz, denotada ζ_n , y análogamente al caso real tenemos

$$P_n(z) = (z - \zeta_n)P_{n-1}(z)$$

con un polinomio P_{n-1} del grado $n - 1$ cuyo coeficiente que acompaña la potencia mayor de z , es decir z^{n-1} , es a_n . Así llegamos al enunciado en forma inductiva.

4.13. El principio del máximo

Si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es regular sobre una región G , entonces

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

es continua sobre G . Analizaremos ahora los extremos de $|f(z)|$.

Teorema 4.44. Sea f regular sobre una región G y supongamos que existe $z_0 \in G$ tal que para todo $z \in G$, $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in G$. Entonces f es constante sobre G .

Comentario 4.13. El Teorema 4.44 también puede ser formulado en la siguiente forma: Sea f una función no constante, entonces la función $|f|$ no puede asumir un máximo en ningún punto interior de la región G .

Demostración del Teorema 4.44.

1. Demostraremos primeramente que $|f|$ es constante sobre G . Para tal efecto supongamos que $|f|$ no fuera constante.

- a) En este caso existe $z_1 \in G$ tal que $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Sea

$$K = \{z \mid z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

una curva contenida en G con el punto inicial $z_0 = z(\alpha)$ y el punto final $z_1 = z(\beta)$. Sea

$$\tau := \sup\{t \mid t \in [\alpha, \beta), |f(z(s))| = |f(z_0)| \text{ sobre } [\alpha, t]\}$$

Entonces $\tau \in [\alpha, \beta)$, y debido a la continuidad de la función $|f(z(t))|$ se tiene $|f(\zeta)| = |f(z_0)|$ para $\zeta = z(\tau)$.

- b) Sea ahora $\delta > 0$ elegido tal que $U_\delta(\zeta) \subset G$ (ver Figura 4.7). De acuerdo al Teorema 4.31,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + \rho e^{i\varphi}) d\varphi \quad \text{para todo } \rho \in (0, \delta),$$

entonces como $|f(\zeta + \rho e^{i\varphi})| \leq |f(z_0)|$,

$$|f(z_0)| = |f(\zeta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\zeta + \rho e^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} |f(z_0)| \cdot 2\pi,$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(\zeta + \rho e^{i\varphi})| - |f(z_0)|) d\varphi = 0. \quad (4.20)$$

Como el integrando en (4.20) es una función continua y no positiva, se debe tener

$$|f(\zeta + \rho e^{i\varphi})| = |f(z_0)| \quad \text{para todo } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Como $\rho \in (0, \delta)$ ha sido elegido arbitrario, concluimos que $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo $z \in U_\delta(\zeta)$. Sin embargo esto se contradice con la construcción de ζ , por lo tanto concluimos que $|f|$ es constante sobre G .

2. Demostraremos ahora que si $|f|$ es constante sobre G , entonces también f es constante sobre G . Para tal efecto sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

- a) Si $|f(z)| = 0$ sobre G , entonces $f(z) = 0$ sobre G .
b) Sea $|f(z)| = c \neq 0$ sobre G , entonces $c^2 = (u(x, y))^2 + (v(x, y))^2$ y

$$0 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Como u y v no pueden anularse simultáneamente, el determinante de este sistema lineal debe anularse:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Combinando esto con las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3.1) obtenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

lo cual implica $\nabla u(x, y) = \vec{0}$ y en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, también $\nabla v(x, y) = \vec{0}$. De acuerdo a [2, Teorema 2.16], las funciones u y v , y por lo tanto también f son constantes sobre G . ■

Con la ayuda de este teorema podemos ahora demostrar el principio del máximo.

Teorema 4.45 (Principio del máximo). *Sea G una región acotada con la frontera ∂G ; y sea la función f regular sobre G y continua sobre $\bar{G} = G \cup \partial G$. Entonces existe $z_0 \in \partial G$ con*

$$|f(z_0)| = \sup_{z \in \bar{G}} |f(z)|.$$

Demostración. Como $\bar{G}$ es compacto, existe $z_0 \in \bar{G}$ con

$$|f(z_0)| = \sup_{z \in \bar{G}} |f(z)|.$$

Si f es constante sobre $\bar{G}$, podemos elegir cualquier $z_0 \in \partial G$. Si f no es constante sobre $\bar{G}$, entonces el Teorema 4.44 implica que necesariamente $z_0 \in \partial G$. ■

Un teorema análogo puede ser demostrado para $\inf_{z \in \bar{G}} |f(z)|$, pero necesitamos la hipótesis adicional de que f no se anula sobre G .

Teorema 4.46 (Principio del mínimo). *Sea G una región acotada con la frontera ∂G ; y sea la función f regular sobre G y continua sobre $\bar{G} = G \cup \partial G$ y $f(z) \neq 0$ sobre G . Entonces existe $z_0 \in \partial G$ con*

$$|f(z_0)| = \inf_{z \in \bar{G}} |f(z)|.$$

Demostración.

1. Si $f(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in \partial G$, entonces el enunciado es trivial.
2. Si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial G$, entonces $1/f(z)$ es regular sobre G y continua sobre $\bar{G}$. Entonces de acuerdo al Teorema 4.45 existe $z_0 \in \partial G$ con

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = \sup_{z \in \bar{G}} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\inf_{z \in \bar{G}} |f(z)|}.$$

■

Comentario 4.14. *Con la ayuda del principio del mínimo (Teorema 4.46) podemos presentar otra demostración (muy simple) del teorema fundamental del álgebra (Teorema 4.43). Para tal efecto supongamos que el polinomio $P(z)$ dado por (4.16) del grado $n \in \mathbb{N}$ no posee ninguna raíz en $\mathbb{C}$. De acuerdo al Teorema 4.42 existe $R > 0$ tal que*

$$\min_{|z|=R} |P(z)| > \frac{1}{2} |a_n| R^n > |a_0|.$$

No obstante, a partir del principio del mínimo (Teorema 4.46) obtenemos la contradicción

$$|a_0| = |P(0)| \geq \min_{|z| \leq R} |P(z)| = \min_{|z|=R} |P(z)| > |a_0|.$$

4.14. Ejercicios

Problema 4.1. Sea la función f regular sobre la región G y no constante. Sea $z_0 \in G$ y sea d la distancia entre z_0 y ∂G . Demostrar que

$$m(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

es una función continua y estrictamente creciente sobre $[0, d)$.

Problema 4.2. Determinar

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \max_{|z| \leq 1} |z^2 - 1|, & \text{b) } \max_{|z| \leq 1} |\cos z|, & \text{c) } \max_{|z| \leq 1} \left| \frac{e^{z^2} + 1}{z^2 + 2} \right|. \end{array}$$

Problema 4.3. Sea f una función entera. Supongamos que existen una constante M y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|f(z)| \leq M|z|^n \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| > 1.$$

Demostrar que f es un polinomio del grado menor o igual n .

Problema 4.4 (Tarea 4, curso 2023). Sea $g \in BV[a, b]$. Demostrar o refutar:

$$\int_a^b dg(t) = g(b) - g(a). \quad (4.21)$$

Solución sugerida. Sea $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$, $t_i < t_j$ para $i < j$, una partición arbitraria de $[a, b]$. La suma de Riemann-Stieltjes de la función constante 1 con respecto a la función g relativa a la partición P con cualquier vector de puntos intermedios $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ es

$$S_P(1, g; \tau) = \sum_P (g(t_k) - g(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^n (g(t_k) - g(t_{k-1})) = g(t_n) - g(t_0) = g(b) - g(a),$$

independientemente de P o τ , por lo tanto también

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(1, g; \tau) = g(b) - g(a).$$

Por otro lado, el hecho de que $g \in BV[a, b]$ asegura que efectivamente

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(1, g; \tau) = \int_a^b dg(t)$$

(aplicar el Teorema 4.6 a $f \equiv 1$ y $g \in BV[a, b]$). Combinando las últimas dos identidades obtenemos (4.21).

Problema 4.5 (Tarea 4, curso 2023). Sea la función f Riemann-integrable sobre $[a, b]$ y supongamos que g es Lipschitz continua, es decir existe una constante M tal que

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq M|t_1 - t_2| \quad \text{para todo } t_1, t_2 \in [a, b].$$

Demostrar la existencia de la integral

$$I := \int_a^b f(t) dg(t). \quad (4.22)$$

Solución sugerida. Sean $f(t) = u(t) + iv(t)$ y $g(t) = x(t) + iy(t)$, entonces las funciones u y v son Riemann-integrables y x e y son funciones Lipschitz continuas. Sean $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ una elección arbitraria de puntos intermedios, entonces

$$S_P(f, g; \tau) = S_P(u, x; \tau) - S_P(v, y; \tau) + iS_P(v, x; \tau) + iS_P(u, y; \tau). \quad (4.23)$$

Demostraremos que cada suma de Riemann-Stieltjes en la derecha de (4.23) converge a la integral correspondiente. Para tal efecto consideraremos solamente el primer término; los tres demás términos pueden ser analizados en forma análoga.

Sean P' y P'' dos particiones de $[a, b]$ y sea P un refinamiento común. Sean τ' , τ'' y τ los vectores de puntos intermedios correspondientes, entonces

$$|S_{P'}(u, x; \tau') - S_{P''}(u, x; \tau'')| \leq |S_{P'}(u, x; \tau') - S_P(u, x; \tau)| + |S_{P''}(u, x; \tau'') - S_P(u, x; \tau)|.$$

Si $P' = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_n\}$ y $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, entonces sean los índices j_k tales que $t_{j_k} = t'_k$. Con esto

$$S_{P'}(u, x; \boldsymbol{\tau}') - S_P(u, x; \boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (u(t'_k) - u(t_j))(x(t_j) - x(t_{j-1})) \right). \quad (4.24)$$

Como u es Riemann-integrable sobre $[a, b]$, es acotada sobre este intervalo, luego

$$\sup_{\theta_1, \theta_2 \in [t_{k-1}, t_k]} |u(\theta_1) - u(\theta_2)| = M_k - m_k, \quad M_k := \sup_{\theta \in [t_{k-1}, t_k]} u(\theta), \quad m_k := \inf_{\theta \in [t_{k-1}, t_k]} u(\theta),$$

luego

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (u(t'_k) - u(t_j))(x(t_j) - x(t_{j-1})) \right| &\leq \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} |u(t'_k) - u(t_j)| |x(t_j) - x(t_{j-1})| \\ &\leq M(M_k - m_k) \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} (t_j - t_{j-1}) = M(M_k - m_k)(t'_k - t'_{k-1}), \end{aligned}$$

por lo tanto a partir de (4.24),

$$|S_{P'}(u, x; \boldsymbol{\tau}') - S_P(u, x; \boldsymbol{\tau})| \leq M \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t'_k - t'_{k-1}).$$

Esto es la diferencia entre una suma de Riemann superior y una suma de Riemann inferior. Como u es Riemann-integrable, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\|P'\| < \delta_\varepsilon$, entonces independientemente de la elección de $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\tau}'$,

$$|S_{P'}(u, x; \boldsymbol{\tau}') - S_P(u, x; \boldsymbol{\tau})| < \varepsilon/2.$$

Considerando P'' en lugar de P' sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\|P''\| < \delta_\varepsilon$, entonces independientemente de la elección de $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\tau}''$,

$$|S_{P''}(u, x; \boldsymbol{\tau}'') - S_P(u, x; \boldsymbol{\tau})| < \varepsilon/2.$$

Concluimos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\|P'\|, \|P''\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} &|S_{P'}(u, x; \boldsymbol{\tau}') - S_{P''}(u, x; \boldsymbol{\tau}'')| \\ &\leq |S_{P'}(u, x; \boldsymbol{\tau}') - S_P(u, x; \boldsymbol{\tau})| + |S_{P''}(u, x; \boldsymbol{\tau}'') - S_P(u, x; \boldsymbol{\tau})| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sea ahora $\{P^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ una sucesión de particiones tal que $\|P^{(l)}\| \rightarrow 0$ cuando $l \rightarrow \infty$. A partir de (4.25) la sucesión correspondiente de sumas de Riemann-Stieltjes $\{S_{P^{(l)}}(u, x; \boldsymbol{\tau}^{(l)})\}_{l \in \mathbb{N}}$ con puntos intermedios arbitrarios es una sucesión de Cauchy que converge a un límite $S \in \mathbb{R}$.

Hay que demostrar que este límite es el mismo para cualquier sucesión de particiones $\{P^l\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que $\|P^{(l)}\| \rightarrow 0$ cuando $l \rightarrow \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces (4.25) implica que existen $\delta_\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que si $\|P\| < \delta_\varepsilon$, entonces para todo $l \geq m$,

$$|S_P(u, x; \boldsymbol{\tau}) - S_{P^{(l)}}(u, x; \boldsymbol{\tau}^{(l)})| < \varepsilon,$$

luego para $l \rightarrow \infty$ obtenemos $|S_P(u, x; \boldsymbol{\tau}) - L| < \varepsilon$. Esto demuestra que la suma de Riemann-Stieltjes con respecto a x converge a la integral. Análogamente podemos demostrar que todas las sumas de Riemann-Stieltjes reales en el lado derecho de (4.23) convergen, lo que implica

que la suma de Riemann-Stieltjes compleja igualmente converge, o equivalentemente, que la integral (4.22) existe.

Problema 4.6 (Tarea 4, curso 2023). Sean

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \in [-1, 0], \\ 1 & \text{para } t \in (0, 1], \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \in [-1, 0), \\ 1 & \text{para } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Demostrar que ambas integrales

$$\int_{-1}^0 f(t) dg(t) \quad \text{y} \quad \int_0^1 f(t) dg(t)$$

existen, pero que la integral

$$\int_{-1}^1 f(t) dg(t) \tag{4.26}$$

no existe.

Solución sugerida. Para la primera integral consideremos una partición arbitraria P del intervalo $[-1, 0]$. Independientemente de la partición P y del vector τ ,

$$S_P(f, g; \tau) = \sum_P f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) = 0,$$

luego cuando $\|P\| \rightarrow 0$, obtenemos

$$\int_{-1}^0 f(t) dg(t) = 0.$$

Análogamente, si P es una partición arbitraria P del intervalo $[0, 1]$ obtenemos para puntos intermedios arbitrarios τ

$$S_P(f, g; \tau) = \sum_P f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) = 0,$$

luego cuando $\|P\| \rightarrow 0$, obtenemos

$$\int_0^1 f(t) dg(t) = 0.$$

Para demostrar que la tercera integral no existe consideremos una sucesión de particiones $P^{(m)}$ del intervalo $[-1, 1]$ que *no* incluye el punto $t = 0$, por ejemplo

$$P^{(m)} = \{t_0^{(m)}, t_1^{(m)}, \dots, t_{2m}^{(m)}, t_{2m+1}^{(m)}\}, \quad t_k^{(m)} = -1 + 2\frac{k}{2m+1}, \quad k = 0, \dots, 2m+1.$$

Si la integral existe, entonces las sumas de Riemann

$$S_{P^{(m)}}(f, g; \tau^{(m)}) = \sum_{P^{(m)}} f(\tau_k^{(m)})(g(t_k^{(m)}) - g(t_{k-1}^{(m)})) = 0$$

deben tender a un límite cuando $m \rightarrow \infty$ independientemente de la elección de los puntos

$$\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \tau_2^{(m)}, \dots, \tau_{2m}^{(m)}, \tau_{2m+1}^{(m)}).$$

Sea el índice $j^{(m)} \in \{0, \dots, 2m\}$ tal que $t_{j^{(m)}} < 0 < t_{j^{(m)}+1}$, entonces

$$\begin{aligned} S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)}) &= \sum_{k=0}^{j^{(m)}} f(\tau_k^{(m)}) (g(t_k^{(m)}) - g(t_{k-1}^{(m)})) + f(\tau_{j^{(m)}+1}^{(m)}) (g(t_{j^{(m)}+1}^{(m)}) - g(t_{j^{(m)}}^{(m)})) \\ &\quad + \sum_{k=j^{(m)}+2}^{2m+1} f(\tau_k^{(m)}) (g(t_k^{(m)}) - g(t_{k-1}^{(m)})). \end{aligned}$$

A raíz del comportamiento de f y g en los diferentes intervalos, $S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)}) = f(\tau_{j^{(m)}+1}^{(m)})$, es decir el valor de la suma de Riemann-Stieltjes depende solamente de $f(\tau_{j^{(m)}+1}^{(m)})$. Es decir, si definimos $\tau_{j^{(m)}+1}^{(m)} = t_{j^{(m)}+1}^{(m)}$, entonces $S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)}) = 1$; y para la elección $\tau_{j^{(m)}+1}^{(m)} = t_{j^{(m)}}^{(m)}$ obtenemos $S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)}) = 0$. Concluimos que no existe un límite de $S_{P^{(m)}}(f, g; \boldsymbol{\tau}^{(m)})$ para $m \rightarrow \infty$ si $\|P^{(m)}\| \rightarrow 0$, por lo tanto la integral (4.26) no existe.

Problema 4.7 (Tarea 4, curso 2023). Supongamos que la integral

$$\int_a^b f(t) dg(t) \quad (4.27)$$

existe. Demostrar que también existe la integral

$$\int_a^b g(t) df(t), \quad (4.28)$$

y demostrar la siguiente fórmula de la integración por partes:

$$\int_a^b f(t) dg(t) + \int_a^b g(t) df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a). \quad (4.29)$$

Solución sugerida. Como la integral (4.27) existe, sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición arbitraria de $[a, b]$ y sea $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ el vector de los puntos intermedios. Ahora

$$\begin{aligned} S_P(g, f; \boldsymbol{\tau}) &= \sum_{k=1}^n g(\tau_k) (f(t_k) - f(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^n g(\tau_k) f(t_k) - \sum_{k=1}^n g(\tau_k) f(t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} g(\tau_{k-1}) f(t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n g(\tau_k) f(t_{k-1}). \end{aligned}$$

Con $\tau_0 = a$ y $\tau_{n+1} = b$,

$$S_P(g, f; \boldsymbol{\tau}) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{n+1} f(t_{k-1}) (g(\tau_k) - g(\tau_{k-1})),$$

donde en el lado derecho aparece una suma de Riemann-Stieltjes con respecto a la partición $P' = \{\tau_0, \dots, \tau_{n+1}\}$ y $\boldsymbol{\tau}' = (t_0, \dots, t_n)$. Como $\|P'\| \rightarrow 0$ si y sólo si $\|P\| \rightarrow 0$ y f es integrable con respecto a g relativo al intervalo $[a, b]$, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\|P\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| S_P(g, f; \boldsymbol{\tau}) - f(b)g(b) + f(a)g(a) - \int_a^b f(t) dg(t) \right| = \left| S_{P'}(g, f; \boldsymbol{\tau}') - \int_a^b f(t) dg(t) \right| < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a la existencia de la integral (4.28) conjuntamente con la identidad (4.29).

Problema 4.8 (Tarea 4, curso 2023). Calcular las integrales de Riemann-Stieltjes

$$\text{a) } \int_0^1 (t^2 + it) d(t^3 + it^2), \quad \text{b) } \int_0^{\pi/2} (t + i \sin t) d \cos t.$$

Solución sugerida. En ambos casos la función g es de clase C^1 , luego tenemos para las integrales mencionadas

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2 + it) d(t^3 + it^2) &= \int_0^1 (t^2 + it)(3t^2 + 2it) dt = \int_0^1 (3t^4 - 2t^2 + 5it^3) dt \\ &= \int_0^1 (3t^4 - 2t^2) dt + i \int_0^1 5t^3 dt = -\frac{1}{15} + \frac{5}{4}i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (t + i \sin t) d \cos t &= - \int_0^{\pi/2} (t \sin t - i \sin^2 t) dt = - \int_0^{\pi/2} t \sin t dt - i \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \\ &= -1 - \frac{i}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2t)) dt = -1 - \frac{\pi}{4}i. \end{aligned}$$

Problema 4.9 (Tarea 4, curso 2023). Sea

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t = -1, \\ 1 & \text{para } t \in (-1, 2), \\ -1 & \text{para } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Calcular

$$\int_{-1}^3 dg(t) \quad \text{y} \quad \int_{-1}^3 t dg(t).$$

Solución sugerida. Para la primera integral consideremos alguna partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo $[-1, 3]$ con $\|P\| < 1$. En forma similar a la solución del Problema 4.6 supongamos que $-1 = t_1 < t_1 < \dots < t_j < 2 \leq t_{j+1} < \dots < t_n = 3$, luego la suma de Riemann-Stieltjes que aproxima la primera integral puede ser descompuesta como

$$\sum_{k=1}^n (g(t_k) - g(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^j (g(t_k) - g(t_{k-1})) + g(t_{j+1}) - g(t_j) + \sum_{k=j+1}^n (g(t_k) - g(t_{k-1})).$$

En virtud de la constancia de g sobre los intervalos $(-1, 2)$ y $[2, 3]$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^n (g(t_k) - g(t_{k-1})) = g(t_1) - g(t_0) + g(t_{j+1}) - g(t_j) = -1.$$

Este es el valor de la suma de Riemann-Stieltjes para cualquier partición P , en particular se mantiene este valor cuando $\|P\| \rightarrow 0$, luego

$$\int_{-1}^3 dg(t) = -1.$$

Para la segunda integral consideremos la misma partición que para la primera, además los puntos intermedios $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Ahora, para $f(t) = t$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (g(t_k) - g(t_{k-1})) &= \sum_{k=1}^j \tau_k (g(t_k) - g(t_{k-1})) + \tau_{j+1} (g(t_{j+1}) - g(t_j)) \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^n \tau_k (g(t_k) - g(t_{k-1})) \\ &= \tau_1 (g(t_1) - g(t_0)) + \tau_{j+1} (g(t_{j+1}) - g(t_j)) = \tau_1 - 2\tau_{j+1}. \end{aligned}$$

Cuando $\|P\| \rightarrow 0$, $\tau_1 \rightarrow -1$ y $\tau_{j+1} \rightarrow 2$, luego

$$\int_{-1}^3 t \, dg(t) = -5.$$

Problema 4.10 (Evaluación de recuperación, curso 2023).

- a) Determinar todos los $z = x + iy \in \mathbb{C}$ donde las siguientes funciones son (1) diferenciables, (2) regulares:

$$(i) \ f(z) = x^2 + 4y^2 + 2ixy, \quad (ii) \ f(z) = (x - iy)(16 - x^2 - y^2).$$

- b) Sea $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 4\}$. Calcular en cada caso la integral de línea

$$\int_K f(z) \, dz,$$

donde la curva K es orientada positivamente.

Solución sugerida.

- a) (i) La función es de la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = x^2 + 4y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Ambas funciones poseen derivadas parciales; a saber:

$$u_x = 2x, \quad u_y = 8y, \quad v_x = 2y, \quad v_y = 2x.$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ están satisfechas para aquellos puntos (x, y) donde $2x = 2x$ y $8y = -2y$, es decir para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y = 0$. Por lo tanto, concluimos que f es diferenciable sobre

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0\}.$$

No obstante, f no es regular en ningún punto ya que para ningún $z_0 \in D$ existe una vecindad $U(z_0) \subset D$.

- (ii) La función es de la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = x(16 - x^2 - y^2)$, $v(x, y) = -y(16 - x^2 - y^2)$. Ambas funciones poseen derivadas parciales; a saber:

$$\begin{aligned} u_x &= 16 - x^2 - y^2 - 2x^2 = 16 - 3x^2 - y^2, & u_y &= -2xy, & v_x &= 2xy, \\ v_y &= -16 + x^2 + y^2 - y \cdot (-2y) = -16 + x^2 + 3y^2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ están satisfechas para aquellos puntos (x, y) donde $16 - 3x^2 - y^2 = -16 + x^2 + 3y^2$ y $-2xy = -2xy$.

La segunda de estas ecuaciones no impone ninguna restricción. La primera está satisfecha para $4x^2 + 4y^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8$, es decir sobre la circunferencia con centro cero y radio $\sqrt{8}$. Por lo tanto, concluimos que f es diferenciable sobre

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 8\}.$$

No obstante, f no es regular en ningún punto ya que para ningún $z_0 \in D$ existe una vecindad $U(z_0) \subset D$.

b)

- (i) Como la función f no es regular sobre una región que incluya a K y su interior debemos calcular la integral parametrizando K como $z(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, luego $z'(t) = -4\operatorname{sen} t + 4i \cos t$. Reemplazando x por $4 \cos t$, y por $4 \operatorname{sen} t$ y $dz = (-4 \operatorname{sen} t + 4i \cos t) dt$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_K f(z) dz &= \int_K (x^2 + 4y^2 + 2ixy) dz \\ &= 64 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 4 \operatorname{sen}^2 t + 2i \cos t \operatorname{sen} t)(- \operatorname{sen} t + i \cos t) dt \\ &= 64 \int_0^{2\pi} (- \operatorname{sen} t \cos^2 t - 4 \operatorname{sen}^3 t - 2i \operatorname{sen}^2 t \cos t \\ &\quad + i \cos^3 t + 4i \operatorname{sen}^2 t \cos t - 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t) dt \\ &= 64 \left(\int_0^{2\pi} (-3 \operatorname{sen} t \cos^2 t - 4 \operatorname{sen}^3 t) dt \right. \\ &\quad \left. + i \int_0^{2\pi} (\cos^3 t + 2i \operatorname{sen}^2 t \cos t) dt \right) \\ &= 64 \left([\cos^3 t]_0^{2\pi} - 4 \left[\frac{1}{12} (\cos(3t) - 9 \cos t) \right]_0^{2\pi} \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{1}{12} (9 \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(3t)) + \frac{2}{3} [\operatorname{sen}^3 t]_0^{2\pi} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

- (ii) Como $f(z) = 0$ sobre K ,

$$\int_K f(z) dz = 0.$$

Problema 4.11 (Tarea 5, curso 2023). Utilizando el método de descomposición en fracciones simples, calcular las siguientes integrales sobre las curvas cerradas en cada caso:

a) $\int_{\{|z+1|=1\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz,$

c) $\int_{\{|z-i|=1\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz,$

b) $\int_{\{|z-1|=1\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz,$

d) $\int_{\{|z|=2\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz.$

Solución sugerida. Primeramente calculamos la descomposición en fracciones simples. A partir del planteo

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2} = \frac{z^2(A+B) + z(-2A+C) + A-B+C}{(z-1)^2(z+1)}$$

y la solución del sistema lineal

$$A+B=0, \quad -2A+C=0, \quad A-B+C=1$$

obtenemos $A=1/4$, $B=-1/4$, $C=1/2$, es decir

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{\frac{1}{4}}{z+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}. \quad (4.30)$$

- a) Como $-1 \in U_1(-1)$, $1 \notin \overline{U_1(-1)}$, el segundo y el tercer sumando de (4.30) son regulares en el interior de $\{|z+1|=1\}$, luego de acuerdo al teorema integral de Cauchy (Teorema 4.24)

$$\int_{|z+1|=1} \frac{-\frac{1}{4}}{z-1} dz = \int_{|z+1|=1} \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2} dz = 0.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 4.24 a la función constante $f(z) = 1/4$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = f(-1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-(-1)|=1} \frac{f(z)}{z-(-1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=1} \frac{1/4}{z+1} dz \\ \Rightarrow \int_{|z+1|=1} \frac{1/4}{z+1} dz &= \frac{\pi}{2}i. \end{aligned}$$

Combinando los resultados llegamos a

$$\int_{\{|z+1|=1\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = \frac{\pi}{2}i + 0 + 0 = \frac{\pi}{2}i.$$

(Se llega al mismo resultado aplicando el Teorema 4.24 a la función $f(z) = 1/(z-1)^2$.)

- b) Como $-1 \notin U_1(1)$, $1 \in U_1(1)$, obtenemos

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\frac{1}{4}}{z+1} dz = 0.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 4.33 a las funciones constantes $f(z) = -1/4$ y $g(z) = 1/2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=1} \frac{-\frac{1}{4}}{z-1} dz &= 2\pi i f(1) = -\frac{2\pi}{4}i = -\frac{\pi}{2}i, \\ \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} g'(1) = 0. \end{aligned}$$

Combinando los resultados obtenemos

$$\int_{\{|z-1|=1\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = 0 - \frac{\pi}{2}i + 0 = -\frac{\pi}{2}i.$$

- c) Como $1, -1 \notin U_1(i)$, es decir el integrando es regular en el interior de $\{|z - i| = 1\}$ (y sobre la curva misma), podemos directamente aplicar el Teorema 4.24 para obtener

$$\int_{\{|z-i|=1\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = 0.$$

- d) Como $1, -1 \in U_2(0)$, aplicamos la fórmula integral de Cauchy extendida (Teorema 4.33) a las funciones constantes $f(z) = 1/4$, $g(z) = 1/4$ y $h(z) = 1/2$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{1/4}{z+1} dz &= 2\pi i f(-1) = \frac{2\pi}{4} i = \frac{\pi}{2} i, \\ \int_{|z|=2} \frac{-1/4}{z-1} dz &= 2\pi i g(1) = -\frac{2\pi}{4} i = -\frac{\pi}{2} i, \\ \int_{|z|=2} \frac{1/2}{(z-1)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} h'(1) = 0. \end{aligned}$$

Combinando estos resultados obtenemos

$$\int_{\{|z|=2\}} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = \frac{\pi}{2} i - \frac{\pi}{2} i + 0 = 0.$$

Problema 4.12 (Tarea 5, curso 2023). Calcular las siguientes integrales sobre las curvas cerradas en cada caso:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_{\{|z-1|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz, & \text{c)} \quad & \int_{\{|z-i|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz, \\ \text{b)} \quad & \int_{\{|z|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz, & \text{d)} \quad & \int_{\{|z|=2\}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz. \end{aligned}$$

Solución sugerida.

- a) Consideremos la función

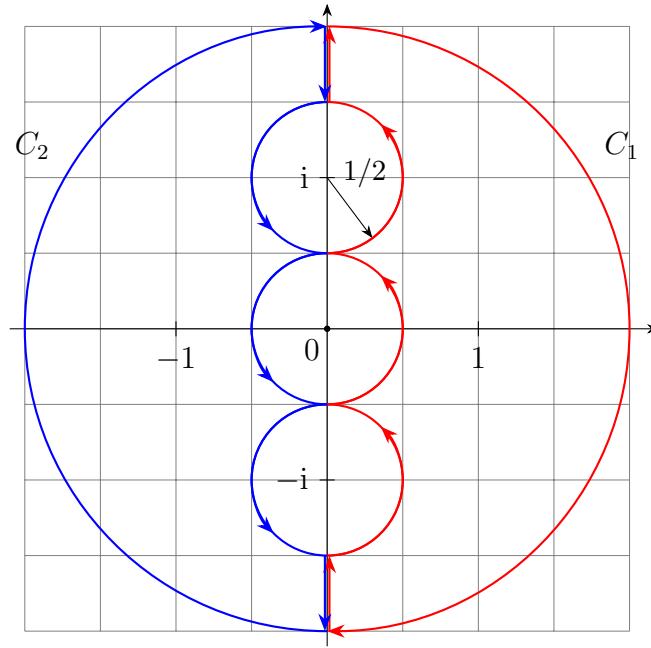
$$\mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\} \ni z \mapsto f(z) = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z(z^2+1)}.$$

Como la función f es regular sobre $U_{1/2}(1)$, de acuerdo al teorema integral de Cauchy (Teorema 4.24)

$$\int_{\{|z-1|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = 0.$$

- b) Podemos utilizar la fórmula integral de Cauchy (Teorema 4.30) para funciones regulares,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (4.31)$$

FIGURA 4.8. Curvas C_1 y C_2 de la solución del Problema 4.12.

válida si f es regular en la región G , la curva $K \subset G$ es una curva de Jordan rectificable, cerrada y orientada positivamente y $z \in I(K)$. En este caso, considerando la función $f(\zeta) = 1/((\zeta + i)(\zeta - i)) = 1/(\zeta^2 + 1)$ obtenemos para la integral solicitada y $z_0 = 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=1/2\}} \frac{\frac{1}{z^2+1}}{z - z_0} dz = f(z_0) = \frac{1}{z_0^2 + 1} = 1$$

y por lo tanto

$$\int_{\{|z|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2 + 1)} dz = 2\pi i.$$

- c) El valor de la integral solicitado se calcula en forma similar a la parte b). En este caso, considerando la función $f(\zeta) = 1/(\zeta(\zeta + i))$ obtenemos para la integral solicitada y $z_0 = i$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-i|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-i|=1/2\}} \frac{\frac{1}{z(\zeta+i)}}{z - i} dz = f(z_0) = \frac{1}{i(2i)} = -\frac{1}{2},$$

y por lo tanto

$$\int_{\{|z-i|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2 + 1)} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

- d) Aquí utilizamos la Figura 4.12. Notamos primeramente que considerando la función $f(\zeta) = 1/(\zeta(\zeta - i))$ y $z_0 = -i$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z+i|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z+i|=1/2\}} \frac{\frac{1}{z(\zeta-i)}}{z+i} dz = f(z_0) = \frac{1}{i(2i)} = -\frac{1}{2},$$

y por lo tanto

$$\int_{\{|z+i|=1/2\}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

Sean C_1 y C_2 las curvas cerradas marcadas en las figuras. La función $1/(z(z^2+1))$ es regular en el interior de cada una de ellas, luego

$$\int_{C_1} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = 0.$$

Por otro lado, de acuerdo a la figura,

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz \\ &= \int_{|z+i|=1/2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \int_{|z|=1/2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz \\ &+ \int_{|z-i|=1/2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz - \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz \end{aligned}$$

(donde la integral sobre una circunferencia se entiende con orientación positiva), por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz &= \int_{|z+i|=1/2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz + \int_{|z|=1/2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz \\ &+ \int_{|z-i|=1/2} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = -\pi i + 2\pi i - \pi i = 0. \end{aligned}$$

Problema 4.13 (Tarea 5, curso 2023). Sea la función g continua en una vecindad de un conjunto abierto U con frontera ∂U continua a trozos.

- a) Demostrar que en este caso, la función

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

es regular en U .

- b) Demostrar que la función f no necesariamente posee una continuación continua sobre la frontera ∂U que coincida con g . Aviso: considere $g(z) = 1/z$, $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Solución sugerida.

- a) Sea $a \in U$ con $a \neq z$, entonces parcialmente siguiendo la demostración del Teorema 4.32 tenemos para todo $z \in U$

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - a} \int_{\partial U} g(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - a} \right) d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z-a} \int_{\partial U} g(\zeta) \frac{\zeta-a-(\zeta-z)}{(\zeta-z)(\zeta-a)} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z-a} \int_{\partial U} g(\zeta) \frac{z-a}{(\zeta-z)(\zeta-a)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-a)} d\zeta,
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{f(z) - f(a)}{z-a} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^2} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} g(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-a)} - \frac{1}{(\zeta-a)^2} \right) d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} g(\zeta) \frac{\zeta-a-(\zeta-z)}{(\zeta-z)(\zeta-a)^2} d\zeta \\
&= \frac{z-a}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^2(\zeta-z)} d\zeta.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^2(\zeta-z)} d\zeta = 0$$

obtenemos que f efectivamente es regular en U .

b) Consideremos $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y $g(z) = 1/z$. Entonces

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta-z)} d\zeta.$$

Para el punto $1 \in \partial U = \{|z| = 1\}$ tenemos $g(1) = 1$, pero la expresión

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta$$

no está definida, ya que la función $1/(\zeta(\zeta-1))$ es regular sobre $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, pero $\partial U \not\subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Por lo tanto, las funciones f y g no coinciden sobre ∂U .

Problema 4.14 (Tarea 5, curso 2023). Queremos aprovechar el teorema integral y la fórmula integral de Cauchy para calcular la integral (real)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =: c.$$

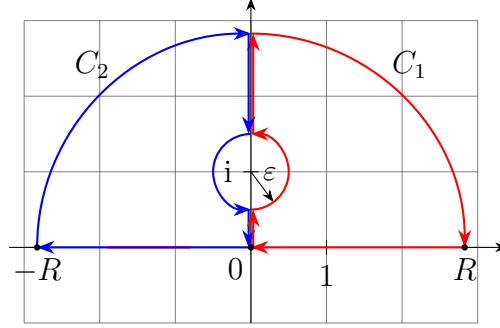
Para tal efecto sea $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ para $z \in \mathbb{C}$. Calcular la integral de línea de f

- a lo largo de una circunferencia con centro i y radio $\varepsilon > 0$ pequeño,
- a lo largo del camino cerrado formado por el segmento lineal desde $-R$ a R y el arco Γ_R del radio R que conecta R con $-R$ (que pasa por el semiplano superior) recorrido en sentido antihorario, para $R > 0$.
- Demostrar que

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

y utilice los resultados ya obtenidos para determinar c .

Solución sugerida.

FIGURA 4.9. Curvas C_1 y C_2 de la solución del Problema 4.14.

- a) Sea $z(t) = i + e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$, una parametrización de la circunferencia $K_\varepsilon(i)$ en cuestión, entonces la función $\zeta \mapsto 1/(\zeta + i)$ es regular sobre el disco $U_\varepsilon(i)$ y podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy para obtener

$$\int_{K_\varepsilon(i)} f(\zeta) d\zeta = \int_{K_\varepsilon(i)} \frac{1}{\frac{\zeta+i}{\zeta-i}} d\zeta = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{\zeta+i} \right)_{\zeta=i} = \pi.$$

- b) Sea ahora K la curva de integración mencionada en la formulación del problema, y sean C_1 y C_2 las curvas cerradas indicadas en la Figura 4.9. Como f es regular en el interior de C_1 y C_2 ,

$$\int_{C_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{C_2} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Por otro lado, considerando la cancelación de las integrales sobre los segmentos con $\operatorname{Re} z = 0$,

$$\int_{C_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{C_2} f(\zeta) d\zeta = - \int_K f(\zeta) d\zeta + \int_{K_\varepsilon(i)} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

lo cual implica

$$\int_K f(\zeta) d\zeta = \int_{K_\varepsilon(i)} f(\zeta) d\zeta = \pi.$$

- c) Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(\zeta) d\zeta &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} \frac{2\pi i R e^{2\pi it}}{R^2 e^{4\pi it} + 1} dt = 2\pi i \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{1/2} \frac{e^{2\pi it}}{e^{4\pi it} + \frac{1}{R^2}} dt \\ &= 2\pi i \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{1/2} e^{-2\pi it} dt = 0, \end{aligned}$$

luego

$$c = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_K f(\zeta) d\zeta - \int_{\Gamma_R} f(\zeta) d\zeta \right) = \pi.$$

Problema 4.15 (Tarea 5, curso 2023). Sea f una función regular sobre la región G y sea f no constante. Sea $z_0 \in G$ y sea d la distancia entre z_0 y la frontera ∂G . Demostrar que

$$m(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

es una función continua sobre $[0, d)$ y estrictamente creciente.

Solución sugerida.

1. Sea $0 < r < d$ y consideremos las vecindades $U_\delta(z_0) \subset G$. Según hipótesis, la función f no es constante sobre G . Esto implica que f tampoco es constante sobre ninguna vecindad $U_\delta(z_0) \subset G$: si existiera $\tilde{r} \in (0, d)$ tal que $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$ sobre $U_{\tilde{r}}(z_0)$, entonces existiría una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $U_{\tilde{r}}(z_0)$ con $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $z_n \neq z_0$ para todo n tal que $f(z_n) = c$ para todo n , luego de acuerdo al Teorema 5.15, $f(z) = c$ para todo $z \in G$. Esto se contradice con la hipótesis de que f no es constante sobre G . Concluimos entonces que efectivamente f es no constante sobre todas las vecindades $U_r(z_0) \subset G$, $0 < r < d$.
2. Como f es no constante sobre cada vecindad $U_r(z_0) \subset G$, $0 < r < d$, sabemos que de acuerdo al principio del máximo para cada r existe $z_r \in \partial U_r(z_0)$ tal que

$$\sup_{z \in \overline{U_r(z_0)}} |f(z)| = |f(z_r)| = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| = m(r); \quad (4.32)$$

Esta identidad también es (trivialmente) válida para $r = 0$.

3. Sea ahora $0 \leq r_1 < r_2 < d$. Como $\overline{U_{r_1}(z_0)} \subset \overline{U_{r_2}(z_0)}$,

$$\sup_{z \in \overline{U_{r_1}(z_0)}} |f(z)| \leq \sup_{z \in \overline{U_{r_2}(z_0)}} |f(z)| \Leftrightarrow m(r_1) \leq m(r_2). \quad (4.33)$$

4. Efectivamente, la igualdad en la desigualdad (4.33) no puede ser válida: si fuera válida, tendríamos

$$m(r_1) = |f(z_{r_1})| = |f(z_{r_2})| = \max_{|z-z_0|=r_2} |f(z)| = \max_{z \in \overline{U_{r_2}(z_0)}} |f(z)|$$

es decir el máximo de $|f(z)|$ sobre $\overline{U_{r_2}(z_0)}$ sería igualmente asumido en el punto z_{r_1} . Pero debido a $r_1 < r_2$ este punto es un punto interior de $U_{r_2}(z_0)$. Esto es imposible (en virtud del Teorema 4.44 o del Comentario 4.13) porque f es regular sobre $U_{r_2}(z_0)$ (esta vecindad juega el rol de G en el Teorema 4.44 y el Comentario 4.13) y no constante. Por lo tanto, concluimos que

$$0 \leq r_1 < r_2 < d \Rightarrow m(r_1) < m(r_2), \quad (4.34)$$

lo que demuestra que $m(r)$ es estrictamente monótona.

5. Para demostrar que $m(r)$ es continua, sean $0 \leq r_1 < r_2 < d$ y consideremos la clausura de la región anular R_{r_1, r_2} , es decir

$$\overline{R_{r_1, r_2}} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}.$$

El conjunto $\overline{R_{r_1, r_2}}$ es compacto, por lo tanto la función continua $|f(z)|$ es uniformemente continua sobre $\overline{R_{r_1, r_2}}$, es decir para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para cada

par $z_1, z_2 \in \overline{R_{r_1, r_2}}$:

$$|z_1 - z_2| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad ||f(z_1)| - |f(z_2)|| < \varepsilon.$$

Fijemos $r_1 \in [0, d)$ y sea $r_2 > r_1$ tal que $0 < r_2 < d$ y $r_2 - r_1 < \delta_\varepsilon$. Sea $\hat{z}_i \in K_{r_i}(z_0)$ tal que $m(r_i) = |f(\hat{z}_i)|$, $i = 1, 2$. Ya sabemos que $m(r_2) > m(r_1)$. Sea $z_1 \in K_{r_1}(z_0)$ tal que z_0, z_1 y $\hat{z}_2$ sean colineales, entonces

$$\begin{aligned} |m(r_2) - m(r_1)| &= m(r_2) - m(r_1) = |f(\hat{z}_2)| - |f(\hat{z}_1)| \leq |f(\hat{z}_2)| - |f(z_1)| \\ &\leq ||f(\hat{z}_2)| - |f(z_1)|| < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que implica que m es una función continua de r .

Series de potencias y series de Taylor

5.1. Sucesiones de funciones

Sean las funciones f_n ($n \in \mathbb{N}$) definidas sobre un conjunto $M \subset \mathbb{C}$ y consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para cada $z \in M$ fijo esto entrega una sucesión de números $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ habitual cuya convergencia puede ser analizada. La sucesión puede converger para ciertos puntos de M y divergir para otros. La siguiente definición es completamente análoga al caso real.

Definición 5.1. Sea $M \subset \mathbb{C}$.

1. La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice convergente puntualmente en $z \in M$ si la sucesión de números $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge. El conjunto

$$M_c := \{z \in M \mid \{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$$

se dice conjunto de convergencia de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

2. La función f con $D(f) = M_c$ y

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$$

se dice función límite de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

La siguiente definición es la misma del caso real.

Definición 5.2. Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre el conjunto M a una función límite f si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N_ε tal que para todo $n > N_\varepsilon$ y todo $z \in M$ se tiene

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Para denotar lo anterior escribimos

$$f_n(z) \xrightarrow{M} f(z).$$

La demostración del siguiente teorema ya es conocida a partir del cálculo real.

Teorema 5.1 (Criterio de convergencia de Cauchy). Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre el conjunto M a una función límite f si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N_ε tal que para todo $m, n > N_\varepsilon$ y todo $z \in M$ se tiene

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

A parte de la convergencia uniforme, para el cálculo complejo el concepto de la convergencia compacta es muy importante.

Definición 5.3. Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge compactamente sobre la región G a una función límite f si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre cada subconjunto compacto de G . En este caso escribimos

$$f_n(z) \xRightarrow{G} f(z).$$

En el caso real discutimos detalladamente las hipótesis bajo las cuales las propiedades de los elementos de la sucesión (continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad) también son válidas de la función límite. La pregunta es la misma en el caso complejo, donde por cierto principalmente nos interesan sucesiones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones regulares. La información más importante sobre la regularidad de la función límite y el intercambio del paso al límite y la diferenciación y la integración es proporcionada por el siguiente teorema.

Teorema 5.2. Sea cada una de las funciones f_n ($n \in \mathbb{N}$) regular sobre la región G , y supongamos que

$$f_n(z) \xRightarrow{G} f(z) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

Entonces:

1. La función límite f es regular sobre G .
2. Para cada curva rectificable $K \subset G$ se tiene

$$\int_K f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(z) dz.$$

3. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$f_n^{(k)}(z) \xRightarrow{G} f^{(k)}(z) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Demostración.

1. Demostraremos primeramente que función límite f es continua sobre G . Sean $z_0 \in G$ y $\varepsilon > 0$ dados.

- a) Escogemos primeramente $\delta > 0$ en tal forma que $\overline{U_\delta(z_0)} \subset G$. Debido a la convergencia compacta existe N_ε tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3 \quad \text{para todo } n > N_\varepsilon \text{ y } z \in \overline{U_\delta(z_0)}.$$

- b) Sea ahora $n > N_\varepsilon$ fijo y $\delta_\varepsilon \in (0, \delta)$ tal que

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{para todo } n > N_\varepsilon \text{ y } z \in U_{\delta_\varepsilon}(z_0).$$

- c) Entonces para todo $z \in U_{\delta_\varepsilon}(z_0)$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

luego f es continua en z_0 . Como $z_0 \in G$ es arbitrario, f es continua sobre G .

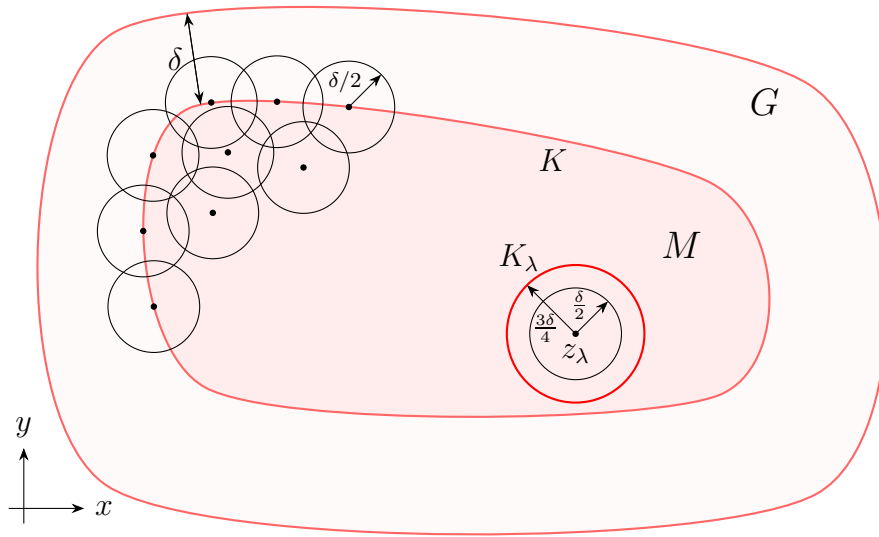


FIGURA 5.1. Ilustración de la demostración del Teorema 5.2.

2. Como la función límite f es continua, existe la integral

$$\int_K f(z) dz.$$

Como K es compacto y la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge compactamente sobre G , para $\varepsilon > 0$ existe un número N_ε tal que

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{L(K)} \quad \text{para todo } n > N_\varepsilon \text{ y todo } z \in K.$$

Esto implica que

$$\left| \int_K f(z) dz - \int_K f_n(z) dz \right| = \left| \int_K (f(z) - f_n(z)) dz \right| < \frac{\varepsilon}{L(K)} \cdot L(K) = \varepsilon,$$

lo que demuestra el enunciado 2. del Teorema 5.2.

3. Demostraremos ahora que f es regular sobre G . Sea $z_0 \in G$. Elegimos $\delta > 0$ tal que $U_\delta(z_0) \subset G$. Entonces, como f_n es regular, para cada curva $K_0 \subset U_\delta(z_0)$ rectificable y cerrada se tiene que

$$\int_{K_0} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_0} f_n(z) dz = 0.$$

De acuerdo al teorema de Morera (Teorema 4.40) esto implica que f es regular sobre $U_\delta(z_0)$. Como z_0 es arbitrario obtenemos el enunciado 1. del Teorema 5.2.

4. Sean ahora dados un conjunto compacto $M \subset G$ y un $\varepsilon > 0$.

a) Si denotamos por δ la distancia entre M y la frontera ∂G de G , entonces los conjuntos $U_{\delta/2}(z)$ ($z \in M$) forman un recubrimiento abierto de M . Como M es

compacto existe un subrecubrimiento finito

$$M \subset \bigcup_{\lambda=1}^l U_{\delta/2}(z_\lambda).$$

Para $\lambda = 1, \dots, l$ definimos $K_\lambda := \{z \mid |z - z_\lambda| = 3\delta/4\}$ (ver Figura 5.1).

b) Para $\lambda \in \{1, \dots, l\}$ fijo se tiene para todo $z \in U_{\delta/2}(z_\lambda)$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_\lambda} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_\lambda} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta,$$

lo que implica que con una constante $C_\lambda > 0$ apropiada tenemos para todo $z \in U_{\delta/2}(z_\lambda)$

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_\lambda} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \left(\frac{\delta}{4} \right)^{-(k+1)} \max_{\zeta \in K_\lambda} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \cdot 2\pi \cdot \frac{3\delta}{4} \\ &= C_\lambda \max_{\zeta \in K_\lambda} |f(\zeta) - f_n(\zeta)|, \end{aligned}$$

donde utilizamos que para $z \in U_{\delta/2}(z_\lambda)$ y $\zeta \in K_\lambda$, $|\zeta - z| \geq \delta/4$. Como $K_\lambda \subset G$ es un conjunto compacto, obtenemos a partir de (5.1) que existe un $N_\varepsilon(\lambda)$ tal que para todo $n > N_\varepsilon(\lambda)$ y todo $\zeta \in K_\lambda$,

$$|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \varepsilon / C_\lambda.$$

Esto implica que

$$|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo } z \in U_{\delta/2}(z_\lambda).$$

c) Sea ahora $N_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon(1), \dots, N_\varepsilon(l)\}$, entonces

$$|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > N_\varepsilon \text{ y todo } z \in M \subset \bigcup_{\lambda=1}^l U_{\delta/2}(z_\lambda),$$

lo que demuestra el enunciado 3. del Teorema 5.2. ■

5.2. Series de funciones

La discusión de series de funciones es completamente análoga al caso real. Las definiciones de la convergencia y de la suma de una serie son las mismas que en el caso real.

Definición 5.4. Sea $M \subset \mathbb{C}$.

1. La serie de funciones $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ se dice puntualmente convergente en $z \in M$ si converge la serie de números $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}(z)$. El conjunto

$$M_c := \left\{ z \in M \mid \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}(z) \text{ converge} \right\}$$

se dice conjunto de convergencia de $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$.

2. La función A con $D(A) = M_c$ y

$$A(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}(z)$$

se llama suma de la serie de funciones.

La convergencia puntual de la serie de funciones $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ en el punto z nuevamente es equivalente a la convergencia de la serie de sumas parciales

$$A_n(z) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}(z).$$

Definición 5.5. La serie de funciones $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ se dice uniformemente convergente sobre un conjunto M a la función suma A si

$$A_n(z) \xrightarrow{M} A(z).$$

En este caso escribimos

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}(z) \stackrel{M}{=} A(z).$$

Los siguientes dos teoremas se pueden demostrar aplicando la demostración del resultado correspondiente de la convergencia de series de funciones reales.

Teorema 5.3 (Criterio de convergencia de Cauchy). La serie de funciones $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ es uniformemente convergente sobre el conjunto M a la función suma A si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe N_{ε} tal que para todo $n > m > N_{\varepsilon}$ y todo $z \in M$ se tiene

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^n a_{\nu}(z) \right| = |a_{m+1}(z) + \cdots + a_n(z)| < \varepsilon.$$

Teorema 5.4 (Criterio de convergencia de Weierstrass). Sean las funciones a_{ν} ($\nu \in \mathbb{N}$) definidas sobre $M \subset \mathbb{C}$, y supongamos que

$$|a_{\nu}(z)| \leq c_{\nu} \quad \text{para todo } z \in M, \text{ para cada } \nu \in \mathbb{N}.$$

Si la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}$ converge, entonces la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ converge uniformemente sobre M .

El concepto de la convergencia compacta (ver Definición 5.3) también es importante para series.

Definición 5.6. Se dice que la serie de funciones $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ converge compactamente sobre la región G a la función suma A si $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ converge uniformemente a A sobre cada subconjunto compacto $M \subset G$. En este caso escribimos

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}(z) \stackrel{G}{\equiv} A(z).$$

Aplicando el Teorema 5.2 a la sucesión de sumas parciales

$$A_n(z) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}(z)$$

podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.5. Sea cada una de las funciones a_{ν} ($\nu \in \mathbb{N}$) regular sobre la región G y sea

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}(z) \stackrel{G}{\equiv} A(z).$$

Entonces:

1. La suma $A = A(z)$ es regular sobre G .
2. Para cada curva rectificable $K \subset G$ se tiene

$$\int_K A(z) dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_K a_{\nu}(z) dz.$$

3. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{(k)}(z) \stackrel{G}{\equiv} A^{(k)}(z).$$

5.3. Series de potencias

A partir del cálculo real ya sabemos de la importancia de series de potencias. Para el cálculo complejo la importancia de la teoría de series de potencias es aún mayor, ya que cada función puede ser representada en la vecindad de un punto de regularidad por una serie de potencias, por lo tanto el análisis de funciones regulares se reduce al estudio de series de potencias. A continuación listamos algunos teoremas de convergencia sin demostración. Estos resultados son conocidos para el caso real, y como las series de potencias (complejas) convergen absolutamente sobre su disco de convergencia, pueden ser tratadas por métodos reales.

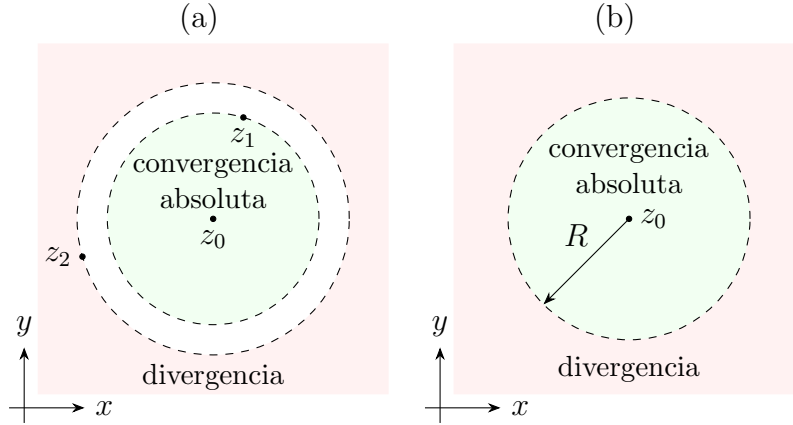


FIGURA 5.2. Ilustración (a) del Teorema 5.6, (b) del Teorema 5.7.

Definición 5.7. Si $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de números complejos y $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

se dice serie de potencias en torno a z_0 .

Teorema 5.6. Para una serie de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ se tiene (ver Figura 5.2 (a)):

1. Si la serie converge en un punto $z = z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente para todo z con $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.
2. Si la serie diverge en un punto $z = z_2 \neq z_0$, entonces diverge para todo z con $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Teorema 5.7. Para una serie de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ existe un R único, $0 \leq R \leq \infty$, llamado su radio de convergencia, para el cual se tiene:

1. Si $R = 0$, entonces la serie converge solamente en z_0 .
2. Si $0 < R < \infty$ (ver Figura 5.2 (b)), entonces la serie converge absolutamente sobre el disco de convergencia

$$U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$$

y diverge sobre el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R\}$.

3. Si $R = \infty$, entonces la serie converge absolutamente sobre el disco de convergencia

$$U_\infty(z_0) = \mathbb{C}.$$

Teorema 5.8 (Teorema de Cauchy-Hadamard). *El radio de convergencia R de una serie de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ es dado por*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{si } \limsup_{\nu \rightarrow \infty} |a_{\nu}|^{1/\nu} = \infty, \\ \frac{1}{\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |a_{\nu}|^{1/\nu}} & \text{si } 0 < \limsup_{\nu \rightarrow \infty} |a_{\nu}|^{1/\nu} < \infty, \\ \infty & \text{si } \limsup_{\nu \rightarrow \infty} |a_{\nu}|^{1/\nu} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Podemos resumir estos casos por la siguiente fórmula (que es simbólica para el primer y el tercer caso de (5.2)):

$$R = \frac{1}{\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |a_{\nu}|^{1/\nu}}.$$

En el contexto complejo también sigue válido el teorema sobre la convergencia uniforme de series de potencia reales. Utilizando el concepto de la convergencia compacta lo podemos formular como sigue.

Teorema 5.9. *Sea $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ una serie de potencias con el radio de convergencia R , donde $0 < R \leq \infty$. Entonces la serie converge compactamente sobre $U_R(z_0)$.*

En virtud de lo anterior se reconfirma que una serie de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ define sobre su disco de convergencia $U_R(z_0)$ una función únicamente definida

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}. \quad (5.3)$$

En virtud del Teorema 5.5 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.10. *Sea $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ una serie de potencias con el radio de convergencia R , donde $0 < R \leq \infty$. Entonces la función $A = A(z)$ definida por (5.3) es regular sobre $U_R(z_0)$.*

Además, aplicando el Teorema 5.5 y diferenciando, obtenemos que una serie de potencias es la serie de Taylor de la función que representa:

Teorema 5.11. *Sea $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ una serie de potencias con el radio de convergencia R , donde $0 < R \leq \infty$, y sea la función $A = A(z)$ definida por (5.3) sobre $U_R(z_0)$. Entonces*

$$a_{\nu} = \frac{A^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}_0,$$

es decir

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^{\nu}.$$

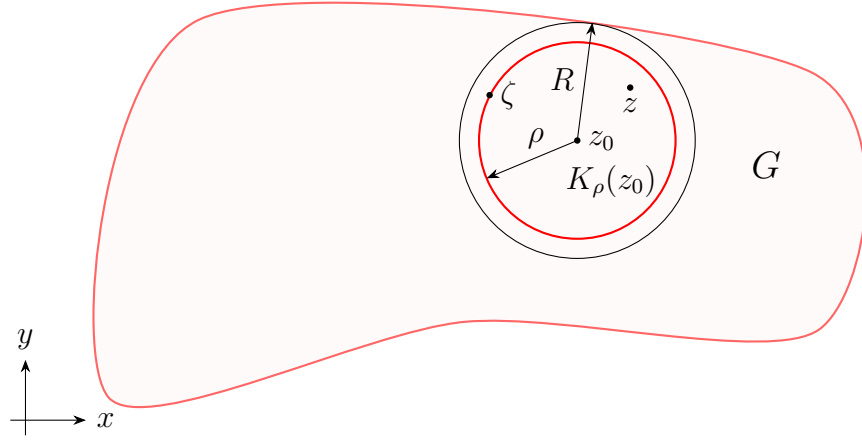


FIGURA 5.3. Ilustración de la demostración del Teorema 5.13.

También sigue válido el siguiente teorema (demostrado para el caso real).

Teorema 5.12 (Teorema de la identidad para series de potencias). *Si dos series de potencias*

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu} \quad \text{y} \quad B(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$$

poseen el mismo valor en una cantidad infinita de puntos z_{ν} , $\nu \in \mathbb{N}$, diferentes a pares (es decir $z_{\nu} \neq z_{\mu}$ si $\nu \neq \mu$) tales que $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $A(z_n) = B(z_n)$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_{\nu} = b_{\nu}$ para todo $\nu \in \mathbb{N}_0$.

5.4. Expansión en serie de Taylor de una función regular

De acuerdo al Teorema 5.10 cada serie de potencias representa sobre su disco de convergencia una función regular. Demostraremos ahora que la inversión de este teorema igualmente es válida.

Teorema 5.13. *Sea f regular sobre una región G . Si $z_0 \in G$, entonces sobre el mayor disco con centro z_0 que enteramente cabe en G la función f puede ser expandida en forma única en una serie de Taylor:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Demostración.

1. Sea R la distancia entre z_0 y ∂G , luego $U_R(z_0) \subset G$ (ver Figura 5.3). Sea $\rho \in (0, R)$ elegido fijo, entonces para cada $z \in U_{\rho}(z_0)$ fijo y $\zeta \in K_{\rho}(z_0)$ arbitrario,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

Como $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = \rho$, esta serie converge uniformemente para $\zeta \in K_{\rho}(z_0)$.

2. De acuerdo la fórmula integral de Cauchy (4.13) (ver Teorema 4.30), y como podemos integrar por términos debido a la convergencia uniforme, tenemos

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.
 \end{aligned}$$

3. La unicidad de la representación es una consecuencia inmediata del Teorema 5.12. ■

Para aplicaciones posteriores definimos el concepto de una raíz múltiple de una función regular.

Definición 5.8. Sea la función f regular en z_0 , y sea

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

la serie de Taylor de f . Si $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ y $a_k \neq 0$, entonces z_0 se dice raíz simple (en el caso $k = 1$) o raíz múltiple (en el caso $k \geq 2$) de f . El número k se dice multiplicidad u orden de la raíz z_0 .

Teorema 5.14. La función f posee una raíz del orden k en z_0 si y sólo si existe una función g regular en z_0 con $g(z_0) \neq 0$ tal que en una vecindad de z_0 ,

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Demostración. Tarea. ■

5.5. Continuación analítica y teorema de la identidad

En el Teorema 5.13 demostramos que una función puede ser representada por una serie de potencias en la vecindad de cualquier punto de regularidad. Veremos que este hecho implica el fundamental teorema de la identidad de funciones complejas. Para tal efecto primeramente discutiremos el concepto de la *continuación analítica*. Recordemos que desde un principio hemos incluido el dominio en la definición de una función. En lo siguiente enfatizaremos este aspecto denotando una función por (f, G) si $G = D(f)$ es el dominio de f .

Definición 5.9. Sean (f_1, G_1) y (f_2, G_2) dos funciones regulares. Si

1. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ y
2. $f_1(z) = f_2(z)$ sobre $G_1 \cap G_2$,

entonces (f_1, G_1) se dice continuación analítica de (f_2, G_2) (y vice versa).

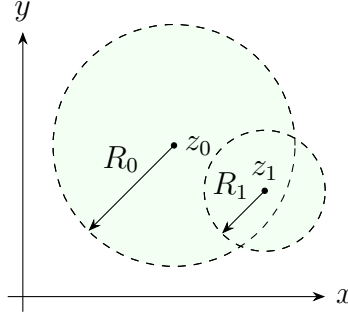


FIGURA 5.4. Ilustración de la desigualdad (5.4) con “>” en lugar de “≥”.

Ejemplo 5.1. *Consideremos*

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z}, \quad G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1\}; \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}, \quad G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Como $f_1(z) = f_2(z)$ sobre $G_1 \cap G_2$, la función f_1 es una continuación analítica de f_2 .

En la mayoría de casos se parte de una serie de potencias (5.3) con un radio de convergencia positivo. Entonces nos interesa saber si esta función posee una continuación analítica más allá del disco de convergencia correspondiente. Ahora esto puede ser decidido fácilmente si expandimos la serie de potencias en serie de Taylor en torno a otro punto $z_1 \neq z_0$. Si R_0 es el radio de convergencia de $A(z)$ y $z_1 \neq z_0$, $z_1 \in U_{R_0}(z_0)$, entonces sobre una circunferencia en torno a z_1 con un radio R_1 tenemos

$$A_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}^{(1)}(z - z_1)^{\nu}, \quad \text{donde} \quad a_{\nu}^{(1)} = \frac{A^{(\nu)}(z_1)}{\nu!} \quad \text{para } \nu \in \mathbb{N}_0.$$

La serie de potencias nueva convergerá a lo menos en el interior del disco mayor contenido enteramente en $U_{R_0}(z_0)$, es decir

$$R_1 \geq R_0 - |z_1 - z_0|. \quad (5.4)$$

Si el signo “>” es válido, entonces la serie de potencias nueva efectivamente es una continuación analítica de la serie original (ver Figura 5.4).

Ejemplo 5.2. *Consideremos la serie de potencias*

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$$

en torno a $z_0 = 0$ con el radio de convergencia $R_0 = 1$. Sea ahora $z_1 = i/2$. Entonces la serie

$$A_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{(\nu)}(i/2)}{\nu!} \left(z - \frac{i}{2}\right)^{\nu}$$

converge en el mayor disco en torno a $z_1 = i/2$ que no contiene el punto $z = 1$, considerando que ambas series son series de Taylor de la función $z \mapsto 1/(1-z)$ en torno a $z_0 = 0$

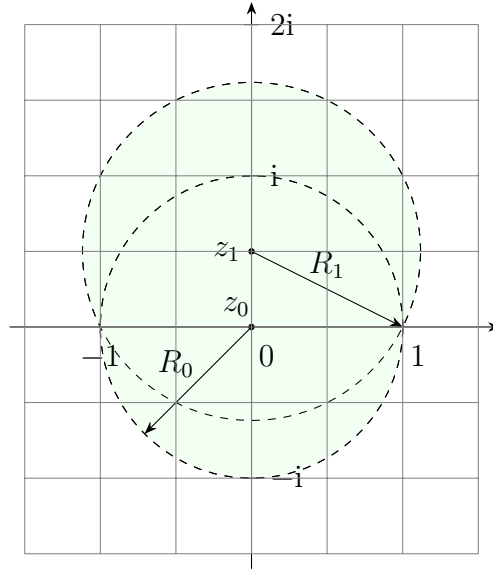


FIGURA 5.5. Ilustración del Ejemplo 5.2.

y $z_1 = i/2$, respectivamente. En este caso (ver Figura 5.5),

$$R_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,1180.$$

Ejemplo 5.3. Como ejemplo de una serie de potencias que no puede ser continuada analíticamente consideremos

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}.$$

Para el radio de convergencia tenemos evidentemente $R_0 = 1$. Supongamos que esta función pueda ser continuada analíticamente más allá de la frontera del disco unitario hacia una región G_2 . Entonces para cada punto $\exp(i\varphi) \in G_2$ existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A(r \exp(i\varphi)). \quad (5.5)$$

En particular este límite existe para todo $\varphi = 2\pi l/k$ ($l, k \in \mathbb{N}$) con

$$\exp(i\varphi) = \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\right) \in G_2$$

(estos puntos están “densos” sobre $\{z \mid |z| = 1\}$). Para $\varphi = 2\pi l/k$ fijo tenemos entonces

$$A\left(r \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\right)\right) = \sum_{\nu=0}^{k-1} r^{\nu!} \exp\left(\frac{2\pi li}{k} \nu!\right) + \sum_{\nu=k}^{\infty} r^{\nu!} \exp\left(\frac{2\pi li}{k} \nu!\right)$$

Ahora

$$\left| \sum_{\nu=0}^{k-1} r^{\nu!} \exp\left(\frac{2\pi li}{k} \nu!\right) \right| \leq k \quad \text{para todo } r \in (0, 1).$$

Como

$$\exp\left(\frac{2\pi li}{k}\nu!\right) = 1 \quad \text{para todo } \nu \geq k$$

tenemos

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} r^{\nu!} \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\nu!\right) = \sum_{\nu=k}^{\infty} r^{\nu!} \geq \sum_{\nu=k}^m r^{\nu!} \quad \text{para todo } m \geq k,$$

luego

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \sum_{\nu=k}^{\infty} r^{\nu!} \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\nu!\right) \geq \liminf_{r \rightarrow 1^-} \sum_{\nu=k}^m r^{\nu!} = m - k + 1. \quad (5.6)$$

Resumiendo, tenemos

$$\left| A\left(r \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\right)\right) \right| \geq \sum_{\nu=k}^{\infty} r^{\nu!} \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\nu!\right) - \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} r^{\nu!} \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\nu!\right) \right| \geq \sum_{\nu=k}^m r^{\nu!} - k,$$

es decir, en virtud de (5.6),

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \left| A\left(r \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\right)\right) \right| \geq m - k + 1 - k = m + 1 - 2k,$$

pero como m es arbitrario,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \left| A\left(r \exp\left(\frac{2\pi li}{k}\right)\right) \right| = \infty,$$

lo que se contradice con (5.5).

Demostraremos ahora el teorema de la identidad para funciones regulares.

Teorema 5.15 (Teorema de la identidad). *Sean las funciones f y g regulares sobre la región G y sea $z_0 \in G$. Si para una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $z_n \neq z_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z_n \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in G$.*

Demostración.

1. Ambas funciones f y g pueden ser expandidas en series de potencias convergentes en un disco $U_R(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(z - z_0)^{\nu}, \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu}(z - z_0)^{\nu}.$$

De acuerdo al teorema de la identidad para series de potencias (Teorema 5.12) concluimos que $f(z) = g(z)$ sobre $U_R(z_0)$.

2. Consideremos un punto arbitrario dado $\tilde{z} \in G$. Consideremos una curva de Jordan K que conecte z_0 con $\tilde{z}$ y que corra enteramente en G . Si $\partial G \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$, entonces sea d la distancia entre K y ∂G ; si $\partial G \cap \mathbb{C} = \emptyset$, entonces sea $d = 1$. Escogemos sobre K puntos $\tilde{z}_0 = z_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n = \tilde{z}$ tales que $|\tilde{z}_i - \tilde{z}_{i+1}| < d$ para $i = 0, \dots, n-1$ (ver Figura 5.6).

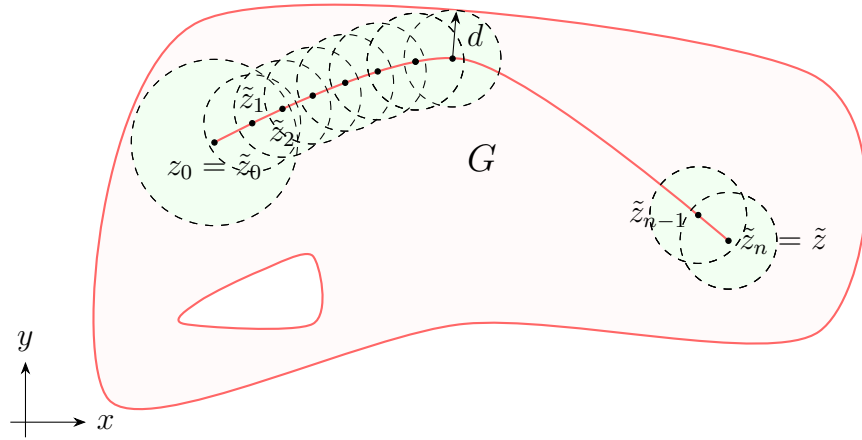


FIGURA 5.6. Ilustración de la demostración del Teorema 5.15.

3. a) Sobre $U_R(\tilde{z}_0)$ tenemos $f(z) = g(z)$.
- b) Como ambas funciones f y g pueden ser representadas sobre $U_d(\tilde{z}_1)$ por series de potencias en torno a $\tilde{z}_1$, éstas son idénticas sobre $U_R(\tilde{z}_0) \cap U_d(\tilde{z}_1)$ y (en virtud de $R \geq d$) $\tilde{z}_1 \in U_R(\tilde{z}_0) \cap U_d(\tilde{z}_1)$, entonces de acuerdo al teorema de la identidad para series de potencias (Teorema 5.12), $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U_d(\tilde{z}_1)$.
- c) Por inducción obtenemos $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U_d(\tilde{z}_{n-1})$ y como $\tilde{z} \in U_d(\tilde{z}_{n-1})$, finalmente $f(\tilde{z}) = g(\tilde{z})$.

■

Ejemplo 5.4. En general enunciado de este teorema ya no es válido si z_0 es un punto de frontera de G . Para ilustrar esto consideremos sobre $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ las funciones

$$f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}, \quad g(z) = 0$$

y $z_0 = 0 \notin G$. Para $z_n = 1/(\pi n)$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = 0$ y $f(z_n) = g(z_n) = 0$ y $f(z_n) = g(z_n) = 0$, pero las funciones f y g no son idénticas.

5.6. El teorema de Casorati-Weierstrass

Con respecto a las funciones enteras ya conocimos el famoso teorema de Liouville (Teorema 4.41) que constata que una función entera no constante no puede ser acotada. El siguiente teorema profundiza esta conclusión.

Definición 5.10. Una función entera que no es un polinomio se dice trascendente.

Teorema 5.16 (Teorema de Casorati-Weierstrass). *Afuera de cualquier disco una función trascendente f es arbitrariamente cercana a cualquier complejo $c \in \mathbb{C}$. Es decir, para cada $c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ existe $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > R$ y $|f(z) - c| < \varepsilon$.*

Demostración.

1. Sea $c \in \mathbb{C}$ dado. Supongamos que existieran $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ tales que $|f(z) - c| \geq \varepsilon$ para todo z con $|z| \geq R$.

2. Existe a lo más un número finito n de puntos diferentes a pares $z_1, \dots, z_n \in \overline{U_R(0)}$ tales que $f(z_\nu) = c$. Entonces, para cada $\nu \in \{1, \dots, n\}$ existe $k_\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(z) - c = (z - z_\nu)^{k_\nu} g_\nu(z),$$

donde g_ν es una función entera con $g_\nu(z_\nu) \neq 0$.

3. Consideremos luego la función entera

$$h(z) := \frac{f(z) - c}{(z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_n)^{k_n}}.$$

Como $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, también $H(z) := 1/h(z)$ es una función entera sin raíces, luego la expansión en serie de Taylor

$$H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} H_l z^l$$

converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Ahora tenemos para todo $|z| > R$ y una constante apropiada M

$$\begin{aligned} |H(z)| &\leq \frac{|z - z_1|^{k_1} \cdots |z - z_n|^{k_n}}{\varepsilon} = \frac{|z|^{k_1} \cdots |z|^{k_n}}{\varepsilon} \left| \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)^{k_1} \cdots \left(1 - \frac{z_n}{z}\right)^{k_n} \right| \\ &\leq \frac{M}{\varepsilon} |z|^N, \quad \text{donde } N = k_1 + \cdots + k_n. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos para $\rho > R$

$$|H_m| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{H(z)}{z^{m+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^{m+1}} \max_{|z|=\rho} |H(z)| \cdot 2\pi\rho \leq \frac{M}{\varepsilon} \rho^{N-m}.$$

Para $\rho \rightarrow \infty$ esto implica que $H_m = 0$ para $m > N$, es decir H es un polinomio. Como no posee raíces, incluso $H(z) = H_0 \neq 0$. Pero esto significa

$$f(z) = c + \frac{1}{H_0} (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_n)^{k_n},$$

lo que se contradice con la hipótesis de que f es trascendente. ■

5.7. Teorema del límite de Abel

En lo siguiente demostraremos una generalización del teorema del límite de Abel (ya conocido para series de potencias reales). Para tal efecto necesitamos el concepto del espacio angular de Stolz.

Definición 5.11. Se consideran tres puntos diferentes a pares z_1, z_2 y z_3 con $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ y $|z_3| = 1$. Entonces el interior del triángulo con los vértices z_1, z_2 y z_3 se llama espacio angular de Stolz $S(z_1, z_2, z_3)$ con respecto a z_3 (ver Figura 5.7 (a)).

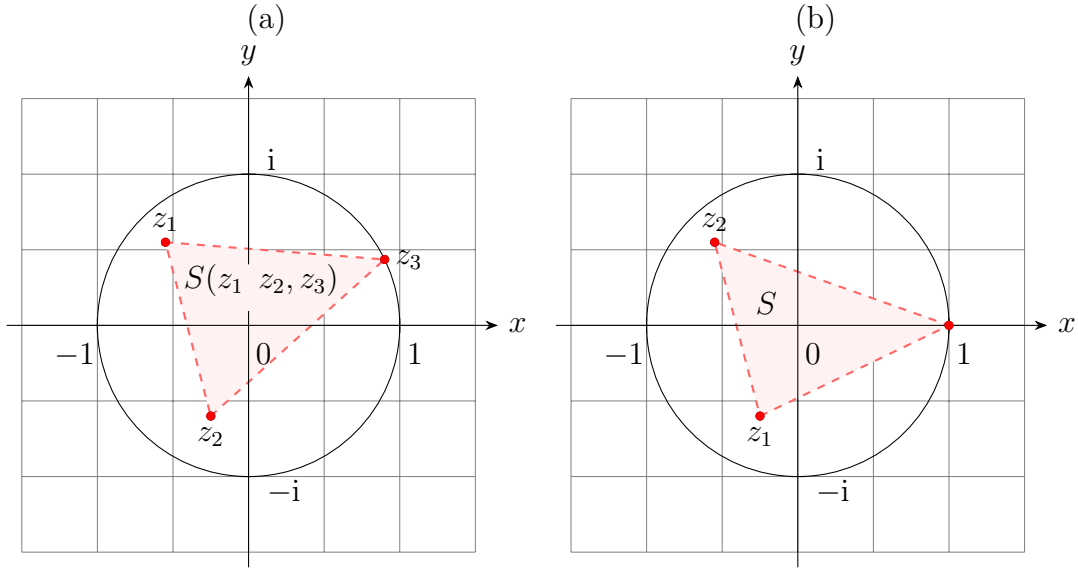


FIGURA 5.7. (a) Espacio angular de Stolz $S(z_1, z_2, z_3)$ con respecto a z_3 , (b) espacio angular de Stolz $S(z_1, z_2, 1)$.

Teorema 5.17. *Para cada espacio angular de Stolz $S = S(z_1, z_2, 1)$ (ver Figura 5.7 (b)) existe una constante $M = M(S)$ tal que*

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leq M \quad \text{para todo } z \in S.$$

Demostración. Tarea. ■

Teorema 5.18 (Teorema del límite de Abel). *Sea $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ una serie de potencias del radio de convergencia 1. Si la serie converge también para $z_3 = 1$, es decir si converge la serie de números $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$, entonces para cada espacio angular de Stolz $S = S(z_1, z_2, 1)$ se tiene*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in S}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}.$$

Demostración. Sean

$$s_n := \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}, \quad s_{-1} := 0, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: s.$$

1. A partir de

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^n (s_{\nu} - s_{\nu-1}) z^{\nu} = (1 - z) \sum_{\nu=0}^{n-1} s_{\nu} z^{\nu} + s_n z^n$$

obtenemos para $|z| < 1$ en virtud de $s_n z^n \rightarrow 0$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = (1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} z^{\nu}.$$

Además para $|z| < 1$ tenemos

$$s = s(1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}.$$

2. Para $\varepsilon > 0$ dado existe N tal que $|s_n - s| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Por otro lado, de acuerdo al Teorema 5.17 existe una constante M tal que $|1-z| \leq M(1-|z|)$ para todo $z \in S$. Entonces para todo $z \in S$ y $n > N$,

$$\begin{aligned} |f(z) - s| &= \left| (1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} z^{\nu} - s(1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \right| \\ &\leq |1-z| \sum_{\nu=0}^N |s_{\nu} - s| |z^{\nu}| + |1-z| \varepsilon \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |z^{\nu}| \\ &= |1-z| \sum_{\nu=0}^N |s_{\nu} - s| |z^{\nu}| + |1-z| \varepsilon |z|^{N+1} \frac{1}{1-|z|} \\ &\leq |1-z| \sum_{\nu=0}^N |s_{\nu} - s| |z^{\nu}| + \varepsilon M. \end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in S}} |f(z) - s| \leq \limsup_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in S}} \left(|1-z| \sum_{\nu=0}^N |s_{\nu} - s| |z^{\nu}| + \varepsilon M \right) = \varepsilon M.$$

Como $\varepsilon > 0$ ha sido elegido arbitrario llegamos al enunciado. ■

Comentario 5.1. Una sustitución simple demuestra que el enunciado del Teorema 5.18 es válido también para otros puntos z_3 con $|z_3| = 1$.

Ejemplo 5.5. La serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} z^{\nu} \tag{5.7}$$

posee el radio de convergencia 1 y para $z = x \in (0, 1)$ representa la función $\ln(1+x)$. De acuerdo al teorema de la identidad,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} z^{\nu} = \text{Log}_{-\pi}(1+z)$$

(ver (3.11) en la Sección 3.9.2). Ya sabemos (Tarea) que la serie (5.7) converge para todo $z = e^{i\varphi} \neq -1$. De acuerdo al Teorema 5.18 obtenemos para cada $S = S(z_1, z_2, z_3)$ con $z \neq -1$, es decir para $-\pi < \varphi < \pi$,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\varphi} \\ z \in S}} \text{Log}_{-\pi}(1+z) &= \text{Log}_{-\pi}(1+e^{i\varphi}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} e^{i\varphi\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \cos(\varphi\nu)}{\nu} + i \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \sin(\varphi\nu)}{\nu} \end{aligned}$$

Para $-\pi < \varphi < \pi$ tenemos

$$\begin{aligned} \text{Log}_{-\pi}(1+e^{i\varphi}) &= \ln|1+e^{i\varphi}| + i \arg_{-\pi}(1+e^{i\varphi}) \\ &= \ln \left| e^{\frac{i\varphi}{2}} \left(e^{-\frac{i\varphi}{2}} + e^{\frac{i\varphi}{2}} \right) \right| + i \arg_{-\pi} \left(e^{\frac{i\varphi}{2}} \left(e^{-\frac{i\varphi}{2}} + e^{\frac{i\varphi}{2}} \right) \right) \\ &= \ln \left| e^{\frac{i\varphi}{2}} \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right| + i \arg_{-\pi} \left(e^{\frac{i\varphi}{2}} \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \ln \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) + i \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

luego para $-\pi < \varphi < \pi$ obtenemos las relaciones interesantes

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \cos(\varphi\nu) = \ln \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right), \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \sin(\varphi\nu) = \frac{\varphi}{2}.$$

El teorema del límite de Abel (Teorema 5.18) no posee inversa, es decir la existencia del límite

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in S}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

no necesariamente implica la convergencia de $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$. Por ejemplo, consideremos la serie

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} z^{\nu},$$

donde siempre

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} z^{\nu} = f(1) = \frac{1}{2}$$

mientras que, por supuesto, la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}$ diverge.

No obstante, podemos demostrar que bajo una presuposición adicional sí podemos deducir la convergencia de $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$.

Teorema 5.19 (Teorema de Tauber). *Supongamos que la serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

posee el radio de convergencia 1 y que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu a_\nu = 0. \quad (5.8)$$

Si existe el límite $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, entonces la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ converge y

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Antes de demostrar el Teorema 5.19 mencionamos el siguiente resultado.

Teorema 5.20. Para una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea la sucesión $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n z_\nu.$$

En este caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta \in \mathbb{C}$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \zeta$.

Demostración. Tarea. ■

Demostración del Teorema 5.19. Sea

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =: s.$$

1. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces existe N_ε tal que para todo $n > N_\varepsilon$ las siguientes desigualdades son válidas simultáneamente:

$$|na_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^n \nu |a_\nu| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (5.10)$$

$$\left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - s \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (5.11)$$

donde la desigualdad (5.10) es una consecuencia del Teorema 5.20.

2. Para $0 < x < 1$ tenemos para $\nu \in \mathbb{N}$

$$1 - x^\nu = (1 - x) \sum_{\mu=0}^{\nu-1} x^\mu \leq \nu(1 - x),$$

por lo tanto

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \leq \frac{\nu}{n}.$$

3. Sea ahora

$$s_n := \sum_{\nu=0}^n a_\nu,$$

entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
 |s_n - s| &= \left| \sum_{\nu=0}^n a_\nu + f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - s \right| \\
 &\leq \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - s \right| + \left| \sum_{\nu=0}^n a_\nu - \sum_{\nu=0}^n a_\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \right|
 \end{aligned}$$

Con la ayuda de (5.9), (5.10) y (5.11) obtenemos ahora

$$\begin{aligned}
 |s_n - s| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_{\nu=0}^n a_\nu \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu\right) \right| + \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \right| \\
 &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^n \nu |a_\nu| + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu |a_\nu| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \\
 &= \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(n+1)} \frac{1}{1 - (1 - 1/n)} < \varepsilon,
 \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s.$$

■

Comentario 5.2. Las hipótesis del Teorema 5.19 pueden ser relajadas fuertemente. En lugar de (5.8) basta exigir que la sucesión $\{\nu a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ sea acotada (teorema de Hardy y Littlewood).

5.8. Ejercicios

Problema 5.1 (Tarea 7, curso 2023). Calcular los radios de convergencia de la expansión en serie de potencias de las siguientes funciones en torno al punto z_0 indicado en cada caso:

- | | | |
|---------------------------------------|--|---|
| a) $\frac{1}{z-1}, \quad z_0 = i;$ | c) $\frac{1}{\cosh z}, \quad z_0 = 0;$ | e) $z^{3/2}, \quad z_0 = 3;$ |
| b) $\frac{1}{\cos z}, \quad z_0 = 0;$ | d) $\operatorname{Log} z, \quad z_0 = 1 + 2i;$ | f) $\frac{z-i}{z^3-z}, \quad z_0 = 2i.$ |

Solución sugerida. No se piden los coeficientes de la expansión en serie de Taylor, solamente el radio de convergencia. Conviene aplicar el Teorema 5.13 y determinar para la función $f(z)$ en cada caso $R := \sup\{\rho > 0 \mid f(z) \text{ es regular en } U_\rho(z_0)\}$.

- a) La función $f(z) = 1/(z-1)$ es regular sobre $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, por lo tanto

$$R = |1 - z_0| = |1 - i| = \sqrt{2}.$$

- b) Se sabe que $\cos z = 0$ si y sólo si $z = \pi(k + 1/2)$, $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $f(z) = 1/\cos z$ es regular sobre $\mathbb{C} \setminus \{(k + 1/2)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Como

$$\inf_{z \in \{(k+1/2)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}} |z - z_0| = |0 - \pi/2| = \pi/2,$$

tenemos $R = \pi/2$.

- c) Se sabe que $\cosh z = 0$ si y sólo si $z = i\pi(k + 1/2)$, $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $f(z) = 1/\cosh z$ es regular sobre $\mathbb{C} \setminus \{(k + 1/2)i\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Como

$$\inf_{z \in \{(k+1/2)i\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}} |z - z_0| = |0 - i\pi/2| = \pi/2,$$

tenemos $R = \pi/2$.

- d) La función $z \mapsto \operatorname{Log} z$ es regular para $z \neq 0$, por lo tanto $R = |z - z_0| = \sqrt{5}$.
e) La función $z \mapsto z^{3/2}$ es regular para $z \neq 0$, por lo tanto $R = |z - z_0| = 3$.
f) Podemos escribir

$$f(z) := \frac{z - i}{z(z + 1)(z - 1)}.$$

Esta función posee polos en $z = -1$, $z = 0$ y $z = 1$ de las cuales el más cercano a $z_0 = 2i$ es 0 , por lo tanto $R = 2$.

Problema 5.2 (Tarea 7, curso 2023).

- a) Desarrollar $f(z) = \sin z$ en una serie de Taylor en torno a $z_0 = \pi/4$.
b) Determinar el radio de convergencia de esta serie.

Solución sugerida.

- a) Es sabido que para todo $k \in \mathbb{N}_0$,

$$f^{(4k)}(z) = \sin z, \quad f^{(4k+1)}(z) = \cos z, \quad f^{(4k+2)}(z) = -\sin z, \quad f^{(4k+3)}(z) = -\cos z,$$

luego

$$f^{(4k)}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f^{(4k+1)}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f^{(4k+2)}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f^{(4k+3)}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k!} (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^k. \end{aligned}$$

- b) Esta serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$ (luego $R = \infty$) porque la función $\sin z$ es entera.

Problema 5.3 (Tarea 7, curso 2023).

- a) Demostrar que la función definida por $f_1(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$ es regular sobre el disco $|z| < 1$, y determinar una función que representa todas las continuaciones analíticas de f_1 .

b) Demostrar que la función definida por

$$f_1(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt$$

es regular para todo z con $\operatorname{Re} z > 0$, y determinar una función que representa la continuación analítica de f_1 hacia el semiplano a izquierda $\operatorname{Re} z < 0$.

Solución sugerida.

a) De acuerdo al criterio del cociente, una serie $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ converge absolutamente si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L$ satisface $L < 1$. En el presente caso, $a_n = (-1)^n z^{n+1}$, luego $|a_{n+1}/a_n| = |z|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la serie

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1}$$

representa una función regular sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Consideremos, además, que

$$f_1(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{z}{1+z} =: f_2(z).$$

La función f_2 es regular en todos los puntos con la excepción de $z = -1$. Como $f_2(z) = f_1(z)$ en el interior de $|z| = 1$, la función f_2 representa todas las continuaciones analíticas de f_1 .

b) Utilizando integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^3 e^{-zt} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[t^3 \frac{e^{-zt}}{-z} - 3t^2 \frac{e^{-zt}}{z^2} + 6t \frac{e^{-zt}}{-z^3} - 6 \frac{e^{-zt}}{z^4} \right]_{t=0}^{t=M} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{z^4} - \frac{M^3 e^{-Mz}}{z} - \frac{3M^2 e^{-Mz}}{z^2} - \frac{6M e^{-Mz}}{z^3} - \frac{6M e^{-Mz}}{z^4} \right) = \frac{6}{z^4}, \end{aligned}$$

siempre que $\operatorname{Re} z > 0$. La función $f_2(z) := 6/z^4$ es regular en todos los puntos con la excepción de $z = 0$. Como $f_2(z) = f_1(z)$ para $\operatorname{Re} z > 0$, obtenemos que $f_2(z) = 6/z^4$ debe ser la continuación analítica solicitada.

Capítulo 6

Series de Laurent y singularidades aisladas

Las series de Laurent son una generalización importante de las series de potencias. Ellas juegan un rol importante para el estudio de singularidades aisladas de funciones.

6.1. Series de Laurent

Definición 6.1. Sea $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}} = \{a_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0} \cup \{a_{-\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ una serie de números complejos, entonces la serie

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} (z - z_0)^{-\nu}$$

se dice serie de Laurent alrededor de z_0 . La serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

se llama parte regular o parte analítica de la serie de Laurent, y la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} (z - z_0)^{-\nu}$$

se llama parte principal o parte singular de la serie de Laurent.

Comentario 6.1. La serie de Laurent no es definida en $z = z_0$ y $z = \infty$.

Definición 6.2. Sean $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, entonces el conjunto

$$R_{R_1, R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

se llama región anular definida por z_0 , R_1 y R_2 , ver Figura 6.1.

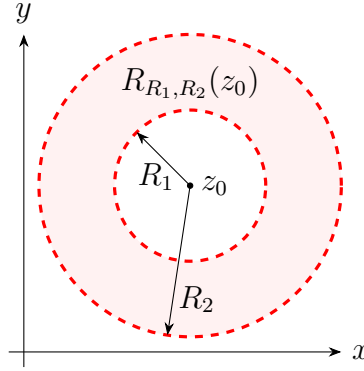
Demostraremos que en general una serie de Laurent converge sobre una región anular de este tipo.

Teorema 6.1. Una serie de Laurent

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

converge

1. o en ninguna parte,
2. o sobre un subconjunto de una circunferencia en torno a z_0

FIGURA 6.1. Región anular $R_{R_1, R_2}(z_0)$ (ver Definición 6.2).

3. o compactamente sobre una región anular y eventualmente en ciertos puntos de frontera de esta región anular.

Demostración. Sean

$$R_2 := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}, \quad R_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n}.$$

1. Si $R_2 = 0$, es decir la parte regular converge solamente en z_0 , entonces la serie de Laurent diverge en todas partes.
2. Si $R_1 = \infty$, entonces la parte principal diverge para todo $z \in \mathbb{C}$.
3. Supongamos que $0 < R_2 \leq \infty$ y $0 \leq R_1 < \infty$. Entonces la parte regular converge sobre

$$U_{R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R_2\}$$

y la parte principal converge sobre

$$U_{R_1}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R_1\}.$$

- a) Si $R_1 > R_2$, entonces no existe ningún z para el cual ambas series converjan simultáneamente.
- b) Si $R_1 = R_2$, entonces ambas series convergen a lo más en ciertos puntos de la circunferencia

$$K_{R_1}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R_1\}.$$

- c) Si $R_1 < R_2$, entonces ambas series convergen sobre $R_{R_1, R_2}(z_0)$. La parte regular converge compactamente sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R_2\}$ y la parte principal converge compactamente sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R_1\}$. Por lo tanto, sobre la intersección de ambos conjuntos, es decir sobre la región anular $R_{R_1, R_2}(z_0)$, ambas series convergen compactamente.

■

También para las series de Laurent tenemos que los coeficientes son definidos en forma única a través de la función representada.

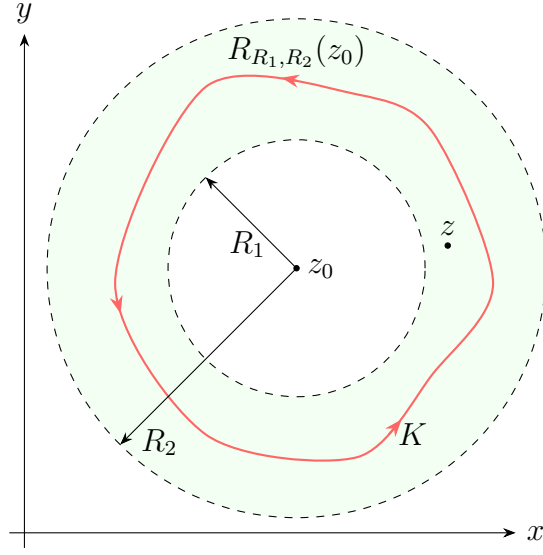


FIGURA 6.2. Ilustración del enunciado del Teorema 6.3.

Teorema 6.2. *Si las series de Laurent*

$$A(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad B(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

convergen sobre una región anular $R_{R_1, R_2}(z_0)$ y si allí $A(z) = B(z)$, entonces $a_\nu = b_\nu$ para todo $\nu \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Consideremos una curva cerrada, rectificable y orientada positivamente $K \subset R_{R_1, R_2}(z_0)$ cuyo interior contenga la circunferencia $K_{R_1}(z_0)$. Debido a la convergencia compacta sobre $R_{R_1, R_2}(z_0)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{A(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\zeta - z_0)^{n-k-1} \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_K (\zeta - z_0)^{n-k-1} d\zeta \right) = a_k. \end{aligned}$$

Insertando $B(\zeta) = A(\zeta)$ obtenemos análogamente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{A(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = b_k,$$

luego $a_k = b_k$ para $k \in \mathbb{Z}$. ■

6.2. Expansión de Laurent de una función regular

Análogamente a la expansión de una función en una serie de potencias consideraremos ahora la expansión de una función en una serie de Laurent.

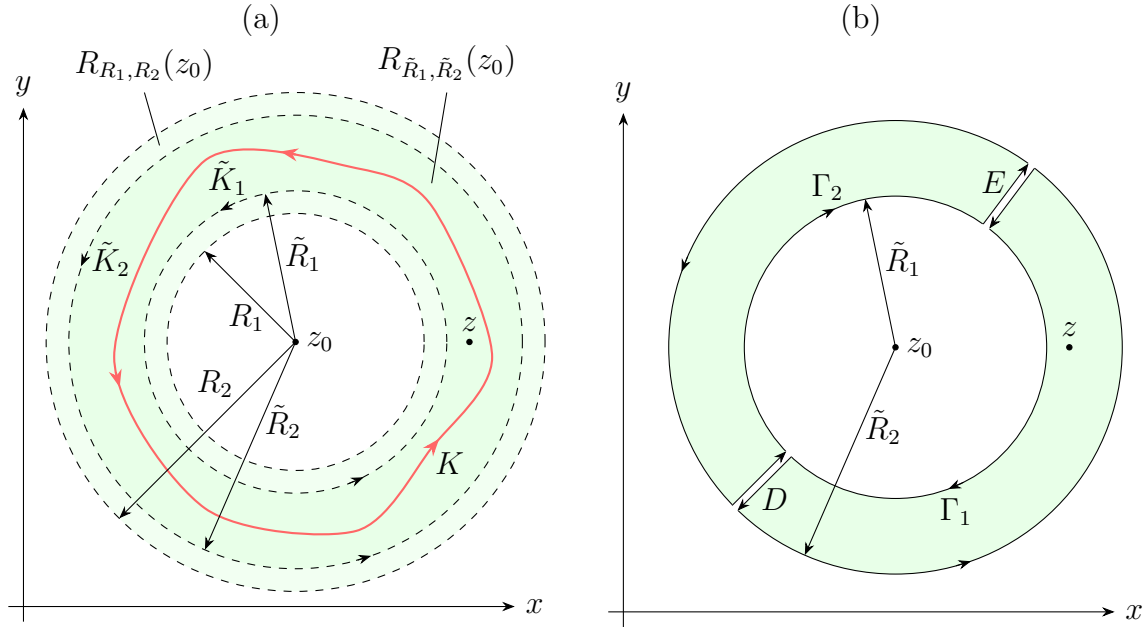


FIGURA 6.3. Ilustración de la demostración del Teorema 6.3: (a) región anular más pequeña $R_{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2}(z_0)$ y circunferencias $\tilde{K}_i$ ($i = 1, 2$), (b) curvas de Jordan cerradas Γ_1 y Γ_2 .

Teorema 6.3. *Sea la función f regular sobre la región anular $R_{R_1, R_2}(z_0)$ (ver Figura 6.2). Entonces:*

1. *La función f puede ser expandida en una serie de Laurent:*

$$f(z) \underset{R_{R_1, R_2}(z_0)}{\equiv} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2. *Si K es una curva de Jordan cerrada, orientada positivamente y rectificable que corre enteramente en $R_{R_1, R_2}(z_0)$ y que contiene z_0 en su interior, entonces*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración.

1. Como K posee una distancia positiva de $\partial R_{R_1, R_2}(z_0)$, existen números $\tilde{R}_1$ y $\tilde{R}_2$ con $R_1 < \tilde{R}_1 < \tilde{R}_2 < R_2$ tales que K corre enteramente en la región anular más pequeña $R_{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2}(z_0)$ (ver Figura 6.3 (a)). Denotaremos ahora las circunferencias $K_{\tilde{R}_i}(z_0)$ por $\tilde{K}_i$ ($i = 1, 2$).
2. Sea ahora $z \in R_{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2}(z_0)$ un punto fijo. Cortamos ahora el anillo $R_{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2}(z_0)$ a lo largo de dos segmentos rectos D y E que no contienen z . Esto genera dos curvas de Jordan cerradas, orientadas positivamente y rectificables Γ_1 y Γ_2 compuestas por los

segmentos rectos D y E y los arcos parciales de $\tilde{K}_1$ y $\tilde{K}_2$ correspondientes, y donde se supone que z pertenece a la región interior de Γ_1 (ver Figura 6.3 (b)). De acuerdo a la fórmula integral de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

luego considerando que los segmentos D y E son recorridos una vez en sentido positivo y otra vez en sentido negativo, obtenemos sumando las dos integrales

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = I_2(z) - I_1(z),$$

donde

$$I_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad I_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

3. a) Para $\zeta \in \tilde{K}_2$ tenemos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n,$$

donde la última serie converge uniformemente para z fijo para $\zeta \in \tilde{K}_2$ debido a

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\tilde{R}_2} < 1.$$

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} I_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

En virtud del Teorema 4.27 tenemos

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

b) Para $\zeta \in \tilde{K}_1$ tenemos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n,$$

donde la última serie converge uniformemente para z fijo para $\zeta \in \tilde{K}_1$ debido a

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{\tilde{R}_1}{|z - z_0|} < 1.$$

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} -I_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_1} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} d\zeta \right) (z - z_0)^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}. \end{aligned}$$

En virtud del Teorema 4.27 tenemos

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{K}_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

4. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge compactamente sobre el disco $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \tilde{R}_2\}$, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ converge compactamente sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > \tilde{R}_1\}$. Como $\tilde{R}_1$ y $\tilde{R}_2$ pueden ser elegidos arbitrariamente cercanos a R_1 y R_2 , respectivamente, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge compactamente sobre $R_{R_1, R_2}(z_0)$. Esto concluye la demostración del teorema. ■

6.3. Singularidades aisladas

En lo siguiente consideramos funciones definidas sobre un conjunto

$$U_R^0(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\} = U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$$

denominado *vecindad perforada* (o *vecindad reducida*) de un punto z_0 , donde no se sabe nada sobre el valor de f en z_0 . Entonces con respecto al dominio de f el punto z_0 es un punto singular.

Definición 6.3. Si la función f es regular sobre $U_R^0(z_0)$, entonces z_0 se dice singularidad aislada de f .

Sea la función f regular sobre $U_R^0(z_0)$, entonces de acuerdo al Teorema 6.3 esta función puede ser expandida en una serie de Laurent compactamente convergente sobre $U_R^0(z_0)$. Deseamos ahora analizar las posibles singularidades aisladas de f en z_0 mediante la parte principal de la serie de Laurent.

Definición 6.4. Sea la función f regular sobre $U_R^0(z_0)$, y sea

$$h(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} (z - z_0)^{-\nu}$$

la parte principal de la expansión de Laurent de f alrededor de z_0 . En este caso el punto z_0 se dice

1. singularidad evitable si $a_{-\nu} = 0$ para $\nu \in \mathbb{N}$,

2. polo del orden $p \in \mathbb{N}$ si $h(z)$ es de la forma

$$h(z) = \sum_{\nu=1}^p a_{-\nu} (z - z_0)^{-\nu} \quad \text{con } a_{-p} \neq 0,$$

3. singularidad esencial si $h(z)$ contiene un número infinito de sumandos.

De acuerdo a lo anterior, una singularidad aislada z_0 de una función f es definida por la forma de la parte principal de la expansión en serie de Laurent de f en torno a z_0 .

Ejemplo 6.1. Sea la función f para $z \neq 0$ dada por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

Para la expansión de Laurent en torno a $z_0 = 0$ tenemos

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{2\nu}}{(2\nu+1)!},$$

es decir la función f posee una singularidad evitable en $z_0 = 0$. Definiendo $f(0) = 1$ podemos extender el dominio de f en tal forma que f es regular sobre $\mathbb{C}$.

Ejemplo 6.2. La función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

es regular para $z \neq \pm i$. Para la expansión en serie de Laurent en torno a $z_0 = i$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{2}(z-i)} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{\nu} (z-i)^{\nu} \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{\nu+1} (z-i)^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Aquí

$$h(z) = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i},$$

por lo tanto la función f posee en $z_0 = i$ un polo del orden 1. Análogamente se demuestra que la función f posee también en $z_0 = -i$ un polo del orden 1.

Ejemplo 6.3. La función $f(z) = e^{1/z}$ es regular para $z \neq 0$. Como

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu},$$

en este caso la parte principal $h(z)$ posee un número infinito de sumandos diferentes de cero, por lo tanto f posee una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

A continuación caracterizaremos los diferentes tipos de singularidades mediante el comportamiento de la función f en una vecindad de z_0 .

6.4. Singularidades evitables

Empezamos por el caso más simple de una singularidad evitable. En este caso la función f posee sobre $U_R^0(z_0)$ una expansión en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu},$$

es decir si definimos $f(z_0) = a_0$, la función f será regular también en z_0 , por lo tanto hemos “evitado” la singularidad en z_0 .

El siguiente teorema proporciona condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una función f posee una singularidad evitable en z_0 .

Teorema 6.4 (Teorema de la singularidad evitable de Riemann). *Sea z_0 una singularidad aislada de f . El punto z_0 es una singularidad evitable si y sólo si existe una vecindad perforada $U_r^0(z_0)$ de z_0 tal que la función f es acotada sobre $U_r^0(z_0)$*

Demostración. De acuerdo a la definición de una singularidad aislada y el Teorema 6.3 existe un $R > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{para todo } z \in U_R^0(z_0).$$

1. Si z_0 es una singularidad evitable, incluso tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{para todo } z \in U_R^0(z_0),$$

lo que directamente implica el enunciado para toda vecindad perforada $U_r^0(z_0)$ con $0 < r < R$.

2. Supongamos que $|f(z)| \leq M$ con una constante M sobre $U_r^0(z_0)$ con $0 < r < R$. Entonces para cada ρ con $0 < \rho < r$ y todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\rho}(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Si $n < 0$, entonces obtenemos considerando $\rho \rightarrow 0$ que necesariamente $a_n = 0$. ■

6.5. Polos

Consideremos ahora el caso de que la función f posee en z_0 un polo del orden p . A partir de la forma de la serie de Laurent obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.5. *La función f posee en z_0 un polo del orden p si y sólo si existe una función g regular en z_0 con $g(z_0) \neq 0$ tal que sobre una vecindad de z_0 ,*

$$f(z) = (z - z_0)^{-p}g(z) \quad (z \neq z_0).$$

Demostración. Tarea. ■

El siguiente teorema establece la conexión entre polos y raíces.

Teorema 6.6. *La función f posee en $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo del orden p si y sólo si la función $1/f$ posee en z_0 una raíz del orden p .*

Demostración.

1. Si f posee en z_0 un polo del orden p , entonces de acuerdo al Teorema 6.5 existe una función g regular en z_0 con $g(z_0) \neq 0$ tal que sobre una vecindad de z_0 ,

$$f(z) = (z - z_0)^{-p}g(z) \quad (z \neq z_0).$$

Esto implica que

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^p \frac{1}{g(z)},$$

por lo tanto de acuerdo al Teorema 5.14, la función $1/f$ posee en z_0 una raíz del orden p .

2. Supongamos que la función $1/f$ posee en z_0 una raíz del orden p . Entonces existe una función h regular en z_0 con $h(z_0) \neq 0$ tal que sobre una vecindad de z_0 ,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^p h(z).$$

Entonces para $z \neq z_0$,

$$f(z) = (z - z_0)^{-p} \frac{1}{h(z)},$$

por lo tanto f posee en z_0 un polo del orden p . ■

Mediante este resultado llegamos a la caracterización decisiva de un polo.

Teorema 6.7. *Sea z_0 una singularidad aislada de f . Entonces z_0 es un polo si y sólo si*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \quad (6.1)$$

Demostración.

1. Si f posee un polo en z_0 , entonces (6.1) sigue a partir del Teorema 6.5.
2. Sea (6.1) válido. Entonces f es regular sobre una vecindad perforada $U_r^0(z_0)$ de z_0 , y allí $f(z) \neq 0$. La función

$$g(z) := \begin{cases} 1/f(z) & \text{si } z \in U_r^0(z_0), \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

es regular en z_0 (de acuerdo al Teorema 6.4) posee allí una raíz, por ejemplo del orden p . A partir del Teorema 6.6 la función f posee en z_0 un polo del orden p . ■

Para las aplicaciones el siguiente teorema es útil. Informa la “rapidez” con la cual $f(z)$ tiende a ∞ cuando z aproxima un polo.

Teorema 6.8. *Si f posee en z_0 un polo del orden p , entonces existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que*

$$|f(z)| \geq \frac{M}{|z - z_0|^p} \quad \text{para todo } z \in U_r^0(z_0).$$

Demostración. Sabemos que existe una función g regular en z_0 tal que sobre una región perforada de z_0 ,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}, \quad (6.2)$$

donde $g(z_0) \neq 0$. Elegimos $r > 0$ en tal forma que sobre $U_r(z_0)$ se tiene

$$|g(z)| \geq \frac{|g(z_0)|}{2} = M.$$

El enunciado sigue en virtud de (6.2). ■

6.6. Singularidades esenciales

Una función f posee en z_0 una singularidad evitable si y sólo si $|f(z)|$ es acotado cuando $z \rightarrow z_0$. Ella posee un polo en z_0 si y sólo si $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$. Si f posee una singularidad esencial en z_0 , entonces ni f puede ser acotada en la vecindad de z_0 , ni $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$. En este caso obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.9 (Teorema de Casorati-Weierstrass). *Sea z_0 una singularidad aislada de la función f . Entonces z_0 es una singularidad esencial si y sólo si para cada $w \in \tilde{\mathbb{C}}$ existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$$

(es decir, en cualquier vecindad de z_0 la función f es arbitrariamente cercana a cualquier complejo $w \in \tilde{\mathbb{C}}$).

Demostración.

1. Si para cada $w \in \tilde{\mathbb{C}}$ existe una sucesión de este tipo, entonces en z_0 la función f ni puede poseer una singularidad evitable (de acuerdo al Teorema 6.4), ni puede poseer un polo (de acuerdo al Teorema 6.6). Concluimos que z_0 debe ser una singularidad esencial de f .
2. Sea z_0 una singularidad esencial de f .
 - a) Como z_0 no puede ser una singularidad evitable, $|f(z)|$ no es acotado cuando $z \rightarrow z_0$, es decir existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n \rightarrow z_0$ y $f(z_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.
 - b) Supongamos que para un $w \in \mathbb{C}$ no existiera una sucesión con la propiedad mencionada en el teorema. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $r > 0$ tales que $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ para todo z con $0 < |z - z_0| < r$. Consideremos la función g definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

Esta función es regular en $0 < |z - z_0| < r$ y

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

De acuerdo al Teorema 6.4 z_0 es una singularidad evitable de g . Definiendo el valor apropiado $g(z_0)$ de g en z_0 la función g se convierte en una función regular sobre todo el disco $|z - z_0| < r$.

Si $g(z_0) \neq 0$, entonces en virtud de

$$f(z) - w = \frac{1}{g(z)} \quad (6.3)$$

la función f posee una singularidad evitable en z_0 , pero esto no es posible según hipótesis. Si g posee una raíz en z_0 (por ejemplo del orden n), entonces la función (6.3) posee en z_0 un polo del orden n ; esto tampoco es posible según hipótesis. Con estas contradicciones llegamos al enunciado. ■

El enunciado del teorema de Casorati-Weierstrass puede ser fortalecido sustancialmente (sin demostración; ver por ejemplo [4]).

Teorema 6.10 (Gran teorema de Picard). *Sea z_0 una singularidad esencial de f . Entonces para cada $\varepsilon > 0$ la función f asume en $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ cada valor $w \in \mathbb{C}$ con lo más una excepción.*

Ejemplo 6.4. *Verificaremos el resultado demostrado en el Teorema 6.9 para la función $f(z) = e^{1/z}$, la cual posee una singularidad esencial en $z_0 = 0$.*

1. *Para la sucesión $z_n = 1/n$ tenemos $z_n \rightarrow 0$ y $f(z_n) = e^n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.*
2. *Para la sucesión $z_n = -1/n$ tenemos $z_n \rightarrow 0$ y $f(z_n) = e^{-n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.*
3. *Sea $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Sea $w = re^{i\varphi}$ con $r > 0$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Consideremos la sucesión*

$$z_n = \frac{1}{\ln r + i(\varphi + 2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces $z_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$f(z_n) = e^{\ln r + i(\varphi + 2n\pi)} = re^{i(\varphi + 2n\pi)} = re^{i\varphi} = w.$$

Con respecto al Teorema 6.10 este ejemplo ilustra que para cada $\varepsilon > 0$ la función asume en $0 < |z| < \varepsilon$ cada calor $w \in \mathbb{C}$ un número infinito de veces con la excepción del valor $w = 0$.

6.7. Ejercicios

Problema 6.1. Demostrar el Teorema 6.5.

Problema 6.2. Sea

$$f(z) = \exp\left(\frac{z}{z-2}\right).$$

- a) Expandir f en serie de Laurent alrededor de $z_0 = 2$.
- b) ¿Donde converge esta serie?

- c) Clasificar las singularidades de $f(z)$.

Problema 6.3. Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Expandir f en serie de Laurent alrededor de $z_0 = 0$ en las regiones

- a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$, c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$.

Problema 6.4 (Tarea 7, curso 2023).

- a) Hallar la serie de Laurent en torno a z_0 y el residuo en z_0 (ver Comentario 7.2 del Capítulo 7) de la función

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)^2}, \quad z_0 = 1.$$

- b) Proceder como en a) para $f(z) = (\sin z)/z^3$ y $z_0 = 0$.
 c) Hallar los primeros cinco términos de la serie de Laurent de $g(z) = \cot z = \cos z / \sin z$ en torno a $z_0 = 0$.

Solución sugerida.

- a) Expandiendo $z^3 + z^2$ en potencias de $z-1$ obtenemos

$$z^3 + z^2 = 2 + 5(z-1) + 4(z-1)^2 + (z-1)^3,$$

luego dividiendo por $(z-1)^2$ obtenemos la representación de f como serie de Laurent:

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{5}{z-1} + 4 + (z-1).$$

De acuerdo a lo anterior, el coeficiente de $(z-1)^{-1}$ es 5, es decir $\text{Res}(f, 1) = 5$.

- b) Utilizando la expansión de $\sin z$ en torno a $z_0 = 0$ y dividiendo por z^3 obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-2}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-2}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, el coeficiente de z^{-1} es 0, es decir $\text{Res}(f, 1) = 0$.

- c) La función $\sin z$ tiene un polo de primer orden en $z_0 = 0$, y $\cos 0 = 1$, por lo tanto g posee un polo de orden 1 en el origen. Esto significa que la serie de Laurent de g es de la forma

$$g(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots.$$

Para hallar los coeficientes escribimos $(\sin z)g(z) = \cos z$, multiplicamos las series resultantes, juntamos potencias de z iguales, e igualamos coeficientes. Esto entrega

$$(\sin z)g(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right) \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \right) \\
&= a_{-1} + a_0 z + \left(a_1 - \frac{a_{-1}}{3!} \right) z^2 + \left(a_2 - \frac{a_0}{3!} \right) z^3 + \left(a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!} \right) z^4 + \cdots \\
&\stackrel{!}{=} \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots .
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes de potencias iguales de z obtenemos las ecuaciones

$$a_{-1} = 1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 - \frac{a_{-1}}{3!} = -\frac{1}{2}, \quad a_2 - \frac{a_0}{3!} = 0, \quad a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!} = \frac{1}{4!}$$

con la solución

$$a_{-1} = 1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{45},$$

luego

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots .$$

Problema 6.5 (Evaluación 2, curso 2023).

- a) Hallar la serie de Laurent en torno a z_0 y el residuo en z_0 (ver Comentario 7.2 del Capítulo 7) de la función

$$f(z) = \frac{z^3 - z^2}{(z+1)^2}, \quad z_0 = -1.$$

- b) Proceder como en a) para $f(z) = (\cos z)/z^5$ y $z_0 = 0$.
c) Para cada una de las funciones dadas a continuación y puntos z_0 indicados, determinar la serie de Laurent, el tipo de singularidad en z_0 , y la región donde la serie converge.

(i) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \quad z_0 = 1;$

(iii) $\frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}, \quad z_0 = 0;$

(ii) $(z-3) \operatorname{sen} \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = -2;$

(iv) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, \quad z_0 = 0.$

Solución sugerida.

- a) Podemos expresar $z^3 - z^2$ en potencias de $z+1$ como

$$\begin{aligned}
z^3 - z^2 &= (z+1)^3 - (3z^2 + 3z + 1) - z^2 \\
&= (z+1)^3 - 4z^2 - 3z - 1 \\
&= (z+1)^3 - 4(z+1)^2 + 8z + 4 - 3z - 1 \\
&= (z+1)^3 - 4(z+1)^2 + 5z + 3 \\
&= (z+1)^3 - 4(z+1)^2 + 5(z+1) - 5 + 3 \\
&= (z+1)^3 - 4(z+1)^2 + 5(z+1) - 2.
\end{aligned}$$

Dividiendo esto por $(z+1)^2$ obtenemos la serie de Laurent para f :

$$f(z) = \frac{-2}{(z+1)^2} + \frac{5}{z+1} - 4 + (z+1).$$

El coeficiente de $(z+1)^{-1}$ es $a_{-1} = \text{Res}(f, -1) = 5$.

b) Tomando en cuenta que

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{8!} - \dots$$

obtenemos la serie de Laurent

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n)!} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z} - \frac{z}{720} + \frac{z^3}{8!} - \dots$$

y el residuo en $z_0 = 0$ es $a_{-1} = \text{Res}(f, 0) = 1/24$.

c)

(i) Conviene definir $z-1=:u$, luego $z=1+u$ y

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} e^{2u} = \frac{e^2}{u^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2u)^k}{k!} \\ &= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}u + \dots \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \dots, \end{aligned}$$

luego $z_0 = 1$ es un polo del orden 3 (o polo triple). Como la función f es regular sobre $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, la serie de Laurent converge para todo $z \neq z_0 = 1$.

(ii) Conviene definir $z+2=:u$, luego $z=u-2$ y

$$\begin{aligned} (z-3) \operatorname{sen} \frac{1}{z+2} &= (u-5) \operatorname{sen} \frac{1}{u} = (u-5) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! u^{2k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{u^{2k}} - \frac{5}{u^{2k+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!u^2} + \frac{5}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^4} - \frac{5}{5!u^5} - \dots \\ &= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{3!(z+2)^3} + \frac{1}{5!(z+2)^4} - \frac{5}{5!(z+2)^5} - \dots. \end{aligned}$$

Como la parte principal de la serie de Laurent tiene un número infinito de sumandos se trata de una singularidad esencial. Como la función f es regular sobre $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, la serie de Laurent converge para todo $z \neq z_0 = -2$.

(iii) Aquí obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left(z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = -\frac{1}{z^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+3}}{(2k+3)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+3)!} = \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+3)!}.\end{aligned}$$

La serie de Laurent posee, entonces, una parte principal nula. Por lo tanto, $z_0 = 0$ es una singularidad evitable, y la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$ (ya que si definimos $f(0) = 1/6$, entonces la función f será regular sobre $\mathbb{C}$).

(iv) Conviene el planteo con coeficientes A y B por determinar

$$\begin{aligned}\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} &= \frac{A(z+2) + B(z+1)}{(z+1)(z+2)} = \frac{z(A+B) + 2A+B}{(z+1)(z+2)} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{z}{(z+1)(z+2)},\end{aligned}$$

el cual entrega $A = -1$, $B = 2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}f(z) &= -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} = -\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{1-(-z/2)} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) z^k.\end{aligned}$$

Efectivamente, en $z = 0$ se presenta una singularidad evitable. La serie de Laurent converge para $|z| < 1$, lo que corresponde a la distancia entre $z_0 = 0$ y el polo de f en $z_0 = -1$.

Problema 6.6 (Evaluación de recuperación, curso 2023). Hallar la serie de Laurent en torno a z_0 y el residuo en z_0 (ver Comentario 7.2 del Capítulo 7) de la función

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-5z+4}$$

sobre la región anular $R_{1,4} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 4\}$. Aviso: escribir $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, donde f_1 es regular para $|z| < 4$ y f_2 es regular para $|z| > 1$.

Solución sugerida. La función f posee dos polos simples, uno en $z_1 = 1$ y el otro en $z_2 = 4$. Aplicando una descomposición en fracciones parciales

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-4}$$

obtenemos $A(z-4) + B(z-1) = z+2$, es decir $A = 2$ y $B = 1$, o bien

$$f_1(z) = \frac{2}{z-1}, \quad f_2(z) = -\frac{1}{z-4}.$$

Ahora

$$f_1(z) = -\frac{2}{1-z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k.$$

Obviamente, las series para f_1 y f_2 convergen para $|z| < 4$ y $|z| > 1$, respectivamente. Concluimos que la serie de Laurent es

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \text{donde} \quad a_k = \begin{cases} (-1/2)4^{-k} & \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, \\ -1 & \text{para } k = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

Capítulo 7

El teorema de los residuos y sus aplicaciones

7.1. El teorema de los residuos

Sea K una curva de Jordan rectificable y cerrada y sea f una función regular sobre $K \cup I(K)$. Entonces de acuerdo al teorema integral de Cauchy (Teorema 4.24),

$$\int_K f(z) dz = 0.$$

En lo siguiente estudiaremos el problema de calcular esta integral también para el caso de que la función f posee un número finito de singularidades aisladas en el interior de K . Para tal efecto el concepto del residuo de una función es de suma importancia.

Definición 7.1. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y para un $r > 0$ sea f regular sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| \leq r\}$. Entonces la cantidad

$$\text{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(z) dz$$

se dice residuo de f en el punto z_0 .

Comentario 7.1. De acuerdo al Teorema 4.27, $\text{Res}(f, z_0)$ es evidentemente independiente de r siempre que f sea regular sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| \leq r\}$.

Comentario 7.2. De acuerdo al Teorema 6.3, $\text{Res}(f, z_0)$ es el coeficiente a_{-1} de la expansión en serie de Laurent de f en torno a z_0 .

Ejemplo 7.1. Consideremos $f(z) = 1/(1+z^2)$. De acuerdo al Ejemplo 6.2, $\text{Res}(f, i) = -i/2$.

Ejemplo 7.2. Consideremos $f(z) = e^{1/z}$. De acuerdo al Ejemplo 6.3, $\text{Res}(f, 0) = 1$.

Supongamos que la función f posee solamente singularidades aisladas en el interior de K . Demostraremos ahora que en este caso, el valor de la integral

$$\int_K f(z) dz$$

depende solamente de los residuos de f en estos puntos.

Teorema 7.1 (Teorema de los residuos). Sea K una curva de Jordan rectificable, cerrada, y orientada positivamente, y sea f regular sobre $\overline{I(K)}$ con la excepción de las singularidades aisladas $z_1, \dots, z_n$, donde se supone que $z_1, \dots, z_n \in I(K)$ (ver Figura 7.1). Entonces

$$\int_K f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(f, z_\nu).$$

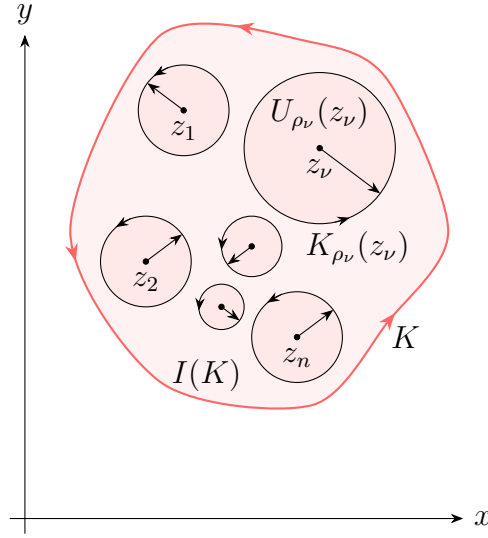


FIGURA 7.1. Ilustración del teorema de los residuos (Teorema 7.1).

Demostración. Consideremos para cada punto z_ν ($\nu = 1, \dots, n$) una vecindad $U_{\rho_\nu}(z_\nu)$ donde los radios ρ_ν sean suficientemente pequeños para asegurar que $\overline{U_{\rho_\nu}(z_\nu)} \subset I(K)$ y además,

$$\overline{U_{\rho_\nu}(z_\nu)} \cap \overline{U_{\rho_\mu}(z_\mu)} = \emptyset \quad \text{para } \nu \neq \mu.$$

Entonces de acuerdo al Teorema 4.28 y en virtud de la Definición 7.1,

$$\int_K f(z) dz = \sum_{\nu=1}^n \int_{K_{\rho_\nu}(z_\nu)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(f, z_\nu),$$

lo que ya concluye la demostración del teorema. ■

Para la aplicación del Teorema 7.1 basta determinar los residuos de f en las singularidades aisladas. Esto siempre es posible generando las series de Laurent correspondientes. No obstante, en dos casos importantes el residuo puede ser determinado en forma más simple.

Teorema 7.2. Sean las funciones f y g regulares sobre una vecindad de $z_0 \in \mathbb{C}$, y sea $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, y $g'(z_0) \neq 0$. En este caso,

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \left(\frac{f(z)}{g'(z)}\right)_{z=z_0} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Demostración. De acuerdo al Teorema 6.6, la función f/g posee en z_0 un polo del orden 1, por lo tanto sobre una vecindad de z_0 ,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \quad (z \neq z_0).$$

Esto implica que

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Por otro lado, en virtud de $g(z_0) = 0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

■

Ejemplo 7.3. Sean $f(z) = e^z$ y $g(z) = \sin z$. Entonces $\sin z$ posee en $z_0 = 0$ una raíz del orden 1, y de acuerdo al Teorema 7.2,

$$\text{Res} \left(\frac{e^z}{\sin z}, 0 \right) = \left(\frac{e^z}{\cos z} \right)_{z=0} = 1.$$

A parte del Teorema 7.2 el siguiente teorema es muy útil para la computación de residuos.

Teorema 7.3. Si la función f posee en z_0 un polo del orden p , entonces

$$\text{Res}(f, z_0) = \left(\frac{((z - z_0)^p f(z))^{(p-1)}}{(p-1)!} \right)_{z=z_0}.$$

Demostración. Sobre una vecindad de z_0 tenemos

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu},$$

luego la función $g(z) := (z - z_0)^p f(z)$ satisface

$$g(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{p-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{p+\nu}.$$

Diferenciando esta expresión $p-1$ veces obtenemos

$$g^{(p-1)}(z) = a_{-1}(p-1)! + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(p+\nu)(p-1+\nu) \cdots (2+\nu)(z - z_0)^{\nu+1},$$

luego para $z = z_0$

$$g^{(p-1)}(z_0) = a_{-1}(p-1)! = (p-1)! \text{Res}(f, z_0),$$

lo que concluye la demostración. ■

Ejemplo 7.4. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{(z + 1)^3},$$

la cual evidentemente posee en $z_0 = -1$ un polo del orden 3. Si definimos

$$g(z) = (z + 1)^3 f(z) = z^4 + 1,$$

entonces obtenemos $g'(z) = 4z^3$, $g''(z) = 12z^2$, y a partir del Teorema 7.3,

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{g''(-1)}{2!} = 6.$$

En lo siguiente veremos que el cálculo de los residuos nos permite la computación de integrales reales.

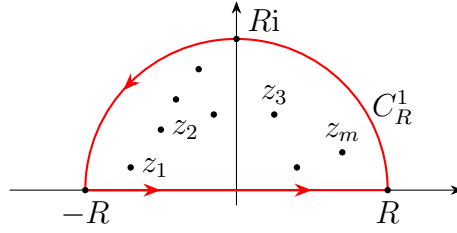


FIGURA 7.2. Ilustración del Teorema 7.4.

7.2. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Empezamos por el estudio de integrales impropias, donde el integrando es una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ (es decir, P y Q son polinomios).

Teorema 7.4. *Se considera la función racional $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde*

$$Q(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \quad (7.1)$$

(Q no posee ninguna raíz real) y el grado de Q es por lo menos en 2 mayor que el grado de P . Si $z_1, \dots, z_m$ son las raíces de Q en el semiplano superior (ver Figura 7.2), entonces

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^m \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, z_{\nu} \right).$$

Demostración. Sean

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^p a_{\nu} z^{\nu}, \quad a_p \neq 0; \quad Q(z) = \sum_{\nu=0}^q b_{\nu} z^{\nu}, \quad b_q \neq 0.$$

1. De acuerdo al Teorema 4.42 existe $R_0 \geq 1$ tal que para todo z con $|z| \geq R_0$ y una constante apropiada M se tiene

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p}{b_0 + b_1 z + \dots + b_q z^q} \right| \leq \frac{\frac{3}{2} |a_p| |z|^p}{\frac{1}{2} |b_q| |z|^q} \leq \frac{M}{|z|^2}. \quad (7.2)$$

En particular, esta desigualdad es válida para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \geq R_0$. La existencia de las integrales

$$\int_{-\infty}^{-R_0} \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_{-R_0}^{R_0} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad \int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

implica, además, la existencia de la integral I .

2. Sea ahora $R > R_0$ suficientemente grande para que el disco $U_R(0)$ contenga todas las raíces de $Q(z)$ (ver Figura 7.2). Sea, además, C_R la curva orientada positivamente formada por $C_R^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \text{Im } z > 0\}$ y el segmento real $[-R, R]$. De acuerdo al Teorema 7.1,

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^m \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, z_{\nu} \right).$$

A partir de (7.2),

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{R^2} \quad \text{para todo } z \in C_R^1,$$

luego

$$\left| \int_{C_R^1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot R\pi = \frac{M\pi}{R},$$

lo que implica que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{P(z)}{Q(z)} dz &= \int_{-R, R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz - \int_{C_R^1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\nu=1}^m \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, z_{\nu} \right) - \int_{C_R^1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz. \end{aligned}$$

La existencia de I implica, entonces, que

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^m \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, z_{\nu} \right).$$

■

Comentario 7.3. La hipótesis (7.1) implica que el grado de Q debe ser un número par. Si este fuera impar, tendríamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x) = -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x) = \infty,$$

es decir en ambos casos Q tendría una raíz real.

Ejemplo 7.5. Queremos calcular

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Para tal efecto notamos que la función

$$Q(z) = 1 + z^4 = (z + i\sqrt{i})(z - i\sqrt{i})(z + \sqrt{i})(z - \sqrt{i})$$

posee en el semiplano superior las raíces simples

$$z_1 = \sqrt{i} = e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = i\sqrt{i} = ie^{\pi i/4} = i \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

De acuerdo al Teorema 7.2 obtenemos para los residuos de

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1+z^4}$$

en estos puntos los valores

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_1\right) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4(\sqrt{i})^3} = \frac{\sqrt{2}}{4i(1+i)}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_2\right) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4(i\sqrt{i})^3} = \frac{\sqrt{2}}{4(1+i)},$$

luego a partir del Teorema 7.4,

$$I = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{4i(1+i)} + \frac{\sqrt{2}}{4(1+i)} \right) = \frac{2\pi i \sqrt{2}}{4(1+i)} \left(\frac{1}{i} + 1 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

7.3. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$

Consideremos ahora integrales impropias del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx, \quad \text{donde } \alpha > 0.$$

Para tal efecto formulamos el criterio de Cauchy para integrales impropias.

Teorema 7.5. Sea la función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua sobre $(-\infty, \infty)$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = J$$

si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que para todo $R_1, R_2 > R_\varepsilon$ se tiene

$$\left| \int_{-R_1}^{R_2} \varphi(x) dx - J \right| < \varepsilon.$$

Demostración. Tarea. ■

Con la ayuda de este criterio podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 7.6. Sea $\alpha > 0$ y sea la función f regular sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ con la excepción de un número finito de singularidades aisladas $z_1, \dots, z_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Sea además $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ y $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}$. Entonces las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

existen y se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res} (f(z)e^{i\alpha z}, z_\nu) \right), \quad (7.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res} (f(z)e^{i\alpha z}, z_\nu) \right). \quad (7.4)$$

Demostración.

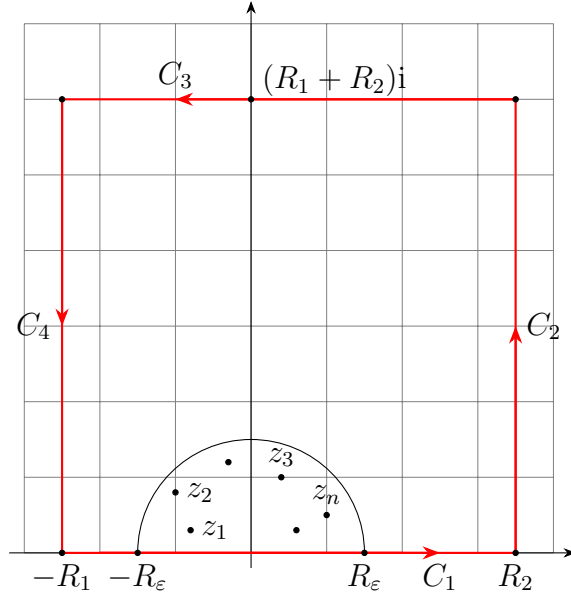


FIGURA 7.3. Ilustración de la demostración del Teorema 7.6.

1. Para $\varepsilon > 0$ dado podemos elegir $R_\varepsilon > 0$ en tal forma que las siguientes desigualdades se cumplan simultáneamente:

$$|f(z)| < \min\{\varepsilon/3, \varepsilon\alpha/3\} \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| > R_\varepsilon, \operatorname{Im} z \geq 0, \quad (7.5)$$

$$te^{-\alpha t} < 1 \quad \text{para todo } t > R_\varepsilon, \quad (7.6)$$

$$|z_\nu| < R_\varepsilon \quad \text{para } \nu = 1, \dots, n. \quad (7.7)$$

2. Consideremos ahora para $R_1, R_2 > R_\varepsilon$ el cuadrado dibujado en la Figura 7.3 con los lados C_1, C_2, C_3 y C_4 , y sea $g(z) := f(z)e^{i\alpha z}$. Para $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ tenemos

$$\int_C f(z)e^{i\alpha z} dz = \int_C g(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Res}(g, z_\nu)$$

de acuerdo al teorema de los residuos (Teorema 7.1).

3. a) Para el segmento lineal C_3 obtenemos a partir de (7.5) y (7.6)

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_3} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| &\leq \max_{z \in C_3} |f(z)| \max_{z \in C_3} |e^{i\alpha z}| (R_1 + R_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} (R_1 + R_2) e^{-\alpha(R_1+R_2)} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

- b) Parametrizando el segmento lineal C_2 mediante $z(t) = R_2 + it(R_1 + R_2)$, $t \in [0, 1]$ obtenemos en virtud de (7.5)

$$\left| \int_{C_2} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| = \left| (R_1 + R_2)i \int_0^1 f(R_2 + it(R_1 + R_2)) e^{i\alpha R_2 - \alpha t(R_1 + R_2)} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq (R_1 + R_2) \int_0^1 \left| f(R_2 + it(R_1 + R_2)) \right| e^{-\alpha t(R_1 + R_2)} dt \\
&< \frac{\varepsilon \alpha}{3} (R_1 + R_2) \int_0^1 e^{-\alpha t(R_1 + R_2)} dt = -\frac{\varepsilon}{3} e^{-\alpha t(R_1 + R_2)} \Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} (1 - e^{-\alpha(R_1 + R_2)}) < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

c) Análogamente obtenemos

$$\left| \int_{C_4} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

4. Combinando todo, obtenemos

$$\left| \int_{C_1} f(z) e^{i\alpha z} dz - 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(g, z_\nu) \right| \leq \sum_{k=2}^4 \left| \int_{C_k} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| < \varepsilon.$$

Ahora

$$\int_{C_1} f(z) e^{i\alpha z} dz = \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \cos(\alpha x) dx + i \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \sin(\alpha x) dx,$$

luego

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \cos(\alpha x) dx - \text{Re} \left(2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(g, z_\nu) \right) \right| \\
&\leq \left| \int_{C_1} f(z) e^{i\alpha z} dz - 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(g, z_\nu) \right| < \varepsilon, \\
&\left| \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \sin(\alpha x) dx - \text{Im} \left(2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(g, z_\nu) \right) \right| \\
&\leq \left| \int_{C_1} f(z) e^{i\alpha z} dz - 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(g, z_\nu) \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podemos concluir ahora que de acuerdo al Teorema 7.5, ambas integrales impropias $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$ existen, y las fórmulas (7.3) y (7.4) son válidas. ■

Ejemplo 7.6. Queremos calcular la integral

$$I := \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{a^2 + x^2} dx, \quad \alpha > 0, \quad a > 0.$$

Evidentemente,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{a^2 + z^2} = 0.$$

Como el integrando es una función par, obtenemos además

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{a^2 + x^2} dx.$$

Para poder aplicar el Teorema 7.6 consideremos la función

$$g(z) := \frac{e^{i\alpha z}}{a^2 + z^2},$$

la cual posee en el semiplano superior solamente un polo simple en $z_1 = ia$ con el residuo

$$\text{Res}(g, ia) = \left(\frac{e^{i\alpha z}}{2z} \right)_{z=ia} = \frac{e^{-\alpha a}}{2ia}.$$

De acuerdo al Teorema 7.6 obtenemos

$$I = \frac{1}{2} \text{Re}(2\pi i \text{Res}(g, ia)) = \text{Re} \left(\pi i \frac{1}{2iae^{\alpha a}} \right) = \frac{\pi}{2ae^{\alpha a}}.$$

En particular obtenemos (para $a = 1$)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

7.4. Integrales del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$

En lo siguiente trataremos integrales reales de la forma $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$, donde $R(\cos x, \sin x)$ es una función racional en $\cos x$ y $\sin x$. Se puede demostrar que tales integrales siempre pueden ser calculadas en forma cerrada mediante la determinación de una primitiva, pero este método a menudo es complicado, ya que en general se presentan expresiones complicadas. También en este caso el cálculo de los residuos resulta ser conveniente.

Teorema 7.7. Sea $R(\cos x, \sin x)$ una función racional en $\cos x$ y $\sin x$ con la propiedad de que la función

$$R^*(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

es regular sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ con la excepción de un número finito de polos $z_1, \dots, z_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = 2\pi \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(R^*, z_\nu).$$

Demostración. Sea $z = z(x) = e^{ix}$ para $x \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad z'(x) = ie^{ix} = iz,$$

luego

$$\frac{1}{i} \int_{K_1(0)} R^*(z) dz = \frac{1}{i} \int_{K_1(0)} \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx.$$

De acuerdo al teorema de los residuos (Teorema 7.1) tenemos

$$\int_{K_1(0)} R^*(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(R^*, z_\nu),$$

por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \frac{2\pi i}{i} \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(R^*, z_\nu) = 2\pi \sum_{\nu=1}^n \text{Res}(R^*, z_\nu).$$

■

Ejemplo 7.7. *Queremos calcular*

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos x} dx, \quad \text{donde} \quad R(\cos x, \sin x) = \frac{1}{5 + 4 \cos x}.$$

Utilizando la sustitución $z = e^{ix}$ tenemos

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{1}{5 + \frac{4}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{z}{5z + 2z^2 + 2}.$$

La función

$$R^*(z) = \frac{1}{5z + 2z^2 + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2} \right) (z + 2)}$$

es regular sobre $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ con la excepción del polo simple $z_1 = -1/2$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos x} dx = 2\pi \text{Res} \left(R^*, -\frac{1}{2} \right) = \left(\pi \cdot \frac{1}{z + 2} \right)_{z=-1/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

7.5. Otros ejemplos de aplicaciones del cálculo de residuos

Eligiendo las curvas de integración en forma adecuada podemos aplicar el Teorema 7.1 no solamente para la computación de integrales impropias de los tipos discutidos hasta ahora sino que también para otros tipos de integrales. En [2, Ejemplo 5.9] ya discutimos la integral

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} J, \quad J := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$$

(demostrando que $I = \sqrt{\pi}/2$). Demostraremos ahora que el mismo resultado puede ser obtenido mediante la aplicación del cálculo de residuos.

Teorema 7.8. *Se tiene $J = \sqrt{\pi}$.*

Demostración.

1. Consideremos

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z^2}}{\sin(\pi z)}, \quad z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad (\text{notar que } z_0^2 = i),$$

y para $R > 1$ la curva de integración $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ dibujada en la Figura 7.4.

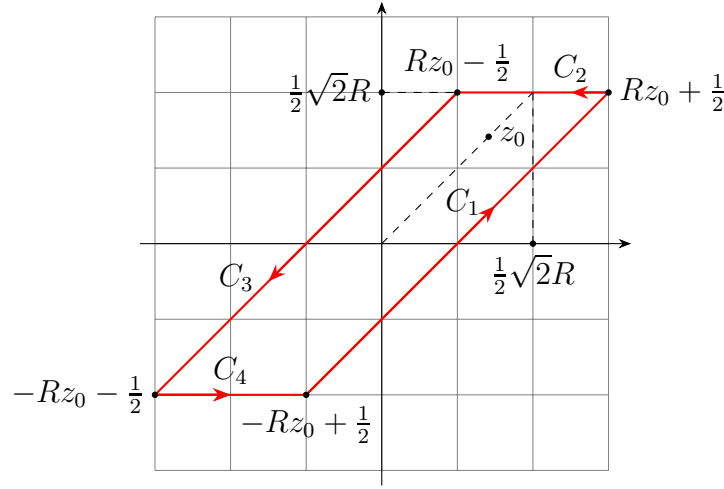


FIGURA 7.4. Ilustración de la demostración del Teorema 7.8 (en esta gráfica, $R = \sqrt{2} > 1$).

2. El segmento C_1 puede ser parametrizado por $z(t) = 1/2 + tz_0$, $t \in [-R, R]$, y una parametrización de C_3 está dada por $z(t) = -1/2 + tz_0$, $t \in [-R, R]$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz &= z_0 \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(\frac{1}{2}+tz_0)^2}}{\operatorname{sen}(\pi(\frac{1}{2}+tz_0))} dt - z_0 \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(-\frac{1}{2}+tz_0)^2}}{\operatorname{sen}(\pi(-\frac{1}{2}+tz_0))} dt \\
 &= z_0 \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(-\frac{1}{2}+tz_0)^2} + e^{i\pi(\frac{1}{2}+tz_0)^2}}{\cos(\pi tz_0)} dt \\
 &= z_0 \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(\frac{1}{4}+tz_0+t^2z_0^2)} + e^{i\pi(\frac{1}{4}-tz_0+t^2z_0^2)}}{\cos(\pi tz_0)} dt \\
 &= z_0 \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(\frac{1}{4}+t^2z_0^2)}(e^{i\pi tz_0} + e^{-i\pi tz_0})}{\cos(\pi tz_0)} dt \\
 &= 2z_0 e^{i\pi/4} \int_{-R}^R e^{i\pi t^2 z_0^2} dt = 2i \int_{-R}^R e^{-\pi t^2} dt.
 \end{aligned}$$

3. Para la curva C_2 ,

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{i\pi z^2}}{\operatorname{sen}(\pi z)} dz \right| \leq \max_{z \in C_2} |e^{i\pi z^2}| \max_{z \in C_2} \left| \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi z)} \right| =: A.$$

Si $z = x + iy \in C_2$, entonces evidentemente

$$x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}R - \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2}R,$$

luego

$$|e^{i\pi z^2}| = |e^{i\pi(x+iy)^2}| = e^{-2xy\pi} \leq e^{-2(\frac{1}{2}\sqrt{2}R - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\sqrt{2}R\pi},$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(\pi z)| &= \left| \frac{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}{2i} \right| \geq \frac{1}{2} \left(|e^{-\pi i(x+iy)}| - |e^{\pi i(x+iy)}| \right) = \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{2} \\ &> \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{2}R} - 1). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$A < \frac{e^{-2(\frac{1}{2}\sqrt{2}R - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\sqrt{2}R\pi}}{\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{2}R} - 1)}$$

y por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz = 0.$$

4. Análogamente se demuestra que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_4} f(z) dz = 0.$$

5. En el interior de C la función $f(z)$ posee sólo un polo simple en $z_1 = 0$ con

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{e^{i\pi z^2}}{\pi \cos(\pi z)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\pi},$$

luego

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2i,$$

lo que implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-\pi t^2} dt = \frac{2i}{2i} = 1.$$

6. Mediante la sustitución $x = \sqrt{\pi}t$ tenemos

$$\int_{-R}^R e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-R\sqrt{\pi}}^{R\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx$$

y finalmente

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

■

Con la ayuda de este teorema podemos calcular las integrales de Fresnel $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$ y $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx$ que a menudo se presentan en la física teórica. Notar que la existencia de estas integrales impropias no es obvia.

Teorema 7.9. *Las integrales $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$ y $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx$ existen, y se tiene*

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 0,6267. \quad (7.8)$$

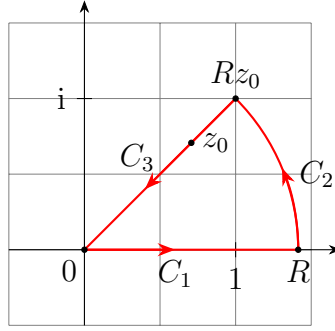


FIGURA 7.5. Ilustración de la demostración del Teorema 7.9 (en esta gráfica, $R = \sqrt{2}$).

Demostración.

1. Consideremos la función $f(z) = e^{iz^2}$ sobre la curva $C = C_1 + C_2 + C_3$ dibujada en la Figura 7.5, donde

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Como f es regular en el interior de C ,

$$\int_C e^{iz^2} dz = \int_{C_1} e^{iz^2} dz + \int_{C_2} e^{iz^2} dz + \int_{C_3} e^{iz^2} dz = 0.$$

2. a) Obtenemos

$$\int_{C_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx = \int_0^R \cos(x^2) dx + i \int_0^R \sin(x^2) dx. \quad (7.9)$$

- b) Utilizando $z(t) = tz_0$ para $0 \leq t \leq R$ tenemos

$$\int_{C_3} e^{iz^2} dz = -z_0 \int_0^R e^{it^2 z_0^2} dt = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-t^2} dt. \quad (7.10)$$

- c) Para acotar la integral sobre C_2 ponemos $z(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi/4$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} e^{iz^2} dz \right| &= \left| Ri \int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} e^{it} dt \right| \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} |e^{iR^2 \cos(2t) - R^2 \sin(2t)}| |e^{it}| dt = R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin(2t)} dt. \end{aligned}$$

Como $\sin(2t) \geq t$ sobre $[0, \pi/4]$ tenemos

$$R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin(2t)} dt \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 t} dt = \frac{1}{R} (1 - e^{-R^2 \pi/4}) < \frac{1}{R},$$

por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz = 0.$$

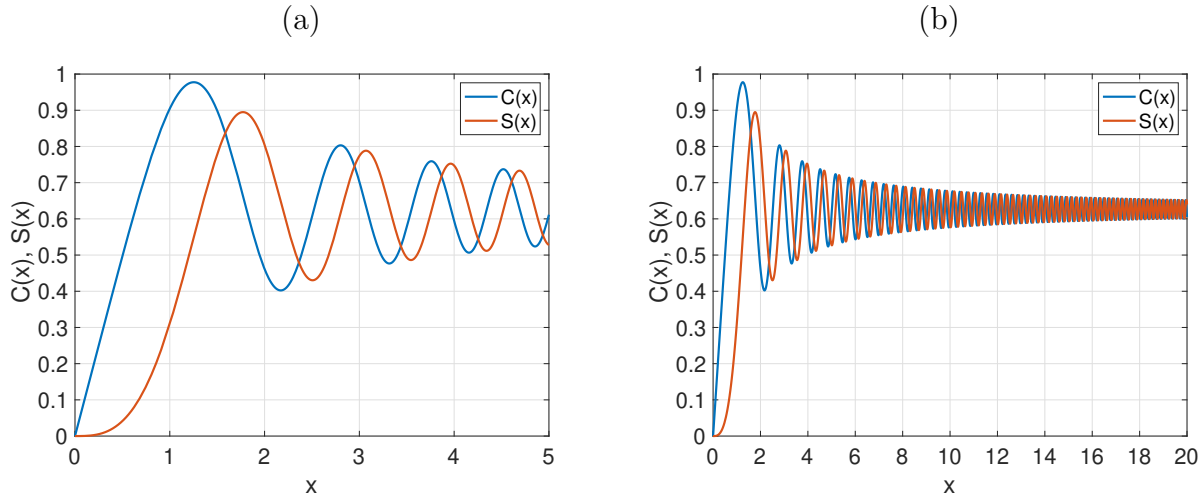


FIGURA 7.6. Integrales de Fresnel $C(x)$ y $S(x)$ definidas por (7.11) (Comentario 7.4) (a) para $0 \leq x \leq 5$, (b) para $0 \leq x \leq 20$; se observa que la convergencia hacia el límite dado por (7.8) es lenta.

3. En virtud de (7.9) y (7.10) y utilizando el resultado del Teorema 7.8 tenemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R \cos(x^2) dx + i \int_0^R \sin(x^2) dx \right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\pi}.$$

Esta relación implica (7.8).

■

Comentario 7.4. Comentamos que las integrales de Fresnel son definidas por

$$S(x) := \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt. \quad (7.11)$$

Excepto en casos especiales no es posible evaluar a las integrales que definen $C(x)$ y $S(x)$ en forma cerrada. Ver Figura 7.6.

7.6. El principio del argumento y el teorema de Rouché

Terminamos este capítulo mencionando dos aplicaciones teóricas del teorema de los residuos, empezando por la definición de funciones meromorfas.

Definición 7.2. Una función se llama meromorfa sobre una región G si es regular sobre G con la excepción de polos aislados.

Teorema 7.10 (Principio del argumento). Sea G una región simplemente conexa y sea f meromorfa sobre G . Sea, además, K una curva de Jordan cerrada, orientada positivamente y rectificable que corra enteramente en G y que no incluya ninguna raíz y ningún polo de f . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f,$$

donde N_f es el número de raíces y P_f es el número de polos de f en el interior de K ; las raíces y los polos deben ser contados con sus ordenes respectivos.

Demostración. Las singularidades $z_1, \dots, z_n$ de f'/f en el interior de K son las raíces y los polos de f . Si z_ν es uno de estos puntos, entonces sobre una vecindad $U(z_\nu)$ de z_ν con algún valor $m_\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tenemos $f(z) = (z - z_\nu)^{m_\nu} g_\nu(z)$, donde g_ν es regular sobre $U(z_\nu)$ y $g_\nu(z_\nu) \neq 0$. Entonces sobre $U(z_\nu) \setminus \{z_\nu\}$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_\nu}{z - z_\nu} + \frac{g'_\nu(z)}{g_\nu(z)},$$

lo que implica $\text{Res}(f'/f, z_\nu) = m_\nu$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\nu=1}^n m_\nu = N_f - P_f$$

de acuerdo al teorema de los residuos (Teorema 7.1). ■

Con la ayuda del principio del argumento podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 7.11 (Teorema de Rouché). *Sea G una región simplemente conexa y sean las funciones f y g regulares sobre G . Sea además K una curva de Jordan cerrada y rectificable que corra enteramente en G . Supongamos que*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{para todo } z \in K.$$

Entonces las funciones f y $f + g$ poseen el mismo número de raíces en el interior de K .

Demostración.

1. Para un $a \in [0, 1]$ consideremos la función $\varphi_a(z) = f(z) + ag(z)$. Sobre K se tiene

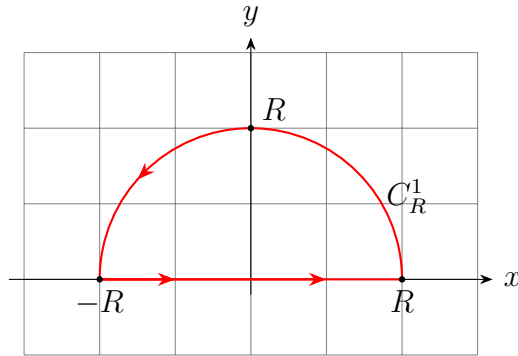
$$|\varphi_a(z)| = |f(z) + ag(z)| \geq |f(z)| - a|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

por lo tanto φ_a no posee ninguna raíz sobre K . De acuerdo al Teorema 7.10, el número de polos de φ_a en el interior de K satisface

$$N_{\varphi_a} = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi'_a(z)}{\varphi_a(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z) + ag'(z)}{f(z) + ag(z)} dz.$$

2. Sean ahora $a_1, a_2 \in [0, 1]$. Como

$$\begin{aligned} |2\pi i(N_{\varphi_{a_1}} - N_{\varphi_{a_2}})| &= \left| \int_K \left(\frac{f'(z) + a_1 g'(z)}{f(z) + a_1 g(z)} - \frac{f'(z) + a_2 g'(z)}{f(z) + a_2 g(z)} \right) dz \right| \\ &= \left| (a_1 - a_2) \int_K \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{(f(z) + a_1 g(z))(f(z) + a_2 g(z))} dz \right| \\ &\leq |a_1 - a_2| \max_{z \in K} \left| \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{(f(z) + a_1 g(z))(f(z) + a_2 g(z))} \right| L(K) \\ &\leq |a_1 - a_2| \max_{z \in K} \left| \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{(|f(z)| - |g(z)|)^2} \right| L(K), \end{aligned}$$

FIGURA 7.7. Curva C_R^1 de la solución del Problema 7.1.

N_{φ_a} es una función continua de a . Por otro lado, N_{φ_a} siempre es un número entero, por lo tanto N_{φ_a} debe ser constante sobre $[0, 1]$. Para $a = 0$ y $a = 1$, respectivamente, obtenemos

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz = N_{f+g}.$$

■

Ejemplo 7.8. Consideremos el polinomio $P(z) = z^4 + 7z + 1$. Sobre la curva $K_2(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ tenemos $|z^4| = 16$ y $|7z + 1| \leq 15$. De acuerdo al teorema de Rouché (Teorema 7.11), entonces las funciones z^4 y $z^4 + 7z + 1$ poseen el mismo número de raíces en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Como z^4 posee una raíz cuádruple (del orden 4) en $z = 0$, todas las cuatro raíces de $P(z)$ están localizadas en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Por otro lado, sobre la curva $K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ se tiene $|7z| = 7$ y $|z^4 + 1| \leq 2$. Entonces de acuerdo al teorema de Rouché las funciones $7z$ y $z^4 + 7z + 1$ poseen el mismo número de raíces en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, precisamente, exactamente una. Concluimos que el polinomio $P(z)$ posee exactamente una raíz z_1 con $|z_1| < 1$ y las tres demás raíces z_2, z_3 y z_4 satisfacen $1 < |z_i| < 2$ ($i = 2, 3, 4$).

7.7. Ejercicios

Problema 7.1 (Tarea 6, curso 2023). Calcular

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 1},$

b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$

Solución sugerida.

- a) Sea K la curva cerrada dibujada en la Figura 7.7, que consiste en el segmento lineal que conecta $-R$ con R y la semicircunferencia C_R^1 transcurrida en el sentido matemáticamente positivo. Notamos que $z^6 + 1 = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_5)$, siendo $z_\nu = e^{(\nu+1)\pi/6}$, $\nu = 0, \dots, 5$, es decir cada uno de los números $z_0, \dots, z_5$ es un polo simple de $1/(z^6 + 1)$. Solamente los polos correspondientes a $\nu = 0$, $\nu = 1$ y $\nu = 2$

pertenecen al interior de K . De acuerdo al Teorema 7.2 (con $f \equiv 1$ y $g(z) = z^6 + 1$),

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, z_0\right) &= \frac{f(z)}{g'(z)}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{6z^5}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{6}e^{-5\pi i/6}, \\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, z_1\right) &= \frac{f(z)}{g'(z)}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{6z^5}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{6}e^{-5\pi i/2}, \\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, z_2\right) &= \frac{f(z)}{g'(z)}\Big|_{z=z_2} = \frac{1}{6z^5}\Big|_{z=z_2} = \frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}.\end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, y aplicando el teorema de los residuos,

$$\begin{aligned}\int_K \frac{dz}{z^6+1} &= 2\pi i \left(\frac{1}{6}e^{-5\pi i/6} + \frac{1}{6}e^{-5\pi i/2} + \frac{1}{6}e^{-25\pi i/6} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + 0 - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \frac{\pi i}{3} \cdot (-2i) = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Para cualquier $w \in \mathbb{C}$ se tiene $|w| \leq 1 + |w+1|$, luego $|w+1| \geq |w| - 1$ y por lo tanto si $w \neq -1$,

$$\left| \frac{1}{w+1} \right| \leq \frac{1}{|w| - 1}.$$

Por otro lado, si $|w| \geq 1$,

$$|w| - 1 \geq \frac{|w|}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|w| - 1} \leq \frac{2}{|w|}.$$

Aplicando lo anterior a $w = z^6 = R^6 e^{6i\theta}$ obtenemos, tomando en cuenta que $|R^6 e^{6i\theta}| = R^6$ y $R^6 \geq 2$ si R es suficientemente grande,

$$\left| \frac{1}{z^6+1} \right| = \left| \frac{1}{R^6 e^{6i\theta} + 1} \right| \leq \frac{1}{|R^6 e^{6i\theta}| - 1} \leq \frac{1}{R^6 - 1} \leq \frac{2}{R^6}$$

si R es suficientemente grande. De acuerdo a lo anterior,

$$\left| \int_{C_R^1} \frac{dz}{z^6+1} \right| \leq \int_{C_R^1} \left| \frac{1}{z^6+1} \right| |dz| \leq \pi R \cdot \frac{2}{R^6} = \frac{2\pi}{R^5} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_K \frac{dz}{z^6+1} - \int_{C_R^1} \frac{dz}{z^6+1} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

b) Consideremos la misma curva K dibujada en la Figura 7.7. Los polos de

$$f(z) := \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

incluidos por K son el polo de grado dos en $z_0 := i$ y el polo simple en $z_1 := -1 + i$. De acuerdo al teorema de los residuos,

$$\operatorname{Res}(f, z_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)} \right) \Big|_{z=i} \\
&= \frac{2z(z+i)^2(z^2+2z+2) - z^2(2(z+i)(z^2+2z+2) + (z+i)^2(2z+2))}{(z+i)^4(z^2+2z+2)^2} \Big|_{z=i} \\
&= \frac{9i-12}{100}, \\
\text{Res}(f, z_1) &= \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)} \Big|_{z=-1+i} = \frac{3-4i}{25}.
\end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior,

$$\int_K f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25} \right) = \frac{7\pi}{50},$$

por lo tanto

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx + \int_{C_R^1} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} dz = \frac{7\pi}{50}.$$

Dado que la segunda integral tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$ (demostración omitida),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx = \frac{7\pi}{50}.$$

Problema 7.2 (Tarea 7, curso 2023). Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema de los residuos:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} dx, \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

Solución sugerida.

- a) Queremos aplicar el Teorema 7.4. Para tal efecto notamos que los polinomios involucrados son $P(z) = z^2$ y $Q(z) = (1+z^2)(4+z^2)$, respectivamente, y Q posee raíces en $z_1 = i$ y $z_2 = 2i$, es decir en el semiplano superior. Ahora

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)},$$

luego

$$\text{Res} \left(\frac{P}{Q}, i \right) = \frac{-1}{(2i)3} = -\frac{1}{6i}, \quad \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, 2i \right) = \frac{-4}{(-3)(4i)} = \frac{1}{3i}.$$

De acuerdo al Teorema 7.4,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} dx = 2\pi i \left(\text{Res} \left(\frac{P}{Q}, i \right) + \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, 2i \right) \right) = \frac{\pi}{3}.$$

- b) Queremos aplicar el Teorema 7.4. Para tal efecto notamos que los polinomios involucrados son $P(z) = 1$ y $Q(z) = (1 + z^2)^2$, respectivamente, y Q posee una raíz del orden 2 en $z_0 = i$, es decir en el semiplano superior. Notando que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{Q}, i\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)\Big|_{z=i} = -\frac{2}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} = \frac{1}{4i},$$

luego de acuerdo al Teorema 7.4,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{Q}, i\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 7.3 (Evaluación 1, curso 2023). Resolver los siguientes problemas:

- a) Calcular la integral

$$\int_K \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} dz$$

para los siguientes casos:

$$(i) K = \{z \mid |z-1| = 1\}, \quad (ii) K = \{z \mid |z-2i| = 1\}, \quad (iii) K = \{z \mid |z| = 4\}.$$

- b) Calcular la integral

$$\int_{\{|z|=4\}} \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz.$$

Aviso: usar la fórmula integral de Cauchy o el teorema de los residuos.

Solución sugerida.

- a) La función

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

posee un polo doble en $z_0 = -1$ y un polo simple en $z_1 = -2i$ y $z_2 = 2i$.

- (i) Como ningún polo pertenece a la curva K o su interior, podemos aplicar el teorema integral de Cauchy para deducir que

$$\int_K f(z) dz = 0.$$

- (ii) Aquí el polo $z_2 = 2i$ pertenece al interior de K . Ningun otro polo pertenece al interior de K . Podemos definir la función

$$g(z) := (z - z_2)f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z+2i)}$$

y aplicar la fórmula integral de Cauchy (Teorema 4.30)

$$g(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{g(z)}{z - z_2} dz$$

para calcular

$$\begin{aligned}\int_K f(z) dz &= \int_K \frac{g(z)}{z - z_2} dz = 2\pi i g(z_2) = 2\pi i \frac{(2i)^2 - 2 \cdot 2i}{(2i + 1)^2(2i + 2i)} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{i + 7}{25} = -\frac{2}{25}\pi + \frac{14}{25}\pi i.\end{aligned}$$

Alternativamente uno puede calcular $\text{Res}(f, 2i) = (7 + i)/25$ para llegar al mismo resultado.

- (iii) En este caso todos los polos estan localizados en el interior de K . Aquí conviene aplicar el teorema de los residuos. A partir de la parte (ii) ya sabemos que

$$\text{Res}(f, z_2) = \text{Res}(f, 2i) = \frac{7 + i}{25}.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 7.2 (por ejemplo),

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, z_1) &= \frac{z^2 - 2z}{\frac{d}{dz}((z + 1)^2(z^2 + 4))} \Big|_{z=z_1} \\ &= \frac{z^2 - 2z}{2(z + 1)(z^2 + 4) + (z + 1)^2(2z)} \Big|_{z=z_1} = \frac{7 - i}{25}.\end{aligned}$$

Para calcular $\text{Res}(f, z_0)$ conviene aplicar el Teorema 7.3:

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, z_0) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4} \right) \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{(2z - 2)(z^2 + 4) - (z^2 - 2z) \cdot 2z}{(z^2 + 4)^2} \Big|_{z=-1} = -\frac{14}{25},\end{aligned}$$

por lo tanto de acuerdo al teorema de los residuos,

$$\int_K f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)) = 0.$$

- b) Sea ahora $K := \{z \mid |z| = 4\}$. La función

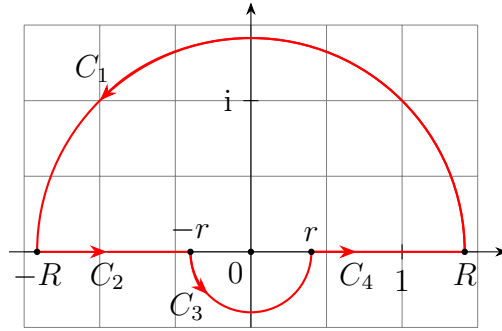
$$f(z) := \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z - \pi i)^2(z + \pi i)^2}$$

posee dos polos del orden 2, uno en $z_0 = -\pi i$ y otro en $z_1 = \pi i$. Ahora

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, z_0) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{(z - \pi i)^2} \right) \Big|_{z=-\pi i} = e^z \frac{z - \pi i - 2}{(z - \pi i)^3} \Big|_{z=-\pi i} = \frac{\pi - i}{4\pi^3}, \\ \text{Res}(f, z_1) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{(z + \pi i)^2} \right) \Big|_{z=\pi i} = e^z \frac{z + \pi i - 2}{(z + \pi i)^3} \Big|_{z=\pi i} = \frac{\pi + i}{4\pi^3},\end{aligned}$$

por lo tanto de acuerdo al teorema de los residuos,

$$\int_K f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)) = 2\pi i \left(\frac{\pi - i}{4\pi^3} + \frac{\pi + i}{4\pi^3} \right) = \frac{i}{\pi}.$$

FIGURA 7.8. Curvas C_1 a C_4 de la solución del Problema 7.4.

Problema 7.4 (Tarea 6, curso 2023). Utilizando el teorema de los residuos, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aviso: Considerar la función $f(z) = e^{iz}/z$ sobre la curva de integración $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ dibujada en la Figura 7.8, y considerar los límites $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$.

Solución sugerida. De acuerdo a lo indicado en la figura,

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_{C_3} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{C_1} f(z) dz.$$

Notamos que de acuerdo a la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i e^{iz}|_{z=0} = 2\pi i.$$

Parametrizando C_3 como $z(t) = re^{it}$, $\pi \leq t \leq 2\pi$ obtenemos $z'(t) = iz(t)$, luego

$$\int_{C_3} f(z) dz = \int_\pi^{2\pi} \frac{e^{iz(t)}}{z(t)} \cdot (iz(t)) dt = i \int_\pi^{2\pi} e^{ire^{it}} dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} \pi i;$$

además, parametrizando C_1 como $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ (luego $z'(t) = iz(t)$)

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{e^{iz(t)}}{z(t)} \cdot (iz(t)) dt = i \int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt = i \int_0^\pi e^{iR(\cos t + i \sin t)} dt \\ &= i \int_0^\pi e^{iR \cos t} e^{-R \sin t} dt, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |e^{iR \cos t}| |e^{-R \sin t}| dt = \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Ahora

$$\int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_r^R f(x) dx = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$$= \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \frac{1}{2i} \left(\int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_r^R f(x) dx \right) \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \frac{1}{2i} \left(\int_C f(z) dz - \int_{C_3} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz \right) = \frac{1}{2i} (2\pi i - \pi i + 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Problema 7.5 (Evaluación de recuperación, curso 2023). Resolver los siguientes problemas:

a) Sea $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$. Calcular la integral

$$\int_K \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz, \quad \text{donde } t \in \mathbb{R} \text{ es un parámetro.}$$

b) Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta.$$

Aviso: utilizar la sustitución $z = e^{i\theta}$, expresar $\cos\theta$ y $\cos(3\theta)$ en términos de z , y considerar la integral $\int_K f(z) dz$, $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, de una función $f(z)$ apropiada.

Solución sugerida.

a) El integrando

$$f(z) := \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$$

posee un polo doble en $z = 0$ y dos polos simples en $z = -1 \pm i$ (las raíces de $z^2 + 2z + 2$). Todos estos polos están localizados en el interior de K , por lo tanto para aplicar el teorema de los residuos debemos calcular

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 2} \right) \Big|_{z=0} = e^{zt} \frac{t(z^2 + 2z + 2) - (2z + 2)}{(z^2 + 2z + 2)^2} \Big|_{z=0} = \frac{t - 1}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f, -1 + i) = \frac{e^{zt}}{z^2(z - (-1 - i))} \Big|_{z=-1+i} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4},$$

$$\operatorname{Res}(f, -1 - i) = \frac{e^{zt}}{z^2(z - (-1 + i))} \Big|_{z=-1-i} = \frac{e^{(-1-i)t}}{4},$$

luego de acuerdo al teorema de los residuos,

$$\int_K f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{t - 1}{2} + \frac{e^{(-1+i)t}}{4} + \frac{e^{(-1-i)t}}{4} \right) = \pi i (t - 1 + e^{-t} \cos t).$$

b) Utilizando $z = e^{i\theta}$ podemos escribir

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \cos(3\theta) = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \quad dz = iz d\theta,$$

luego

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta = \int_K \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i} \int_K \frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz.$$

El integrando posee un polo del orden 3 en $z = 0$ y un polo simple en $z = 1/2$ en el interior de K . Sea

$$f(z) := \frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^6 + 1}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{6z^5(z^2 - \frac{5}{2}z + 1) - (z^6 + 1)(2z - \frac{5}{2})}{(z^2 - \frac{5}{2}z + 1)^2} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{4z^7 - \frac{25}{2}z^6 + 6z^5 - 2z + \frac{5}{2}}{(z^2 - \frac{5}{2}z + 1)^2} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2(z^2 - \frac{5}{2}z + 1)^3} \cdot \left((28z^6 - 75z^5 + 30z^4 - 2) \left(z^2 - \frac{5}{2}z + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(4z^7 - \frac{25}{2}z^6 + 6z^5 - 2z + \frac{5}{2} \right) 2 \left(2z - \frac{5}{2} \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left((-2) \cdot 1 - \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) \right) = \frac{21}{4}, \\ \text{Res} \left(f, \frac{1}{2} \right) &= \left(\frac{z^6 + 1}{z^3(z - 2)} \right) \Big|_{z=1/2} = \frac{\frac{1}{64} + 1}{\frac{1}{8}(-\frac{3}{2})} = -\frac{65}{12}. \end{aligned}$$

De acuerdo al teorema de residuos (Teorema 7.1),

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta &= -\frac{1}{4i} \int_K \frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz \\ &= -\frac{2\pi i}{4i} \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res} \left(f, \frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{2\pi i}{4i} \left(\frac{21}{4} - \frac{65}{12} \right) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Problema 7.6 (Tarea 6, curso 2023). Utilizar el teorema de Rouché para probar los siguientes enunciados.

- a) Todas las raíces de $p(z) = 3z^3 - 2z^2 + 2iz - 8$ pertenecen a la región anular $R_{1,2}(0)$.
- b) Sea

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 + 4} + \frac{2z^2 - 1}{z^2 + 6}.$$

Todas las raíces $z = z_0$ de $f(z)$ satisfacen $|z_0| \geq 1$.

Solución sugerida.

- a) Sobre la circunferencia $|z| = 1$ tenemos $|p(z) + 8| \leq 3 + 2 + 2 = 7 < 8$, luego $p(z)$ y $f(z) \equiv 8$ poseen el mismo número de raíces en el interior de $|z| = 8$ de acuerdo al teorema de Rouché; por lo tanto $p(z)$ no se anula sobre el disco cerrado $|z| \leq 1$. Además, sobre $|z| = 2$, $|p(z) - 3z^2| \leq 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 8 = 20 < 24 = |3z^3|$, por lo tanto $p(z)$ y $f(z) = 3z^3$ poseen un número igual de raíces en el interior de la circunferencia $|z| = 2$. Concluimos que todas las raíces de p pertenecen a la región anular $1 < |z| < 2$.
- b) La ecuación $f(z) = 0$ puede ser escrita como $p(z) = q(z)$, donde $p(z) := (z^2 - 4)(z^2 + 6) = z^4 + 2z^2 - 24$ y $q(z) := (z^2 + 4)(1 - z^2) = -2z^4 - 7z^2 + 4$. Sobre $|z| = 1$,

$$|p(z)| = |24 - 2z^2 - z^4| \geq 24 - 2 - 1 = 21 \quad \text{y}$$

$$|q(z)| = |2z^4 + 7z^2 - 4| \leq 2 + 7 + 4 = 13,$$

por lo tanto $|p(z)| > |q(z)| = |(p(z) - q(z)) - p(z)|$, lo que implica que p y $p - q$ poseen un igual número de raíces en el interior del círculo $|z| = 1$. Pero claramente p no posee raíces en $|z| < 1$, por lo tanto $f(z)$ no posee raíces con $|z| < 1$.

Problema 7.7 (Tarea 6, curso 2023). Usando el teorema de Rouché (Teorema 7.11) demostrar el teorema fundamental del álgebra: *Un polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ del grado n posee exactamente n raíces, contadas con sus multiplicidades.*

Solución sugerida. Para valores grandes de $|z| = R$,

$$\left| \frac{p(z) - z^n}{z^n} \right| = |a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}| \leq \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{R} \leq \frac{1}{2},$$

luego $|p(z) - z^n| \leq \frac{1}{2}|z|^n < |z|^n$ para $|z| = R$, por lo tanto de acuerdo al Teorema 7.11, $p(z)$ y z^n poseen igual número de raíces en el interior de la circunferencia $|z| = R$. Pero z^n posee exactamente n raíces en el interior de $|z| = R$, por lo tanto lo mismo debe ser válido para $p(z)$.

Problema 7.8 (Tarea 6, curso 2023). Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Demostrar que el polinomio

$$p(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$$

posee exactamente n raíces en el disco unitario. Aviso: $|p(z) - 3z^n| < e$ para $|z| = 1$.

Solución sugerida. Sea $p(z) = f(z) + g(z)$ con

$$g(z) := \sum_{n=0}^m \frac{z^n}{n!}, \quad f(z) := 3z^n.$$

Entonces sobre $|z| = 1$,

$$|g(z)| = \left| \sum_{n=0}^m \frac{z^n}{n!} \right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e, \quad |f(z)| = |3z^n| = 3|z|^n = 3 > |g(z)|.$$

La función f posee una raíz del orden n en $z_0 = 0 \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$; como $|f(z)| > |g(z)|$ sobre $|z| = 1$, de acuerdo al Teorema 7.11 la función $p(z)$ debe poseer el mismo número n de raíces en el disco unitario.

Bibliografía

- [1] H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der Analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, third ed., Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [2] R. Bürger, *Cálculo III*. Apuntes (176 pp.), Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, 2023. Disponible en <https://www.ci2ma.udec.cl/publicaciones/librosyapuntes/>.
- [3] S. D. Fisher, *Complex Variables*, second ed., Dover, Mineola, NY, 1999.
- [4] T. W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [5] E. Hille, *Analytic Function Theory. Vol. 1*, Ginn and Company, Boston, MA, 1959.
- [6] L. A. Rubinfeld, *A First Course in Applied Complex Variables*, Wiley, New York, 1984.
- [7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, third ed., McGraw Hill Education, 1976.