

---

# Ecuaciones Diferenciales Parciales

---

Apuntes  
Curso Código 408607

Raimund Bürger  
Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI<sup>2</sup>MA)  
& Departamento de Ingeniería Matemática  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Concepción  
Casilla 160-C  
Concepción, Chile

12 de agosto de 2024

---



## Índice general

Bibliografía	7
Capítulo 1. Preliminares	9
1.1. Resultados clásicos: desigualdades	9
1.1.1. Funciones convexas	9
1.1.2. Desigualdades elementales	10
1.2. Notación de multi-índices	14
1.3. Resultados clásicos: cálculo de varias variables	15
1.3.1. Fronteras	15
1.3.2. Teorema de Gauß-Green y fórmulas de Green	15
1.3.3. Coordenadas polares y fórmula de co-área	16
1.3.4. Convolución y suavización	17
1.3.5. Teorema de la Función Inversa	19
1.3.6. Teorema de Funciones Implícitas	20
1.3.7. Convergencia uniforme	20
1.4. Clasificación de EDPs de segundo orden	20
1.5. Análisis Funcional Lineal	22
1.5.1. Espacios de Banach	22
1.5.2. Espacios de Hilbert	23
1.5.3. Operadores lineales acotados	24
Capítulo 2. Teoría clásica: cuatro EDPs lineales importantes	27
2.1. La ecuación de transporte	27
2.2. Las ecuaciones de Laplace y de Poisson	28
2.2.1. Interpretación física	28
2.2.2. Solución fundamental	29
2.2.3. La ecuación de Poisson	30
2.2.4. Fórmulas del valor medio	32
2.2.5. Propiedades de funciones armónicas	33
2.2.6. La función de Green	38
2.2.7. Fórmulas de Poisson	41
2.2.8. Métodos de energía y principio de Dirichlet	45
2.3. La ecuación del calor	47
2.3.1. Interpretación física	47
2.3.2. Solución fundamental	48
2.3.3. El problema de valores iniciales	50

2.3.4.	Problema no homogéneo y principio de Duhamel	51
2.3.5.	Fórmula del valor medio	54
2.3.6.	Propiedades de soluciones	56
2.3.7.	Métodos de energía	63
2.4.	La ecuación de la onda	64
2.4.1.	Interpretación física	65
2.4.2.	Solución por promedios esféricos	65
2.4.3.	Problema no homogéneo	76
2.4.4.	Métodos de energía	78
2.5.	Ejemplos adicionales	79
Capítulo 3.	EDPs no lineales de primer orden	83
3.1.	Integral completa y envolventes	83
3.2.	Características	87
3.2.1.	Ecuaciones características	87
3.2.2.	Condiciones de compatibilidad	91
3.2.3.	Condiciones de borde no características	92
3.2.4.	Existencia local de soluciones	93
3.3.	Aplicaciones	95
3.3.1.	Caso $F$ lineal	96
3.3.2.	Caso $F$ cuasi-lineal	97
3.3.3.	Caso $F$ completamente no lineal	98
3.4.	Ejemplos adicionales	99
Capítulo 4.	Ecuaciones elípticas de segundo orden	105
4.1.	Espacios de Sobolev	105
4.1.1.	Espacios de Hölder	105
4.1.2.	Espacios de Sobolev	105
4.1.3.	Desigualdades de Sobolev	114
4.1.4.	Compacidad	120
4.2.	Cuocientes de diferencias y diferenciabilidad c.t.p.	123
4.2.1.	Cuocientes de diferencias	123
4.2.2.	Diferenciabilidad c.t.p.	125
4.3.	Formulación variacional, soluciones débiles y estimaciones de energía	126
4.3.1.	Existencia de soluciones débiles	128
4.3.2.	Regularidad	133
4.4.	Principios del máximo	144
4.4.1.	Principio del máximo débil	145
4.4.2.	Principio del máximo fuerte	146
Capítulo 5.	Ecuaciones parabólicas de segundo orden	149
5.1.	Espacios de Sobolev que involucran el tiempo	149
5.2.	Ecuaciones parabólicas de segundo orden	152
5.2.1.	Definiciones	152
5.2.2.	Existencia de soluciones débiles	154

5.2.2.1.	Aproximación de Galerkin	154
5.2.2.2.	Estimaciones de energía	155
5.2.2.3.	Existencia y unicidad	157
5.2.3.	Regularidad	158
5.2.4.	Principios del máximo	165



## Bibliografía

- [1] R. Adams & J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Second Edition, Elsevier, Oxford, 2003.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [3] C. Constanda, *Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, USA, 2010.
- [4] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2018.
- [5] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 2005.
- [6] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Printing, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2010.
- [7] S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover, Mineola, NY, USA, 1993.
- [8] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Dover, Mineola, NY, USA, 2008.
- [9] G. Hellwig, *Partial Differential Equations*, Second Edition, Teubner, Stuttgart, 1977.
- [10] F. John, *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [11] J. Jost, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [12] G.M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [13] R.C. McOwen, *Partial Differential Equations. Methods and Applications*, Second Edition, Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, 2003.
- [14] M. Renardy & R.C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [15] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.
- [16] M. Stynes & D. Stynes, *Convection-Diffusion Problems*, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2018.





## Preliminares

### 1.1. Resultados clásicos: desigualdades

#### 1.1.1. Funciones convexas.

**Definición 1.1.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se llama convexa si

$$f(\tau \mathbf{x} + (1 - \tau)\mathbf{y}) \leq \tau f(\mathbf{x}) + (1 - \tau)f(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \in [0, 1].$$

**Teorema 1.1.** Supongamos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa. Entonces para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  existe un vector  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

La aplicación

$$\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

define un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$ , llamado *hiperplano de soporte*. Si  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{x}$ , entonces

$$\mathbf{r} = Df(\mathbf{x}).$$

Si  $f \in C^2$ , entonces  $f$  es convexa en  $\mathbf{x}$  si y sólo si  $(D^2f)(\mathbf{x}) \geq 0$ . Una función  $f$  se llama *uniformemente convexa* si existe un  $\theta > 0$  tal que

$$D^2f \geq \theta \mathbf{I},$$

lo que significa que

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \theta |\boldsymbol{\xi}|^2.$$

**Teorema 1.2** (Desigualdad de Jensen). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado. Sea  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  integrable. Entonces, definiendo el valor medio de  $u$  sobre  $U$  por

$$\int_U u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \frac{1}{|U|} \int_U u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

se tiene que

$$f\left(\int_U u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}\right) \leq \int_U f(u(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}. \quad (1.1)$$

*Demostración.* Puesto que  $f$  es convexa, para todo  $p \in \mathbb{R}$  existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(q) \geq f(p) + r(q - p) \quad \text{para todo } q \in \mathbb{R}.$$

Ahora sea

$$p = \int_U u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad q = u(\mathbf{x}).$$

Entonces se tiene la desigualdad

$$f(u(\mathbf{x})) \geq f\left(\int_U u \, d\mathbf{x}\right) + r\left(u(\mathbf{x}) - \int_U u \, d\mathbf{x}\right). \quad (1.2)$$

Integrando (1.2) sobre  $U$  obtenemos

$$\int_U f(u(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \geq |U|f\left(\int_U u \, d\mathbf{x}\right) + r\left(\int_U u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - |U|\int_U u \, d\mathbf{x}\right) = |U|f\left(\int_U u \, d\mathbf{x}\right).$$

Dividiendo la última desigualdad por  $|U|$  llegamos a (1.1). ■

### 1.1.2. Desigualdades elementales.

**Teorema 1.3** (Desigualdades de Cauchy y de Young).

1. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces se tiene la desigualdad de Cauchy

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \quad (1.3)$$

2. Sean  $a, b > 0$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces se tiene la desigualdad de Cauchy con  $\varepsilon$ :

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \quad (1.4)$$

3. Sean  $a, b > 0$  y  $1 < p, q < \infty$  con

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.5)$$

Entonces se tiene la desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.6)$$

4. Sean  $a, b > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $1 < p, q < \infty$  tales que (1.5) es válido. Entonces se tiene la desigualdad de Young con  $\varepsilon$ :

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q, \quad C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}. \quad (1.7)$$

*Demostración.*

- 1.) La desigualdad (1.3) es una consecuencia inmediata de

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

- 2.) La desigualdad (1.4) es una consecuencia de (1.3) si tomamos en cuenta que

$$ab = (2\varepsilon)^{1/2} a \frac{b}{(2\varepsilon)^{1/2}}.$$

3.) Puesto que  $x \mapsto \exp(x)$  es convexa, podemos deducir que

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\log a + \log b) = \exp\left(\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp(\log a^p) + \frac{1}{q} \exp(\log b^q) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

4.) Para demostrar (1.7), basta considerar que

$$ab = (\varepsilon p)^{1/p} a \frac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}}$$

y aplicar la desigualdad de Young. ■

**Teorema 1.4** (Desigualdad de Hölder). Sean  $1 \leq p, q \leq \infty$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces si  $u \in L^p(U)$  y  $v \in L^q(U)$  se tiene la desigualdad de Hölder

$$\int_U |uv| \, d\mathbf{x} \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}. \quad (1.8)$$

*Demostración.* Por homogeneidad podemos suponer que  $\|u\|_{L^p(U)} = \|v\|_{L^q(U)} = 1$ . Entonces la desigualdad de Young implica que para  $1 < p, q < \infty$

$$\int_U |uv| \, d\mathbf{x} \leq \frac{1}{p} \int_U |u|^p \, d\mathbf{x} + \frac{1}{q} \int_U |v|^q \, d\mathbf{x} = 1 = \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

Los casos  $p = 1$  o  $p = \infty$  son fáciles de analizar. ■

**Teorema 1.5** (Desigualdad de Minkowski). Sean  $1 \leq p \leq \infty$  y  $u, v \in L^p(U)$ . Entonces

$$\|u + v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}. \quad (1.9)$$

*Demostración.* Aplicando la desigualdad de Hölder (1.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{L^p(U)}^p &= \int_U |u + v|^p \, d\mathbf{x} \leq \int_U |u + v|^{p-1} (|u| + |v|) \, d\mathbf{x} \\ &\leq \left( \int_U |u + v|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[ \left( \int_U |u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} + \left( \int_U |v|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} \right] \\ &= \|u + v\|_{L^p(U)}^{p-1} (\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}). \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados por  $\|u + v\|_{L^p(U)}^{p-1}$  se llega a la desigualdad (1.9). ■

Comentamos que existen demostraciones análogas para las versiones discretas de la desigualdad de Hölder

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \quad (1.10)$$

y de Minkowski

$$\left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}, \quad (1.11)$$

donde  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Teorema 1.6** (Desigualdad de Hölder generalizada). Sean  $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ ,

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

y  $u_k \in L^{p_k}(U)$  para  $k = 1, \dots, m$ . Entonces

$$\int_U |u_1 \cdot \dots \cdot u_m| \, d\mathbf{x} \leq \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L^{p_k}(U)}. \quad (1.12)$$

*Demostración.* Se procede por inducción, utilizando la desigualdad de Hölder (1.8). ■

**Teorema 1.7** (Desigualdad de interpolación para normas  $L^p$ ). Sean  $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ ,  $\theta \in [0, 1]$  definido por

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}, \quad (1.13)$$

y además  $u \in L^s(U) \cap L^t(U)$ . Entonces  $u \in L^r(U)$  y

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|_{L^s(U)}^\theta \|u\|_{L^t(U)}^{1-\theta}. \quad (1.14)$$

*Demostración.* Tomando en cuenta (1.13) podemos usar la desigualdad de Hölder (1.8) para concluir que

$$\begin{aligned} \int_U |u|^r \, d\mathbf{x} &= \int_U |u|^{\theta r} |u|^{(1-\theta)r} \, d\mathbf{x} \leq \left( \int_U |u|^{\theta r \frac{s}{\theta r}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{\theta r}{s}} \left( \int_U |u|^{(1-\theta)r \frac{t}{(1-\theta)r}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}} \\ &= \|u\|_{L^s(U)}^{\theta r} \|u\|_{L^t(U)}^{(1-\theta)r}, \end{aligned}$$

lo cual implica (1.14). ■

**Teorema 1.8** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Notamos que

$$0 \leq |\mathbf{x} \pm \varepsilon \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 \pm 2\varepsilon \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \varepsilon^2 |\mathbf{y}|^2,$$

por lo tanto

$$\pm \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \frac{1}{2\varepsilon} |\mathbf{x}|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{y}|^2.$$

Ahora minimizamos el lado derecho poniendo  $\varepsilon = |\mathbf{x}|/|\mathbf{y}|$ , siempre que  $|\mathbf{y}| \neq 0$ . (El caso contrario es fácil de tratar.) ■

Si  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  es una matriz  $n \times n$  simétrica y no negativa, entonces se tiene

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \quad (1.15)$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \right| \leq \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j \right)^{1/2}.$$

**Teorema 1.9** (Desigualdad de Gronwall (forma diferencial)). *Sea  $\eta$  una función no negativa y absolutamente continua en  $[0, T]$ , la cual satisface la desigualdad diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad \text{para todo } t \in [0, T], \quad (1.16)$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones no negativas e integrables sobre  $[0, T]$ . Entonces

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s) ds\right) \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds\right) \quad \text{para } t \in [0, T]. \quad (1.17)$$

En particular, si  $\eta' \leq \phi\eta$  sobre  $[0, T]$  y  $\eta(0) = 0$ , entonces  $\eta \equiv 0$  sobre  $[0, T]$ .

*Demostración.* Utilizando (1.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \eta(s) \exp\left(-\int_0^s \phi(r) dr\right) \right) &= \exp\left(-\int_0^s \phi(r) dr\right) (\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)) \\ &\leq \exp\left(-\int_0^s \phi(r) dr\right) \psi(s) \end{aligned}$$

para casi todo  $s \in [0, T]$ . Entonces para todo  $t \in [0, T]$  tenemos que

$$\eta(t) \exp\left(-\int_0^t \phi(r) dr\right) \leq \eta(0) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \phi(r) dr\right) \psi(s) ds \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds,$$

lo cual implica (1.17). ■

**Teorema 1.10** (Desigualdad de Gronwall, forma integral). *Sea  $\xi$  una función no negativa y sumable sobre  $[0, T]$  que satisface la desigualdad integral*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2 \quad \text{para casi todo } t \in [0, T], \quad (1.18)$$

con constantes  $C_1, C_2 \geq 0$ . Entonces

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t \exp(C_1 t)) \quad \text{para } t \in [0, T] \text{ c.t.p.}$$

En particular, si

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds, \quad t \in [0, T] \text{ c.t.p.}, \quad (1.19)$$

entonces  $\xi(t) = 0$  c.t.p.

*Demostración.* Sea

$$\eta(t) := \int_0^t \xi(s) ds,$$

entonces

$$\eta' \leq C_1\eta + C_2 \quad \text{para } t \in [0, T] \text{ c.t.p.}$$

Según la forma diferencial de la desigualdad de Gronwall, (1.17), esto implica que

$$\xi(t) \leq C_1\eta(t) + C_2 \leq C_2(1 + C_1t \exp(C_1t)).$$

■

## 1.2. Notación de multi-índices

Un vector  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , donde cada componente es un número entero no negativo, se llama *multi-índice del orden*

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Entre otras operaciones se define el factorial de un multi-índice por

$$\boldsymbol{\alpha}! = \prod_{k=1}^n \alpha_k! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

Por otro lado, para  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  se define

$$\mathbf{z}^\boldsymbol{\alpha} := \prod_{k=1}^n z_k^{\alpha_k} = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}.$$

Para un multi-índice  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  definimos además

$$D^\boldsymbol{\alpha}u(\mathbf{x}) := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}u.$$

Para  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$D^k u(\mathbf{x}) = \{D^\boldsymbol{\alpha}u(\mathbf{x}) \mid |\boldsymbol{\alpha}| = k\}$$

es el conjunto de todas las derivadas del orden  $k$  de  $u$  en  $\mathbf{x}$ . Suponiendo algún ordenamiento de las derivadas parciales podemos también considerar  $D^k u(\mathbf{x})$  como un punto en  $\mathbb{R}^{n^k}$ . Se define, además,

$$|D^k u| = \left( \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} |D^\boldsymbol{\alpha}u|^2 \right)^{1/2}.$$

Finalmente, para  $k = 1$ ,  $Du \equiv D^1 u$  denota el gradiente de  $u$ ,

$$Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}),$$

mientras que para  $k = 2$ ,  $D^2$  denota la matriz Hessiana, o el Hessiano,

$$D^2u = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

### 1.3. Resultados clásicos: cálculo de varias variables

**1.3.1. Fronteras.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado y  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1.2.** Se dice que la frontera  $\partial U$  de  $U$  pertenece a  $C^k$  si para cada punto  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$  existen  $r > 0$  y una función  $\gamma \in C^k$ ,  $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que — después de intercambiar y reorientar los ejes de coordenadas, si es necesario —

$$U \cap B(\mathbf{x}^0, r) = \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Análogamente se dice que  $\partial U$  pertenece a  $C^\infty$  si  $\partial U \in C^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , y que  $\partial U$  es analítica si la aplicación  $\gamma$  es analítica.

**Definición 1.3.**

- 1.) Si  $\partial U \in C^1$ , entonces a lo largo de  $\partial U$  se define el campo vectorial normal unitario exterior  $\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ . La normal unitaria en  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$  está dada por  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ .
- 2.) Sea  $u \in C^1(\bar{U})$ , entonces  $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu} := \boldsymbol{\nu} \cdot Du$  se llama la derivada normal (exterior) de  $u$ .

Frecuentemente tendremos que hacer un cambio de coordenadas cerca de un punto de  $\partial U$  para “rectificar” la frontera. Específicamente, sea  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$ , y sean  $r$  y  $\gamma$  como arriba. Se define la aplicación  $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$  por

$$y_i = x_i =: \Phi^i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) =: \Phi^n(\mathbf{x}),$$

y escribimos  $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ . Análogamente definimos

$$x_i = y_i =: \Psi^i(\mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad x_n = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) =: \Psi^n(\mathbf{y}),$$

y escribimos  $\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{y})$ . Entonces  $\Phi = \Psi^{-1}$ , y la aplicación  $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  “rectifica”  $\partial U$  cerca de  $\mathbf{x}^0$ . Observar que

$$\det D\Psi = \det D\Phi = 1.$$

**1.3.2. Teorema de Gauß-Green y fórmulas de Green.** En lo siguiente sea  $U$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  con  $\partial U \in C^1$ .

**Teorema 1.11** (Teorema de Gauß-Green). Sea  $u \in C^1(\bar{U})$ , entonces

$$\int_U u_{x_i} d\mathbf{x} = \int_{\partial U} u \nu^i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Teorema 1.12** (Integración por partes). Sean  $u, v \in C^1(\bar{U})$ , entonces

$$\int_U u_{x_i} v \, d\mathbf{x} = - \int_U uv_{x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial U} uv\nu^i \, dS, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.20)$$

*Demostración.* Aplicar el Teorema 1.11 a  $uv$ . ■

**Teorema 1.13** (Fórmulas de Gauß-Green). Sean  $u, v \in C^2(\bar{U})$ , entonces

$$\int_U \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, dS, \quad (1.21)$$

$$\int_U \text{Du} \cdot \text{Dv} \, d\mathbf{x} = - \int_U u \Delta v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} u \, dS, \quad (1.22)$$

$$\int_U (u \Delta v - v \Delta u) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \left( u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \, dS. \quad (1.23)$$

*Demostración.* Usando (1.20) con  $u_{x_i}$  en lugar de  $u$  y  $v \equiv 1$  obtenemos

$$\int_U u_{x_i x_i} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \text{Du} \cdot \boldsymbol{\nu}^i \, dS;$$

sumando esto con respecto a  $i = 1, \dots, n$  obtenemos (1.21). Para demostrar (1.22), usamos (1.20) reemplazando  $v$  por  $v_{x_i}$ . Utilizando una segunda versión de (1.22) con  $u$  y  $v$  intercambiados, la cual restamos de (1.22), llegamos a (1.23). ■

### 1.3.3. Coordenadas polares y fórmula de co-área.

**Teorema 1.14** (Coordenadas polares). Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua e integrable. Entonces

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathbf{x} = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} f \, dS \right) dr. \quad (1.24)$$

*En particular,*

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 : \frac{d}{dr} \left( \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} f \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} f \, dS. \quad (1.25)$$

El Teorema 1.14 es un caso especial del siguiente teorema.

**Teorema 1.15** (Fórmula de co-área). Sea  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz continua y sea para casi todo  $r \in \mathbb{R}$  el conjunto de nivel

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid u(\mathbf{x}) = r\} =: \{u = r\}$$

una hipersuperficie suave  $(n-1)$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua e integrable. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f |\text{Du}| \, d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^\infty \left( \int_{\{u=r\}} f \, dS \right) dr. \quad (1.26)$$

Obviamente el Teorema 1.14 es una consecuencia del Teorema 1.15 para  $u(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ .



**1.3.4. Convolución y suavización.** En lo siguiente, sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto, y para  $\varepsilon > 0$  definimos

$$U_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in U \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Se define la función  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  dada por

$$\eta(\mathbf{x}) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2 - 1}\right) & \text{si } |\mathbf{x}| < 1, \\ 0 & \text{si } |\mathbf{x}| \geq 1; \end{cases} \quad C \text{ se elige tal que } \int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\mathbf{x} = 1. \quad (1.27)$$

La función  $\eta$  se llama *función mollifier estándar*. Para cada  $\varepsilon$  definimos ahora

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{x}\right).$$

Las funciones  $\eta_\varepsilon$  pertenecen a  $C^\infty$  y satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, d\mathbf{x} = 1, \quad \text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon).$$

Ahora sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  localmente integrable. Definimos la *suavización (mollificación)* de  $f$ ,  $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$  sobre  $U_\varepsilon$ , es decir

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) := \int_U \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{B(0, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in U_\varepsilon. \quad (1.28)$$

**Teorema 1.16** (Propiedades de las funciones “mollifier”). *La función  $f^\varepsilon$  dada por (1.28) satisface lo siguiente:*

- (i)  $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ .
- (ii)  $f^\varepsilon \rightarrow f$  c.t.p. cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- (iii) Si  $f \in C(U)$ , entonces  $f^\varepsilon \rightarrow f$  uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $U$ .
- (iv) Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$ , entonces  $f^\varepsilon \rightarrow f$  en  $L^p_{\text{loc}}(U)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Para demostrar el Teorema 1.16 necesitamos el siguiente teorema.

**Teorema 1.17** (Teorema de derivación de Lebesgue). *Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localmente sumable. Entonces*

$$\int_{B(\mathbf{x}_0, r)} g \, d\mathbf{x} \xrightarrow{r \rightarrow 0} g(\mathbf{x}_0) \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ c.t.p.} \quad (1.29)$$

Efectivamente,

$$\int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \, d\mathbf{x} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ c.t.p.} \quad (1.30)$$

Un punto  $\mathbf{x}_0$  en el cual (1.30) es válido se llama punto de Lebesgue de  $g$ .

*Demostración del Teorema 1.16.*

1.) Fijamos  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon$ , el índice  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $h$  tan pequeño que  $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i \in U_\varepsilon$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{f^\varepsilon(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f^\varepsilon(\mathbf{x})}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) \right) - \eta \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \right] f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) \right) - \eta \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \right] f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

para algún conjunto  $V$  abierto,  $V \subset\subset U$ . Puesto que

$$\frac{1}{h} \left[ \eta \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) \right) - \eta \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \right] \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right)$$

uniformemente sobre  $V$ , la derivada  $(\partial f^\varepsilon / \partial x_i)(\mathbf{x})$  existe y

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Un argumento similar demuestra que  $D^\alpha f^\varepsilon(\mathbf{x})$  existe y que

$$D^\alpha f^\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in U_\varepsilon,$$

para cada multi-índice  $\alpha$ . Esto concluye la demostración de (i).

2.) En virtud del Teorema 1.17 concluimos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in U \text{ c.t.p.} \quad (1.31)$$

Sea ahora  $\mathbf{x} \in U$  un punto de Lebesgue de  $f$ . Entonces

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| &= \left| \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta \left( \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} \\ &\leq C \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

donde usamos (1.31), y lo que implica (ii).

3.) Sea  $f \in C(U)$ . Dado que  $V \subset\subset U$ , podemos elegir un conjunto  $W$  tal que  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Puesto que  $f$  es uniformemente continua en  $W$ , el límite (1.31) es válido uniformemente para  $\mathbf{x} \in V$ . En virtud de lo anterior,  $f^\varepsilon \rightarrow f$  uniformemente en  $V$ .

4.) Supongamos ahora  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p(U)$ . Sea  $V \subset\subset U$  un subconjunto abierto y como arriba,  $W$  un conjunto abierto con  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Demostraremos ahora que

$$\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)} \quad (1.32)$$

si  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño. Notamos primero que si  $1 \leq p < \infty$  y  $\mathbf{x} \in V$ ,

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(\mathbf{x})| &= \left| \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} (\eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}))^{(p-1)/p} (\eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}))^{1/p} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

$$\leq \left( \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right)^{(p-1)/p} \left( \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |f(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \right)^{1/p}.$$

En virtud de

$$\int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 1$$

la última desigualdad implica que

$$\begin{aligned} \int_V |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} &\leq \int_V \left( \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |f(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} \\ &\leq \int_W |f(\mathbf{y})|^p \left( \int_{B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \int_W |f(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

siempre que  $\varepsilon > 0$  sea suficientemente pequeño. Esto implica que (1.32) es válido.

5.) Ahora fijamos  $V \subset\subset W \subset\subset U$ ,  $\delta > 0$ , y sea  $g \in C(W)$  tal que  $\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta$ . En virtud de (1.32) obtenemos

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &\leq \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\delta + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

Considerando que  $g^\varepsilon \rightarrow g$  uniformemente sobre  $V$ , concluimos que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta.$$

■

**1.3.5. Teorema de la Función Inversa.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $C^1$ ,  $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)$ . Sean  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Recordemos, además, que

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{x_1}^1 & \cdots & f_{x_n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_1}^n & \cdots & f_{x_n}^n \end{bmatrix}$$

es la matriz funcional (o matriz Jacobiana) de  $\mathbf{f}$ . Se define, además,

$$J\mathbf{f} := |\det D\mathbf{f}| = \left| \frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|.$$

**Teorema 1.18** (Teorema de la Función Inversa). Sean  $\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$  y  $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Entonces existen conjuntos abiertos  $V \subset U$  con  $\mathbf{x}_0 \in V$  y  $W \subset \mathbb{R}^n$  tales que

- (i) la aplicación  $\mathbf{f} : V \rightarrow W$  es biyectiva,
- (ii) la inversa  $\mathbf{f}^{-1} : W \rightarrow V$  pertenece a  $C^1$ ,
- (iii) si  $\mathbf{f} \in C^k$ , entonces  $\mathbf{f}^{-1} \in C^k$ ,  $k = 2, 3, \dots$

**1.3.6. Teorema de Funciones Implícitas.** Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , y

$$\mathbb{R}^{n+m} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Sea  $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$  un conjunto abierto y sea  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\mathbf{f} \in C^1$ ,  $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^m)$ . Sean  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in U$  con  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ . Sea ahora

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{x_1}^1 & \cdots & f_{x_n}^1 & f_{y_1}^1 & \cdots & f_{y_m}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_1}^m & \cdots & f_{x_n}^m & f_{y_1}^m & \cdots & f_{y_m}^m \end{bmatrix}_{m \times (n+m)} =: [D_{\mathbf{x}}\mathbf{f} \quad D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}],$$

$$J_{\mathbf{y}}\mathbf{f} := |\det D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}| = \left| \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right|.$$

**Teorema 1.19** (Teorema de Funciones Implícitas). Si  $\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  y  $J_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$  entonces existen un conjunto abierto  $V \subset U$  con  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in V$  y un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{x}_0 \in W$  y una aplicación  $\mathbf{g} \in C^1$ ,  $\mathbf{g} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que

- (i)  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ ,
- (ii)  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{z}_0$  para  $\mathbf{x} \in W$ ,
- (iii) si  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$ , entonces  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ ,
- (iv) si  $\mathbf{f} \in C^k$ , entonces  $\mathbf{g} \in C^k$  para  $k = 2, 3, \dots$ .

**1.3.7. Convergencia uniforme.** Recordamos el criterio de Arzelà-Ascoli para la convergencia uniforme. Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones reales definidas sobre  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\exists M > 0 : \forall k \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |f_k(\mathbf{x})| \leq M,$$

y sean las funciones  $f_k$  uniformemente equicontinuas, lo que significa que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \forall k \in \mathbb{N} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta \implies |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Entonces existen una subsucesión  $\{f_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y una función continua  $f$  tal que  $f_{k_j} \rightarrow f$  cuando  $j \rightarrow \infty$  uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.4. Clasificación de EDPs de segundo orden

Una ecuación diferencial parcial de segundo orden en  $n$  variables independientes  $x_1, \dots, x_n$  para una función incógnita  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  es la ecuación

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0, \quad n \geq 2. \quad (1.33)$$

Las ecuaciones de segundo orden que aparecen en las aplicaciones casi siempre son cuasi-lineales, semi-lineales o lineales y pueden ser representadas en la forma

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^n A_{ik} u_{x_i x_k} = f. \quad (1.34)$$

**Definición 1.4.** Una ecuación diferencial parcial de la forma (1.34) se llama

- cuasi-lineal, si por lo menos uno de los coeficientes  $A_{ik}$  es una función de por lo menos una de las variables  $u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$ ,

- semi-lineal, si las funciones  $A_{ik}$  son a lo más funciones de  $x_1, \dots, x_n$ , pero  $f$  depende de forma no lineal de por lo menos una de las variables  $u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$ ,
- lineal, si las funciones  $A_{ik}$  son a lo más funciones de  $x_1, \dots, x_n, y$

$$f = \sum_{i=1}^n A_i u_{x_i} + Au + B, \quad (1.35)$$

donde  $A_1, \dots, A_n, A$  y  $B$  pueden ser funciones de las variables independientes  $x_1, \dots, x_n$ .

Para la clasificación según tipo, definimos la forma cuadrática

$$Q = \sum_{i,k=1}^n A_{ik} p_i p_k \quad (1.36)$$

con las variables  $p_1, \dots, p_n$ . Definiendo la matriz  $\mathbf{A} := (A_{ik})$  y el vector  $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_n)^T$ , podemos escribir (1.36) como  $Q = \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ . Se supone que  $\mathbf{A}$  es simétrica (si no lo es, reemplazamos  $\mathbf{A}$  por  $\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ ). Supongamos que en un dominio  $B \subset \mathbb{R}^n$  existe una solución  $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ . En el caso cuasi-lineal, se supone que la solución está insertada en los  $A_{ik}$ , entonces en cada caso  $\mathbf{A}$  depende sólo de  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Debido a la simetría de  $\mathbf{A}$ , existe una matriz ortonormal  $\mathbf{T}$  tal que

$$\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{B},$$

donde  $\mathbf{B} = \text{diag}(B_1, \dots, B_n)$ , y  $B_1, \dots, B_n$  son los valores propios de  $\mathbf{A}$ . Definiendo  $\mathbf{q} = \mathbf{T}^T \mathbf{p}$ , tenemos

$$Q = \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q}.$$

Se llama *índice inercial*  $\tau$  al número de los  $B_i$  negativos y *defecto*  $\delta$  al número de los  $B_i = 0$  de la forma cuadrática  $Q$ .

**Definición 1.5.** En  $\mathbf{x} \in B \subset \mathbb{R}^n$ , la ecuación diferencial parcial (1.34) se llama

- hiperbólica, si allí  $\delta = 0$  y  $\tau = 1$  o  $\tau = n - 1$ ,
- parabólica, si allí  $\delta > 0$ ,
- elíptica, si allí  $\delta = 0$  y  $\tau = 0$  o  $\tau = n$ , y
- ultrahiperbólica, si allí  $\delta = 0$  y  $1 < \tau < n - 1$  (esto puede ocurrir sólo si  $n \geq 4$ ).

La clasificación es del tipo geométrico para ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, dado que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = c, \quad c > 0$$

es un hiperboloide, un paraboloide o un elipsoide en los respectivos casos (a), (b) y (c) de la Definición 1.5. Por otro lado, la clasificación puede ser realizada sólo en un punto  $\mathbf{x}$ , y entonces es de naturaleza local. Si todos los coeficientes  $A_{ik}$  son constantes, la clasificación es global. De hecho, el tipo de una ecuación cuasi-lineal no sólo depende de  $\mathbf{x} \in B \subset \mathbb{R}^n$ , sino que también del valor de la solución. Por ejemplo, la ecuación

$$u_{x_1 x_1} + u u_{x_2 x_2} = 0$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica en un punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  dependiendo de si  $u(\mathbf{x}) < 0$ ,  $u(\mathbf{x}) = 0$  o  $u(\mathbf{x}) > 0$  en este punto.

En lo siguiente, nos restringimos al caso  $n = 2$ , y ponemos  $x = x_1$  e  $y = x_2$ . Consideramos la ecuación

$$Lu \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f, \quad (1.37)$$

es decir, consideramos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \text{con los valores propios } \lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}.$$

Obviamente,  $\text{sgn } \lambda_1 = -\text{sgn } \lambda_2$  si  $ac - b^2 < 0$ ,  $\lambda_1 = a + c$  y  $\lambda_2 = 0$  si  $ac - b^2 = 0$ , y  $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } \lambda_2$  si  $ac - b^2 > 0$ .

**Lema 1.1.** *En un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fijo, la ecuación diferencial parcial (1.37) es del tipo*

$$\begin{pmatrix} \text{hiperbólico} \\ \text{parabólico} \\ \text{elíptico} \end{pmatrix} \text{ si en este punto, } \begin{pmatrix} ac - b^2 < 0 \\ ac - b^2 = 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.5. Análisis Funcional Lineal

**1.5.1. Espacios de Banach.** Sea  $X$  un espacio lineal real.

**Definición 1.6** (Norma). *Una aplicación  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  se llama norma si*

- (i)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  para todo  $u, v \in X$ .
- (ii)  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$  para todo  $u \in X$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $\|u\| = 0$  si y sólo si  $u = 0$ .

En lo siguiente se supone que  $X$  es un espacio lineal normado.

**Definición 1.7** (Convergencia). *Se dice que una sucesión  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  converge a  $u$  en  $X$ ,  $u_k \rightarrow u$ , si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0.$$

**Definición 1.8** (Sucesión de Cauchy, espacio de Banach).

- (i) *Una sucesión  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  se llama sucesión de Cauchy si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que*

$$\|u_k - u_l\| < \varepsilon \quad \text{para todo } k, l \geq N.$$

- (ii) *Se dice que el espacio  $X$  es completo si cada sucesión de Cauchy en  $X$  converge, es decir siempre que  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  sea una sucesión de Cauchy, existe  $u \in X$  tal que  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $u$ .*
- (iii) *Un espacio lineal, normado y completo se llama espacio de Banach.*

**Definición 1.9.** *Un conjunto  $X$  se llama separable si  $X$  contiene un subconjunto denso y contable.*

**1.5.2. Espacios de Hilbert.** Sea  $H$  un espacio lineal real.

**Definición 1.10** (Producto interior). *Una aplicación  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  se llama producto interior si*

- (i)  $(u, v) = (v, u)$  para todo  $u, v \in H$ ,
- (ii) la aplicación  $u \mapsto (u, v)$  es lineal para todo  $v \in H$ ,
- (iii)  $(u, u) \geq 0$  para todo  $u \in H$ ,
- (iv)  $(u, u) = 0$  si y sólo si  $u = 0$ .

Si  $(\cdot, \cdot)$  es un producto interior, la norma asociada está definida por

$$\|u\| := (u, u)^{1/2}, \quad u \in H. \quad (1.38)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.8) afirma que

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad u, v \in H. \quad (1.39)$$

Mediante (1.39) se verifica fácilmente que (1.38) define una norma sobre  $H$ .

**Definición 1.11** (Espacio de Hilbert). *Un espacio de Hilbert  $H$  es un espacio de Banach equipado de un producto interior que genera la norma.*

**Ejemplo 1.1.**

- a) El espacio  $L^2(U)$  es un espacio de Hilbert con el producto interior definido por

$$(f, g) = \int_U f g \, d\mathbf{x}.$$

- b) El espacio de Sobolev  $H^1(U)$  es un espacio de Hilbert con

$$(f, g) = \int_U (fg + Df \cdot Dg) \, d\mathbf{x}.$$

■

**Definición 1.12.**

- (i) Dos elementos  $u, v \in H$  son ortogonales si  $(u, v) = 0$ .
- (ii) Una base numerable  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H$  se llama ortonormal si

$$(w_k, w_l) = \begin{cases} 0 & \text{para } k, l \in \mathbb{N}, k \neq l, \\ \|w_k\|^2 = 1 & \text{para } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si  $u \in H$  y  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H$  es una base ortonormal, entonces podemos escribir

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k) w_k,$$

donde la serie converge en  $H$ . Adicionalmente,

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k)^2.$$

(iii) Sea  $S$  un subespacio de  $H$ . Entonces

$$S^\perp = \{u \in H \mid (u, v) = 0 \text{ para todo } v \in S\}$$

es el subespacio ortogonal a  $S$ .

**1.5.3. Operadores lineales acotados.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Banach reales.

**Definición 1.13.**

(i) Una aplicación  $A : X \rightarrow Y$  se llama operador lineal siempre que

$$\forall u, v \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad A[\lambda u + \mu v] = \lambda Au + \mu Av.$$

(ii) Se define como rango de un operador  $A$  el conjunto

$$R(A) := \{v \in Y \mid v = Au \text{ para algún } u \in X\},$$

y como núcleo o espacio nulo el conjunto

$$N(A) := \{u \in X \mid Au = 0\}.$$

(iii) Un operador lineal  $A : X \rightarrow Y$  se llama acotado si

$$\|A\| := \sup\{\|Au\|_Y \mid \|u\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Se verifica fácilmente que un operador lineal acotado  $A : X \rightarrow Y$  es continuo.

**Definición 1.14** (Operador cerrado). Una operador lineal  $A : X \rightarrow Y$  se llama cerrado si siempre que  $u_k \rightarrow u$  en  $X$  y  $Au_k \rightarrow v$  en  $Y$ , entonces  $Au = v$ .

**Teorema 1.20** (Teorema del grafo cerrado). Sea  $A : X \rightarrow Y$  un operador lineal y cerrado. Entonces  $A$  es acotado.

**Definición 1.15.** Sea  $A : X \rightarrow X$  un operador lineal acotado.

(i) El conjunto

$$\varrho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid (A - \eta I) \text{ es un operador biyectivo}\}$$

se llama conjunto resolvente de  $A$ .

(ii) El conjunto  $\sigma(A) := \mathbb{R} \setminus \varrho(A)$  se llama espectro de  $A$ .

Si  $\eta \in \varrho(A)$ , entonces el Teorema 1.20 implica que  $(A - \eta I)^{-1} : X \rightarrow X$  es un operador lineal acotado.

**Definición 1.16.**

(i) Se dice que  $\eta \in \sigma(A)$  es un valor propio de  $A$  siempre que

$$N(A - \eta I) \neq \{0\}.$$

Se escribe  $\sigma_p(A)$  para denotar el conjunto de los valores propios de  $A$ ; el conjunto  $\sigma_p(A)$  se llama espectro puntual de  $A$ .

(ii) Si  $\eta \in \sigma_p(A)$  y  $w \neq 0$  satisface

$$Aw = \eta w,$$

entonces  $w$  se llama vector propio asociado.



**Definición 1.17.**

- (i) *Un operador lineal acotado  $u^* : X \rightarrow \mathbb{R}$  se llama funcional lineal acotado sobre  $X$ .*
- (ii) *Se denota por  $X^*$  al conjunto de todos los funcionales lineales acotados sobre  $X$ . El conjunto  $X^*$  se llama espacio dual de  $X$ .*
- (iii) *Para  $u \in X$  y  $u^* \in X^*$  se escribe  $\langle u^*, u \rangle$  para denotar el número real  $u^*(u)$ . El símbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto de dualidad entre  $X^*$  y  $X$ .*



## Teoría clásica: cuatro EDPs lineales importantes

### 2.1. La ecuación de transporte

La *ecuación de transporte* con coeficientes constantes está dada por

$$u_t + \mathbf{b} \cdot Du = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  es un vector fijo,  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  es la función desconocida,  $u = u(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , y  $Du = D_{\mathbf{x}}u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ .

Para determinar las soluciones de (2.1) supongamos que  $u$  es una solución suave, y que queremos calcularla. Para tal efecto tomamos en cuenta que (2.1) informa que cierta derivada direccional de  $u$  debe desaparecer. Aprovechando de esta observación fijamos un punto  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  y definimos  $z(s) := u(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s)$  para  $s \in \mathbb{R}$ . Definiendo el símbolo  $\dot{\cdot} \equiv d/ds$  para la derivada con respecto a  $s$  obtenemos

$$\dot{z}(s) = Du(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) \cdot \mathbf{b} + u_t(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) = 0, \quad (2.2)$$

donde la igualdad a cero es consecuencia de (2.1). Concluimos que  $z(\cdot)$  es una función constante de  $s$ , por lo tanto para cualquier punto  $(\mathbf{x}, t)$ ,  $u$  es constante a lo largo de la recta que pasa por  $(\mathbf{x}, t)$  con la dirección  $(\mathbf{b}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces si conocemos el valor de  $u$  en algún punto de cada una de estas rectas conocemos  $u$  en todas partes de  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ .

Consideremos ahora el problema de valores iniciales

$$u_t + \mathbf{b} \cdot Du = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty); \quad u = g, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0. \quad (2.3)$$

La recta que pasa por  $(\mathbf{x}, t)$  tiene una representación paramétrica a través de  $(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s)$  para  $s \in \mathbb{R}$ . Esta recta intersecta el plano  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  cuando  $s = -t$ , es decir en el punto  $(\mathbf{x} - t\mathbf{b}, 0)$ . Puesto que  $u$  es constante a lo largo de esta recta y  $u(\mathbf{x} - t\mathbf{b}, 0) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b})$  concluimos que la solución de (2.3) está dada por

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Entonces, si (2.3) posee una solución  $u$  suficientemente regular, la solución debe estar dada por (2.4). Viceversa podemos fácilmente verificar que si  $g \in C^1$ , la función  $u$  definida por (2.4) es una solución de (2.3).

Comentamos que si  $g \notin C^1$ , el problema (2.3) no admite una solución en  $C^1$ . Pero incluso en este caso (2.4) es un candidato a solución muy razonable. Informalmente podemos declarar  $u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b})$  como “solución débil” de (2.3) incluso cuando  $g \notin C^1$ ; la idea de considerar una función discontinua como solución de una EDP se profundiza en el estudio de leyes de conservación.

Consideremos ahora el problema no homogéneo

$$u_t + \mathbf{b} \cdot Du = f, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty); \quad u = g, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0. \quad (2.5)$$

Inspirados por las consideraciones anteriores, definimos  $z(s)$  como arriba. La ecuación diferencial ordinaria (2.2) ahora es reemplazada por

$$\dot{z}(s) = Du(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) \cdot \mathbf{b} + u_t(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) = f(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s); \quad (2.6)$$

la segunda igualdad proviene de la EDP en (2.5). Concluimos que

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x} - t\mathbf{b}) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \dot{z}(s) \, ds = \int_{-t}^0 f(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) \, ds \\ &= \int_0^t f(\mathbf{x} + (s-t)\mathbf{b}, s) \, ds, \end{aligned}$$

luego la solución de (2.5) está dada por

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b}) + \int_0^t f(\mathbf{x} + (s-t)\mathbf{b}, s) \, ds, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Más adelante esta fórmula será utilizada para resolver la ecuación de la onda uni-dimensional.

## 2.2. Las ecuaciones de Laplace y de Poisson

La ecuación de Laplace está dada por

$$\Delta u = 0 \quad (2.8)$$

y la ecuación de Poisson por

$$-\Delta u = f, \quad (2.9)$$

respectivamente. En ambos casos,  $\mathbf{x} \in U$  y la desconocida es la función  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(\mathbf{x})$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto dado; en el caso de la ecuación de Poisson, (2.9), la función  $f$  está dada también, y

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

**Definición 2.1** (Función armónica). *Una función  $u \in C^2$  que satisface la ecuación de Laplace, (2.8), se llama armónica.*

**2.2.1. Interpretación física.** La ecuación de Laplace (2.8) aparece en un gran número de contextos. Típicamente,  $u$  representa la densidad de alguna cantidad (por ejemplo, una concentración química) en equilibrio. Luego, si  $V$  es alguna subregión suave de  $U$ , el flujo neto de  $u$  por la frontera  $\partial V$  de  $V$  es cero, por lo tanto

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS = 0,$$

donde  $\mathbf{F}$  es la densidad del flujo y  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector normal exterior de  $\partial V$ . Aplicando el Teorema de Gauss-Green se tiene que

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS = 0,$$

es decir, como  $V$  fue elegido arbitrario,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \quad \text{sobre } U. \quad (2.10)$$

En muchas circunstancias el flujo  $\mathbf{F}$  es proporcional a  $Du$ , pero orientado hacia la dirección opuesta, es decir el flujo es desde regiones de concentración alta hacia regiones de concentración baja. Entonces

$$\mathbf{F} = -aDu, \quad a > 0. \quad (2.11)$$

Insertando (2.11) en (2.10), obtenemos la ecuación de Laplace  $\operatorname{div}(Du) = \Delta u = 0$ . Si  $u$  denota

$$\begin{pmatrix} \text{la concentración química} \\ \text{la temperatura} \\ \text{el potencial electrostático} \end{pmatrix}, \text{ entonces (2.11) es la ley } \begin{pmatrix} \text{de Fick de difusión} \\ \text{de Fourier de conducción del calor} \\ \text{de Ohm de conducción eléctrica} \end{pmatrix}.$$

**2.2.2. Solución fundamental.** Una buena estrategia para resolver una EDP consiste en primeramente identificar algunas soluciones explícitas y luego, cuando la ecuación es lineal, generar soluciones más complicadas utilizando las soluciones anteriormente determinadas. Además, resulta muy útil limitarse a soluciones con ciertas propiedades de simetría. Dado que la ecuación de Laplace (2.8) es invariante bajo rotaciones, buscaremos primero soluciones radiales, es decir soluciones que dependan de  $r = |\mathbf{x}|$ .

Ahora, tratemos el planteo

$$u(\mathbf{x}) = v(r), \quad r = |\mathbf{x}| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

para encontrar (si es posible) una función  $v$  tal que se satisfaga  $\Delta u = 0$ . Notando que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

podemos expresar ciertas derivadas parciales de  $u$  en términos de  $v$  como sigue:

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto,

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r),$$

lo que implica que  $\Delta u = 0$  si y sólo si

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0.$$

Si  $v' \neq 0$  concluimos que

$$(\log(|v'|))' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

entonces  $v'(r) = a/r^{n-1}$  para alguna constante  $a$ . Si  $r > 0$ , sabemos que

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & \text{para } n = 2, \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

con algunas constantes  $b$  y  $c$ .

**Definición 2.2** (Solución fundamental de la ecuación de Laplace). *Sea  $\alpha(n)$  el volumen de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces la siguiente función se llama solución fundamental de la ecuación de Laplace:*

$$\Phi(\mathbf{x}) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}| & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

De vez en cuando abusaremos la notación escribiendo  $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(|\mathbf{x}|)$  para enfatizar que la solución es radial. Se tienen las cotas

$$|D\Phi(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|^n}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

para alguna constante  $C > 0$ .

**2.2.3. La ecuación de Poisson.** Según nuestra construcción, la función  $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x})$  es armónica para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Moviendo el origen a un punto nuevo  $\mathbf{y}$  no cambia la ecuación de Laplace (2.8), entonces  $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  también es armónica como función de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Ahora, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces también la función  $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  es armónica, y también la suma sobre un número finito de tales expresiones,

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_{i=1}^N \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}_i)f(\mathbf{y}_i), \quad \mathbf{x} \notin \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$$

es armónica. Esto sugiere que posiblemente la convolución

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}} d\mathbf{y} & \text{si } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.12)$$

es una solución de la ecuación de Laplace. Para verificar esto uno podría pensar en calcular

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0. \quad (\text{¡falso!}) \quad (2.13)$$

¡Pero esto es falso! El problema es que  $D^2\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  no es integrable cerca de la singularidad en  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ , por lo tanto la derivación bajo la integral es injustificada e incorrecta. Hay que proceder con más cuidado al calcular  $\Delta u$ . Resultará que (2.12) no es una solución de la ecuación de Laplace (2.8), sino que de la ecuación de Poisson (2.9).

**Teorema 2.1** (Solución de la ecuación de Poisson). *Sea  $u$  definida por (2.12) y  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Entonces*

- (i)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,
- (ii)  $-\Delta u = f$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.*

1.) Sabemos que

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

por lo tanto

$$\frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x})}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{h} \, d\mathbf{y},$$

donde  $h \neq 0$  y  $\mathbf{e}_i$  es el  $i$ -ésimo vector unitario,  $i = 1, \dots, n$ . Por otro lado,

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{uniformemente sobre } \mathbb{R}^n,$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad i = 1, \dots, n$$

y análogamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Dado que la expresión en el lado derecho de (2.14) es continua con respecto a  $\mathbf{x}$ , podemos concluir que  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

2.) Puesto que  $\Phi \rightarrow \infty$  cuando  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ , tenemos que aislar esta singularidad en una “bolita”. Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \mathcal{I}_\varepsilon + \mathcal{J}_\varepsilon, \quad (2.15)$$

donde definimos

$$\mathcal{I}_\varepsilon := \int_{B(0, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathcal{J}_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Podemos acotar  $\mathcal{I}_\varepsilon$  de la siguiente manera:

$$|\mathcal{I}_\varepsilon| \leq C \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0, \varepsilon)} |\Phi(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\log \varepsilon| & \text{si } n = 2, \\ C\varepsilon^2 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Por otro lado, una integración por partes nos entrega que

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \mathcal{K}_\varepsilon + \mathcal{L}_\varepsilon,$$

donde

$$\mathcal{K}_\varepsilon := - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} D\Phi(\mathbf{y}) \cdot D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon := \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}),$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es la normal interior (!) de  $\partial B(0, \varepsilon)$ . Podemos verificar que

$$|\mathcal{L}_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi(\mathbf{y})| \, dS(\mathbf{y}) \leq \begin{cases} C\varepsilon |\log \varepsilon| & \text{si } n = 2, \\ C\varepsilon & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

3.) Integrandolo por partes y considerando que  $\Phi$  es armónica lejos del origen obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta\Phi(\mathbf{y})f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\mathbf{y})f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\mathbf{y})f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Considerando que

$$D\Phi(\mathbf{y}) = -\frac{1}{n\alpha(n)|\mathbf{y}|^n}\mathbf{y} \quad \text{para } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

y que

$$\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{|\mathbf{y}|}\mathbf{y} = -\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{y} \quad \text{sobre } \partial B(0,\varepsilon)$$

podemos concluir que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \boldsymbol{\nu} \cdot D\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \quad \text{sobre } \partial B(0,\varepsilon).$$

Puesto que  $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$  es el área de superficie de  $\partial B(0,\varepsilon)$ , sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\varepsilon &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= - \int_{\partial B(\mathbf{x},\varepsilon)} f(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -f(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.16}$$

4.) Combinando (2.15)–(2.16) y tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  concluimos que efectivamente  $-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . ■

Algunas veces se escribe  $-\Delta\Phi = \delta_0$  en  $\mathbb{R}^n$ , donde  $\delta_0$  denota la medida de Dirac en  $\mathbb{R}^n$  que coloca la masa unitaria en el origen. Adoptando esta notación podemos escribir formalmente

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\mathbf{x}}f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

de acuerdo con el Teorema 2.1. Esto corrige la computación errónea (2.13).

**2.2.4. Fórmulas del valor medio.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $u$  una función armónica en  $U$ . Luego derivaremos las *fórmulas del valor medio* para una función armónica, las que constatan que  $u(\mathbf{x})$  es igual tanto al promedio sobre  $\partial B(\mathbf{x}, r)$  como al promedio sobre  $B(\mathbf{x}, r)$ , siempre que  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ . Estas fórmulas tienen consecuencias interesantes.

**Teorema 2.2** (Fórmulas del valor medio para funciones armónicas). *Si  $u \in C^2(U)$  es armónica, entonces para cada bola  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ ,*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, dS = \int_{B(\mathbf{x}, r)} u \, d\mathbf{y}.\tag{2.17}$$

*Demostración.*



1.) Sea la función  $\phi$  definida por

$$\phi(r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}).$$

Luego calculamos que

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0,1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, dS(\mathbf{z}),$$

y aplicando las fórmulas de Green obtenemos

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \left( \frac{1}{r}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS(\mathbf{y}) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0. \end{aligned}$$

Entonces  $\phi$  es constante, por lo tanto

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}).$$

2.) Utilizando coordenadas polares obtenemos

$$\int_{B(\mathbf{x}, r)} u \, d\mathbf{y} = \int_0^r \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}, s)} u \, dS \right) \, ds = u(\mathbf{x}) \int_0^r n\alpha(n)s^{n-1} \, ds = \alpha(n)r^n u(\mathbf{x}).$$

■

**Teorema 2.3.** Si una función  $u \in C^2(U)$  satisface

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, dS$$

para toda bola  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ , entonces  $u$  es armónica.

*Demostración.* Si  $\Delta u \neq 0$ , entonces existe alguna bola  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$  tal que (por ejemplo)  $\Delta u > 0$  sobre  $B(\mathbf{x}, r)$ . Pero en este caso se tendría para la función  $\phi$  definida en la demostración del Teorema 2.2

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} > 0,$$

una contradicción. ■

**2.2.5. Propiedades de funciones armónicas.** En lo siguiente, siempre se supone que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y acotado.

**Teorema 2.4** (Principio del máximo fuerte para funciones armónicas). *Sea la función  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  armónica en  $U$ . Entonces*

- (i)  $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$ .
- (ii) Si  $U$  es conexo y existe un punto  $\mathbf{x}_0 \in U$  tal que  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{U}} u$ , entonces  $u$  es constante sobre  $U$ .

La propiedad (i) es el *principio del máximo* para la ecuación de Laplace, y (ii) es el *principio del máximo fuerte*. Reemplazando  $u$  por  $-u$  obtenemos enunciados similares con “mín” en lugar de “máx”.

*Demostración.* Supongamos que existe algún punto  $\mathbf{x}_0 \in U$  tal que

$$u(\mathbf{x}_0) = M := \max_{\bar{U}} u.$$

Entonces para  $r \in (0, \text{dist}(\mathbf{x}_0, \partial U))$  el Teorema 2.2 asegura que

$$M = u(\mathbf{x}_0) = \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} u \, d\mathbf{y} \leq M.$$

Tenemos igualdad solamente si  $u \equiv M$  sobre  $B(\mathbf{x}_0, r)$ , por lo tanto vemos que  $u(\mathbf{y}) = M$  para todo  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ . Entonces el conjunto  $\{\mathbf{x} \in U \mid u(\mathbf{x}) = M\}$  es abierto y relativamente cerrado en  $U$  (es decir, su intersección con  $U$  es cerrada), por lo tanto este conjunto es igual a  $U$  si  $U$  es conexo. Esto implica que (ii) es válido, lo que a su vez implica (i). ■

Comentamos que el principio del máximo fuerte dice, en particular, que si  $U$  es conexo y  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  satisface  $\Delta u = 0$  en  $U$  y  $u = g$  sobre  $\partial U$  con  $g \geq 0$ , entonces  $u > 0$  en todas partes de  $U$  si  $g > 0$  en alguna parte de  $\partial U$ .

**Teorema 2.5** (Unicidad de soluciones de la ecuación de Poisson). *Sean  $g \in C(\partial U)$  y  $f \in C(U)$ . Entonces existe a lo más una solución  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  del problema*

$$-\Delta u = f \quad \text{en } U, \quad u = g \quad \text{en } \partial U. \quad (2.18)$$

*Demostración.* Sean  $u$  y  $\tilde{u}$  dos funciones que satisfagan (2.18). Entonces basta aplicar el Teorema 2.4 a la función  $w = \pm(u - \tilde{u})$ . (En la Sección 2.2.8 se presentará una demostración alternativa del Teorema 2.5 basada en métodos de energía.) ■

Ahora demostraremos que si  $u \in C^2$  es armónica, entonces  $u \in C^\infty$ . El punto interesante es que la estructura de la ecuación de Laplace implica que todas las derivadas parciales de  $u$  existen, incluso aquellas que no están presentes en la ecuación.

**Teorema 2.6** (Suavidad). *Si  $u \in C(U)$  satisface la propiedad del valor medio (2.17) para cada bola  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ , entonces  $u \in C^\infty(U)$ .*

Notar que  $u$  no necesariamente debe ser suave, o incluso continua, hasta la frontera  $\partial U$  de  $U$ .

*Demostración.* Sea  $\eta$  una función mollifier estándar, y recordemos que  $\eta$  es una función radial. Sea  $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$  definida sobre  $U_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in U \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \partial U) > \varepsilon\}$ . Ya sabemos que  $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ . Demostraremos ahora que  $u \equiv u^\varepsilon$  en  $U_\varepsilon$ . Pero para  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon$  sabemos que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \int_U \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\varepsilon}\right) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, dS \right) dr = \frac{u(\mathbf{x})}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n)r^{n-1} dr \\ &= u(\mathbf{x}) \int_{B(0, \varepsilon)} \eta_\varepsilon \, d\mathbf{y} = u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Entonces  $u^\varepsilon \equiv u$  en  $U_\varepsilon$ , por lo tanto  $u \in C^\infty(U_\varepsilon)$  para cada  $\varepsilon > 0$ . ■

**Teorema 2.7** (Cotas para las derivadas de una función armónica). *Si  $u$  es armónica en  $U$ , entonces*

$$|D^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} \quad (2.19)$$

para cada bola  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset U$  y cada multi-índice  $\alpha$  con  $|\alpha| = k$ . Aquí

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}; \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

*Demostración.*

- 1.) Para demostrar (2.19) y (2.20) usaremos el método de inducción sobre  $k$ . El caso  $k = 0$  sigue inmediatamente de la fórmula del valor medio (2.17). Para  $k = 1$  derivamos la ecuación de Laplace para notar que  $u_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es armónica, por lo tanto

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_{B(\mathbf{x}_0, r/2)} u_{x_i} \, d\mathbf{x} \right| = \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r/2)} uv_i \, dS \right| \\ &\leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x}_0, r/2))}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ahora, si  $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{x}_0, r/2)$ , entonces  $B(\mathbf{x}, r/2) \subset B(\mathbf{x}_0, r) \subset U$ , por lo tanto

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))},$$

usando (2.19) y (2.20) para  $k = 0$ . Combinando las desigualdades arriba, obtenemos

$$|D^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))} \quad \text{si } |\alpha| = 1.$$

Esto demuestra que (2.19) y (2.20) son válidas para  $k = 1$ .

- 2.) Supongamos ahora que  $k \geq 2$  y que se haya demostrado (2.19) y (2.20) para todas las bolas en  $U$  y cada multi-índice  $\alpha$  tal que  $|\alpha| \leq k - 1$ . Fijamos  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset U$ , y sea  $\alpha$  un multi-índice con  $|\alpha| = k$ . Entonces  $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $|\beta| = k - 1$ . Utilizando un cálculo similar a la derivación de (2.21) llegamos a

$$|D^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(\mathbf{x}_0, r/k))}. \quad (2.22)$$

Si  $x \in \partial B(\mathbf{x}_0, r/k)$ , entonces

$$B\left(\mathbf{x}, \frac{k-1}{k}r\right) \subset B(\mathbf{x}_0, r) \subset U,$$

o sea (2.19), (2.20) para  $k - 1$  implican que

$$|D^\beta u(\mathbf{x})| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0, r))}. \quad (2.23)$$

Combinando (2.22) y (2.23) obtenemos la desigualdad

$$|D^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0,r))},$$

la cual establece que (2.19), (2.20) son válidas para  $|\alpha| = k$ . ■

En lo siguiente veremos que no existen funciones armónicas no triviales globalmente acotadas.

**Teorema 2.8** (Teorema de Liouville). *Si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica y acotada, entonces  $u$  es constante.*

*Demostración.* Sean  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ . Entonces aplicando el Teorema 2.7 obtenemos

$$|Du(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0,r))} \leq \frac{\sqrt{n}C_1\alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Entonces  $Du \equiv 0$ , por lo tanto  $u$  es constante. ■

**Teorema 2.9** (Fórmula de representación de Poisson). *Sea  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 3$ . Entonces cada solución acotada de  $-\Delta u = f$  en  $\mathbb{R}^n$  es de la forma*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

para alguna constante  $C$ .

*Demostración.* Puesto que  $\Phi(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  en el caso  $n \geq 3$ ,

$$\bar{u}(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

es una solución acotada de  $-\Delta u = f$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $u$  es otra solución, entonces  $w := u - \bar{u}$  es constante, según el Teorema 2.8. ■

**Teorema 2.10** (Analiticidad de funciones armónicas). *Si  $u$  es armónica en  $U$ , entonces  $u$  es analítica.*

*Demostración.*

- 1.) Fijamos algún punto  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Hay que demostrar que  $u$  puede ser representada por una serie de potencias en alguna vecindad de  $\mathbf{x}_0$ . Sea

$$r := \frac{1}{4} \text{dist}(\mathbf{x}_0, \partial U),$$

entonces la siguiente cantidad es finita:

$$M := \frac{1}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(\mathbf{x}_0,2r))}.$$

2.) Como  $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}_0, 2r) \subset U$  para cada  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ , el Teorema 2.7 entrega la cota

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(\mathbf{x}_0, r))} \leq M \left( \frac{2^{n+1}n}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}. \quad (2.24)$$

Utilizando la desigualdad  $k^k/k! < e^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  podemos concluir que

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|! \quad (2.25)$$

para todos los multi-índices. Luego, el teorema multinomial implica que

$$n^k = (1 + \dots + 1)^k = \sum_{|\tilde{\alpha}|=k} \frac{|\tilde{\alpha}|!}{\tilde{\alpha}!},$$

por lo tanto

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} |\alpha|!. \quad (2.26)$$

Combinando (2.24), (2.25) y (2.26) llegamos a la desigualdad

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(\mathbf{x}_0, r))} \leq M \left( \frac{2^{n+1}n^2e}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|!. \quad (2.27)$$

3.) La serie de Taylor para  $u$  en  $\mathbf{x}_0$  es

$$\sum_{\alpha} \frac{D^\alpha u(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha,$$

donde se suma sobre todos los multi-índices  $\alpha$ . Demostraremos ahora que esta serie de potencias converge siempre que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3e}. \quad (2.28)$$

Para ver eso, recordamos primeramente que el residuo para cada  $N \in \mathbb{N}$  es dado por

$$\begin{aligned} R_N(\mathbf{x}) &:= u(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \end{aligned}$$

para algún  $t \in [0, 1]$  que depende de  $\mathbf{x}$ . Escribiendo los primeros  $N$  términos y el error en el desarrollo en serie de Taylor con el centro 0 y la función de una variable  $g(t) := u(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ , evaluada en  $t = 1$ , y utilizando (2.27) y (2.28) llegamos a

$$|R_N(\mathbf{x})| \leq M \sum_{|\alpha|=N} \left( \frac{2^{n+1}n^2e}{r} \right)^N \left( \frac{r}{2^{n+2}n^3e} \right)^N \leq \frac{Mn^N}{(2n)^N} = \frac{M}{2^N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

■

En lo siguiente escribimos  $V \subset\subset U$  para decir que  $V \subset \bar{V} \subset U$  y  $\bar{V}$  es compacto.

**Teorema 2.11** (Desigualdad de Harnack). *Para cada conjunto conexo y abierto  $V \subset\subset U$  existe una constante  $C$ , dependiente solamente de  $V$ , tal que*

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

para todas las funciones no negativas armónicas  $u$  definidas en  $U$ .

El Teorema implica, en particular, que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : \quad \frac{1}{C}u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq Cu(\mathbf{y}).$$

Estas desigualdades aseguran que los valores de una función no negativa armónica  $u$  al interior de  $V$  son comparables;  $u$  no puede ser muy pequeña (o muy grande) en algún punto de  $V$  a menos que  $u$  sea muy pequeña (o muy grande) en todas partes de  $V$ . La idea es que dado que  $V$  está a una distancia positiva de  $\partial U$ , entonces hay “espacio suficiente” para que se realicen los efectos de generar promedios de la ecuación de Laplace.

*Demostración del Teorema 2.11.* Sean  $r := \text{dist}(V, \partial U)/4$  y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  con  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r$ . Entonces

$$u(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x}, 2r)} u \, d\mathbf{z} = \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(\mathbf{x}, 2r)} u \, d\mathbf{z} \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(\mathbf{y}, r)} u \, d\mathbf{z} = \frac{u(\mathbf{y})}{2^n},$$

por lo tanto

$$2^n u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x}) \geq \frac{u(\mathbf{y})}{2^n} \quad \text{si } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r.$$

Puesto que  $V$  es conexo con  $\bar{V}$  compacto, podemos cubrir  $\bar{V}$  con una colección (cadena) de un número finito de bolas  $B_1, \dots, B_N$ , cada una de las cuales tiene el radio  $r/2$  y  $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$  para  $i = 2, \dots, N$ . Concluimos entonces que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : \quad u(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(\mathbf{y}).$$

■

**2.2.6. La función de Green.** Ahora suponemos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto, acotado, y  $\partial U \in C^1$ . Queremos desarrollar una fórmula general de representación para la solución del siguiente problema de valores de frontera de la ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } U, \quad u = g \quad \text{en } \partial U. \quad (2.29)$$

Supongamos primeramente que  $u \in C^2(\bar{U})$  es una función arbitraria. Fijamos  $\mathbf{x} \in U$  y elegimos  $\varepsilon > 0$  tan pequeño que  $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset U$ . Aplicamos la fórmula de Green (1.23) a  $u = u(\mathbf{y})$  y  $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  con respecto al dominio  $V_\varepsilon := U \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ . Aquí resulta

$$\begin{aligned} & \int_{V_\varepsilon} (u(\mathbf{y})\Delta\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial V_\varepsilon} \left( u(\mathbf{y}) \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial\nu}(\mathbf{y}) \right) \, dS(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector normal unitario exterior de  $\partial V_\varepsilon$ . Acordándonos de  $\Delta\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  obtenemos

$$\int_{V_\varepsilon} u(\mathbf{y}) \Delta\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y} = 0. \quad (2.31)$$

Por otro lado calculamos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \right| \\ &= \left| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{z}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) \right| = \left| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{z}) Du \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS(\mathbf{z}) \right| \\ &\leq \max_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |Du \cdot \boldsymbol{\nu}| \, dS(\mathbf{z}) \leq \|Du\|_{L^\infty(\partial B(0, \varepsilon))} \max_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} dS(\mathbf{z}) \\ &\leq C\varepsilon^{n-1} \max_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Los cálculos en la demostración del Teorema 2.1 demuestran que

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(\mathbf{x}), \quad (2.32)$$

donde se utiliza que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\nu} \cdot D\Phi = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \quad \text{sobre } \partial B(0, \varepsilon).$$

Ahora, tomando el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  en (2.30) obtenemos en virtud de (2.31)–(2.32) la identidad

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \left( \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad (2.33)$$

la cual es válida para cada punto  $\mathbf{x} \in U$  y cualquier función  $u \in C^2(\bar{U})$ .

La fórmula (2.33) nos permitiría despejar  $u(\mathbf{x})$  si conociéramos los valores de  $\Delta u$  en el interior de  $U$  y los valores de  $u$  y  $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu}$  a lo largo de  $\partial U$ . Pero para nuestra aplicación al problema (2.29) con datos de frontera prescritos para  $u$ , la derivada normal  $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu}$  a lo largo de  $\partial U$  es desconocida. Entonces de alguna manera tenemos que modificar (2.33) para reemplazar este término. La idea es la siguiente: para un punto  $\mathbf{x}$  fijo definimos una función de corrección

$$\phi^{\mathbf{x}} = \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \quad \text{solución de } \begin{cases} \Delta \phi^{\mathbf{x}} = 0 & \text{en } U, \\ \phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{sobre } \partial U. \end{cases} \quad (2.34)$$

Aplicando la fórmula de Green una vez más, obtenemos la siguiente identidad análoga a (2.33):

$$\begin{aligned} - \int_U \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial U} \left( u(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi^{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) - \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial U} \left( u(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi^{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) \right) dS(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

**Definición 2.3** (Función de Green para un dominio  $U$ ). *La función de Green para el dominio  $U$  es definida por*

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y},$$

donde  $\phi^{\mathbf{x}}$  es la solución del problema (2.34).

Utilizando esta terminología y sumando (2.33) y (2.35) obtenemos

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial U} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) \, dS - \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, dS(\mathbf{y}) \\ &\quad - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_U \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi^{\mathbf{x}}}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) \, dS - \int_{\partial U} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) \, dS \\ &= - \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) - \int_U G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in U, \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})$$

es la derivada normal exterior de  $G$  con respecto a  $\mathbf{y}$ . Observar que el término  $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu}$  ya no aparece en (2.36); efectivamente definimos  $\phi^{\mathbf{x}}$  para precisamente lograr esto.

Supongamos ahora que  $u \in C^2(\bar{U})$  es la solución del problema de valores de frontera (2.29) para funciones  $f$  y  $g$  continuas. Insertando (2.29) en (2.36) obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.12** (Fórmula de representación mediante la función de Green). *Sea  $u \in C^2(\bar{U})$  una solución del problema de valores de frontera (2.29). Entonces*

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in U. \quad (2.37)$$

El Teorema 2.12 nos entrega la fórmula (2.37) para la solución del problema de valores de frontera (2.29) siempre que podamos construir la función de Green  $G$  para un dominio  $U$  dado. En general, éste es un problema complicado, y puede ser solucionado sólo cuando  $U$  posee una geometría simple. En lo siguiente revisaremos algunos casos en los cuales  $G$  puede ser determinada explícitamente. Para tal efecto demostraremos primeramente que la función  $G$  es efectivamente simétrica.

**Teorema 2.13** (Simetría de la función de Green). *Para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , se tiene que  $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ,  $v(\mathbf{z}) := G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , y  $w(\mathbf{z}) := G(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  para  $\mathbf{z} \in U$ . En tal caso,  $\Delta v(\mathbf{z}) = 0$  y  $\Delta w(\mathbf{z}) = 0$  para  $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z} \in U$ , y  $v = w = 0$  sobre  $\partial U$ . Entonces, aplicando la identidad de Green al conjunto  $V := U \setminus (B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cup B(\mathbf{y}, \varepsilon))$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño obtenemos

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left( \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} w - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \right) \, dS(\mathbf{z}) = \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \left( \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} v - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} w \right) \, dS(\mathbf{z}), \quad (2.38)$$



donde  $\boldsymbol{\nu}$  es el campo vectorial de vectores unitarios normalizados apuntando hacia el interior sobre  $\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cup \partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ . Ahora, dado que  $w$  es suave cerca de  $\mathbf{x}$ , obtenemos

$$\left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \, dS \right| < C \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} |v| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0;$$

por otro lado,  $v(\mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{z} - \mathbf{x}) - \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ , donde  $\phi^{\mathbf{x}}$  es suave sobre  $U$ , por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} w \, dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) w(\mathbf{z}) \, dS = w(\mathbf{x})$$

(usando nuevamente cálculos similares a la demostración del Teorema 2.1). En virtud de lo anterior, el lado izquierdo de (2.38) converge a  $w(\mathbf{x})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Análogamente, el lado derecho converge a  $v(\mathbf{y})$ , por lo tanto  $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . ■

**2.2.7. Fórmulas de Poisson.** Ahora vamos a construir la función de Green para los dominios  $\mathbb{R}_+^n$  y  $B(0, 1)$ . Todo depende de la solución explícita del problema (2.34) en esas regiones, la cual en algunos casos puede ser construida mediante el *método de reflexión*. Consideremos primero el semi-espacio  $\mathbb{R}_+^n := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ . A pesar de que esta región no es acotada, y el cálculo previo no puede ser aplicado directamente, trataremos igualmente de construir la función de Green usando las ideas desarrolladas anteriormente. Por supuesto después habrá que verificar explícitamente que la fórmula de representación obtenida efectivamente es válida.

**Definición 2.4.** Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , entonces su reflexión con respecto al plano  $\partial \mathbb{R}_+^n$  es el punto  $(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) =: \tilde{\mathbf{x}}$ .

Resolveremos ahora el problema (2.34) para el semi-espacio definiendo

$$\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_+^n.$$

La idea es que el corrector  $\phi^{\mathbf{x}}$  es definido en términos de  $\Phi$  por la reflexión de la singularidad desde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$  a  $\tilde{\mathbf{x}} \notin \mathbb{R}_+^n$ . Notamos que  $\phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  si  $\mathbf{y} \in \partial \mathbb{R}_+^n$ , por lo tanto  $\phi^{\mathbf{x}}$  tiene las propiedades deseadas:  $\Delta \phi^{\mathbf{x}} = 0$  en  $\mathbb{R}_+^n$  y  $\phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  sobre  $\partial \mathbb{R}_+^n$ .

**Definición 2.5** (Función de Green para el semi-espacio). La función de Green para el semi-espacio  $\mathbb{R}_+^n$  es definida por

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (2.39)$$

Para la función de Green  $G$  dada por (2.39) calculamos

$$\frac{\partial G}{\partial y_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \left( \frac{y_n - x_n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^n} \right),$$

entonces para  $\mathbf{y} \in \partial \mathbb{R}_+^n$

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}.$$

Sea ahora  $u$  la solución del problema de valores de frontera

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+^n, \quad u = g \quad \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^n. \quad (2.40)$$

Utilizando (2.37) obtenemos la fórmula

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.41)$$

Habr a que verificar que (2.41) efectivamente es una fórmula de representación de la solución de (2.40). La función

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$$

se llama *kernel de Poisson* para  $\mathbb{R}_+^n$ , y (2.41) se llama *fórmula de Poisson*.

Ahora verificamos que (2.41) efectivamente es una solución del problema de valores de frontera (2.40).

**Teorema 2.14** (Fórmula de Poisson para el semi-espacio). *Sea  $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  y la función  $u$  definida por (2.41). Entonces*

- (i)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ,
- (ii)  $\Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}_+^n$ ,
- (iii) Para todo punto  $\mathbf{x}^0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$ ,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n}} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^0).$$

*Demostración.*

- 1.) Para cada  $\mathbf{x}$  fijo la aplicación  $\mathbf{y} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es armónica con la excepción de  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Puesto que  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  de acuerdo al Teorema 2.13, también  $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es armónica, con la excepción de  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Por lo tanto, también la aplicación

$$\mathbf{x} \mapsto -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

es armónica para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$ .

- 2.) Una computación directa verifica que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1. \quad (2.42)$$

Puesto que  $g$  es acotada, la función  $u$  definida por (2.41) igualmente es acotada. Dado que  $\mathbf{x} \mapsto K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es suave para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  se puede verificar fácilmente que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  con

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n.$$

- 3.) Sea ahora  $\mathbf{x}^0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Sea  $\delta > 0$  tan pequeño que

$$|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon \quad \text{si } |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| < \delta, \quad \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n. \quad (2.43)$$

En tal caso, si  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta/2$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ , podemos concluir que

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}^0)| &= \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})(g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)) \, d\mathbf{y} \right| \leq I + J, \\ I &:= \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cap B(\mathbf{x}^0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)| \, d\mathbf{y}, \\ J &:= \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)| \, d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ahora (2.42) y (2.43) implican que

$$I \leq \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \varepsilon.$$

Por otro lado, si  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq \delta/2$  y  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \geq \delta$ , se tiene que

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \frac{\delta}{2} \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|,$$

por lo tanto

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^\infty} x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)} |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|^{-n} \, d\mathbf{y} \xrightarrow{x_n \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Combinando este cálculo con la cota (2.44) podemos concluir que  $|u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}^0)| \leq 2\varepsilon$  si  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$  es suficientemente pequeño. ■

Para construir una función de Green para la bola  $B(0, 1)$  nuevamente usamos el método de reflexión, esta vez con respecto a  $\partial B(0, 1)$ .

**Definición 2.6** (Punto dual de  $\mathbf{x}$ ). *Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Entonces el punto*

$$\tilde{\mathbf{x}} := \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x}$$

*se llama punto dual de  $\mathbf{x}$ , y la aplicación  $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}$  se llama inversión por la esfera unitaria  $\partial B(0, 1)$ .*

Sea ahora  $U = B^0(0, 1)$  y  $\mathbf{x} \in B^0(0, 1)$ . Tenemos que determinar una función de corrección  $\phi^{\mathbf{x}}$  tal que

$$\Delta\phi^{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{en } B^0(0, 1), \quad \phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{en } \partial B^0(0, 1).$$

En este caso, la función de Green satisface  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ . La idea es “invertir la singularidad” desde  $\mathbf{x} \in B^0(0, 1)$  a  $\tilde{\mathbf{x}} \notin B^0(0, 1)$ . Por mientras, sea  $n \geq 3$ . Ahora la aplicación  $\mathbf{y} \mapsto \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$  es armónica para  $\mathbf{y} \neq \tilde{\mathbf{x}}$ , entonces  $\mathbf{y} \mapsto |\mathbf{x}|^{2-n}\Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$  es armónica para  $\mathbf{y} \neq \tilde{\mathbf{x}}$ , y por lo tanto

$$\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$$

es armónica en  $U$ . Además, si  $\mathbf{y} \in \partial B(0, 1)$  y  $\mathbf{x} \neq 0$ ,

$$|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\mathbf{x}|^2 \left( |\mathbf{y}|^2 - \frac{2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \right) = |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + 1 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2,$$

por lo tanto

$$(|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|)^{-(n-2)} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-(n-2)},$$

lo que implica que  $\phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{y} \in \partial B(0, 1)$ , como era requerido.

**Definición 2.7.** *La función de Green para la bola unitaria  $B(0, 1)$  es definida por*

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0, 1), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (2.45)$$

La fórmula (2.45) también es válida para  $n = 2$ .

Queremos establecer ahora un análogo a la fórmula de Poisson (2.41) para la bola  $B(0, 1)$ . Para tal efecto supongamos ahora que  $u$  es una solución de

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } B^0(0, 1), \quad u = g \quad \text{sobre } \partial B(0, 1). \quad (2.46)$$

Ahora, usando (2.37), obtenemos

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial B(0, 1)} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}). \quad (2.47)$$

Según (2.45),

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})).$$

Aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}, \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})) &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|\mathbf{x}|^2 - x_i}{(|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|)^n} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|\mathbf{x}|^2 - x_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \end{aligned}$$

para  $\mathbf{y} \in \partial B(0, 1)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{n\alpha(n)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \sum_{i=1}^n y_i (y_i - x_i - y_i|\mathbf{x}|^2 + x_i) \\ &= -\frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}. \end{aligned}$$

Resumiendo, vemos que la fórmula (2.47) da origen a la fórmula de representación

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}).$$

Sea ahora  $u$  la solución de

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } B^0(0, r), \quad u = g \quad \text{sobre } \partial B(0, r), \quad r > 0. \quad (2.48)$$

En este caso,  $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$  es la solución de (2.46) con  $\tilde{g}(\mathbf{x}) := g(r\mathbf{x})$  reemplazando  $g$  en (2.46). Cambiando las variables obtenemos la *fórmula de Poisson*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{r^2 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in B^0(0, r). \quad (2.49)$$

La función

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{r^2 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)r|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}, \quad \mathbf{x} \in B^0(0, r), \quad \mathbf{y} \in \partial B(0, r)$$

se llama *kernel de Poisson para la bola*  $B(0, r)$ .

La fórmula (2.49) se estableció bajo la hipótesis de que una solución suave de (2.48) existe. Esto es efectivamente así.

**Teorema 2.15** (Fórmula de Poisson para una bola). *Sean  $g \in C(\partial B(0, r))$  y  $u$  definida por (2.49). Entonces*

- (i)  $u \in C^\infty(B^0(0, r))$ ,
- (ii)  $\Delta u = 0$  en  $B^0(0, r)$ ,
- (iii) Para todo punto  $\mathbf{x}^0 \in \partial B(0, r)$ ,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in B^0(0, r)}} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^0).$$

*Demostración.* La demostración es similar a la del Teorema 2.14. ■

**2.2.8. Métodos de energía y principio de Dirichlet.** Gran parte de nuestro análisis de funciones armónicas ha sido basada en fórmulas de representación bastante explícitas, usando soluciones fundamentales, fórmulas de Green, etc. Conoceremos ahora algunos “métodos de energía”, es decir técnicas que involucran la norma en  $L^2$  de ciertas expresiones. Este material será usado también para el estudio de ecuaciones más generales.

Consideremos entonces el problema de valores de frontera para la ecuación de Poisson (2.29). Se supone que  $U$  es abierto y acotado con  $\partial U \in C^1$ . Ya utilizamos el principio del máximo para demostrar la unicidad de la solución de este problema (Teorema 2.5). Ahora se presenta una demostración alternativa.

*Demostración alternativa del Teorema 2.5.* Sea  $\tilde{u}$  otra solución de (2.29) y  $w := u - \tilde{u}$ . Entonces  $\Delta w = 0$  en  $U$ , y una integración por partes muestra que

$$0 = - \int_U w \Delta w \, d\mathbf{x} = \int_U |Dw|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Entonces  $Dw \equiv 0$  en  $U$ , y como  $w = 0$  sobre  $\partial U$ , concluimos que  $w = u - \tilde{u} \equiv 0$  en  $U$ . ■

Ahora demostraremos que una solución de (2.29) puede ser caracterizada como “minimizador” de un cierto funcional. Para tal efecto definimos el *funcional de energía*

$$I[w] := \int_U \left( \frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \right) d\mathbf{x},$$

donde se supone que  $w$  pertenece al *conjunto admisible*

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\bar{U}) \mid w = g \text{ sobre } \partial U\}.$$

**Teorema 2.16** (Principio de Dirichlet).

(i) Si  $u \in C^2(\bar{U})$  es una solución de (2.29), entonces

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]. \quad (2.50)$$

(ii) Por otro lado, si  $u \in \mathcal{A}$  satisface (2.50), entonces  $u$  es solución de (2.29).

*Demostración.*

1.) Sea  $w \in \mathcal{A}$ , entonces (2.29) implica que

$$0 = \int_U (-\Delta u - f)(u - w) d\mathbf{x}.$$

Integrando por partes obtenemos

$$0 = \int_U (Du \cdot D(u - w) - f(u - w)) d\mathbf{x}.$$

Aquí no aparece ningún término de frontera ya que  $u - w \equiv 0$  sobre  $\partial U$ . Por lo tanto,

$$\int_U (|Du|^2 - uf) d\mathbf{x} = \int_U (Du \cdot Dw - wf) d\mathbf{x}; \quad (2.51)$$

utilizando la desigualdad

$$|Du \cdot Dw| \leq |Du||Dw| \leq \frac{1}{2}|Du|^2 + \frac{1}{2}|Dw|^2$$

obtenemos de (2.51)

$$\int_U (|Du|^2 - uf) d\mathbf{x} \leq \int_U \frac{1}{2}|Du|^2 d\mathbf{x} + \int_U \left( \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf \right) d\mathbf{x},$$

es decir

$$\forall w \in \mathcal{A} : I[u] \leq I[w].$$

Puesto que  $u \in \mathcal{A}$ , esto implica (2.50).

2.) Supongamos que (2.50) es válido. Sea  $v \in C_c^\infty(U)$ , y sea la función  $i$  definida por

$$i(\tau) := I[u + \tau v], \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Dado que  $u + \tau v \in \mathcal{A}$  para cada  $\tau$ , la función  $i$  asume su mínimo en cero, es decir  $i'(0) = 0$ , donde  $' \equiv d/d\tau$ . Pero

$$i(\tau) = \int_U \left( \frac{1}{2} |Du + \tau Dv|^2 - (u + \tau v)f \right) d\mathbf{x}$$

$$= \int_U \left( \frac{1}{2} |Du|^2 + \tau Du \cdot Dv + \frac{\tau^2}{2} |Dv|^2 - (u + \tau v)f \right) d\mathbf{x};$$

por lo tanto la identidad  $0 = i'(0)$  entrega que

$$0 = i'(0) = \int_U (Du \cdot Dv - vf) d\mathbf{x} = \int_U (-\Delta u - f)v d\mathbf{x}.$$

La última identidad es válida para cada función  $v \in C_c^\infty(U)$ , por lo tanto  $-\Delta u = f$  en  $U$ . ■

### 2.3. La ecuación del calor

En lo siguiente consideremos la ecuación del calor

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{2.52}$$

y la ecuación del calor no homogénea

$$u_t - \Delta u = f \tag{2.53}$$

sujetas a condiciones iniciales y de frontera apropiadas. Aquí  $t > 0$  y  $\mathbf{x} \in U$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto. La desconocida es la función  $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , y el Laplaciano  $\Delta$  se toma con respecto a las variables espaciales  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , es decir

$$\Delta u = \Delta_{\mathbf{x}} u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

En (2.53) la función  $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es dada.

Como un principio general cualquier afirmación acerca de funciones armónicas tiene una afirmación análoga (pero más complicada) para soluciones de la ecuación del calor, por lo tanto nuestro desarrollo será muy similar a la teoría correspondiente de la ecuación de Laplace.

**2.3.1. Interpretación física.** La ecuación del calor (2.52), también conocida como *ecuación de difusión*, aparece en un gran número de contextos. Típicamente,  $u$  representa la densidad de alguna cantidad (por ejemplo, el calor, una concentración química), y se desea describir la evolución en el tiempo de  $u$ . Si  $V$  es alguna subregión suave de  $U$ , la tasa de cambio de la cantidad total contenida en  $V$  es igual al negativo del flujo neto de  $u$  por la frontera  $\partial V$  de  $V$ , es decir

$$\frac{d}{dt} \int_V u d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS,$$

donde  $\mathbf{F}$  es la densidad del flujo y  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector normal exterior de  $\partial V$ . Aplicando el Teorema de Gauss-Green y considerando que  $V$  fue elegido arbitrario obtenemos

$$u_t = -\operatorname{div} \mathbf{F} \quad \text{sobre } U.$$

Tal como discutimos en el contexto de la ecuación de Laplace, en muchas circunstancias el flujo  $\mathbf{F}$  es proporcional a  $Du$  pero orientado hacia la dirección opuesta, es decir el flujo es desde regiones de alta concentración hacia regiones de baja concentración. Entonces (2.11)

sigue siendo válido y obtenemos la ecuación  $u_t = a \operatorname{div}(Du) = a\Delta u$ , la cual para  $a = 1$  es la ecuación del calor.

**2.3.2. Solución fundamental.** Para determinar la solución fundamental de la ecuación del calor observamos primeramente que esta ecuación involucra una derivada con respecto al tiempo  $t$ , pero dos derivadas con respecto a las coordenadas espaciales  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Por lo tanto, si  $u$  es una solución de (2.52), también  $u(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$  es una solución para  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Este escalamiento indica que la razón  $r^2/t$  (con  $r = |\mathbf{x}|$ ) es importante para la ecuación del calor, lo que sugiere buscar una solución de (2.52) de la forma

$$u(\mathbf{x}, t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{t}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

donde aún hay que determinar la función  $v$ . Este planteo finalmente nos lleva al resultado deseado, pero es más eficiente buscar una solución  $u$  en la forma

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{1}{t^\beta} \mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (2.54)$$

donde hay que determinar las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  y la función  $v$ . El planteo (2.54) resulta si buscamos una solución  $u$  de (2.52) que sea invariante bajo el *escalamiento de dilatación*  $u(\mathbf{x}, t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta \mathbf{x}, \lambda t)$ , es decir se solicita que

$$\forall \lambda > 0 : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 : \quad u(\mathbf{x}, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta \mathbf{x}, \lambda t).$$

Poniendo  $\lambda = 1/t$  obtenemos (2.54) para  $v(\mathbf{y}) := u(\mathbf{y}, 1)$ .

Insertando (2.54) en (2.52) obtenemos

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(\mathbf{y}) + \beta t^{-(\alpha+1)} \mathbf{y} \cdot Dv(\mathbf{y}) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} := t^{-\beta} \mathbf{x}. \quad (2.55)$$

Para convertir (2.55) en una expresión que involucre solamente la variable  $\mathbf{y}$  ponemos  $\beta = 1/2$ , luego los términos con  $\mathbf{y}$  serán idénticos y (2.55) se reduce a

$$\alpha v + \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot Dv + \Delta v = 0. \quad (2.56)$$

Supongamos ahora que  $v$  es radial, es decir  $v(\mathbf{y}) = w(|\mathbf{y}|)$  para alguna función  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Así (2.56) se convierte en

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0, \quad r = |\mathbf{y}|, \quad ' \equiv \frac{d}{dr}.$$

Para  $\alpha = n/2$  esto se reduce a

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (r^n w)' = 0.$$

Integrando una vez obtenemos

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a$$

para alguna constante  $a$ . Suponiendo que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w = \lim_{r \rightarrow \infty} w' = 0$$



obtenemos  $a = 0$ , luego

$$w' = -\frac{1}{2}rw.$$

La solución de esta ecuación está dada por

$$w = b \exp\left(-\frac{r^2}{4}\right). \quad (2.57)$$

Combinando (2.54), (2.57) y  $\alpha = n/2$ ,  $\beta = 1/2$  obtenemos que

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{b}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right)$$

es una solución de la ecuación del calor (2.52). Este cálculo motiva la siguiente definición.

**Definición 2.8** (Solución fundamental de la ecuación del calor). *La función*

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right) & \text{para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0 & \text{para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

se llama solución fundamental de la ecuación del calor (2.52).

Notar que  $\Phi$  es singular en  $(\mathbf{0}, 0)$ . A veces escribiremos  $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(|\mathbf{x}|, t)$  para enfatizar que  $\Phi$  es radial con respecto a  $\mathbf{x}$ . La selección de la constante  $b = (4\pi)^{-n/2}$  se debe al siguiente lema.

**Lema 2.1.** *Para cada  $t > 0$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1.$$

*Demostración.* Utilizando la sustitución

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2t^{1/2}} \mathbf{x}$$

calculamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right) d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\mathbf{z}|^2) d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z_i^2) dz_i = 1. \end{aligned}$$

■

**2.3.3. El problema de valores iniciales.** Ahora utilizaremos la solución fundamental  $\Phi$  para hallar soluciones del problema de valores iniciales (o problema de Cauchy)

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u = g \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (2.58)$$

Puesto que  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{x}, t)$  es una solución de (2.52) fuera de la singularidad en  $(\mathbf{0}, 0)$ , también  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$  es una solución para cada  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  fijo. Entonces la siguiente convolución también debería ser una solución:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4t}\right) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

**Teorema 2.17** (Solución del problema de valores iniciales). *Sean  $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y la función  $u$  definida por (2.59). Entonces*

- (i)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
- (ii)  $u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0$  para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $t > 0$ ,
- (iii) para cada  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}^0).$$

*Demostración.*

- 1.) Puesto que la función

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto \frac{1}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right)$$

es infinitamente diferenciable, con derivadas de todos los ordenes uniformemente acotadas sobre  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$  para cada  $\delta > 0$  vemos que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , además

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} ((\Phi_t - \Delta_{\mathbf{x}} \Phi)(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \end{aligned}$$

ya que la función  $\Phi$  es una solución de (2.52).

- 2.) Fijamos  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\varepsilon > 0$ . Elegimos  $\delta > 0$  tal que

$$|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon \quad \text{si } |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| < \delta, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.60)$$

Entonces si  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta/2$  se tiene que

$$|u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}^0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) (g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)) \, d\mathbf{y} \right| \leq I + J,$$

donde

$$\begin{aligned} I &:= \int_{B(\mathbf{x}^0, \delta)} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)| \, d\mathbf{y}, \\ J &:= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)| \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

En virtud de (2.60) y del Lema 2.1,

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} = \varepsilon.$$

Por otro lado, si  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq \delta/2$  y  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \geq \delta$ , podemos concluir que (tal como en la demostración del Teorema 2.14)

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \frac{\delta}{2} \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|,$$

luego

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4t}\right) \, d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|^2}{16t}\right) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{n-1} \, dr \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Concluimos que si  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta/2$  y  $t > 0$  es suficientemente pequeño, entonces  $|u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}^0)| < 2\varepsilon$ . ■

En virtud del Teorema 2.17 escribiremos a veces

$$\Phi_t - \Delta\Phi = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad \Phi = \delta_0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\},$$

donde  $\delta_0$  denota la medida de Dirac en  $\mathbb{R}^n$  que otorga la masa unitaria al punto 0.

Por otro lado, comentamos que si  $g$  es acotada, continua,  $g \geq 0$  y  $g \not\equiv 0$ , entonces  $u(\mathbf{x}, t)$  dada por (2.59) es positiva para *todos* los puntos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y tiempos  $t > 0$ . Interpretamos esta observación diciendo que la ecuación del calor impone una velocidad de propagación infinita de perturbaciones. Si la temperatura inicial es no negativa y positiva en alguna parte, la temperatura en cualquier instante posterior (cuan pequeño que sea) es positiva en todas partes. (Veremos que al contrario de esto, la ecuación de la onda es asociada con velocidades de propagación finitas de perturbaciones.)

**2.3.4. Problema no homogéneo y principio de Duhamel.** Queremos ahora resolver el problema no homogéneo

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (2.61)$$

Para generar una solución de (2.61), notamos que  $(\mathbf{x}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$  es una solución de la ecuación del calor (2.52) para  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  y  $s \in (0, t)$  dados. Ahora, para  $s$  fijo, la función

$$u = u(\mathbf{x}, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y}$$

es una solución de

$$u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot, s) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \quad u(\cdot; s) = f(\cdot, s) \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}, \quad (2.62)$$

lo que es un problema de valores iniciales del tipo (2.58) con el tiempo inicial  $t = 0$  reemplazado por  $t = s$ , y  $g$  reemplazada por  $f(\cdot, s)$ . Es cierto que  $u(\cdot; s)$  no es una solución de (2.61). Sin embargo, de acuerdo al *Principio de Duhamel* podemos construir una solución de (2.61) integrando con respecto a  $s$  soluciones de (2.62). La idea consiste en considerar

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s) ds, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4(t-s)}\right) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para verificar que (2.63) efectivamente es la solución deseada del problema no homogéneo (2.61), supongamos que  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , y que  $f$  tiene soporte compacto.

**Teorema 2.18** (Solución del problema no homogéneo). *Sea  $u$  definida por (2.63). Entonces*

- (i)  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
- (ii)  $u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$  para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,
- (iii) para cada  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(\mathbf{x}, t) = 0.$$

*Demostración.*

- 1.) Dado que  $\Phi$  posee una singularidad en  $(\mathbf{x} = 0, t = 0)$ , no podemos directamente justificar la derivación bajo la integral. En lugar de esto procederemos de una manera similar a la demostración del Teorema 2.1. Primero realizamos un cambio de variables para escribir

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, s) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) d\mathbf{y} ds.$$

Dado que  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  tiene soporte compacto y  $\Phi = \Phi(\mathbf{y}, s)$  es suave cerca de  $s = t > 0$  podemos calcular

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, s) f_t(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) d\mathbf{y} ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) d\mathbf{y} ds, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Concluimos que  $u_t$  y  $D_{\mathbf{x}}^2 u$  y similarmente  $u$  y  $D_{\mathbf{x}} u$  pertenecen a  $C(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .

2.) Calculamos ahora

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, s) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{\mathbf{x}} \right) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \right] d\mathbf{y} ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) d\mathbf{y} = \mathcal{I}_\varepsilon + \mathcal{J}_\varepsilon + \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon &:= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, s) \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_{\mathbf{y}} \right) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \right] d\mathbf{y} ds, \\ \mathcal{J}_\varepsilon &:= \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, s) \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_{\mathbf{y}} \right) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \right] d\mathbf{y} ds, \\ \mathcal{K} &:= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

En virtud del Lema 2.1,

$$|\mathcal{J}_\varepsilon| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \leq \varepsilon C. \quad (2.65)$$

Integrando por partes y considerando que  $\Phi$  es una solución de la ecuación del calor (2.52) obtenemos además

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial s} - \Delta_{\mathbf{y}} \right) \Phi(\mathbf{y}, s) \right] f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) d\mathbf{y} ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, \varepsilon) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \varepsilon) d\mathbf{y} - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, \varepsilon) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \varepsilon) d\mathbf{y} - \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Combinando (2.64), (2.65) y (2.66) obtenemos

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{y}, \varepsilon) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \varepsilon) d\mathbf{y} \\ &= f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \end{aligned}$$

donde el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  es calculado como en la demostración del Teorema 2.17. Finalmente notamos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq t \|f\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+.$$

■

Por supuesto se pueden combinar los Teoremas 2.17 y 2.18 para deducir que bajo las hipótesis acerca de las funciones  $g$  y  $f$  mencionadas anteriormente, la función

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds$$

es una solución del problema

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u = g \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}.$$

**2.3.5. Fórmula del valor medio.** En lo siguiente sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado, y sea el tiempo  $T > 0$  fijo.

**Definición 2.9.**

- (i) Se define como cilindro parabólico el conjunto  $U_T := U \times (0, T]$ .
- (ii) La frontera parabólica de  $U_T$  es  $\Gamma_T := \bar{U}_T \setminus U_T$ .

Se interpreta  $U_T$  como el *interior parabólico* de  $\bar{U} \times [0, T]$ ; notamos que  $U_T$  incluye el “techo”  $U \times \{t = T\}$ . La frontera parabólica  $\Gamma_T$  incluye el “piso” y los lados “verticales” de  $U \times [0, T]$ , pero *no* el techo.

Luego queremos derivar un análogo de la propiedad del valor medio para funciones armónicas (ver Sección 2.2.4). No existe una fórmula tan simple. Sin embargo observamos que para  $\mathbf{x}$  fijo las esferas  $\partial B(\mathbf{x}, r)$  son los conjuntos de nivel de la solución fundamental  $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  de la ecuación de Laplace. Esto sugiere que posiblemente para  $(\mathbf{x}, t)$  fijo los conjuntos de nivel de la solución fundamental  $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$  de la ecuación del calor pueden ser relevantes.

**Definición 2.10.** Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$  definimos

$$E(\mathbf{x}, t; r) = \left\{ (\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

El conjunto  $E(\mathbf{x}, t; r)$  es una región en el espacio-tiempo cuya frontera es un conjunto de nivel de  $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$ . El punto  $(\mathbf{x}, t)$  se encuentra en la “cima” de  $E(\mathbf{x}, t; r)$ . A veces  $E(\mathbf{x}, t; r)$  se llama “bola de calor”.

**Teorema 2.19** (Una propiedad de valor medio para la ecuación del calor). *Sea  $u \in C_1^2(U_T)$  una solución de la ecuación del calor. Entonces para cada  $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_T$ ,*

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(\mathbf{x}, t; r)} u(\mathbf{y}, s) \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} d\mathbf{y} ds. \quad (2.67)$$

La fórmula (2.67) es un análogo para la ecuación del calor de las fórmulas de valor medio para la ecuación de Laplace. Observamos que el lado derecho de (2.67) involucra solamente  $u(\mathbf{y}, s)$  para tiempos  $s \leq t$ , lo que es muy razonable puesto que el valor de  $u(\mathbf{x}, t)$  no debería depender de tiempos futuros.

*Demostración del Teorema 2.19.* Se trasladan las coordenadas espaciales y temporales tales que  $\mathbf{x} = 0$  y  $t = 0$ . Modificando si es necesario podemos suponer que  $u$  es suave. Se escribe  $E(r) = E(0, 0; r)$  y se define la función

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(\mathbf{y}, s) \frac{|\mathbf{y}|^2}{s^2} d\mathbf{y} ds = \iint_{E(1)} u(r\mathbf{y}, r^2s) \frac{|\mathbf{y}|^2}{s^2} d\mathbf{y} ds.$$

Ahora calculamos

$$\phi'(r) = \iint_{E(1)} \left( \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|\mathbf{y}|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|\mathbf{y}|^2}{s} \right) d\mathbf{y} ds = A + B,$$

donde

$$A := \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|\mathbf{y}|^2}{s^2} \right) d\mathbf{y} ds, \quad B := \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 2u_s \frac{|\mathbf{y}|^2}{s} d\mathbf{y} ds.$$

Se define, además, la función

$$\psi := -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|\mathbf{y}|^2}{4s} + n \log r. \quad (2.68)$$

Observamos que  $\psi = 0$  sobre  $\partial E(r)$  puesto que  $\Phi(\mathbf{y}, -s) = r^{-n}$  sobre  $\partial E(r)$ . Utilizamos (2.68) para escribir

$$B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} \right) d\mathbf{y} ds = -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( 4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{s y_i} y_i \psi \right) d\mathbf{y} ds;$$

no hay término de frontera ya que  $\psi = 0$  sobre  $\partial E(r)$ . Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \psi_s \right) d\mathbf{y} ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[ -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \left( -\frac{n}{2s} - \frac{|\mathbf{y}|^2}{4s^2} \right) \right] d\mathbf{y} ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( -4nu_s \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \right) d\mathbf{y} ds - A. \end{aligned}$$

Puesto que  $u$  es solución de la ecuación del calor y considerando (2.68), obtenemos

$$\begin{aligned} \phi'(r) = A + B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( -4n\Delta u \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \right) d\mathbf{y} ds \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( 4nu_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \right) d\mathbf{y} ds = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto  $\phi$  es constante, luego

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = u(0, 0) \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} \frac{|\mathbf{y}|^2}{s^2} d\mathbf{y} ds \right) = 4u(0, 0),$$

ya que

$$\frac{1}{t^n} \iint_{E(t)} \frac{|\mathbf{y}|^2}{s^2} d\mathbf{y} ds = \iint_{E(1)} \frac{|\mathbf{y}|^2}{s^2} d\mathbf{y} ds = 4.$$

(se omiten los detalles de este último cálculo). ■

### 2.3.6. Propiedades de soluciones.

**Teorema 2.20** (Principio del máximo fuerte). *Sea  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  una solución de (2.52) sobre  $U_T$ . Entonces*

- (i)  $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$ .
- (ii) *Además, si  $U$  es conexo y existe un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$  tal que  $u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$ , entonces  $u$  es constante en  $\bar{U}_{t_0}$ .*

La afirmación (i) es el *principio del máximo* para la ecuación del calor y (ii) es el *principio del máximo fuerte*. Un teorema similar es válido con “máx” reemplazado por “mín”.

Comentamos que de acuerdo al Teorema 2.20, si  $u$  asume su máximo (o mínimo) en un punto interior, entonces  $u$  es constante para todos los tiempos anteriores. Esto coincide con nuestra interpretación de  $t$  como variable temporal: la solución será constante sobre el intervalo  $[0, t_0]$  si las condiciones iniciales y de frontera son constantes. Sin embargo la solución puede cambiar para  $t > t_0$  si las condiciones de frontera son alteradas después de  $t = t_0$ . Sin embargo la solución no cambiará *antes* de que estos cambios en las condiciones de fronteras sean realizados. En cualquier caso hay que explícitamente *demostrar* que la EDP efectivamente implica este comportamiento físicamente razonable.

*Demostración del Teorema 2.20.*

- 1.) Supongamos que existe un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$  tal que

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = M := \max_{\bar{U}_T} u.$$

Entonces  $E(\mathbf{x}_0, t_0; r) \subset U_T$  para cada  $r > 0$  suficientemente pequeño. Por otro lado de acuerdo al Teorema 2.19

$$M = u(\mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(\mathbf{x}_0, t_0; r)} u(\mathbf{y}, s) \frac{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^2}{(t_0 - s)^2} d\mathbf{y} ds \leq M, \quad (2.69)$$

puesto que

$$1 = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(\mathbf{x}_0, t_0; r)} \frac{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|^2}{(t_0 - s)^2} d\mathbf{y} ds.$$

La igualdad en (2.69) es válida solamente si  $u \equiv M$  en  $E(\mathbf{x}_0, t_0; r)$ , por lo tanto

$$\forall (\mathbf{y}, s) \in E(\mathbf{x}_0, t_0; r) : u(\mathbf{y}, s) = M.$$

Sea ahora  $L$  un segmento lineal en  $U_T$  que conecte el punto  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  con algún otro punto  $(\mathbf{y}_0, s_0) \in U_T$  con  $s_0 < t_0$ , y sea

$$r_0 := \min\{s \geq s_0 \mid u(\mathbf{x}, t) = M \text{ para todos los puntos } (\mathbf{x}, t) \in L, s \leq t \leq t_0\}.$$



Puesto que  $u$  es continua, el mínimo es asumido. Supongamos que  $r_0 > s_0$ . Entonces  $u(\mathbf{z}_0, r_0) = M$  para algún punto  $(\mathbf{z}_0, r_0) \in L \cap U_T$  y por lo tanto  $u \equiv M$  en  $E(\mathbf{z}_0, r_0; r)$  para todo  $r > 0$  suficientemente pequeño. Puesto que

$$E(\mathbf{z}_0, r_0; r) \supset L \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0\}$$

para algún valor  $\sigma > 0$  pequeño llegamos a una contradicción, es decir  $r_0 = s_0$  y por lo tanto  $u \equiv M$  sobre  $L$ .

- 2.) Fijamos ahora cualquier punto  $\mathbf{x} \in U$  y cualquier tiempo  $t \in [0, t_0)$ . Entonces existen puntos  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m = \mathbf{x}\}$  tal que los segmentos rectos en  $\mathbb{R}^n$  que conectan  $\mathbf{x}_{i-1}$  con  $\mathbf{x}_i$  son subconjuntos de  $U$  para  $i = 1, \dots, m$ . (Esto es válido porque el conjunto de los puntos de  $U$  que pueden ser conectados de esta manera con  $\mathbf{x}_0$  por un camino poligonal es no vacío, abierto y relativamente cerrado en  $U$ .) Seleccionamos tiempos  $t_0 > t_1 > \dots > t_m = t$ . Entonces los segmentos lineales que conectan  $(\mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1})$  con  $(\mathbf{x}_i, t_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , pertenecen a  $U_T$ . De acuerdo a 1.),  $u \equiv M$  sobre cada uno de estos segmentos, luego  $u(\mathbf{x}, t) = M$ . ■

El principio del máximo fuerte implica que si  $U$  es conexo y  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  satisface

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } U_T, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U \times [0, T], \quad u = g \quad \text{sobre } U \times \{t = 0\},$$

donde  $g \geq 0$ , entonces  $u > 0$  en todas partes en  $U_T$  si  $g > 0$  en alguna parte sobre  $U$ . Esto es otra ilustración de la velocidad de propagación infinita de perturbaciones.

**Teorema 2.21** (Unicidad de soluciones en dominios acotados). *Sean  $g \in C(\Gamma_T)$  y  $f \in C(U_T)$ . Entonces existe a lo más una solución  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  del problema de valores iniciales y de frontera*

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en } U_T, \quad u = g \quad \text{sobre } \Gamma_T. \quad (2.70)$$

*Demostración.* Si  $u$  y  $\tilde{u}$  son dos soluciones de (2.70), basta aplicar el Teorema 2.20 a  $w := \pm(u - \tilde{u})$ . ■

**Teorema 2.22** (Principio del máximo para el problema de valores iniciales). *Supongamos que la función  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  es una solución del problema de valores iniciales*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u = g \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\},$$

*y satisface la cota de crecimiento*

$$u(\mathbf{x}, t) \leq A \exp(a|\mathbf{x}|^2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.71)$$

*para constantes  $a, A > 0$ . Entonces*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

*Demostración.*

1.) Supongamos primero que

$$4aT < 1; \quad (2.72)$$

en este caso

$$4a(T + \varepsilon) < 1 \quad (2.73)$$

para algún  $\varepsilon > 0$ . Fijamos  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu > 0$ , y sea

$$v(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x}, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Podemos calcular directamente que  $v_t - \Delta v = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ . Fijamos  $r > 0$  y definimos  $U := B^0(\mathbf{y}, r)$ ,  $U_T := B^0(\mathbf{y}, r) \times (0, T]$ . De acuerdo al Teorema 2.20,

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v. \quad (2.74)$$

2.) Ahora, si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$v(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x}, 0) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} \exp\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4(T + \varepsilon)}\right) \leq u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}),$$

y si  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r$ ,  $0 \leq t \leq T$ , obtenemos en virtud de (2.71)

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{x}, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \\ &\leq A \exp(a|\mathbf{x}|^2) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \\ &\leq A \exp(a(|\mathbf{y}| + r)^2) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

Ahora de acuerdo a (2.73),

$$\frac{1}{4(T + \varepsilon)} = a + \gamma \quad \text{para algún } \gamma > 0.$$

Podemos entonces continuar este cálculo para obtener

$$v(\mathbf{x}, t) \leq A \exp(a(|\mathbf{y}| + r)^2) - \mu(4(a + \gamma))^{n/2} \exp((a + \gamma)r^2) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad (2.75)$$

para  $r$  suficientemente grande, por lo tanto (2.74)–(2.75) implican que

$$v(\mathbf{y}, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T,$$

siempre que (2.72) es válido. Ahora consideramos  $\mu \rightarrow 0$ .

3.) Si (2.72) fracasa, aplicamos el resultado anterior repetidamente a los intervalos  $[0, T_1]$ ,  $[T_1, 2T_1]$  etc., para  $T_1 = 1/(8a)$ .

■

**Teorema 2.23** (Unicidad de la solución para el problema de Cauchy). Sean  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  y  $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Entonces existe a lo más una solución  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  del problema de valores iniciales

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u = g \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \quad (2.76)$$

que satisface la condición de crecimiento

$$|u(\mathbf{x}, t)| \leq A \exp(a|\mathbf{x}|^2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.77)$$

para constantes  $a, A > 0$ .

*Demostración.* Si  $u$  y  $\tilde{u}$  son dos funciones que satisfacen (2.76) y (2.77), basta aplicar el Teorema 2.22 a  $w := \pm(u - \tilde{u})$ . ■

Comentamos que efectivamente existe un número infinito de soluciones del problema

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (2.78)$$

Cada una de estas soluciones, con la excepción de  $u \equiv 0$ , crece muy rápidamente cuando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Efectivamente, aunque  $u \equiv 0$  ciertamente es la solución “físicamente correcta” de (2.78), este problema de valores iniciales también permite otras soluciones “físicamente incorrectas”. El Teorema 2.23 presenta un criterio, (2.77), para excluir las soluciones “no deseadas”. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

**Ejemplo 2.1** ([10, §7]). En lo siguiente construiremos una solución  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  de la ecuación del calor que desaparece idénticamente para  $t < 0$  pero, al contrario de la solución  $u \equiv 0$  identificada arriba, *no* desaparece para  $t > 0$ . Consideremos el caso  $n = 1$ , es decir la ecuación  $u_t = u_{xx}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , para datos de Cauchy dados sobre el eje  $t$ :

$$u = g(t), \quad u_x = 0 \quad \text{para } x = 0. \quad (2.79)$$

Ahora, escribiendo  $u$  como serie de potencias,

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j, \quad (2.80)$$

y sustituyendo (2.80) en (2.79) y comparando coeficientes de potencias de  $x$  encontramos

$$g_0 = g, \quad g_1 = 0, \quad g'_j = (j+1)(j+2)g_{j+2}.$$

Así obtenemos las soluciones formales

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad (2.81)$$

las cuales son soluciones de verdad si podemos establecer que las series de potencias convergen suficientemente bien. Sea ahora  $\alpha > 1$  y la función  $g = g(t)$  definida por

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}) & \text{para } t > 0, \\ 0 & \text{para } t \leq 0. \end{cases}$$

Se puede demostrar que existe  $\theta = \theta(\alpha) > 0$  tal que

$$|g^{(k)}(t)| < \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right).$$

En virtud de

$$\frac{k!}{(2k)!} < \frac{1}{k!}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{k!(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{t} \left[ \frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha} \right]\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Concluimos que la serie (2.81) para  $u$  converge para  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{C}$  y trivialmente, por supuesto, también para  $t \leq 0$ . La fórmula (2.82) demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0 \quad \text{uniformemente en } x, \text{ para } x \in \mathbb{C} \text{ acotado.}$$

Por otro lado la serie (2.81) es una serie de potencias mayorizada por la serie de potencias para

$$U(x, t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t} \left[ \frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha} \right]\right) & \text{para } t > 0, \\ 0 & \text{para } t \leq 0. \end{cases}$$

Como  $U(x, t)$  es acotada uniformemente para  $x \in \mathbb{C}$  acotado y todo  $t \in \mathbb{R}$ , la serie (2.81) converge uniformemente en  $x$  y  $t$  para todo  $x$  acotado y  $t$  real, y lo mismo es válido para la serie obtenido derivando con respecto a  $x$  término por término. En particular, la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

converge uniformemente. Dado que la misma serie resulta formalmente derivando  $u$  con respecto a  $t$  concluimos que  $u_t = u_{xx}$ . Más generalmente se tiene que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2k} u,$$

lo que significa que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ . Observamos que  $u$  es una función de  $x$  entera analítica para cada  $t \in \mathbb{R}$ , pero no es analítica en  $t$  ya que  $u(0, t)$  desaparece para  $t \leq 0$  pero no para  $t > 0$ . ■

**Teorema 2.24** (Suavidad). *Sea  $u \in C_1^2(U_T)$  una solución de la ecuación del calor (2.52) en  $U_T$ . Entonces  $u \in C^\infty(U_T)$ . Este enunciado queda válido incluso cuando  $u$  asume valores de frontera no suaves sobre  $\Gamma_T$ .*

*Demostración.*

1.) Definimos el cilindro

$$C(\mathbf{x}, t; r) := \{(\mathbf{y}, s) \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r, t - r^2 \leq s \leq t\}.$$

Sea  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$  y  $r > 0$  elegido tan pequeño que  $C := C(\mathbf{x}_0, t_0; r) \subset U_T$ . También definimos los cilindros más pequeños

$$C' := C\left(\mathbf{x}_0, t_0; \frac{3}{4}r\right), \quad C'' = C\left(\mathbf{x}_0, t_0; \frac{1}{2}r\right).$$

Notamos que el centro del “techo” de  $C$ ,  $C'$  y  $C''$  es el mismo punto  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Sea ahora  $\zeta = \zeta(\mathbf{x}, t)$  una función de corte tal que

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta \equiv 1 \quad \text{sobre } C', \quad \zeta \equiv 0 \quad \text{cerca de la frontera parabólica de } C.$$

Se extiende  $\zeta$  mediante  $\zeta \equiv 0$  a  $(\mathbb{R}^n \times [0, t_0]) \setminus C$ .

2.) Supongamos por el momento que  $u \in C^\infty(U_T)$  y sea

$$v(\mathbf{x}, t) := \zeta(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Entonces  $v_t = \zeta u_t + \zeta_t u$  y  $\Delta v = \zeta \Delta u + 2D\zeta \cdot Du + u\Delta\zeta$ . Concluimos que

$$v = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\},$$

$$v_t - \Delta v = \zeta_t u - 2D\zeta \cdot Du - u\Delta\zeta =: \tilde{f} \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, t_0). \quad (2.83)$$

Ahora definimos

$$\tilde{v}(\mathbf{x}, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \tilde{f}(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds.$$

De acuerdo al Teorema 2.18,

$$\tilde{v}_t - \Delta \tilde{v} = \tilde{f} \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, t_0), \quad \tilde{v} = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}.$$

Puesto que  $|v|, |\tilde{v}| \leq A$  para alguna constante  $A$ , el Teorema 2.23 asegura que  $v \equiv \tilde{v}$ , es decir

$$v(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \tilde{f}(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds. \quad (2.84)$$

Supongamos ahora que  $(\mathbf{x}, t) \in C''$ . Dado que  $\zeta \equiv 0$  fuera del cilindro  $C$ , (2.83) y (2.84) implican

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \iint_C \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \times \\ &\quad \times \left[ (\zeta_s(\mathbf{y}, s) - \Delta\zeta(\mathbf{y}, s))u(\mathbf{y}, s) - 2D\zeta(\mathbf{y}, s) \cdot Du(\mathbf{y}, s) \right] d\mathbf{y} ds. \end{aligned}$$

En esta expresión,  $[\dots] = 0$  en alguna región *cerca* de la singularidad de  $\Phi$ . Por lo tanto, integrando por partes este último término obtenemos

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \iint_C \left( \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) (\zeta_s(\mathbf{y}, s) - \Delta\zeta(\mathbf{y}, s)) \right. \\ &\quad \left. + 2D_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \cdot D\zeta(\mathbf{y}, s) \right) u(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Hemos demostrado esta fórmula suponiendo que  $u \in C^\infty$ . Si  $u$  satisface solamente las hipótesis del teorema, podemos derivar (2.85) para  $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$  en lugar de  $u$ , donde  $\eta_\varepsilon$  es el mollifier estándar en  $\mathbf{x}$  y  $t$ , y dejar  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

3.) La ecuación (2.85) es de la forma

$$u(\mathbf{x}, t) = \iint_C K(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) u(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds, \quad (\mathbf{x}, t) \in C''', \quad (2.86)$$

donde  $K(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) = 0$  para todo  $(\mathbf{y}, s) \in C'$  debido a  $\zeta \equiv 1$  sobre  $C'$ . Notamos que  $K$  también es suave en  $C \setminus C'$ . En virtud de (2.86),  $u$  pertenece a  $C^\infty$  en  $C'''$ . ■

**Teorema 2.25** (Cotas para derivadas). *Para cada par de números enteros  $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  existe una constante  $C_{k,l}$  tal que*

$$\max_{C(\mathbf{x}, t; r/2)} |D_{\mathbf{x}}^k D_t^l u| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(\mathbf{x}, t; r))}.$$

*Demostración.*

1.) Se fija algún punto en  $U_T$ . Moviendo las coordenadas podemos suponer que este punto es  $(0, 0)$ . Supongamos primero que  $C(1) := C(0, 0; 1) \subset U_T$ . Sea  $C(1/2) := C(0, 0; 1/2)$ . Luego, tal como en la demostración del Teorema 2.24,

$$u(\mathbf{x}, t) = \iint_{C(1)} K(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s) u(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds, \quad (\mathbf{x}, t) \in C(1/2),$$

para alguna función suave  $K$ , por lo tanto

$$|D_{\mathbf{x}}^k D_t^l u(\mathbf{x}, t)| \leq \iint_{C(1)} |D_t^l D_{\mathbf{x}}^k K(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)| |u(\mathbf{y}, s)| d\mathbf{y} ds \leq C_{k,l} \|u\|_{L^1(C(1))} \quad (2.87)$$

para alguna constante  $C_{k,l}$ .

2.) Supongamos ahora que  $C(r) := C(0, 0; r) \subset U_T$ . Sea  $C(r/2) := C(0, 0; r/2)$ . Sea  $v(\mathbf{x}, t) := u(r\mathbf{x}, r^2t)$ , entonces  $v_t - \Delta v = 0$  en el cilindro  $C(1)$ . De acuerdo a (2.87),

$$|D_{\mathbf{x}}^k D_t^l v(\mathbf{x}, t)| \leq C_{k,l} \|v\|_{L^1(C(1))}, \quad (\mathbf{x}, t) \in C(1/2).$$

Pero

$$D_{\mathbf{x}}^k D_t^l v(\mathbf{x}, t) = r^{2l+k} D_{\mathbf{x}}^k D_t^l u(r\mathbf{x}, r^2t), \quad \|v\|_{L^1(C(1))} = \frac{1}{r^{n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))},$$

por lo tanto

$$\max_{C(r/2)} |D_{\mathbf{x}}^k D_t^l u| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{2l+k+n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}.$$
■

**2.3.7. Métodos de energía.** Consideremos ahora el problema de valores iniciales (2.70). Ya utilizamos el principio del máximo para demostrar la unicidad de la solución del problema (Teorema 2.21). Ahora, en analogía con la discusión de la Sección 2.2.8 con su demostración alternativa para el Teorema 2.5, presentaremos un argumento alternativo para demostrar el Teorema 2.21 basado en integración por partes. Como siempre suponemos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y acotado, que  $\partial U \in C^2$  y que el tiempo final  $T > 0$  está dado.

*Demostración alternativa del Teorema 2.21.* Si  $\tilde{u}$  es otra solución, entonces  $w := u - \tilde{u}$  es una solución de

$$w_t - \Delta w = 0 \quad \text{en } U_T, \quad w = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_T. \quad (2.88)$$

Sea

$$e(t) := \int_U w^2(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.89)$$

luego ( $\dot{\phantom{x}} \equiv d/dt$ )

$$\dot{e}(t) = 2 \int_U w w_t \, d\mathbf{x} = 2 \int_U w \Delta w \, d\mathbf{x} = -2 \int_U |Dw|^2 \, d\mathbf{x} \leq 0, \quad (2.90)$$

por lo tanto  $e(t) \leq e(0) = 0$  para  $0 \leq t \leq T$ , es decir  $w = u - \tilde{u} \equiv 0$  en  $U_T$ .  $\blacksquare$

Terminamos el estudio de la ecuación del calor discutiendo el problema de unicidad *retrógrada* (con respecto al tiempo). Para tal efecto supongamos que  $u$  y  $\tilde{u}$  son soluciones suaves de la ecuación del calor con la misma condición de borde en  $\partial U$ , es decir

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } U_T, \quad u = g \quad \text{sobre } \partial U \times [0, T], \quad (2.91)$$

$$\tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = 0 \quad \text{en } U_T, \quad \tilde{u} = g \quad \text{sobre } \partial U \times [0, T]. \quad (2.92)$$

Aquí *no* se supone que  $u = \tilde{u}$  para  $t = 0$ .

**Teorema 2.26** (Unicidad retrógrada). *Sean  $u \in C^2(\bar{U}_T)$  y  $\tilde{u} \in C^2(\bar{U}_T)$  soluciones de (2.91) y (2.92), respectivamente. Si  $u(\mathbf{x}, T) = \tilde{u}(\mathbf{x}, T)$  para todo  $\mathbf{x} \in U$ , entonces  $u \equiv \tilde{u}$  en  $U_T$ .*

En otras palabras, si dos distribuciones de temperatura sobre  $U$  coinciden en un instante  $T > 0$  y han tenido las mismas condiciones de borde para  $0 \leq t \leq T$ , entonces estas temperaturas deben haber sido idénticamente iguales en  $U$  en todos los tiempos anteriores. Esto no es para nada evidente.

*Demostración del Teorema 2.26.*

1.) Sea  $w := u - \tilde{u}$  y  $e(t)$  definido por (2.89). De (2.90) deducimos que

$$\ddot{e}(t) = -4 \int_U Dw \cdot Dw_t \, d\mathbf{x} = 4 \int_U \Delta w w_t \, d\mathbf{x} = 4 \int_U (\Delta w)^2 \, d\mathbf{x}, \quad (2.93)$$

donde utilizamos que  $w$  satisface (2.88). Ahora, puesto que  $w = 0$  sobre  $\partial U$ ,

$$\int_U |Dw|^2 \, d\mathbf{x} = - \int_U w \Delta w \, d\mathbf{x} \leq \left( \int_U w^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left( \int_U (\Delta w)^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

luego (2.89) y (2.93) implican que

$$(\dot{e}(t))^2 = 4 \left( \int_U |Dw|^2 d\mathbf{x} \right)^2 \leq \left( \int_U w^2 d\mathbf{x} \right) \left( 4 \int_U (\Delta w)^2 d\mathbf{x} \right) = e(t)\ddot{e}(t),$$

por lo tanto

$$\ddot{e}(t)e(t) \geq (\dot{e}(t))^2, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.94)$$

2.) Ahora si  $e(t) = 0$  para  $0 \leq t \leq T$  la demostración está terminada. En caso contrario existe un intervalo  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  con

$$e(t) > 0 \quad \text{para } t_1 \leq t < t_2, \quad e(t_2) = 0. \quad (2.95)$$

3.) Escribamos ahora

$$f(t) := \log e(t), \quad t_1 \leq t < t_2. \quad (2.96)$$

En virtud de (2.94),

$$\ddot{f}(t) = \frac{\ddot{e}(t)}{e(t)} - \frac{\dot{e}(t)^2}{e(t)^2} \geq 0,$$

por lo tanto  $f$  es convexa sobre el intervalo  $(t_1, t_2)$ . Si  $0 < \tau < 1$ ,  $t_1 < t < t_2$  se tiene ahora

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t).$$

Tomando en cuenta (2.96) deducimos que

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t)^\tau,$$

luego

$$0 \leq e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t_2)^\tau, \quad 0 < \tau < 1.$$

Pero en virtud de (2.95) esta desigualdad implica que  $e(t) = 0$  para todos los tiempos  $t_1 \leq t \leq t_2$ , lo cual es una contradicción. ■

## 2.4. La ecuación de la onda

En lo siguiente estudiaremos la *ecuación de la onda*

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

y la *ecuación de la onda no homogénea*

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad (2.97)$$

sujetas a condiciones iniciales y de borde apropiadas. Aquí  $t > 0$  y  $\mathbf{x} \in U$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto. La desconocida es  $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , y el Laplaciano  $\Delta$  se toma con respecto a las variables espaciales  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . En (2.97) se supone que la función  $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  está dada. Una abreviatura común es

$$\square u = u_{tt} - \Delta u.$$



Veremos que las soluciones de la ecuación de la onda se comportan de manera diferente de las soluciones de las ecuaciones de Laplace o del calor. Por ejemplo, estas soluciones no serán  $C^\infty$  en general y poseen velocidad de propagación finita.

**2.4.1. Interpretación física.** La ecuación de la onda es un modelo simplificado para una cuerda vibrante (para  $n = 1$ ), una membrana (para  $n = 2$ ) o un sólido elástico ( $n = 3$ ). En estas interpretaciones físicas la solución  $u(\mathbf{x}, t)$  representa el desplazamiento en alguna dirección del punto  $\mathbf{x}$  en el instante  $t \geq 0$ .

Sea  $V$  cualquier subregión suave de  $U$ . Entonces la aceleración en el interior de  $V$  está dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u \, d\mathbf{x} = \int_V u_{tt} \, d\mathbf{x},$$

y la fuerza de contacto neta está dada por

$$- \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS,$$

donde  $\mathbf{F}$  denota la fuerza que actúa sobre  $V$  a través de  $\partial V$  y la densidad de masa se supone unitaria. La ley de Newton afirma que la masa multiplicada por la aceleración debe igualar la fuerza neta:

$$\int_V u_{tt} \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS.$$

Como esta identidad debe ser válida para toda subregión  $V$ , obtenemos

$$u_{tt} = - \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Para cuerpos elásticos,  $\mathbf{F}$  es una función del gradiente de desplazamiento  $Du$ , luego

$$u_{tt} + \operatorname{div} \mathbf{F}(Du) = 0.$$

Si  $Du$  es pequeño, frecuentemente podemos utilizar una linealización

$$\mathbf{F}(Du) \approx -aDu,$$

de la cual resulta

$$u_{tt} - a\Delta u = 0,$$

es decir la ecuación de la onda para  $a = 1$ .

La interpretación física sugiere fuertemente que será apropiado matemáticamente especificar dos condiciones iniciales: una para el desplazamiento  $u$  y otra para la velocidad  $u_t$  en el instante  $t = 0$ .

**2.4.2. Solución por promedios esféricos.** Consideremos primero el problema de valores iniciales del caso unidimensional ( $n = 1$ ) de la ecuación de la onda, siendo todo  $\mathbb{R}$  el dominio espacial:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u = g, \quad u_t = h \quad \text{sobre } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \quad (2.98)$$

donde  $g$  y  $h$  son funciones dadas. Queremos desarrollar una fórmula para  $u$  en términos de  $g$  y  $h$ . Para tal efecto notamos primero que la EDP de (2.98) puede ser “factorizada” como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0. \quad (2.99)$$

Escribiendo

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \quad (2.100)$$

obtenemos de (2.99)  $v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0$  para  $x \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ , lo que es una ecuación de transporte con coeficientes constantes. Aplicando (2.4) con  $n = 1$  y  $b = 1$ , obtenemos

$$v(x, t) = a(x - t), \quad a(x) := v(x, 0). \quad (2.101)$$

Combinando (2.99), (2.100) y (2.101) obtenemos  $u_t(x, t) - u_x(x, t) = a(x - t)$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , lo que es una ecuación de transporte *no* homogénea, por lo tanto utilizando la fórmula (2.7) con  $n = 1$ ,  $b = -1$  y  $f(x, t) = a(x - t)$  obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + b(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x + t), \quad b(x) := u(x, 0). \end{aligned}$$

Finalmente utilizamos las condiciones iniciales en (2.98) para calcular las funciones  $a$  y  $b$ . La primera condición inicial en (2.98) implica que  $b(x) = g(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , mientras que la segunda condición y (2.100) implican que

$$a(x) = v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, sustituyendo las funciones  $a(x)$  y  $b(x)$  obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy + g(x + t),$$

luego

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (2.102)$$

Esta es la *fórmula de d'Alembert*.

**Teorema 2.27** (Solución de la ecuación de la onda,  $n = 1$ ). Sean  $g \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R})$ , y  $u$  definida por la fórmula de d'Alembert (2.102). Entonces

- (i)  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ,
- (ii)  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ,
- (iii) para cada punto  $x^0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ t > 0}} u(x, t) = g(x^0), \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ t > 0}} u_t(x, t) = h(x^0).$$

La demostración del Teorema 2.27 es un cálculo directo.

Comentamos que en virtud de (2.102), la solución  $u$  es de la forma  $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$  para funciones  $F$  y  $G$  apropiadas. Viceversa, cualquier función de este tipo es una solución de  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ . Por lo tanto la solución general de la ecuación de la onda uni-dimensional es la suma de la solución general de  $u_t - u_x = 0$  y de la solución general de  $u_t + u_x = 0$ , lo que es una consecuencia de la factorización (2.99).

Por otro lado, la fórmula (2.102) implica que si  $g \in C^k$  y  $h \in C^{k-1}$ , entonces  $u \in C^k$ , pero  $u$  en general no es más suave. En otras palabras, al contrario de la ecuación del calor, la ecuación de la onda no produce una suavización inmediata del dato inicial.

Para ilustrar otra aplicación de la fórmula de d'Alembert (2.102) consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u &= g, \quad u_t = h \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \{x = 0\} \times (0, \infty), \end{aligned} \tag{2.103}$$

donde  $g$  y  $h$  están dadas con  $g(0) = h(0) = 0$ . Convertimos (2.103) en un problema de la forma (2.98) mediante la extensión de  $u$ ,  $g$  y  $h$  a todo  $\mathbb{R}$  por *reflexión impar*, es decir se consideran

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &:= \begin{cases} u(x, t) & \text{para } x \geq 0, t \geq 0, \\ -u(-x, t) & \text{para } x \leq 0, t \geq 0, \end{cases} \\ \tilde{g}(x) &:= \begin{cases} g(x) & \text{para } x \geq 0, \\ -g(-x) & \text{para } x \leq 0, \end{cases} \quad \tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & \text{para } x \geq 0, \\ -h(-x) & \text{para } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En términos de estas funciones (2.103) se convierte en

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad \tilde{u} = \tilde{g}, \quad \tilde{u}_t = \tilde{h} \quad \text{sobre } \mathbb{R} \times \{t = 0\}.$$

Utilizando (2.102) obtenemos

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy,$$

es decir

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{para } x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{para } t \geq x \geq 0. \end{cases} \tag{2.104}$$

Para  $h \equiv 0$  la fórmula (2.104) informa que un desplazamiento inicial  $g$  se separa en dos partes, una viajando hacia la derecha con velocidad unitaria y otra viajando hacia la izquierda con velocidad unitaria. La última parte es reflejada en  $x = 0$ , donde se mantiene fijada la cuerda vibrante. Finalmente, notamos que nuestra solución (2.104) no pertenece a  $C^2$  a menos que  $g''(0) = 0$ .

Consideremos ahora  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ , y supongamos que  $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  es una solución de problema de valores iniciales

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u = g, \quad u_t = h \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (2.105)$$

Queremos desarrollar una fórmula de solución explícita en términos de las funciones  $g$  y  $h$ . La idea es considerar primero el promedio de  $u$  sobre ciertas esferas. Estos promedios, considerados como funciones del tiempo  $t$  y del radio  $r$ , resultan ser soluciones de la ecuación de Euler-Poisson-Darboux, una EDP que para  $n$  impar puede ser convertida en la ecuación de la onda uni-dimensional. Aplicando la fórmula de d'Alembert (2.102), o más precisamente su variante (2.104), obtenemos finalmente una fórmula de solución explícita.

En lo siguiente definimos para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  y  $r > 0$  el promedio esférico de  $u(\cdot, t)$  sobre la esfera  $\partial B(\mathbf{x}, r)$ ,

$$U(\mathbf{x}; r, t) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}, t) \, dS(\mathbf{y}), \quad (2.106)$$

y análogamente,

$$G(\mathbf{x}; r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}), \quad H(\mathbf{x}; r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} h(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}). \quad (2.107)$$

Para  $\mathbf{x}$  fijo consideramos  $U$  como función de  $r$  y  $t$ , y llegamos a la siguiente EDP:

**Lema 2.2** (Ecuación de Euler-Poisson-Darboux). *Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y sea  $u$  una solución de (2.105). Entonces  $U \in C^m(\mathbb{R}_+ \times [0, \infty))$  y*

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ U &= G, \quad U_t = H \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

La EDP en (2.108) es la *ecuación de Euler-Poisson-Darboux*. Notar que

$$U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r$$

es la parte radial del Laplaciano  $\Delta U$  en coordenadas polares.

*Demostración del Lema 2.2.*

1.) Tal como en la demostración del Teorema 2.2 calculamos

$$U_r(\mathbf{x}; r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} \quad \text{para } r > 0. \quad (2.109)$$

Esta ecuación implica que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(\mathbf{x}; r, t) = 0.$$

Derivando (2.109) obtenemos después de algunos cálculos

$$U_{rr}(\mathbf{x}; r, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \Delta u \, dS + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u \, d\mathbf{y}, \quad (2.110)$$

luego

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{rr}(\mathbf{x}; r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(\mathbf{x}, t).$$

Usando (2.110) podemos análogamente calcular  $U_{rrr}$  etc., y así llegamos a la conclusión que  $U \in C^m(\mathbb{R}_+ \times [0, \infty))$ .

2.) Continuando este cálculo obtenemos de (2.109), y utilizando (2.105),

$$U_r = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u_{tt} \, d\mathbf{y} = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u_{tt} \, d\mathbf{y},$$

por lo tanto

$$r^{n-1}U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u_{tt} \, d\mathbf{y},$$

luego

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u_{tt} \, dS = r^{n-1} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u_{tt} \, dS = r^{n-1}U_{tt}.$$

■

La transformación de la ecuación de Euler-Poisson-Darboux (2.108) a la ecuación de la onda uni-dimensional es bastante complicada para  $n$  general, por lo tanto trataremos explícitamente los casos más simples  $n = 3$  y  $n = 2$ , en este orden.

Sea entonces  $n = 3$ , y supongamos que  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$  es una solución del problema de valores iniciales (2.105). Recordamos las definiciones (2.106) y (2.107) de las funciones  $U$ ,  $G$  y  $H$ , y definimos

$$\tilde{U} := rU, \tag{2.111}$$

$$\tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH. \tag{2.112}$$

Demostremos ahora que  $\tilde{U}$  es una solución del problema

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U} &= \tilde{G}, \quad \tilde{U}_t = \tilde{H} \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U} &= 0 \quad \text{sobre } \{r = 0\} \times (0, \infty). \end{aligned} \tag{2.113}$$

Efectivamente, en virtud de (2.108) con  $n = 3$ ,

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left( U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}.$$

Notamos, además, que  $\tilde{G}_{rr}(0) = 0$ . Aplicando (2.104) a (2.113) obtenemos

$$\tilde{U}(\mathbf{x}; r, t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) \, dy, \quad 0 \leq r \leq t. \tag{2.114}$$

Dado que (2.106) implica que

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U(\mathbf{x}; r, t),$$

concluimos de (2.111), (2.112) y (2.114) que

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}(\mathbf{x}; r, t)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy \right) = \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t).$$

En virtud de (2.107) deducimos que

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} h dS. \quad (2.115)$$

Pero

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(0,1)} g(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) dS(\mathbf{z}),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right) &= \int_{\partial B(0,1)} Dg(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} dS(\mathbf{z}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} Dg(\mathbf{y}) \cdot \left( \frac{1}{t}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Volviendo a (2.115) concluimos que

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} (th(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) + Dg(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})) dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (2.116)$$

Esta es la *fórmula de Kirchoff* para la solución del problema de valores iniciales (2.105) en tres dimensiones.

Cuando  $n = 2$ , ninguna transformación similar a (2.111) puede ser aplicada para transformar la ecuación de Euler-Poisson-Darboux en la ecuación de la onda uni-dimensional. En lugar de esto, consideraremos el problema de valores iniciales (2.105) para  $n = 2$  como un problema para  $n = 3$  en el cual la tercera variable espacial  $x_3$  no aparece. Supongamos entonces que  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$  es una solución de (2.105) para  $n = 2$ . Entonces, escribimos

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t).$$

En tal caso (2.105) implica que

$$\bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad \bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h} \quad \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \quad (2.117)$$

donde definimos  $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2)$  y  $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) := h(x_1, x_2)$ . Si escribimos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  y  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ , entonces (2.117) y la fórmula de Kirchoff (en la forma (2.115)) implican que

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{h} d\bar{S}, \quad (2.118)$$

donde  $\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  denota la bola en  $\mathbb{R}^3$  con centro  $\bar{\mathbf{x}}$ , radio  $t > 0$ , y  $d\bar{S}$  denota la medida de superficie bi-dimensional sobre  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ . Podemos simplificar (2.118) observando que

$$\int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) \sqrt{1 + |D\gamma(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y},$$

donde

$$\gamma(\mathbf{y}) = \sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} \quad \text{para } \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, t).$$

El factor “2” aparece porque  $\partial\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  consiste en dos hemisferios. Observar que

$$\sqrt{1 + |\mathrm{D}\gamma(\mathbf{y})|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}},$$

por lo tanto

$$\int_{\partial\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} \, \mathrm{d}\bar{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y} = \frac{t}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

En virtud de lo anterior, (2.118) se convierte en

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( t^2 \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y} \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y}. \quad (2.119)$$

Pero

$$t^2 \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y} = t \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{\sqrt{1 - |\mathbf{z}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{z},$$

luego

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( t^2 \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y} \right) \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{g(\mathbf{x} + t\mathbf{z})}{\sqrt{1 - |\mathbf{z}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{z} + t \int_{B(0,1)} \frac{\mathrm{D}g(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}}{\sqrt{1 - |\mathbf{z}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{z} \\ &= t \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y} + t \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{\mathrm{D}g(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y}, \end{aligned}$$

lo que nos permite reescribir (2.119) como

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{tg(\mathbf{y}) + t^2h(\mathbf{y}) + t\mathrm{D}g(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, \mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \quad (2.120)$$

Esto es la *fórmula de Poisson* para la solución del problema de valores iniciales (2.105) en dos dimensiones. El método de resolver el problema primero para  $n = 3$  y luego analizar  $n = 2$  se llama *método de descenso*.

Consideremos ahora la ecuación de Euler-Poisson-Darboux para  $n \geq 3$ ,  $n$  impar.

**Lema 2.3** (Algunas identidades útiles). *Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi \in C^{k+1}$ . Entonces las siguientes identidades son válidas para  $k \in \mathbb{N}$ :*

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)^{k-1} (r^{2k-1}\phi(r)) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)^k \left( r^{2k} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}(r) \right), \\ \left( \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)^{k-1} (r^{2k-1}\phi(r)) &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{\mathrm{d}^j \phi}{\mathrm{d}r^j}(r), \end{aligned}$$

donde las constantes  $\beta_j^k$ ,  $j = 0, \dots, k-1$ , son independientes de  $\phi$ , y  $\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$ .

*Demostración.* Tarea. ■

Sea ahora  $n \geq 3$  un número entero impar tal que  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . En lo siguiente supongamos que  $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  es una solución del problema de valores iniciales (2.105), entonces la función  $U$  definida por (2.106) pertenece a  $C^{k+1}$ . Además escribimos para  $r > 0$  y  $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(r, t) &:= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} U(\mathbf{x}; r, t)), \\ \tilde{G}(r) &:= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} G(\mathbf{x}; r)), \\ \tilde{H}(r) &:= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} H(\mathbf{x}; r)),\end{aligned}\tag{2.121}$$

luego

$$\tilde{U}(r, 0) = \tilde{G}(r), \quad \tilde{U}_t(r, 0) = \tilde{H}(r).\tag{2.122}$$

Ahora combinamos el Lema 2.2 y las identidades del Lema 2.3 para demostrar que la transformación (2.121) de  $U$  en  $\tilde{U}$  efectivamente convierte la ecuación de Euler-Poisson-Darboux en la ecuación de la onda.

**Lema 2.4** ( $\tilde{U}$  es una solución de la ecuación de la onda uni-dimensional). *Se tiene que*

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \quad \tilde{U}_t &= \tilde{H} \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U} &= 0 \quad , \text{ sobre } \{r = 0\} \times (0, \infty).\end{aligned}$$

*Demostración.* Si  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{rr} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} U) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^k (r^{2k} U_r) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} U_{rr} + 2kr^{2k-2} U_r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \left[U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r\right]\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} U_{tt}) = \tilde{U}_{tt},\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es válida debido a (2.108). En virtud de la segunda identidad del Lema 2.3 concluimos también que  $\tilde{U} = 0$  sobre  $\{r = 0\}$ . ■

En virtud del Lema 2.4, (2.122) y (2.104) concluimos para  $0 \leq r \leq t$  que

$$\tilde{U}(r, t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}\tag{2.123}$$



para todo  $r \in \mathbb{R}$  y  $t \geq 0$ . Pero nos acordamos de que  $u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(\mathbf{x}; r, t)$ , además de acuerdo a la segunda identidad del Lema 2.3,

$$\tilde{U}(r, t) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U(\mathbf{x}; r, t)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{\partial^j}{\partial r^j} U(\mathbf{x}; r, t),$$

por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(r, t)}{\beta_0^k r} = \lim_{r \rightarrow 0} U(\mathbf{x}; r, t) = u(\mathbf{x}, t),$$

luego (2.123) implica que

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy \right) = \frac{\tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)}{\beta_0^k}.$$

Finalmente, en virtud de  $n = 2k + 1$ , (2.123) y la fórmula para  $\beta_0^k$  en el Lema 2.3 llegamos a la siguiente fórmula de representación:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} g dS \right) + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} h dS \right) \right],$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \quad n \text{ impar}, \quad \gamma_n := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2). \quad (2.124)$$

Observamos que  $\gamma_3 = 1$ , por lo tanto (2.124) coincide para  $n = 3$  con (2.115) por lo tanto con (2.116). Queda por verificar que (2.124) efectivamente es una solución de (2.105).

**Teorema 2.28** (Solución de la ecuación de la onda en dimensiones impares). *Sea  $n$  un número entero impar,  $n \geq 3$ , y sean  $m = (n+1)/2$ ,  $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$  y  $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $u$  definida por (2.124). Entonces*

- (i)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ ,
- (ii)  $u_{tt} - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
- (iii) para todo  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}^0), \quad \lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}^0).$$

*Demostración.*

1.) Supongamos primero que  $g \equiv 0$ , en tal caso

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-3)/2} (t^{n-2} H(\mathbf{x}; t)). \quad (2.125)$$

De acuerdo a la primera fórmula del Lema 2.3 obtenemos

$$u_{tt} = \frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-1)/2} (t^{n-1} H_t).$$

Un cálculo similar a la demostración del Teorema 2.2 demuestra, además, que

$$H_t = \frac{t}{n} \int_{B(\mathbf{x},t)} \Delta h \, d\mathbf{y}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-1)/2} \left( \int_{B(\mathbf{x},t)} \Delta h \, d\mathbf{y} \right) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-3)/2} \left( \frac{1}{t} \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \Delta h \, dS \right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\Delta H(\mathbf{x}; t) = \Delta_{\mathbf{x}} \int_{\partial B(0,t)} h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \Delta h \, dS.$$

Este cálculo y (2.125) implican que  $u_{tt} = \Delta u$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Una computación similar se aplica cuando  $h \equiv 0$ .

- 2.) Se deja como tarea (usando la segunda identidad del Lema 2.3) de verificar que  $u$  asume las condiciones iniciales correctas. ■

Comentamos que para la computación de  $u(\mathbf{x}, t)$  necesitamos solamente la información de  $g$  y  $h$  y de sus derivadas sobre la esfera  $\partial B(\mathbf{x}, t)$ , pero no de la bola entera  $B(\mathbf{x}, t)$ . Además, comparando (2.124) con la fórmula de d'Alembert para  $n = 1$ , (2.102), observamos que esta última no involucra las derivadas de  $g$ . Esto implica que para  $n > 1$ , una solución de la ecuación de la onda (2.105) no necesariamente debe para todo tiempo  $t > 0$  ser tan suave que su valor inicial  $g$ ; podría suceder que irregularidades en  $g$  se enfoquen en tiempos  $t > 0$  causando un deterioro de la regularidad de  $u$ . (Veremos más adelante que la “norma de energía” de  $u$  no deteriora para  $t > 0$ .) Por otro lado, tal como en el caso  $n = 1$ , constatamos el fenómeno de una velocidad de propagación finita de perturbaciones iniciales.

En lo siguiente supongamos que  $n$  es un número entero *par*. Supongamos que  $u \in C^m$  es una solución de (2.105), donde  $m = (n + 2)/2$ . Queremos desarrollar una fórmula de representación para  $u$  similar a (2.124). Tal como discutido para  $n = 2$ , la idea principal consiste en notar que

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_{n+1}, t) = u(x_1, \dots, x_n, t) \tag{2.126}$$

es una solución de la ecuación de la onda en  $\mathbb{R}^{n+1} \times (0, \infty)$  con la condición inicial

$$\bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h} \quad \text{sobre } \mathbb{R}^{n+1} \times \{t = 0\},$$

donde

$$\bar{g}(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n), \quad \bar{h}(x_1, \dots, x_{n+1}) = h(x_1, \dots, x_n). \tag{2.127}$$

Como  $n + 1$  es impar, podemos utilizar (2.124) (con  $n$  reemplazado por  $n + 1$ ) para generar una fórmula de representación para  $\bar{u}$  en términos de  $\bar{g}$  y  $\bar{h}$ . En tal caso, (2.126) y (2.127) directamente entregan una fórmula para  $u$  en términos de  $g$  y  $h$ . Esto nuevamente es el método del descenso.

Para elaborar los detalles fijamos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ , y sea  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces (2.124) con  $n$  reemplazado por  $n + 1$  nos entrega que

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} \, d\bar{S} \right) + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{h} \, d\bar{S} \right) \right],$$

donde  $\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  denota la bola en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con centro  $\bar{\mathbf{x}}$  y radio  $t$ , y  $d\bar{S}$  es la medida superficial  $n$ -dimensional sobre  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ . Ahora

$$\int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} \, d\bar{S} = \frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} \, d\bar{S}. \quad (2.128)$$

Notamos que  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cap \{y_{n+1} \geq 0\}$  es el grafo de la función

$$\gamma(\mathbf{y}) := \sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}, \quad \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, t) \subset \mathbb{R}^n,$$

y análogamente  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cap \{y_{n+1} \leq 0\}$  es el grafo de  $-\gamma$ . Por lo tanto (2.128) implica que

$$\int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} \, d\bar{S} = \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{B(\mathbf{x}, t)} g(\mathbf{y}) \sqrt{1 + |D\gamma(\mathbf{y})|^2} \, d\mathbf{y}, \quad (2.129)$$

donde el factor “2” aparece porque  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  comprende dos hemisferios. Notando que

$$\sqrt{1 + |D\gamma(\mathbf{y})|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}}$$

obtenemos de (2.129)

$$\begin{aligned} \int_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, t)} \bar{g} \, d\bar{S} &= \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^{n-1}} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{2t\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Insertando esta fórmula y una similar con  $h$  en lugar de  $g$  en (2.129) obtenemos

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \frac{2\alpha(n)}{\gamma_{n+1}(n+1)\alpha(n+1)} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, d\mathbf{y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, d\mathbf{y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\gamma_{n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1), \quad \alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

obtenemos  $\gamma_n = 2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n$ , obtenemos la siguiente fórmula de representación:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} d\mathbf{y} \right) + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} d\mathbf{y} \right) \right], \quad (2.130)$$

$$n \text{ par, } \gamma_n = 2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Dado que  $\gamma_2 = 2$ , para  $n = 2$  esta fórmula se reduce a la fórmula de Poisson (2.120). Como consecuencia del Teorema 2.28 obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.29** (Solución de la ecuación de la onda en dimensiones pares). *Sea  $n$  un número entero par,  $n \geq 2$ , y sean  $m = (n+2)/2$ ,  $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$  y  $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $u$  definida por (2.130). Entonces*

- (i)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ ,
- (ii)  $u_{tt} - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
- (iii) para todo  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}^0), \quad \lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}^0).$$

Observamos que al contrario de la fórmula (2.124) si queremos determinar  $u(\mathbf{x}, t)$  mediante (2.130) para  $n$  par necesitamos información acerca de  $u = g$  y  $u_t = h$  sobre la totalidad de  $B(\mathbf{x}, t)$ , y no solamente sobre  $\partial B(\mathbf{x}, t)$ . Además, si comparamos (2.124) y (2.130) observamos que si  $n$  es impar y  $n \geq 3$ , los datos  $g$  y  $h$  en un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dado afectan la solución solamente en la *frontera*  $\{(\mathbf{y}, t) \mid t > 0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = t\}$  del cono  $C = \{(\mathbf{y}, t) \mid t > 0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < t\}$ . Por otro lado, si  $n$  es par los datos  $g$  y  $h$  afectan  $u$  en la totalidad de  $C$ . En otras palabras, una “perturbación” que origina en  $\mathbf{x}$  se propaga a lo largo de un frente de onda brusco, mientras que en dimensiones pares esta “perturbación” sigue teniendo efectos incluso después del pase del frente de onda. Esto se llama *principio de Huygens*.

**2.4.3. Problema no homogéneo.** Queremos ahora estudiar el problema de valores iniciales para la ecuación de la onda no homogénea

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u = 0, \quad u_t = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (2.131)$$

Motivado por el principio de Duhamel definimos  $u = u(\mathbf{x}, t; s)$  como la solución del problema

$$\begin{aligned} u_{tt}(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(\cdot; s) &= 0, \quad u_t(\cdot; s) = f(\cdot; s) \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{aligned}$$

Sea ahora

$$u(\mathbf{x}, t) := \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s) ds, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (2.132)$$

Ahora el principio de Duhamel afirma que esto es una solución del problema (2.131).

**Teorema 2.30** (Solución de la ecuación de la onda no homogénea). *Sea  $n \geq 2$  un número entero y  $f \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Sea  $u$  definida por (2.132). Entonces*

- (i)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ ,
- (ii)  $u_{tt} - \Delta u = f$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
- (iii) para todo  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \lim_{\substack{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(\mathbf{x}, t) = 0.$$

*Demostración.*

- 1.) Si  $n$  es impar, entonces

$$\left[ \frac{n}{2} \right] + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

De acuerdo al Teorema 2.28,  $u(\cdot, \cdot; s) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$  para cada  $s \geq 0$ , por lo tanto  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Si  $n$  es par,

$$\left[ \frac{n}{2} \right] + 1 = \frac{n+2}{2},$$

y  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  según el Teorema 2.29.

- 2.) Luego calculamos

$$u_t(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t; t) + \int_0^t u_t(\mathbf{x}, t; s) ds = \int_0^t u_t(\mathbf{x}, t; s) ds,$$

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) = u_t(\mathbf{x}, t; t) + \int_0^t u_{tt}(\mathbf{x}, t; s) ds = f(\mathbf{x}, t) + \int_0^t u_{tt}(\mathbf{x}, t; s) ds,$$

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \Delta u(\mathbf{x}, t; s) ds = \int_0^t u_{tt}(\mathbf{x}, t; s) ds.$$

Concluimos que

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

y claramente  $u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) = 0$  for  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . ■

Observamos que la solución del problema no homogéneo general está dado por la suma de la solución de (2.105) (dada por una de las fórmulas (2.102), (2.124) o (2.130)) más la solución de (2.131) (dada por (2.132)).

**Ejemplo 2.2.** Queremos demostrar explícitamente como resolver (2.131) para  $n = 1$ . En este caso, la fórmula de d'Alembert (2.102) entrega

$$u(x, t; s) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy, \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy ds,$$

es decir

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y, t-s) dy ds, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 2.3.** Para  $n = 3$  la fórmula de Kirchhoff (2.116) implica que

$$u(\mathbf{x}, t; s) = (t - s) \int_{\partial B(\mathbf{x}, t-s)} f(\mathbf{y}, s) \, dS;$$

así,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t (t - s) \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}, t-s)} f(\mathbf{y}, s) \, dS \right) ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(\mathbf{x}, t-s)} \frac{f(\mathbf{y}, s)}{t - s} \, dS \, ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{f(\mathbf{y}, t - r)}{r} \, dS \, dr. \end{aligned}$$

En virtud de lo anterior,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(\mathbf{x}, t)} \frac{f(\mathbf{y}, t - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0$$

es una solución de (2.131) para  $n = 3$ . El integrando en el lado derecho se llama *potencial retardado*. ■

**2.4.4. Métodos de energía.** Las fórmulas (2.124) y (2.130) demuestran la necesidad de imponer cada vez más hipótesis de suavidad sobre  $g$  y  $h$  para asegurar la existencia de una solución  $C^2$  de la ecuación de la onda con  $n$  creciente. Esto sugiere que posiblemente otra manera de medir el tamaño y la suavidad de funciones podría ser apropiada. Efectivamente veremos ahora que la ecuación de la onda “se comporta bien” (para todo  $n$ ) con respecto a ciertas normas integrales “de energía”.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado y abierto con una frontera suave  $\partial U$ , y como siempre ponemos  $U_T := U \times (0, T]$ ,  $\Gamma_T := \bar{U}_T \setminus U_T$ , donde  $T > 0$ . Queremos resolver el problema de valores iniciales y de frontera

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad \text{en } U_T, \quad u = g \quad \text{sobre } \Gamma_T, \quad u_t = h \quad \text{sobre } U \times \{t = 0\}. \quad (2.133)$$

**Teorema 2.31** (Unicidad para la ecuación de la onda). *Existe a lo más una función  $u \in C^2(\bar{U}_T)$  que es solución de (2.133).*

*Demostración.* Si  $\tilde{u}$  es otra solución, entonces  $w := u - \tilde{u}$  es una solución de

$$w_{tt} - \Delta w = 0 \quad \text{en } U_T, \quad w = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_T, \quad w_t = 0 \quad \text{sobre } U \times \{t = 0\}.$$

Se define la “energía”

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_U \left( w_t^2(\mathbf{x}, t) + |Dw(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \, d\mathbf{x}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Definiendo  $\dot{\cdot} \equiv d/dt$  obtenemos

$$\dot{e}(t) = \int_U (w_t w_{tt} + Dw \cdot Dw_t) \, d\mathbf{x} = \int_U w_t (w_{tt} - \Delta w) \, d\mathbf{x} = 0.$$

No hay término de frontera puesto que  $w = 0$ , y luego  $w_t = 0$ , sobre  $\partial U \times [0, T]$ , por lo tanto para todo  $0 \leq t \leq T$ ,  $e(t) = e(0) = 0$ , es decir  $w_t \equiv 0$  y  $Dw \equiv 0$  en  $U_T$ . Dado que  $w \equiv 0$  sobre  $U \times \{t = 0\}$ , concluimos que  $w = u - \tilde{u} \equiv 0$  en  $U_T$ . ■

Como otra aplicación de métodos de energía consideremos nuevamente el dominio de dependencia de soluciones de la ecuación de la onda en el espacio entero. Para tal efecto supongamos que  $u \in C^2$  es una solución de  $u_{tt} - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Fijamos  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 > 0$ , y se define el cono

$$C = \{(\mathbf{x}, t) \mid 0 \leq t \leq t_0, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq t_0 - t\}.$$

**Teorema 2.32** (Velocidad de propagación finita). *Si  $u \equiv 0$  y  $u_t \equiv 0$  en  $B(\mathbf{x}_0, t_0) \times \{t = 0\}$ , entonces  $u \equiv 0$  en el interior del cono  $C$ .*

En particular, cualquier “perturbación” originada fuera de  $B(\mathbf{x}_0, t_0)$  no afecta la solución al interior de  $C$ , y por lo tanto posee velocidad de propagación finita. Ya sabemos esto desde las fórmulas de representación (2.124) y (2.130), por lo menos suponiendo que  $g = u$  y  $h = u_t$  sobre  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  son suficientemente suaves. La observación importante es que los métodos de energía permiten una demostración mucho más simple.

*Demostración del Teorema 2.32.* Se define

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{x}_0, t_0-t)} \left( u_t^2(\mathbf{x}, t) + |\mathbf{D}u(\mathbf{x}, t)|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(\mathbf{x}_0, t_0-t)} (u_t u_{tt} + \mathbf{D}u \cdot \mathbf{D}u_t) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, t_0-t)} (u_t^2 + |\mathbf{D}u|^2) dS \\ &= \int_{B(\mathbf{x}_0, t_0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) d\mathbf{x} + \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} u_t dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, t_0-t)} (u_t^2 + |\mathbf{D}u|^2) dS \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, t_0-t)} \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{D}u|^2 \right) dS. \end{aligned} \tag{2.134}$$

En virtud de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Cauchy,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} u_t \right| \leq |u_t| |\mathbf{D}u| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{D}u|^2. \tag{2.135}$$

Insertando (2.135) en (2.134) obtenemos  $\dot{e}(t) \leq 0$ , por lo tanto  $e(t) \leq e(0) = 0$  para  $0 \leq t \leq t_0$  y  $u_t \equiv 0$ ,  $\mathbf{D}u \equiv 0$ , y finalmente  $u \equiv 0$  en el cono  $C$ . ■

## 2.5. Ejemplos adicionales

**Ejemplo 2.4** (Problema Evaluación I, Curso 2006). Consideramos la ecuación de Laplace en el semiplano superior:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+, \tag{2.136}$$

con las condiciones de borde

$$u(x, 0) = f(x), \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{si } |x| \rightarrow \infty; \quad u(x, \infty) = 0. \tag{2.137}$$

Demostrar que la solución de (2.136), (2.137) está dada por

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

*Solución sugerida.* La solución es un caso especial del Teorema 2.14, de la fórmula de Green para un semi-espacio; con  $n = 2$ ,  $2\alpha(2) = 2\pi$  y por lo tanto

$$u(x, y) = \frac{2y}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \frac{f(\xi)}{|(x, y) - (\xi, 0)|^2} d\xi = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

La *demostración* es un caso especial del teorema mencionado (hay que explicitarla). ■

**Ejemplo 2.5** (Problema Evaluación I, Curso 2006).

- a) Demostrar el siguiente principio de máximo débil para la ecuación de calor en  $U = \mathbb{R}^n \times (0, T]$ : Sea  $u$  una función acotada y continua en  $\bar{U} = \mathbb{R}^n \times [0, T]$  con  $u_t, u_{x_i x_j} \in C(u)$  y  $u_t - \Delta u \leq 0$  en  $U$ . Entonces

$$M \equiv \sup_{(\mathbf{x}, t) \in U} u(\mathbf{x}, t) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0) \equiv m.$$

- b) Usando (a), demostrar que la solución

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4t}\right) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

es la única solución acotada de

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}),$$

para una función  $g$  acotada y continua para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

*Solución sugerida.*

- a) 1. Supongamos primero que la función  $u$  satisface la desigualdad estricta

$$u_t - \Delta u < 0 \quad \text{en } U,$$

y que existe un máximo local, es decir para un subconjunto abierto y acotado  $V \subset U$ ,

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{\bar{V}} u.$$

Si  $0 < t_0 < T$ , entonces  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  pertenece al interior de  $U$  y por lo tanto  $u_t(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ . Por otro lado, este máximo está caracterizado por  $\Delta u \leq 0$ . Entonces  $u_t - \Delta u \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , una contradicción. Supongamos que  $t_0 = T$ . En este caso,  $u_t \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , lo que todavía produce una contradicción. Concluimos que  $\sup_U u(\mathbf{x}, t) = \sup_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0)$ .

2. Ahora supongamos que  $u$  es la solución que satisface  $u_t - \Delta u \leq 0$  en  $U$ . En este caso,  $u^\varepsilon(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x}, t) - \varepsilon t$  es una función que satisface  $u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon < 0$  en  $U$ , por lo tanto

$$\sup_U u^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sup_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \sup_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0).$$

Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos que  $\sup_U u(\mathbf{x}, t) = \sup_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0)$ .



b) La unicidad es una consecuencia directa de los Teoremas 2.20 y 2.21. ■

**Ejemplo 2.6** (Problema Evaluación I, Curso 2006). Demostrar el principio de la *equipartición de la energía*: Sea  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  una solución del problema

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u = g, \quad u_t = h \quad \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}.$$

Supongamos que  $g$  y  $h$  tienen soporte compacto. Demostrar que las cantidades

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) \, dx \quad (\text{energía cinética}),$$

$$p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) \, dx \quad (\text{energía potencial})$$

satisfacen lo siguiente:

- a)  $k(t) + p(t)$  es constante con respecto a  $t$ ,
- b)  $k(t) = p(t)$  cuando  $t$  es suficientemente grande.

*Solución sugerida.*

- a) Puesto que  $g$  y  $h$  tienen soporte compacto, existe un número  $R > 0$  tal que  $g(x) = h(x) = 0$  si  $|x| \geq R$ . Entonces podemos calcular, usando la regularidad de las funciones que permite intercambiar el límite con la integral:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(k(t) + p(t)) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) \, dx \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (u_t^2(x, t)) \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (u_x^2(x, t)) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x u_{xt} \, dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes y usando que la solución  $u$  también tiene soporte compacto, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(k(t) + p(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} \, dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t (u_{tt} - u_{xx}) \, dx = 0.$$

- b) Usando la fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{2}(g'(x+t) - g'(x-t)) + \frac{1}{2}(h(x+t) + h(x-t)), \\ u_x(x, t) &= \frac{1}{2}(g'(x+t) + g'(x-t)) + \frac{1}{2}(h(x+t) - h(x-t)), \end{aligned}$$

luego

$$k(t) - p(t)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t(x, t) + u_x(x, t))(u_t(x, t) - u_x(x, t)) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (g'(x+t) + h(x+t))(g'(x-t) + h(x-t)) \, dx \end{aligned}$$

Ahora si elegimos  $t$  tan grande que

$$2t > \max\{|\text{supp } g|, |\text{supp } h|\},$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$  por lo menos un factor se anula, por lo tanto  $p(t) = k(t)$  para  $t$  suficientemente grande. ■

## EDPs no lineales de primer orden

### 3.1. Integral completa y envolventes

En este capítulo estudiaremos ecuaciones no lineales del tipo

$$F(Du, u, \mathbf{x}) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in U$ , y  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto. Se supone que la función

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

está dada, y que  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(\mathbf{x})$ , es la desconocida. Escribimos

$$F = F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = F(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n)$$

para  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x} \in U$ , donde “ $\mathbf{p}$ ” es la variable que será remplazada por el gradiente  $Du(\mathbf{x})$  y “ $z$ ” representa  $u(\mathbf{x})$ . Se supone que  $F$  es suave, y se define

$$D_{\mathbf{p}}F := (F_{p_1}, \dots, F_{p_n}), \quad D_zF := F_z, \quad D_{\mathbf{x}}F := (F_{x_1}, \dots, F_{x_n}).$$

Normalmente estaremos buscando soluciones de (3.1) en  $U$  sujetas a condiciones de borde del tipo

$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \Gamma \subseteq \partial U, \quad g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

donde  $g$  es una función dada.

Comenzamos el análisis de (3.1) describiendo algunas clases simples de soluciones, luego generaremos soluciones más complicadas. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, y supongamos que para  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$  existe una solución  $C^2 \ni u = u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  de (3.1). Se define la matriz

$$[D_{\mathbf{a}}u \quad D_{\mathbf{x}\mathbf{a}}^2u] := \begin{bmatrix} u_{a_1} & u_{x_1 a_1} & \cdots & u_{x_n a_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{a_n} & u_{x_1 a_n} & \cdots & u_{x_n a_n} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

**Definición 3.1.** Una familia de funciones  $u = u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  se llama integral completa (o solución completa) de (3.1) en  $U \times A$  si

- (i)  $u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  es una solución de (3.1) para todo  $\mathbf{a} \in A$ ,
- (ii) La matriz (3.3) posee el rango  $n$  para todo  $\mathbf{x} \in U$  y  $\mathbf{a} \in A$ .

La condición (ii) en la Definición 3.1 asegura que  $u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  depende de *todos* los parámetros independientes  $a_1, \dots, a_n$ . Para ilustrar este punto, supongamos que  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  es un conjunto abierto, y que para cada  $\mathbf{b} \in B$  la función  $v = v(\mathbf{x}; \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{x} \in U$ , es una solución de (3.1). Supongamos además que existe una aplicación  $\boldsymbol{\psi} \in C^1$ ,  $\boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \dots, \psi^n) : A \rightarrow B$  tal que

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = v(\mathbf{x}; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{a})), \quad \mathbf{x} \in U, \quad \mathbf{a} \in A.$$

En otras palabras se supone que  $u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  realmente depende sólo de los  $n - 1$  parámetros  $b_1, \dots, b_{n-1}$ . Pero en este caso,

$$u_{x_i a_j}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n-1} v_{x_i b_k}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{a})) \psi_{a_j}^k, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Esto implica que

$$\det(D_{\mathbf{x}\mathbf{a}}^2 u) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{n-1} v_{x_1 b_{k_1}} \cdots v_{x_n b_{k_n}} \begin{vmatrix} \psi_{a_1}^{k_1} & \cdots & \psi_{a_n}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{a_1}^{k_n} & \cdots & \psi_{a_n}^{k_n} \end{vmatrix} = 0,$$

dado que para cada selección de  $k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, n - 1\}$  por lo menos dos filas en la matriz correspondiente son iguales. Puesto que

$$u_{a_j}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n-1} v_{b_k}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\psi}(\mathbf{a})) \psi_{a_j}^k(\mathbf{a}), \quad j = 1, \dots, n,$$

un argumento similar muestra que el determinante de cada submatriz  $n \times n$  de (3.3) es cero, por lo tanto esta matriz tiene un rango estrictamente menor que  $n$ .

**Ejemplo 3.1** (Ecuación de Clairaut). La *ecuación de Clairaut*  $\mathbf{x} \cdot Du + f(Du) = u$  con  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  posee la integral completa  $u(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + f(\mathbf{a})$  para  $\mathbf{x} \in U$  y  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . ■

**Ejemplo 3.2** (Ecuación eikonal de la geometría óptica). La *ecuación eikonal de la geometría óptica*

$$|Du| = 1 \tag{3.4}$$

posee la integral completa  $u(\mathbf{x}; \mathbf{a}, b) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$  para  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\mathbf{a} \in \partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}$ . ■

**Ejemplo 3.3** (Ecuación de Hamilton-Jacobi). La *ecuación de Hamilton-Jacobi* de la mecánica en su forma más simple está dada por

$$u_t + H(Du) = 0, \tag{3.5}$$

donde  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es el *Hamiltoniano*. Aquí  $u$  depende de  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Como antes definimos  $t =: x_{n+1}$  y  $Du = D_{\mathbf{x}}u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ . Una integral completa de (3.5) está dada por

$$u(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}, b) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - tH(\mathbf{a}) + b, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Queremos estudiar ahora cómo se pueden construir soluciones más complicadas de (3.1) las cuales dependen de una función arbitraria de  $n - 1$  variables, y no sólo de  $n$  parámetros. Se construirán estas soluciones como *envolventes* de integrales completas.

**Definición 3.2** (Envolvente de una integral completa). *Sea  $u = u(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  una función en  $C^1$  para  $\mathbf{x} \in U$  para cada  $\mathbf{a} \in A$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $A \subset \mathbb{R}^m$  son conjuntos abiertos. Consideremos, además, la ecuación vectorial*

$$D_{\mathbf{a}}u(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{x} \in U, \quad \mathbf{a} \in A. \tag{3.7}$$

Supongamos que desde (3.7) se puede despejar  $\mathbf{a} = \phi(\mathbf{x})$  con  $\phi \in C^1$ . Entonces

$$D_{\mathbf{a}}u(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in U. \quad (3.8)$$

En este caso la función

$$v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in U \quad (3.9)$$

se llama envolvente de las funciones  $\{u(\cdot, \mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in A}$ .

**Teorema 3.1** (Construcción de soluciones por envolventes). *Sea  $u = u(\cdot, \mathbf{a})$  una solución de (3.1) para todo  $\mathbf{a} \in A$ . Supongamos que existe la envolvente  $v$  definida por (3.8) y (3.9), y que ésta es una función en  $C^1$ . Entonces  $v$  también es una solución de (3.1).*

*Demostración.* Usando  $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x}))$  obtenemos para  $i = 1, \dots, n$

$$v_{x_i}(\mathbf{x}) = u_{x_i}(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})) + \sum_{j=1}^m u_{a_j}(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})) \phi_{x_i}^j(\mathbf{x}) = u_{x_i}(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})),$$

puesto que el valor de la sumatoria es cero según (3.8). Concluimos que para cada  $\mathbf{x} \in U$ ,

$$F(Dv(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F(Du(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})), u(\mathbf{x}; \phi(\mathbf{x})), \mathbf{x}) = 0. \quad \blacksquare$$

A veces la envolvente  $v$  definida aquí se llama *integral singular* de (3.1).

La idea geométrica es que para cada  $\mathbf{x} \in U$ , el grafo de  $v$  es tangencial al grafo de  $u(\cdot; \mathbf{a})$  para  $\mathbf{a} = \phi(\mathbf{x})$ , por lo tanto  $Dv = D_{\mathbf{x}}u(\cdot; \mathbf{a})$  en  $\mathbf{x}$  para  $\mathbf{a} = \phi(\mathbf{x})$ .

**Ejemplo 3.4.** La ecuación

$$u^2(1 + |Du|^2) = 1 \quad (3.10)$$

posee la integral completa

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \pm \sqrt{1 - |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2} \quad \text{para } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < 1.$$

Aquí calculamos

$$D_{\mathbf{a}}u = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2}}(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

entonces  $D_{\mathbf{a}}u = 0$  siempre que  $\mathbf{a} = \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . Concluimos que las funciones  $v \equiv \pm 1$  son integrales singulares de (3.10).  $\blacksquare$

Para generar aún más soluciones de (3.1) desde una integral completa variamos el método. Sea  $A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$  y  $h : A' \rightarrow \mathbb{R}$  alguna función  $C^1$  tal que el grafo de  $h$  pertenece a  $A$ . Sea  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) = (\mathbf{a}', a_n)$ ,  $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

**Definición 3.3** (Integral general). *La integral general (dependiente de  $h$ ) de (3.1) es la envolvente  $v' = v'(\mathbf{x})$  de las funciones*

$$u'(\mathbf{x}; \mathbf{a}') = u(\mathbf{x}; \mathbf{a}', h(\mathbf{a}')), \quad \mathbf{x} \in U, \quad \mathbf{a}' \in A',$$

*siempre que esta envolvente existe y pertenece a  $C^1$ .*

Obviamente, usando una integral completa, que depende de  $n$  constantes arbitrarias, podemos formar una solución que depende de una función  $u$  arbitraria de  $n - 1$  variables (donde esto es posible). Por otro lado, una vez que se ha determinado una solución de (3.1) que depende de una función  $h$  arbitraria, no necesariamente se han encontrado *todas* las soluciones. Para ver esto, consideremos la ecuación

$$F(Du, u, \mathbf{x}) := F_1(Du, u, \mathbf{x})F_2(Du, u, \mathbf{x}) = 0.$$

Si  $u_1(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  es una integral completa de  $F_1(Du, u, \mathbf{x}) = 0$ , y podemos encontrar una integral general correspondiente a una función  $h$  arbitraria, todavía nos faltan todas las soluciones de  $F_2(Du, u, \mathbf{x}) = 0$ .

**Ejemplo 3.5.** Consideremos la ecuación eikonal (3.4) para  $n = 2$ . Una integral completa alternativa a la presentada en el Ejemplo 3.2 está dada por

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = x_1 \cos a_1 + x_2 \sin a_1 + a_2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ponemos  $h \equiv 0$ , tal que

$$u'(\mathbf{x}; a_1) = x_1 \cos a_1 + x_2 \sin a_1, \quad (3.11)$$

lo que representa la subfamilia de las soluciones planares de (3.4), cuyos grafos incluyen el punto  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Entonces calculamos la envolvente escribiendo

$$D_{a_1} u' = -x_1 \sin a_1 + x_2 \cos a_1 = 0,$$

es decir

$$a_1 = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Insertando esto en (3.11) obtenemos que

$$v'(\mathbf{x}) = x_1 \cos \left( \arctan \frac{x_2}{x_1} \right) + x_2 \sin \left( \arctan \frac{x_2}{x_1} \right) = \pm |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

es una solución de  $|Dv'| = 1$  para  $\mathbf{x} \neq 0$ . ■

**Ejemplo 3.6.** Consideremos la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.5) con  $H(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2$  y la integral completa dada por (3.6) con  $h \equiv 0$ , es decir  $b = 0$ :

$$u'(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} - t|\mathbf{a}|^2. \quad (3.12)$$

Para determinar la envolvente se resuelve primero

$$D_{\mathbf{a}} u' = \mathbf{x} - 2t\mathbf{a} = 0,$$

con la solución

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2t}\mathbf{x}.$$

Insertando esto en (3.12) obtenemos que

$$v'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \cdot \left( \frac{1}{2t}\mathbf{x} \right) - t \left| \frac{1}{2t}\mathbf{x} \right|^2 = \frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

es una solución de (3.5). ■

### 3.2. Características

**3.2.1. Ecuaciones características.** Volvemos a estudiar la ecuación (3.1) junto con las condiciones de borde (3.2). Ahora desarrollaremos el *método de características*, el cual consiste en convertir (3.1), (3.2) en el problema de resolver un problema de valores iniciales de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias. Sea ahora  $u$  una solución de (3.1), (3.2) y fijamos el punto  $\mathbf{x} \in U$ . Queremos calcular  $u(\mathbf{x})$  encontrando alguna curva en  $U$  que conecte  $\mathbf{x}$  con un punto  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , y a lo largo de la cual podemos determinar  $u$ . Puesto que (3.2) dice que  $u = g$  sobre  $\Gamma$ , conocemos el valor de  $u$  en el extremo  $\mathbf{x}^0$  de dicha curva, y queremos calcular  $u$  a lo largo de esta curva, en particular en  $\mathbf{x}$ . Supongamos que la curva tiene la parametrización

$$\mathbf{x}(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s)),$$

donde  $s$  pertenece a algún subintervalo de  $\mathbb{R}$ . Suponiendo que  $u$  es una solución  $C^2$  de (3.1) definimos

$$z(s) := u(\mathbf{x}(s)), \quad \mathbf{p}(s) := Du(\mathbf{x}(s)) = (u_{x_1}(\mathbf{x}(s)), \dots, u_{x_n}(\mathbf{x}(s))). \quad (3.13)$$

Ahora hay que elegir  $\mathbf{x}(\cdot)$  de tal forma que se pueden calcular  $z(\cdot)$  y  $\mathbf{p}(\cdot)$ . Para tal efecto, y definiendo  $\dot{\cdot} \equiv d/ds$ , calculamos

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(\mathbf{x}(s)) \dot{x}^j(s), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Por otro lado, derivando (3.1) con respecto a  $x_i$  obtenemos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(Du, u, \mathbf{x}) u_{x_j x_i} + \frac{\partial F}{\partial z}(Du, u, \mathbf{x}) u_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}(Du, u, \mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Podemos aprovechar de (3.15) para eliminar las segundas derivadas en (3.14), siempre que

$$\dot{x}^j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Sea (3.16) válido, entonces podemos evaluar (3.15) en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ , obteniendo de (3.13)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) u_{x_i x_j}(\mathbf{x}(s)) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \dot{p}^i(s) \\ & + \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión y (3.16) en (3.14) obtenemos

$$\dot{p}^i(s) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \dot{p}^i(s), \quad i = 1, \dots, n.$$

Finalmente derivamos  $z(s) = u(\mathbf{x}(s))$  para obtener

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_j}(\mathbf{x}(s)) \dot{x}^j(s)$$

$$= \sum_{j=1}^n p^j \frac{\partial F}{\partial p_j}(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)), \quad (3.17)$$

donde la segunda igualdad es una consecuencia de  $p^i(s) = u_{x_i}(\mathbf{x}(s))$  y de (3.16).

Resumiremos (3.16)–(3.17) en la siguiente forma vectorial:

$$\dot{\mathbf{p}}(s) = -D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - D_zF(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))\mathbf{p}(s), \quad (3.18a)$$

$$\dot{z}(s) = D_{\mathbf{p}}F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s), \quad (3.18b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = D_{\mathbf{p}}F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)). \quad (3.18c)$$

Se trata aquí de un sistema de  $2n + 1$  ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden, las *ecuaciones características* de (3.1). Las funciones  $\mathbf{p}(\cdot)$ ,  $z(\cdot)$  y  $\mathbf{x}(\cdot)$  se llaman *características*. A veces nos referimos a  $\mathbf{x}(\cdot)$  como *característica proyectada*: ésta es la proyección de las características  $(\mathbf{p}(\cdot), z(\cdot), \mathbf{x}(\cdot)) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  al espacio físico  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Acabamos de demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 3.2** (Estructura de las EDOs características). *Sea  $u \in C^2(U)$  una solución de (3.1) en  $U$ . Sea además  $\mathbf{x}(\cdot)$  una solución de (3.18c), donde  $\mathbf{p}(\cdot) = Du(\mathbf{x}(\cdot))$ ,  $z(\cdot) = u(\mathbf{x}(\cdot))$ . Entonces  $\mathbf{p}(\cdot)$  es una solución de (3.18a) y  $z(\cdot)$  es una solución de (3.18b), para aquellos valores de  $s$  que satisfacen  $\mathbf{x}(s) \in U$ .*

Antes de seguir la investigación de las ecuaciones características (3.18) estudiaremos algunos casos especiales donde la estructura de estas ecuaciones es particularmente simple.

**Ejemplo 3.7** (Características para  $F$  lineal). Sea  $F$  dada por

$$F(Du, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot Du(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in U. \quad (3.19)$$

Entonces  $F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} + c(\mathbf{x})z$ , por lo tanto  $D_{\mathbf{p}}F = \mathbf{b}(\mathbf{x})$  y (3.18c) se convierte en

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)), \quad (3.20)$$

mientras que de (3.18b) obtenemos

$$\dot{z}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s).$$

Puesto que  $\mathbf{p}(\cdot) = Du(\mathbf{x}(\cdot))$ , (3.19) simplifica esta última ecuación, entregando

$$\dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s))z(s).$$

Esta ecuación es lineal en  $z(\cdot)$  una vez que hemos determinado la función  $\mathbf{x}(\cdot)$  resolviendo (3.20). Resumiendo, las ecuaciones características en el presente caso son

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(s) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)), \\ \dot{z}(s) &= -c(\mathbf{x}(s))z(s). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para ilustrar lo anterior, consideremos el problema

$$\begin{aligned} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} &= u \quad \text{en } U = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}, \\ u &= g \quad \text{sobre } \Gamma := \{x_1 > 0, x_2 = 0\} \subset \partial U. \end{aligned} \quad (3.22)$$



La ecuación es de la forma (3.19) para  $\mathbf{b} = (-x_2, x_1)$  y  $c \equiv -1$ . Entonces las ecuaciones (3.21) asumen la forma

$$\dot{x}^1 = -x^2, \quad \dot{x}^2 = x^1, \quad \dot{z} = z,$$

con la solución

$$x^1(s) = x^0 \cos s, \quad x^2(s) = x^0 \sin s, \quad z(s) = z^0 e^s = g(x^0) e^s, \quad x^0 > 0, \quad 0 \leq s \leq \pi/2.$$

Ahora fijamos un punto  $(x_1, x_2) \in U$  y elegimos  $s > 0$  y  $x^0 > 0$  tal que

$$(x_1, x_2) = (x^1(s), x^2(s)) = (x^0 \cos s, x^0 \sin s),$$

es decir

$$x^0 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad s = \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

por lo tanto la solución de (3.22) está dada por

$$u(x_1, x_2) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = g(x^0) e^s = g((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}) \exp\left(\arctan \frac{x_2}{x_1}\right).$$

■

**Ejemplo 3.8** (Características para  $F$  cuasi-lineal). Consideremos ahora

$$F(Du, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot Du(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = 0. \quad (3.23)$$

Observe que  $F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, z) \cdot \mathbf{p} + c(\mathbf{x}, z)$ , por lo tanto  $D_{\mathbf{p}}F = \mathbf{b}(\mathbf{x}, z)$  y las ecuaciones (3.18c) y (3.18b) se convierten en

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(s) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)), \\ \dot{z}(s) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)) \cdot \mathbf{p}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)) \end{aligned}$$

(la última identidad sigue de (3.23)). Las ecuaciones características, en el presente caso, están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(s) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)), \\ \dot{z}(s) &= -c(\mathbf{x}(s), z(s)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

En general, las ecuaciones (3.24) son difíciles de resolver, por lo tanto nos limitaremos al ejemplo del problema de valores de frontera de una ecuación semi-lineal dado por

$$u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 \quad \text{en } U := \{x_2 > 0\}, \quad u = g \quad \text{sobre } \Gamma = \{x_2 = 0\} = \partial U.$$

Aquí  $\mathbf{b} = (1, 1)$ ,  $c = -z^2$ , entonces (3.24) entrega las ecuaciones características

$$\dot{x}^1 = 1, \quad \dot{x}^2 = 1, \quad \dot{z} = z^2,$$

con la solución

$$x^1(s) = x^0 + s, \quad x^2(s) = s, \quad z(s) = \frac{z^0}{1 - sz^0} = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)}, \quad x^0 \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0,$$

siempre que  $1 - sg(x^0) \neq 0$ . Sea ahora  $(x_1, x_2) \in U$ , y elegimos  $s > 0$  y  $x^0 \in \mathbb{R}$  tales que  $(x_1, x_2) = (x^1(s), x^2(s)) = (x^0 + s, s)$ , es decir  $x^0 = x_1 - x_2$ ,  $s = x_2$ . Así obtenemos la solución

$$u(x_1, x_2) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)} = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2g(x_1 - x_2)}$$

siempre que  $1 - x_2g(x_1 - x_2) \neq 0$ . ■

Si  $F$  es completamente no lineal, hay que resolver las ecuaciones completamente no lineales (3.20) donde esto es posible.

**Ejemplo 3.9** (Un problema completamente no lineal). Consideremos el problema completamente no lineal

$$u_{x_1}u_{x_2} = u \quad \text{en } U = \{x_1 > 0\}, \quad u = x_2^2 \quad \text{en } \Gamma = \{x_1 = 0\} = \partial U. \quad (3.25)$$

Aquí  $F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = p_1p_2 - z$ , por lo tanto las ecuaciones características son

$$\dot{p}^1 = p^1, \quad \dot{p}^2 = p^2, \quad \dot{z} = 2p^1p^2, \quad \dot{x}^1 = p^2, \quad \dot{x}^2 = p^1$$

con la solución

$$\begin{aligned} x^1(s) &= p_2^0(e^s - 1), \\ x^2(s) &= x^0 + p_1^0(e^s - 1), \\ z(s) &= z^0 + p_1^0p_2^0(e^{2s} - 1), \\ p^1(s) &= p_1^0e^s, \\ p^2(s) &= p_2^0e^s \end{aligned} \quad (3.26)$$

con  $x^0 \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y  $z^0 = (x^0)^2$ . Queda por determinar  $(p_1^0, p_2^0)$ . Puesto que  $u = x_2^2$  sobre  $\Gamma$ , concluimos que

$$p_2^0 = u_{x_2}(0, x^0) = 2x^0. \quad (3.27)$$

Por otro lado, la EDP  $u_{x_1}u_{x_2} = u$  implica que  $p_1^0p_2^0 = z^0 = (x^0)^2$ ; insertando (3.27) obtenemos  $p_1^0 = x^0/2$ . Insertando  $p_1^0$  y  $p_2^0$  obtenemos de (3.26) las ecuaciones

$$x^1(s) = 2x^0(e^s - 1), \quad x^2(s) = \frac{x^0}{2}(e^s + 1), \quad z(s) = (x^0)^2e^{2s}, \quad p^1(s) = \frac{x^0}{2}e^s, \quad p^2(s) = 2x^0e^s.$$

Sea ahora  $(x_1, x_2) \in U$ . Sean  $s$  y  $x^0$  elegidos tales que

$$(x_1, x_2) = (x^1(s), x^2(s)) = \left( 2x^0(e^s - 1), \frac{x^0}{2}(e^s + 1) \right).$$

Esta ecuación implica que

$$x^0 = \frac{4x_2 - x_1}{4}, \quad e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1},$$

por lo tanto la solución de (3.25) está dada por

$$u(x_1, x_2) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = (x^0)^2e^{2s} = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}.$$
■

Queremos ahora utilizar las ecuaciones características para resolver el problema de valores de frontera (3.1), (3.2), por lo menos en una región pequeña de una parte de  $\Gamma \subseteq \partial U$ . Para simplificar el cálculo definimos un cambio de variables (ver Sección 1.3.1) para “rectificar” la frontera  $\partial U$ . Sea  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$ , y sean  $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Phi = \Psi^{-1}$  las aplicaciones que describen el cambio de variables descritas en la Sección 1.3.1. Para  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  sea  $V := \Phi(U)$ , y sea  $v(\mathbf{y}) := u(\Psi(\mathbf{y}))$  para  $\mathbf{y} \in V$ , entonces  $u(\mathbf{x}) = v(\Phi(\mathbf{x}))$  para  $\mathbf{x} \in U$ .

Ahora analizamos cuál es la EDP satisfecha por  $v$ . Sabemos que

$$u_{x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n v_{y_k}(\Phi(\mathbf{x})) \Phi_{x_i}^k(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

por lo tanto,  $Du(\mathbf{x}) = Dv(\mathbf{y}) \cdot D\Phi(\mathbf{x})$ , lo que implica que

$$0 = F(Du(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = F(Dv(\mathbf{y})D\Phi(\Psi(\mathbf{y})), v(\mathbf{y}), \Psi(\mathbf{y})).$$

Notamos que la segunda expresión puede ser escrita como

$$G(Dv(\mathbf{y}), v(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in V,$$

además sabemos que  $v = h$  sobre  $\Delta$ , donde  $\Delta := \Phi(\Gamma)$  y  $h(\mathbf{y}) := g(\Psi(\mathbf{y}))$ . Resumiendo, mediante el cambio de coordenadas el problema (3.1), (3.2) se transforma a

$$G(Dv, v, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{en } V, \quad v = h \quad \text{en } \Delta. \quad (3.28)$$

Constatamos que cuando rectificamos la frontera de  $U$  cerca de un punto  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$ , el problema original (3.1), (3.2) se transforma en el problema nuevo (3.28), pero que es del mismo tipo, por lo tanto podemos suponer a priori que  $\Gamma$  es plana cerca de  $\mathbf{x}^0$ , y  $x_n = 0$ .

**3.2.2. Condiciones de compatibilidad.** Queremos utilizar las ecuaciones características (3.18) para resolver (3.1), (3.2), por lo menos en alguna vecindad de  $\mathbf{x}^0$ . Como condiciones iniciales para la integración de (3.18) definimos

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^0, \quad z(0) = z^0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0.$$

Si la curva  $\mathbf{x}(\cdot)$  pasa por  $\mathbf{x}^0$ , se debe cumplir que

$$z^0 = g(\mathbf{x}^0). \quad (3.29)$$

Puesto que (3.2) implica que

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{cerca de } \mathbf{x}^0,$$

podemos formar las derivadas parciales con respecto a  $x_1, \dots, x_{n-1}$  para obtener

$$u_{x_i}(\mathbf{x}^0) = g_{x_i}(\mathbf{x}^0), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Por otro lado queremos que la EDP (3.1) esté satisfecha, por lo tanto  $\mathbf{p}^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$  debe satisfacer las relaciones

$$p_i^0 = g_{x_i}(\mathbf{x}^0), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) = 0, \quad (3.30)$$

lo cual genera  $n$  ecuaciones escalares para las  $n$  variables  $p_1^0, \dots, p_n^0$ .

Las condiciones (3.29) y (3.30) se llaman *condiciones de compatibilidad*. A su vez, un triple  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  que satisface las condiciones de compatibilidad (3.29) y (3.30) se llama *admisible*. Notar que un vector  $\mathbf{p}^0$  que satisfaga (3.30) puede no existir, o no ser único.

**3.2.3. Condiciones de borde no características.** Supongamos ahora que  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , que  $\Gamma \subset \{x_n = 0\}$  en la vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , y que  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  es admisible. Hasta ahora sabemos que la admisibilidad de este triple asegura que podemos integrar las ecuaciones características (3.18) partiendo de  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ . Pero queremos también resolver estas ecuaciones en una vecindad de  $\mathbf{x}^0$ , y nos preguntamos si podemos perturbar el triple  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  de tal forma que las condiciones de compatibilidad siguen siendo satisfechas. O sea, para  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \Gamma$ ,  $\mathbf{y}$  cerca de  $\mathbf{x}^0$ , queremos resolver las EDOs características (3.18) con las condiciones iniciales

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{q}(\mathbf{y}), \quad z(0) = g(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}. \quad (3.31)$$

La tarea es encontrar una función  $\mathbf{q}(\cdot) = (q^1(\cdot), \dots, q^n(\cdot))$  tal que

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{p}^0 \quad (3.32)$$

y  $(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y})$  es admisible, es decir se debe satisfacer

$$q^i(\mathbf{y}) = g_{x_i}(\mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0 \quad (3.33)$$

para todo  $\mathbf{y} \in \Gamma$  cerca de  $\mathbf{x}^0$ .

**Lema 3.1** (Condiciones de borde no características). *Existe una solución  $\mathbf{q}$  de (3.32), (3.33) para todo  $\mathbf{y} \in \Gamma$  suficientemente cerca de  $\mathbf{x}^0$  siempre que*

$$F_{p_n}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \neq 0. \quad (3.34)$$

Un triple  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  que satisface (3.34) se llama no característico.

*Demostración.* Para simplificar la notación, en lo siguiente sea  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . Aplicamos el Teorema de Funciones Implícitas (Teorema 1.19) a la aplicación

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = (G^1(\mathbf{p}, \mathbf{y}), \dots, G^n(\mathbf{p}, \mathbf{y}))$$

definida por

$$G^i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = p_i - g_{x_i}(\mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n-1; \quad G^n(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{p}, g(\mathbf{y}), \mathbf{y}).$$

Según (3.29) y (3.30),  $\mathbf{G}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = 0$ , además

$$D_{\mathbf{p}}\mathbf{G}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ F_{p_1}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) & \cdots & \cdots & F_{p_{n-1}}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) & F_{p_n}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \end{bmatrix},$$

por lo tanto en virtud de la condición no característica (3.34)

$$\det D_{\mathbf{p}}\mathbf{G}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = F_{p_n}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \neq 0,$$

y de acuerdo al Teorema 1.19 existe una solución única  $\mathbf{p} = \mathbf{q}(\mathbf{y})$  de la identidad  $G(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = 0$  si  $\mathbf{y}$  está suficientemente cerca de  $\mathbf{x}^0$ . ■

**3.2.4. Existencia local de soluciones.** Recordamos que queremos utilizar las ecuaciones características (3.18) para construir una solución de (3.1), (3.2), por lo menos cerca de  $\Gamma$ . Como antes, elegimos un punto  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , y podemos suponer que la superficie  $\Gamma$  es plana cerca de  $\mathbf{x}^0$  y contenida en el plano  $\{x_n = 0\}$ . Además, en virtud de lo anterior, se supone que el triple  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  es un triple admisible de datos de frontera, y que este triple es no característico. Entonces, de acuerdo al Lema 3.1, existe una función  $\mathbf{q}(\cdot)$  tal que  $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}(\mathbf{x}^0)$  y el triple  $(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y})$  es admisible para todo  $\mathbf{y}$  suficientemente cerca de  $\mathbf{x}^0$ . Ahora, dado un punto  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ , resolvemos las ecuaciones características (3.18) sujetas a las condiciones iniciales (3.31). Escribiremos

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(s) &= \mathbf{p}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{p}(y_1, \dots, y_{n-1}, s), \\ z(s) &= z(\mathbf{y}, s) = z(y_1, \dots, y_{n-1}, s), \\ \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{x}(y_1, \dots, y_{n-1}, s)\end{aligned}$$

para enfatizar la dependencia de la solución de  $\mathbf{y}$  y  $s$ .

**Lema 3.2** (Invertibilidad local). *Supongamos que la condición no característica (3.34) está satisfecha. Entonces existen un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  con  $0 \in I$ , una vecindad  $W$  de  $\mathbf{x}^0$  en  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , y una vecindad  $V$  de  $\mathbf{x}^0$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que para todo  $\mathbf{w} \in V$  existen un  $s \in I$  e  $\mathbf{y} \in W$  únicos tales que  $\mathbf{w} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, s)$ . Las aplicaciones  $\mathbf{w} \mapsto s, \mathbf{y}$  son  $C^2$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) = \mathbf{x}^0$ , por lo tanto el Teorema de la Función Inversa (Teorema 1.18) entrega el resultado deseado siempre que  $\det D\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) \neq 0$ . Ahora,  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, 0) = (\mathbf{y}, 0)$  para  $\mathbf{y} \in \Gamma$ , por lo tanto

$$\frac{\partial x^j}{\partial y_i}(\mathbf{x}^0, 0) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{para } j = 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{para } j = n, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.35)$$

Por otro lado la EDO (3.18c) implica que

$$\frac{\partial x^j}{\partial s}(\mathbf{x}^0, 0) = F_{p_j}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0). \quad (3.36)$$

En virtud de (3.35) y (3.36),

$$D\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & F_{p_1}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & F_{p_n}(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \end{bmatrix},$$

lo que significa que  $\det D\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) \neq 0$  debido a la condición no característica (3.34).  $\blacksquare$

Usando el Lema 3.2 podemos resolver de manera única para cada  $\mathbf{w} \in V$  la ecuación

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, s) \quad \text{para } \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}), s = s(\mathbf{x}). \quad (3.37)$$

Finalmente definimos

$$u(\mathbf{x}) := z(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x})), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) := \mathbf{p}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x})) \quad (3.38)$$

para  $\mathbf{x} \in V$  y  $s$  como arriba.

**Teorema 3.3** (Existencia local de una solución). *La función  $u$  definida por (3.37) y (3.38) es una solución de la EDP (3.1) para  $\mathbf{x} \in V$  junto con las condiciones de borde*

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma \cap V.$$

*Demostración.*

- 1.) Primero fijamos  $\mathbf{y} \in \Gamma$  cerca de  $\mathbf{x}^0$  y como arriba resolvemos las EDO características (3.18) con las condiciones iniciales (3.31) para obtener las funciones

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s), \quad z(s) = z(\mathbf{y}, s), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(\mathbf{y}, s).$$

- 2.) Ahora demostramos que si  $\mathbf{y} \in \Gamma$  está suficientemente cerca de  $\mathbf{x}^0$ , entonces

$$f(\mathbf{y}, s) := F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{x}(\mathbf{y}, s)) = 0, \quad s \in I. \quad (3.39)$$

Para tal efecto, notamos que

$$f(\mathbf{y}, 0) = F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, 0), z(\mathbf{y}, 0), \mathbf{x}(\mathbf{y}, 0)) = F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0 \quad (3.40)$$

debido a la condición de compatibilidad (3.33). Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(\mathbf{y}, s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}^j + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \dot{x}^j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \left( -\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p^j \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} p^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} = 0, \end{aligned}$$

donde usamos (3.18). Este cálculo y (3.40) confirman que (3.39) efectivamente es válido.

- 3.) Usando Lema 3.2 y (3.37), (3.38) y (3.39) podemos concluir que

$$F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V. \quad (3.41)$$

- 4.) Para concluir la demostración falta demostrar que

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = Du(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V. \quad (3.42)$$

Para demostrar (3.42), estableceremos primero las identidades

$$\frac{\partial z}{\partial s}(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^n p^j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial x^j}{\partial s}(\mathbf{y}, s), \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_i}(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^n p^j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial x^j}{\partial y_i}(\mathbf{y}, s), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.44)$$

(Obviamente, estas fórmulas son consistentes con (3.42).) Efectivamente, la identidad (3.43) es una consecuencia de las ecuaciones características (3.18b) y (3.18c). Para establecer (3.44) fijamos  $\mathbf{y} \in \Gamma$  e  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Definimos

$$r^i(s) := \frac{\partial z}{\partial y_i}(\mathbf{y}, s) - \sum_{j=1}^n p^j(\mathbf{y}, s) \frac{\partial x^j}{\partial y_i}(\mathbf{y}, s).$$

En lo siguiente demostraremos que  $r^i(s) = 0$ . Para tal efecto notamos primero que

$$r^i(0) = g_{x_i}(\mathbf{y}) - q^i(\mathbf{y}) = 0$$

debido a la condición de compatibilidad. Luego calculamos que

$$\dot{r}^i(s) = \frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial s} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial p^j}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} + p^j \frac{\partial^2 x^j}{\partial y_i \partial s} \right). \quad (3.45)$$

Para simplificar esto calculamos de (3.43)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial y_i} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial p^j}{\partial y_i} \frac{\partial x^j}{\partial s} + p^j \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial y_i} \right).$$

Insertando este resultado en (3.45) y utilizando (3.18a) descubrimos que

$$\begin{aligned} \dot{r}^i(s) &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial p^j}{\partial y_i} \frac{\partial x^j}{\partial s} - \frac{\partial p^j}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial p^j}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} - \left( -\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p^j \right) \frac{\partial x^j}{\partial y_i} \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por otro lado, derivando (3.41) con respecto a  $y_i$  obtenemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p^j}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x^j}{\partial y_i} = 0.$$

Insertando esto en (3.46) llegamos a

$$\dot{r}^i(s) = \frac{\partial F}{\partial z} \left( \sum_{j=1}^n p^j \frac{\partial x^j}{\partial y_i} - \frac{\partial z}{\partial y_i} \right) = -\frac{\partial F}{\partial z} r^i(s). \quad (3.47)$$

Entonces  $r^i(\cdot)$  es la solución de la EDO lineal (3.47) junto con la condición inicial  $r^i(0) = 0$ . Por lo tanto, en virtud del Teorema 1.9 concluimos que  $r^i(s) = 0$  para  $s \in I$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , o sea, (3.44) es válido.

- 5.) Finalmente demostramos que (3.42) es válido. Utilizando primero (3.37) y luego (3.43) y (3.44) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y^i}{\partial x_j} = \left( \sum_{k=1}^n p^k \frac{\partial x^k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^n p^k \frac{\partial x^k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y^i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^n p^k \left( \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x^k}{\partial y_i} \frac{\partial y^i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n p^k \frac{\partial x^k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n p^k \delta_{jk} = p^j. \end{aligned}$$

■

### 3.3. Aplicaciones

Consideraremos ahora algunos casos especiales de la ecuación (3.1) para demostrar como la teoría de existencia local se simplifica en estas circunstancias.

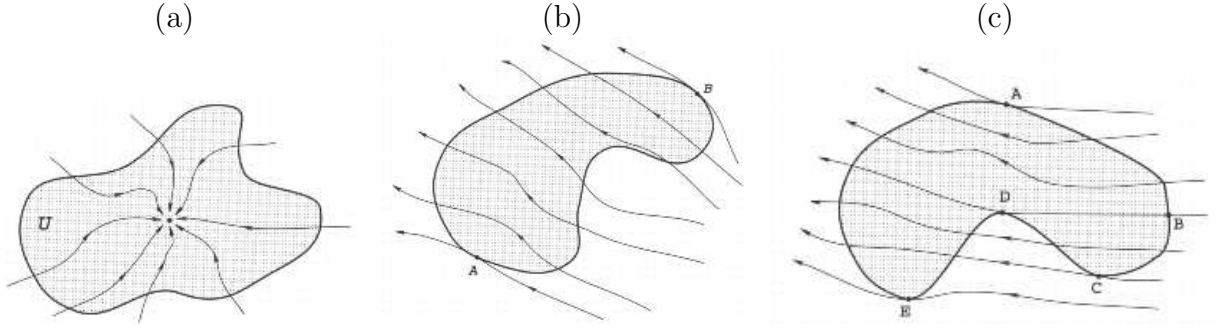


FIGURA 3.1. Ejemplo 3.10: (a) flujo hacia un punto atractor, (b) flujo a través de un dominio, (c) flujo con puntos característicos.

**3.3.1. Caso  $F$  lineal.** Recordamos que una EDP lineal, homogénea y de primer orden es de la forma

$$F(Du, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot Du(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in U. \quad (3.48)$$

La condición no característica (3.34), la cual en un punto de frontera  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  se convierte en

$$D_p F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^0) \neq 0, \quad (3.49)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^0)$  denota el vector normal exterior unitario a  $\partial U$  en  $\mathbf{x}^0$ , asume aquí la forma

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}^0) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^0) \neq 0, \quad (3.50)$$

es decir esta condición no involucra  $z^0$  o  $\mathbf{p}^0$ . Además, si especificamos la condición de borde

$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3.51)$$

podemos despejar  $\mathbf{q}(\mathbf{y})$  de forma única desde (3.33) para  $\mathbf{y} \in \Gamma$  cerca de  $\mathbf{x}^0$ . Así podemos aplicar el Teorema 3.3 para construir una solución única de (3.48), (3.51) en alguna vecindad  $V^0 \ni \mathbf{x}^0$ . Notar que a pesar de que hemos utilizado el sistema completo de ecuaciones características (3.18) en la demostración del Teorema 3.3, una vez que se sabe que la solución existe, podemos utilizar las ecuaciones reducidas (3.21) (en las cuales no aparece  $\mathbf{p}(\cdot)$ ) para calcular la solución. Notamos además que las características proyectadas  $\mathbf{x}(\cdot)$  que emanan de los distintos puntos de  $\Gamma$  no pueden intersectar debido a la unicidad de las soluciones del problema de valores iniciales para la EDO

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)). \quad (3.52)$$

**Ejemplo 3.10.** Supongamos que las trayectorias de la EDO (3.52) son como en la Figura 3.1 (a), es decir se supone que el campo vectorial  $\mathbf{b}$  desaparece en  $U$  en un sólo punto, el cual se supone que es el origen, y  $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$  sobre  $\Gamma := \partial U$ . Queremos saber si se puede resolver el problema de valores de frontera lineal

$$\mathbf{b} \cdot Du = 0 \quad \text{en } U, \quad u = g \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (3.53)$$

En virtud del Teorema 3.3 existe una solución única  $u$  definida cerca de  $\Gamma$ , y efectivamente  $u(\mathbf{x}(s)) \equiv u(\mathbf{x}(0)) = g(\mathbf{x}^0)$  para cada solución de la EDO (3.52) con la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in \Gamma$ . Sin embargo, esta solución no puede ser continuada suavemente a la totalidad



de  $U$  (a menos que  $g \equiv \text{const.}$ ) porque cualquier solución de (3.53) es constante a lo largo de las trayectorias de (3.52), y por lo tanto asume valores diferentes cerca de  $\mathbf{x} = 0$ .

Supongamos ahora que las trayectorias de (3.52) se comportan de acuerdo a lo ilustrado en la Figura 3.1 (b), es decir se supone que cada trayectoria de esta EDO (con la excepción de aquellas que pasan por los puntos característicos  $A$  y  $B$ ) entran a  $U$  precisamente una vez en algún punto del conjunto

$$\Gamma := \{\mathbf{x} \in U \mid \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) < 0\},$$

y salen de  $U$  precisamente una vez. En tal circunstancia podemos encontrar una solución suave de (3.53) para la cual  $u$  es constante a lo largo de cada línea de flujo.

Finalmente, si el flujo es como en la Figura 3.1 (c), podemos definir  $u$  constante a lo largo de las trayectorias, pero en tal caso  $u$  será discontinua a menos que  $g(B) = g(D)$ . ■

**3.3.2. Caso  $F$  cuasi-lineal.** Si  $F$  es cuasi-lineal, entonces la EDP (3.1) asume la forma

$$F(Du, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, u) \cdot Du + c(\mathbf{x}, u) = 0. \quad (3.54)$$

La condición no característica en un punto  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , (3.34), ahora se convierte en  $\mathbf{b}(\mathbf{x}^0, z^0) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^0) \neq 0$ , donde  $z^0 = g(\mathbf{x}^0)$ . Tal como en el ejemplo anterior, si especificamos la condición de frontera

$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3.55)$$

podemos resolver las ecuaciones (3.33) en forma única para obtener  $\mathbf{q}(\mathbf{y})$  para  $\mathbf{y} \in \Gamma$  cerca de  $\mathbf{x}^0$ . Así, el Teorema 3.3 entrega la existencia de una solución única de (3.54), (3.55) en alguna vecindad  $V$  de  $\mathbf{x}^0$ . Podemos calcular esta solución utilizando las ecuaciones características reducidas (3.24), las cuales no involucran  $\mathbf{p}(\cdot)$ .

Al contrario del caso lineal, aquí es posible que las características proyectadas emanantes de diferentes puntos en  $\Gamma$  intersecten fuera de  $V$ ; si esto sucede, la solución local normalmente no puede existir en la totalidad de  $U$ .

**Ejemplo 3.11** (Características para leyes de conservación). Como ejemplo de una EDP de primer orden cuasi-lineal consideremos la ley de conservación escalar

$$G(Du, u_t, u, \mathbf{x}, t) = u_t + \text{div } \mathbf{F}(u) = u_t + \mathbf{F}'(u) \cdot Du = 0 \quad \text{en } U = \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (3.56)$$

sujeta a la condición inicial

$$u = g \quad \text{sobre } \Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \quad (3.57)$$

Aquí  $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^n)$ , y como siempre ponemos  $t = x_{n+1}$ ; además “div” denota la divergencia con respecto a las variables espaciales  $(x_1, \dots, x_n)$ , y  $Du = D_{\mathbf{x}}u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ . Puesto que la dirección  $t = x_{n+1}$  juega un rol particular, modificaremos la notación. Escribiendo  $\mathbf{q} = (\mathbf{p}, p_{n+1})$  e  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, t)$ , obtenemos  $G(\mathbf{q}, z, \mathbf{y}) = p_{n+1} + \mathbf{F}'(z)\mathbf{p}$ , por lo tanto

$$D_{\mathbf{q}}G = (\mathbf{F}'(z), 1), \quad D_{\mathbf{y}}G = 0, \quad D_zG = \mathbf{F}''(z)\mathbf{p}.$$

Obviamente la condición no característica (3.34) está satisfecha en cada punto  $\mathbf{y}^0 = (\mathbf{x}^0, 0) \in \Gamma$ , además la primera ecuación de (3.24) se convierte en

$$\dot{x}^i(s) = (F^i)'(z(s)), \dots, i = 1, \dots, n; \quad \dot{x}^{n+1} = 1, \quad (3.58)$$

luego  $x^{n+1}(s) = s$ , acorde con  $x_{n+1} = t$ . En otras palabras, podemos identificar el parámetro  $s$  con el tiempo  $t$ .

La segunda ecuación de (3.24) aquí es  $\dot{z}(s) = 0$ , por lo tanto

$$z(s) = z^0 = g(\mathbf{x}^0) \quad (3.59)$$

y (3.58) implica que

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{F}'(g(\mathbf{x}^0))s + \mathbf{x}^0. \quad (3.60)$$

Concluimos que las características proyectadas

$$\mathbf{y}(s) = (\mathbf{x}(s), s) = (\mathbf{F}'(g(\mathbf{x}^0))s + \mathbf{x}^0, s), \quad s \geq 0$$

son rectas, a lo largo de las cuales  $u$  es constante.

Finalmente, supongamos que se aplica el mismo razonamiento a otro punto inicial  $\mathbf{z}^0 \in \Gamma$  tal que  $g(\mathbf{x}^0) \neq g(\mathbf{z}^0)$ . En este caso es posible que las respectivas características proyectadas intersectan en un instante  $t > 0$ . Por otro lado, de acuerdo al Teorema 3.2  $u \equiv g(\mathbf{x}^0)$  a lo largo de la característica proyectada por  $\mathbf{x}^0$  y  $u \equiv g(\mathbf{z}^0)$  a lo largo de aquella por  $\mathbf{z}^0$ , lo que obviamente da origen a una contradicción. La solución es que el problema de valores iniciales (3.56), (3.57) en general no posee una solución suave que existe para todos los tiempos  $t > 0$ .

Para una ley de conservación una solución suave local (cuya existencia está garantizada para tiempos pequeños por el Teorema 3.3) puede ser continuada para todos los tiempos  $t > 0$  como solución “débil” o “generalizada” y generalmente discontinua. ■

Comentamos que es posible eliminar  $s$  de las ecuaciones (3.59) y (3.60) para obtener una fórmula implícita para  $u$ . Efectivamente, para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $t > 0$  dados,  $s = t$  implica que

$$u(\mathbf{x}(t), t) = z(t) = g(\mathbf{x}(t) - t\mathbf{F}'(\mathbf{z}^0)) = g(\mathbf{x}(t) - t\mathbf{F}'(u(\mathbf{x}(t), t))),$$

por lo tanto

$$u = g(\mathbf{x} - t\mathbf{F}'(u)). \quad (3.61)$$

Esta fórmula implícita para  $u$  como función de  $\mathbf{x}$  y  $t$  es un análogo no lineal de (2.4). Se puede verificar fácilmente que (3.61) efectivamente entrega una solución siempre que

$$1 + tDg(\mathbf{x} - t\mathbf{F}'(u))\mathbf{F}''(u) \neq 0.$$

En particular, en el caso  $n = 1$  se requiere que

$$1 + tg'(x - tF'(u))F''(u) \neq 0.$$

Notar que si  $F'' > 0$ , pero  $g' < 0$ , esto definitivamente será falso en algún instante  $t > 0$ . La falla de la fórmula implícita (3.61) también refleja la falla del método característico.

**3.3.3. Caso  $F$  completamente no lineal.** La forma de las ecuaciones características completas puede ser bastante complicada para una EDP de primer orden completamente no lineal; sin embargo en algunos casos aparece una estructura matemática bastante interesante.

**Ejemplo 3.12** (Características para la ecuación de Hamilton-Jacobi). Consideremos ahora la ecuación de Hamilton-Jacobi general

$$G(Du, u_t, u, \mathbf{x}, t) = u_t + H(Du, \mathbf{x}) = 0,$$

donde  $Du = D_{\mathbf{x}}u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ . Escribiendo  $\mathbf{q} = (\mathbf{p}, p_{n+1})$  e  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, t)$  obtenemos

$$G(\mathbf{q}, z, \mathbf{y}) = p_{n+1} + H(\mathbf{p}, \mathbf{x});$$

luego

$$D_{\mathbf{q}}G = (D_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}, \mathbf{x}), 1), \quad D_{\mathbf{y}}G = (D_{\mathbf{x}}H(\mathbf{p}, \mathbf{x}), 0), \quad D_zG = 0,$$

luego (3.18c) se convierte en

$$\dot{x}^i(s) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \quad i = 1, \dots, n; \quad \dot{x}^{n+1}(s) = 1.$$

En particular podemos identificar el parámetro  $s$  con el tiempo  $t$ .

La ecuación (3.18a) para el presente caso es de la forma

$$\dot{p}^i(s) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \quad i = 1, \dots, n; \quad \dot{p}^{n+1}(s) = 0,$$

mientras que (3.18b) ahora está dada por

$$\dot{z}(s) = D_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) + p^{n+1}(s) = D_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)).$$

Resumiendo obtenemos las siguientes ecuaciones características para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi:

$$\dot{\mathbf{p}}(s) = -D_{\mathbf{x}}H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \tag{3.62a}$$

$$\dot{z}(s) = D_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \tag{3.62b}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = D_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \tag{3.62c}$$

para  $\mathbf{p}(\cdot) = (p^1(\cdot), \dots, p^n(\cdot))$ ,  $z(\cdot)$ , y  $\mathbf{x}(\cdot) = (x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot))$ .

Las ecuaciones (3.62a) y (3.62c),

$$\dot{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}, \mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{p}} = -D_{\mathbf{x}}H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \tag{3.63}$$

se llaman *ecuaciones de Hamilton*. Observamos que la ecuación para  $z(\cdot)$  es trivial una vez que  $\mathbf{x}(\cdot)$  y  $\mathbf{p}(\cdot)$  hayan sido determinadas mediante la solución de (3.63).

Comentamos finalmente que tal como vimos en el caso de una ley de conservación, el problema de valores iniciales para la ecuación de Hamilton-Jacobi no posee en general una solución suave para todos los tiempos  $t > 0$ . ■

### 3.4. Ejemplos adicionales

**Ejemplo 3.13** (Problema Evaluación 1, Curso 2006).

a) Se considera una familia de superficies

$$u = \Phi(x, y; a, b), \quad (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{3.64}$$

con los parámetros  $a$  y  $b$ . Demostrar que existe una única EDP de primera orden

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.65}$$

para la cual (3.64) es la integral completa. Derivar esta ecuación.

b) Aplicar el resultado de (a) al caso  $u(x, y; a, b) = abxy + ax^2$ .

- c) Demostrar que la familia de planos  $u(x, y; a, b) = ax + by + f(a, b)$  es una integral completa de (3.65) cuando

$$F(x, y, u, p, q) = xp + yq + f(p, q) - u. \quad (3.66)$$

- d) Para  $f(a, b) = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , calcular la integral singular de (3.66).

*Solución sugerida.*

- a) Definiendo la función

$$f(x, y, z; a, b) := \Phi(x, y; a, b) - z, \quad (3.67)$$

podemos reescribir la ecuación (3.64) como

$$f(x, y, z; a, b) = 0, \quad (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (3.68)$$

Por otro lado, también tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z; a, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z; a, b) = 0, \quad (x, y) \in U,$$

lo que implica las siguientes identidades, que deben ser satisfechas para  $(x, y) \in U$ :

$$f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} = \Phi_x(x, y; a, b) - \frac{\partial z}{\partial x} =: g_1 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}; a, b \right) = 0, \quad (3.69)$$

$$f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y} = \Phi_y(x, y; a, b) - \frac{\partial z}{\partial y} =: g_2 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial y}; a, b \right) = 0, \quad (3.70)$$

donde  $f_x, f_z$  etc. denotan las derivadas de  $f$  con respecto al argumento  $x, z$ , etc.

Ahora, dado que (3.64) es una integral completa, sabemos que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \Phi_a & \Phi_{xa} & \Phi_{ya} \\ \Phi_b & \Phi_{xb} & \Phi_{yb} \end{bmatrix} = 2, \quad (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aquí se nos presentan dos casos cualitativamente diferentes.

En el primer caso, suponemos que en el punto  $(x, y, a_0, b_0)$  bajo consideración,

$$\begin{vmatrix} \Phi_{xa} & \Phi_{ya} \\ \Phi_{xb} & \Phi_{yb} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.71)$$

Esta es la condición que asegura que mediante el teorema de funciones implícitas, podemos encontrar funciones  $\tilde{h}_1$  y  $\tilde{h}_2$  tales que en una vecindad de  $(a_0, b_0)$  podemos escribir

$$a = \tilde{h}_1 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad b = \tilde{h}_2 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad (3.72)$$

donde se satisface

$$\begin{aligned} g_1 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}; \tilde{h}_1 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right), \tilde{h}_2 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right) &= 0, \\ g_2 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial y}; \tilde{h}_1 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right), \tilde{h}_2 \left( x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, podemos usar (3.69), (3.70) para eliminar  $a$  y  $b$ . Identificando  $u$  con  $z$  e insertando el resultado (3.72) en (3.68), obtenemos la ecuación deseada

$$\begin{aligned} & F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ & := f\left(x, y, u, \tilde{h}_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tilde{h}_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente,  $F(\dots) = 0$ , donde

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \Phi\left(x, y, \tilde{h}_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tilde{h}_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) - u.$$

En el segundo caso, supongamos que el determinante en (3.71) es cero, pero que

$$\begin{vmatrix} \Phi_a & \Phi_{xa} \\ \Phi_b & \Phi_{xb} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.73)$$

(La discusión del caso donde la segunda columna es remplazada por  $(\Phi_{ya}, \Phi_{yb})^T$  es análoga.) En este caso, no utilizamos las ecuaciones (3.69) y (3.70) para despejar  $a$  y  $b$ , sino que las ecuaciones (3.68) y (3.69); en este caso la condición (3.73) asegura la invertibilidad, y podemos escribir

$$a = \hat{h}_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad b = \hat{h}_2\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

e insertar el resultado a la ecuación (3.70) para obtener

$$\begin{aligned} & F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ & := g_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}; \hat{h}_1\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \hat{h}_2\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

o  $F(\dots) = 0$ , donde

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \Phi_y\left(x, y; \hat{h}_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \hat{h}_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

b) Para  $\Phi(x, y; a, b) = abxy + ax^2$  y  $x \neq 0$ , podemos calcular  $a$  y  $b$  de las ecuaciones

$$\Phi_x = aby + 2ax = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \Phi_y = abx = \frac{\partial u}{\partial y},$$

lo que entrega

$$a = \frac{1}{2x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad b = \frac{1}{ax} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial y}} \frac{\partial u}{\partial y},$$

y la ecuación que resulta es

$$y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - u = 0,$$

es decir, la ecuación deseada es

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x}\right) - u = 0.$$

c) Aquí obtenemos

$$xu_x + yu_y + f(u_x, u_y) - u = ax + by + f(a, b) - (ax + by + f(a, b)) = 0,$$

por lo tanto  $u$  es una solución, y

$$\begin{bmatrix} u_a & u_{xa} & u_{ya} \\ u_b & u_{xb} & u_{yb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + f_a & 1 & 0 \\ y + f_b & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es una matriz que claramente tiene rango 2, por lo tanto la expresión propuesta es una integral completa.

d) La integral singular se calcula por eliminación de todos los parámetros de la integral completa. Evaluando  $D_{(a,b)}u = 0$ , obtenemos en este caso  $x - a = 0$  y  $y - b = 0$ , lo que entrega la integral singular

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

■

**Ejemplo 3.14** (Problema Evaluación 1, Curso 2006). Cuando uno trata de crear una pila de arena lo más alta posible sobre una mesa, la superficie de la pila esta dada por la ecuación eikonal

$$|Du| = 1, \quad u = u(x, y). \quad (3.74)$$

Se considera una mesa inclinada tal que

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a \cos \alpha) = a \sin \alpha \text{ si } x \in (0, 1), \quad u(0, y) = u(1, y) = y \tan \alpha \text{ si } y \in (0, a \cos \alpha),$$

donde  $\alpha \in (0, \pi/4)$  y  $a \geq 1$ .

a) Resolviendo las ecuaciones características para (3.74) en una región triangular adyacente a cada lado de la mesa, demostrar que la superficie está compuesta por los planos

$$\begin{aligned} u &= y, & u &= y \tan \alpha + x \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}, \\ u &= y \tan \alpha + (1 - x) \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}, & u &= a(\cos \alpha + \sin \alpha) - y, \end{aligned}$$

que se intersectan en ciertas líneas.

b) Demostrar que el punto más alto de la pila es

$$u = \frac{a}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha), \quad \text{siempre que } a \cos \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}}.$$

*Solución sugerida.*

a) Las ecuaciones características de la ecuación eikonal, escrita como

$$F(x, y, u, p, q) \equiv p^2 + q^2 - 1 = 0, \quad p \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q \equiv \frac{\partial u}{\partial y},$$

son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= F_p = 2p, & \frac{dy}{ds} &= F_q = 2q, & \frac{dz}{ds} &= pF_p + qF_q = 2p^2 + 2q^2, \\ \frac{dp}{ds} &= -F_x - pF_z = 0, & \frac{dq}{ds} &= -F_y - qF_z = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Si los datos iniciales para la integración de (3.75) están especificados por las curvas  $\tau \mapsto x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)$ , entonces la solución de (3.75) está dada por

$$p = \text{const.} = p_0(\tau), \quad q = \text{const.} = q_0(\tau),$$

donde se supone que la condición de compatibilidad

$$F(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)) = (p_0(\tau))^2 + (q_0(\tau))^2 - 1 = 0 \quad (3.76)$$

está satisfecha, y

$$x(s, \tau) = 2p_0s + x_0(\tau), \quad (3.77)$$

$$y(s, \tau) = 2q_0s + y_0(\tau), \quad (3.78)$$

$$u(s, \tau) = 2(p_0^2 + q_0^2)s + u_0(\tau) = 2s + u_0(\tau). \quad (3.79)$$

Ahora discutimos los cuatro lados de la mesa.

1.  $u(x, 0) = 0$ : para este lado, la curva inicial está dada por

$$x_0(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = 0, \quad u_0(\tau) = 0,$$

lo que implica  $p_0(\tau) \equiv 0$ , y para satisfacer (3.76),

$$q_0(\tau) = \sqrt{1 - (p_0(\tau))^2} = 1.$$

En este caso, de (3.78) obtenemos  $y(s, \tau) = 2s$ , lo cual podemos utilizar para eliminar  $s$  de (3.79), llegando al resultado deseado  $u = 2s = y$ .

2.  $u(x, a \cos \alpha) = a \sin \alpha$ : la curva inicial está dada por

$$x_0(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = a \cos \alpha, \quad u_0(\tau) = a \sin \alpha,$$

lo que implica

$$p_0(\tau) = 0, \quad q_0 = -\sqrt{1 - (p_0(\tau))^2} = -1.$$

Por otro lado,

$$x(s, \tau) = 2p_0s + \tau, \quad y(s, \tau) = a \cos \alpha + 2q_0s, \quad u(s, \tau) = 2s + u_0(\tau)$$

Entonces de (3.78) obtenemos que  $y = a \cos \alpha - 2s$ , lo cual podemos usar para eliminar  $s$  de  $u(s, \tau) = 2s + u_0(\tau)$ , llegando a

$$u(x, y) = a(\cos \alpha + \sin \alpha) - y.$$

3.  $u(0, y) = y \tan \alpha$ : aquí obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_0(\tau) &= 0, & y_0(\tau) &= y, & u_0(\tau) &= y \tan \alpha; \\x(s, \tau) &= 2p_0s, & y(s, \tau) &= 2q_0s + y_0(\tau) = 2q_0s + y, \\u(s, \tau) &= 2s + u_0(\tau) = 2s + y \tan \alpha, \\q_0 &= \tan \alpha, & p_0 &= \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Ahora, multiplicando  $x(s, \tau) = 2p_0s$  por  $p_0$  e  $y(s, \tau) = 2q_0s + y$  por  $y$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}x\sqrt{q - \tan^2 \alpha} + y \tan \alpha &= p_0x + q_0y \\&= 2(p_0^2s + q_0^2s) + y \tan \alpha \\&= 2s + y \tan \alpha,\end{aligned}$$

es decir,

$$u(x, y) = x\sqrt{q - \tan^2 \alpha} + y \tan \alpha.$$

4.  $u(1, y) = y \tan \alpha$ : este caso es análogo al anterior.

b) Los dos planos  $E_1 : u = y$  y  $E_2 : u = a(\cos \alpha + \sin \alpha) - y$  se intersectan en

$$y = \frac{a}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha);$$

la altura máxima, definida sólo por estos dos planos, sería

$$L_1 : u_{\text{máx}}^1 = \frac{a}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha). \quad (3.80)$$

Los dos demás planos ( $E_3$  y  $E_4$ ) se intersectan en  $x = 1/2$ , definiendo la línea

$$L_2 : u_{\text{máx}}^2 = u_{\text{máx}}^2(y) = y \tan \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}.$$

La altura máxima está definida por (3.80) si en  $x = 1/2, y = \frac{a}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)$ , tenemos que  $u_{\text{máx}}^2 \geq u_{\text{máx}}^1$ , es decir

$$\begin{aligned}\frac{a}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha) \tan \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \tan^2 \alpha} &\geq \frac{a}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \Leftrightarrow a \cos \alpha (1 + \tan \alpha)(1 - \tan \alpha) &\leq \frac{1}{2}\sqrt{1 - \tan^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow a \cos \alpha &\leq \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}}.\end{aligned}$$

■



## Ecuaciones elípticas de segundo orden

### 4.1. Espacios de Sobolev

En lo siguiente nuestra intención es proveer herramientas que nos permiten estudiar una clase bastante amplia de ecuaciones con derivadas parciales. Queremos tomar varias EDPs específicas y reformularlas en forma abstracta como operadores sobre espacios lineales apropiados. Podemos referirnos a cada situación como  $A : X \rightarrow Y$ , donde  $A$  representa la estructura del operador diferencial y posiblemente las condiciones de borde, y  $X$  e  $Y$  son espacios de funciones. Ahora podemos aplicar los principios del Análisis Funcional para estudiar la solubilidad de algunas ecuaciones que involucran  $A$ . Resulta que la parte difícil es de encontrar los espacios  $X$  e  $Y$  apropiados, y los operadores abstractos  $A$ . Los espacios de Sobolev están precisamente diseñados para resolver esta tarea.

#### 4.1.1. Espacios de Hölder.

**Definición 4.1** (Espacio de Hölder). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $0 < \gamma \leq 1$ .*

(i) *Si  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada y continua, escribimos*

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := \sup_{\mathbf{x} \in U} |u(\mathbf{x})|.$$

(ii) *La  $\gamma$ -ésima seminorma de Hölder de  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \left\{ \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\gamma} \right\},$$

*y la  $\gamma$ -ésima norma de Hölder es*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

(iii) *El espacio de Hölder  $C^{k,\gamma}(\bar{U})$  consiste en todas aquellas funciones  $u$  que son  $k$  veces continuamente diferenciables,  $u \in C^k(\bar{U})$ , para las cuales la siguiente norma es finita:*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

**Teorema 4.1.**  *$C^{k,\gamma}(\bar{U})$  es un espacio de Banach.*

**4.1.2. Espacios de Sobolev.** Para el análisis de ecuaciones diferenciales parciales los espacios de Hölder frecuentemente no son apropiados porque no podemos realizar estimaciones analíticas suficientes para establecer la membrecía de una función a un espacio de Hölder. Necesitamos otros espacios que admiten funciones menos suaves.

**Definición 4.2.** *Supongamos que  $u, v \in L^1_{\text{loc}}(U)$ , y que  $\alpha$  es un multi-índice. Se dice que  $v$  es la  $\alpha$ -ésima derivada parcial débil de  $u$ ,  $D^\alpha u = v$ , si*

$$\forall \phi \in C_c^\infty(U) : \int_U u D^\alpha \phi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, d\mathbf{x}.$$

**Lema 4.1** (Unicidad de derivadas débiles [6]). *La  $\alpha$ -ésima derivada parcial débil de  $u$ , si existe, está definida únicamente con la excepción de un conjunto de medida cero.*

**Definición 4.3** (Espacio de Sobolev). *El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(U)$  consiste en todas las funciones localmente sumables  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que para cada multi-índice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$  existe  $D^\alpha u$  en el sentido débil y  $D^\alpha u \in L^p(U)$ . Para  $p = 2$ , definimos*

$$H^k(U) = W^{k,2}(U), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La letra “ $H$ ” se usa porque (como veremos)  $H^k(U)$  es un espacio de Hilbert; notamos además que  $H^0(U) = L^2(U)$ . Se identifican dos funciones en  $W^{k,p}(U)$  que coinciden en casi todas partes.

**Definición 4.4** (Norma sobre  $W^{k,p}(U)$ ). *Para  $u \in W^{k,p}(U)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos la norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

**Definición 4.5.**

(i) Sean  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset W^{k,p}(U)$  y  $u \in W^{k,p}(U)$ . Se dice que  $u_m$  converge a  $u$  en  $W^{k,p}(U)$ ,  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(U)$ , si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

(ii) Escribimos  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}_{\text{loc}}(U)$  para decir que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(V)$  para todo  $V \subset\subset U$ .  
 (iii) Por  $W^{k,p}_0(U)$  se denota la clausura de  $C_c^\infty(U)$  en  $W^{k,p}(U)$ .

Concluimos que  $u \in W^{k,p}_0(U)$  si y sólo si existen funciones  $u_m \in C_c^\infty(U)$  tales que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(U)$ . Interpretamos  $W^{k,p}_0(U)$  como espacio que contiene aquellas funciones  $u \in W^{k,p}(U)$  tales que “ $D^\alpha u = 0$  en  $\partial U$ ” para todo multi-índice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k - 1$ . (Aún queda por establecer el apropiado concepto de traza.) Se escribe, además,  $H^k_0(U) = W^{k,2}_0(U)$ .

**Teorema 4.2** (Propiedades de derivadas débiles [6]). *Sean  $u, v \in W^{k,p}(U)$ . Entonces:*

- (i)  $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$  y  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$  para todos los multi-índices  $\alpha$  y  $\beta$  con  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .
- (ii) Para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$  y  $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$  para todo multi-índice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$ .
- (iii) Si  $V$  es un subconjunto abierto de  $U$ , entonces  $u \in W^{k,p}(V)$ .

(iv) Si  $\zeta \in C_c^\infty(U)$ , entonces  $\zeta u \in W^{k,p}(U)$  y se tiene la fórmula de Leibniz

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u, \quad \binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

**Teorema 4.3** (Espacios de Sobolev como espacios de funciones [6]). *Para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq p \leq \infty$ , el espacio de Sobolev  $W^{k,p}(U)$  es un espacio de Banach.*

Usando algunos resultados básicos del Capítulo 1, fijando  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [1, \infty)$ , y definiendo  $U_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in U \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \partial U) > \varepsilon\}$  podemos demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 4.4** (Aproximación local por funciones suaves). *Sea  $u \in W^{k,p}(U)$  para algún  $1 \leq p < \infty$ , y sea  $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$  en  $U_\varepsilon$ . Entonces*

- (i)  $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$  para cada  $\varepsilon > 0$ ,
- (ii)  $u^\varepsilon \rightarrow u$  en  $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Demostración.*

- 1.) El ítem (i) es una consecuencia del Teorema 1.16.
- 2.) Demostraremos primero que si  $|\alpha| \leq k$ , entonces

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u \quad \text{en } U_\varepsilon. \quad (4.1)$$

Para tal efecto notamos primeramente que para  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(\mathbf{x}) &= D^\alpha \int_U \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_U D_{\mathbf{x}}^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D_{\mathbf{y}}^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Ahora para  $\mathbf{x} \in U_\varepsilon$  fijo la función  $\phi(\mathbf{y}) := \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  pertenece a  $C_c^\infty(U)$ , o sea sirve como función test. La definición de la  $\alpha$  implica entonces la identidad

$$\int_U D_{\mathbf{y}}^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = (-1)^{|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^\alpha u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

por lo tanto

$$D^\alpha u^\varepsilon(\mathbf{x}) = (-1)^{2|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^\alpha u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(\mathbf{x}),$$

lo que concluye la demostración de (4.1).

- 3.) Sea ahora  $V \subset\subset U$  un conjunto abierto. Usando (4.1) y el Teorema 1.16 sabemos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D^\alpha u \quad \text{en } L^p(V), \text{ para todo } |\alpha| \leq k.$$

Por lo tanto,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}^p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

■

Veremos en lo siguiente que podemos encontrar funciones suaves que aproximan en  $W^{k,p}(U)$ , no solamente en  $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$ . En lo siguiente no se impone ninguna hipótesis sobre la suavidad de  $\partial U$ .

**Teorema 4.5** (Aproximación global por funciones suaves). *Sea  $U$  un conjunto acotado y  $u \in W^{k,p}(U)$  para algún  $1 \leq p < \infty$ . Entonces existen funciones  $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$  tales que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(U)$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .*

Se enfatiza que *no* se presupone que  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ .

*Demostración del Teorema 4.5.*

1.) Podemos escribir

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad U_i := \left\{ \mathbf{x} \in U \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \partial U) > \frac{1}{i} \right\}, \quad i \in \mathbb{N},$$

y sea  $V_i := U_{i+3} \setminus \bar{U}_{i+1}$ , además elegimos un conjunto abierto  $V_0 \subset\subset U$  tal que

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i.$$

Sea  $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$  una partición de la unidad suave con respecto a los conjuntos  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ , es decir

$$0 \leq \zeta_i \leq 1, \quad \zeta_i \in C_c^\infty(V_i), \quad i \in \mathbb{N}_0; \quad \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1 \quad \text{en } U.$$

Luego seleccionamos una función cualquiera  $u \in W^{k,p}(U)$ . Ya sabemos que  $\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$  (de acuerdo al ítem (iv) del Teorema 4.2), y  $\text{supp}(\zeta_i u) \subset V_i$ .

2.) Ahora fijamos  $\delta > 0$  y  $\varepsilon_i > 0$  tan pequeño  $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$  satisface

$$\|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}}, \quad \text{supp } u^i \subset W_i, \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad (4.2)$$

donde definimos  $W_i := U_{i+4} \setminus \bar{U}_i \supset V_i$  para  $i \in \mathbb{N}_0$ .

3.) Sea la función  $v$  definida por

$$v := \sum_{i=0}^{\infty} u^i.$$

Esta función pertenece a  $C^\infty(U)$ , dado que para cada conjunto abierto  $V \subset\subset U$  la sumatoria incluye a lo más un número finito de términos  $\neq 0$ . Puesto que

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u$$

tenemos para cada  $V \subset\subset U$  (considerando (4.2))

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta.$$

Tomando el supremo sobre todos los conjuntos  $V \subset\subset U$  concluimos que

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} < \delta.$$

■

**Teorema 4.6** (Aproximación global por funciones suaves hasta la frontera). *Sea  $U$  acotado y  $\partial U \in C^1$ . Sea además  $u \in W^{k,p}(U)$  para algún  $1 \leq p < \infty$ . Entonces existen funciones  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$  tales que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(U)$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.*

- 1.) Fijamos  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$ . Dado que  $\partial U \in C^1$  existen un radio  $r > 0$  y una función  $\gamma \in C^1$ ,  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que (cambiando los ejes de coordenadas si es necesario)

$$U \cap B(\mathbf{x}^0, r) = \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Sea  $V := U \cap B(\mathbf{x}^0, r/2)$ .

- 2.) Para  $\mathbf{x} \in V$  y  $\varepsilon > 0$  definimos  $\mathbf{x}^\varepsilon := \mathbf{x} + \lambda\varepsilon \mathbf{e}_n$ , observando que para algún número fijo y suficientemente pequeño  $\lambda > 0$  se tiene que  $B(\mathbf{x}^\varepsilon, \varepsilon) \subset U \cap B(\mathbf{x}^0, r)$  para todo  $\mathbf{x} \in V$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea ahora  $u_\varepsilon(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}^\varepsilon)$  para  $\mathbf{x} \in V$ , entonces  $u_\varepsilon$  es la función  $u$  trasladada por una distancia  $\lambda\varepsilon$  en la dirección de  $\mathbf{e}_n$ . Sea además  $v^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$ . La idea es movernos una distancia suficiente hacia el interior para que “haya espacio para suavizar en el interior de  $U$ ”. Obviamente,  $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar{V})$ .
- 3.) Para demostrar que  $v^\varepsilon \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(V)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , consideremos algún multi-índice  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$ . Entonces

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Como la translación es continua con respecto a la norma  $L^p$ ,

$$\|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Por otro lado, usando argumentos similares a los de la demostración del Teorema 4.4 concluimos que también

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- 4.) Sea  $\delta > 0$ . Como  $\partial U$  es compacto, podemos encontrar un número finito de puntos  $\mathbf{x}_i^0 \in \partial U$ , radios  $r_i > 0$ , conjuntos  $V_i = U \cap B^0(\mathbf{x}_i^0, r_i/2)$  y funciones  $v_i \in C^\infty(\bar{V}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tales que

$$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N B^0(\mathbf{x}_i^0, r_i/2)$$

y

$$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta. \tag{4.3}$$

Sea  $V_0$  un conjunto abierto,  $V_0 \subset\subset U$ , tal que

$$U \subset \bigcup_{i=0}^N V_i,$$

y usando el Teorema 4.4 elegimos una función  $v_0 \in C^\infty(\bar{V}_0)$  que satisface

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta. \quad (4.4)$$

5.) Sea  $\zeta_0, \dots, \zeta_N$  una partición de la unidad suave sobre  $\bar{U}$  definida con respecto a los conjuntos abiertos  $\{V_0, B^0(\mathbf{x}_i^0, r_i/2), i = 1, \dots, N\}$ . Definimos

$$v := \sum_{i=0}^N \zeta_i v_i.$$

Obviamente,  $v \in C^\infty(\bar{U})$ . Puesto que

$$u = \sum_{i=0}^N \zeta_i u,$$

podemos usar el Teorema 4.2 para ver que para todo  $|\alpha| \leq k$ ,

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(U)} &\leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\ &\leq C \sum_{i=0}^N \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq (C+1)N\delta, \end{aligned}$$

según (4.3) y (4.4). ■

**Teorema 4.7** (Teorema de extensión). *Sea  $U$  acotado y  $\partial U \in C^1$ . Sea  $V$  un conjunto abierto y acotado tal que  $U \subset\subset V$ . Entonces existe un operador lineal y acotado  $E : W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  tal que*

- (i)  $Eu = u$  c.t.p. en  $U$  ( $Eu$  se llama una extensión de  $u$  a  $\mathbb{R}^n$ ),
- (ii)  $\text{supp } Eu \subset V$ ,
- (iii)  $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ , donde  $C$  depende sólo de  $p$ ,  $U$  y  $V$ .

*Demostración.*

- 1.) Fijamos  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$  y supongamos primero que  $\partial U$  es plano cerca de  $\mathbf{x}^0$ , formando parte de  $\{x_n = 0\}$ . Entonces podemos suponer que existe una bola abierta con centro  $\mathbf{x}^0$  y radio  $r$  tal que  $B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U}$ ,  $B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus U$ .
- 2.) Supongamos por el momento que  $u \in C^1(\bar{U})$ , y sea la reflexión de alto orden de  $u$  desde  $B^+$  a  $B^-$  definida por

$$\bar{u}(\mathbf{x}) := \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in B^+, \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n/2) & \text{si } \mathbf{x} \in B^-. \end{cases}$$

- 3.) Demostraremos ahora que  $\bar{u} \in C^1(B)$ . Para tal efecto sean  $u^- := \bar{u}|_{B^-}$  y  $u^+ := \bar{u}|_{B^+}$ . Demostramos primero que

$$u_{x_n}^- = u_{x_n}^+ \quad \text{en } \{x_n = 0\}. \quad (4.5)$$

De hecho,

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right),$$

por lo tanto  $u_{x_n}^-|_{\{x_n=0\}} = u_{x_n}^+|_{\{x_n=0\}}$ . Esto confirma (4.5). Ahora, dado que  $u^+ = u^-$  en  $\{x_n = 0\}$ , vemos que también

$$u_{x_i}^-|_{\{x_n=0\}} = u_{x_i}^+|_{\{x_n=0\}}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.6)$$

Pero (4.5) y (4.6) implican que

$$D^\alpha u^-|_{\{x_n=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_n=0\}} \quad \text{para cada } |\alpha| \leq 1,$$

lo que implica que  $\bar{u} \in C^1(B)$ .

4.) Usando estos cálculos podemos igualmente verificar que

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

para alguna constante  $C$  que no depende de  $u$ .

5.) Supongamos que  $\partial U$  no es necesariamente plana cerca de  $\mathbf{x}^0$ . Entonces existe una aplicación  $\Phi$  con su inversa  $\Psi$  que “rectifica”  $\partial U$  cerca de  $\mathbf{x}^0$ . Escribimos  $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{y})$ ,  $u'(\mathbf{y}) := u(\Psi(\mathbf{y}))$ . Eligimos una bola  $B$ , y siguiendo los pasos 1.) a 3.) extendemos  $u'$  de  $B^+$  a una función  $\bar{u}'$  definida sobre toda la bola  $B$ , tal que  $\bar{u}' \in C^1$  y

$$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Sea  $W := \Psi(B)$ . Reconvirtiendo a las variables  $\mathbf{x}$  obtenemos una extensión  $\bar{u}$  de  $u$  a  $W$ , con

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \quad (4.7)$$

6.) Dado que  $\partial U$  es compacto, existen un número finito de puntos  $\mathbf{x}_i^0 \in \partial U$ , conjuntos abiertos  $W_i$  y extensiones  $\bar{u}_i$  de  $u_i$  a  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tales que

$$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N W_i.$$

Sea  $W_0 \subset\subset U$  tal que

$$U \subset \bigcup_{i=0}^N W_i,$$

y sea  $\zeta_0, \dots, \zeta_N$  una partición de la unidad asociada. Sea  $\bar{u}_0 = u$  y

$$\bar{u} := \sum_{i=0}^N \zeta_i \bar{u}_i.$$

Ahora, utilizando (4.7) (con  $u_i$  en lugar de  $u$  y  $\bar{u}_i$  en lugar de  $\bar{u}$ ) obtenemos la cota

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad (4.8)$$

para alguna constante  $C$  que depende de  $U$ ,  $p$ ,  $n$  etc., pero no de  $u$ . Además podemos lograr que el soporte de  $\bar{u}$  esté contenido en  $V$  con  $U \subset\subset V$ .

- 7.) Escribimos  $Eu := \bar{u}$ , observando que la aplicación  $u \mapsto Eu$  es lineal. Recordamos que hasta ahora la construcción requiere que  $u \in C^\infty(\bar{U})$ . Supongamos ahora que  $1 \leq p < \infty$ ,  $u \in W^{1,p}(U)$ , y sea  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión con  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$  que converge a  $u$  en  $W^{1,p}(U)$ . La desigualdad (4.8) y la linealidad de  $E$  implican que

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Entonces  $\{Eu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy y converge a  $\bar{u} = Eu$ . Esta extensión, que no depende de la selección particular de  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , satisface las conclusiones del teorema.

El caso  $p = \infty$  queda como tarea. ■

Comentamos que si  $\partial U \in C^2$ , el operador  $E$  también es un operador lineal acotado de  $W^{2,p}(U)$  a  $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ . Notamos que en los pasos 3.) y 4.) de la demostración anterior que a pesar de que  $\bar{u}$  en general no pertenece a  $C^2$ ,  $\bar{u}$  sí pertenece a  $W^{2,p}(B)$ . También tenemos la cota

$$\|\bar{u}\|_{W^{2,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{2,p}(B^+)},$$

la cual es una consecuencia de la definición de  $\bar{u}(\mathbf{x})$ . Como antes derivamos la estimación

$$\|Eu\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{2,p}(U)}, \quad (4.9)$$

siempre que  $\partial U \in C^2$ , y donde las constantes  $C$  dependen solamente de  $U$ ,  $V$ ,  $n$  y  $p$ .

El procedimiento anterior no genera una extensión para  $W^{k,p}(U)$  si  $k > 2$ . Para lograr esto necesitamos una técnica de reflexión de orden mayor.

En lo siguiente discutiremos el problema de asignar valores de frontera a lo largo de  $\partial U$  a una función  $u \in W^{1,p}(U)$ , suponiendo que  $\partial U \in C^1$ . Este problema tiene una solución obvia si  $u \in C(\bar{U})$ , pero en nuestro caso una función “típica”  $u \in W^{1,p}(U)$  en general no es continua y peor aún, solo es definida c.t.p. en  $U$ . Dado que la medida  $n$ -dimensional de Lebesgue de  $\partial U$  es cero, no hay ninguna interpretación directa de la “restricción de  $u$  a  $\partial U$ ”. Este problema se resolverá mediante un operador de traza. En lo siguiente sea  $1 \leq p < \infty$ .

**Teorema 4.8** (Teorema de la traza). *Sea  $U$  acotado con  $\partial U \in C^1$ . Entonces existe un operador acotado y lineal  $T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$  tal que*

- (i)  $Tu = u|_{\partial U}$  si  $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$  y
- (ii)  $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$

para cada  $u \in W^{1,p}(U)$ , donde la constante  $C$  depende solamente de  $p$  y  $U$ . La función  $Tu$  se llama traza de  $u$  sobre  $\partial U$ .

*Demostración.*

- 1.) Sea primero  $u \in C^1(\bar{U})$ . Como en la primera parte de la demostración del Teorema 4.7, supongamos que  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$  y  $\partial U$  es plana cerca de  $\mathbf{x}^0$ , perteneciendo a  $\{x_n = 0\}$ . Sea  $B$  una bola como en la demostración anterior, y  $\hat{B}$  la bola concéntrica con radio  $r/2$ . Sean  $\zeta \in C_c^\infty$  en  $B$ ,  $\zeta \equiv 1$  en  $\hat{B}$ ,  $\Gamma$  la parte de  $\partial U$  que pertenece a  $\hat{B}$ , y

$$\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}.$$



Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |u|^p d\mathbf{x}' &\leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p d\mathbf{x}' = - \int_{B^+} (\zeta |u|^p)_{x_n} d\mathbf{x} \\ &= - \int_{B^+} (|u|^p \zeta_{x_n} + p |u|^{p-1} (\operatorname{sgn} u) u_{x_n} \zeta) d\mathbf{x} \leq C \int_{B^+} (|u|^p + |Du|^p) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

(donde utilizamos la desigualdad de Young (1.6)).

- 2.) Si  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$ , pero  $\partial U$  no esta plana cerca de  $\mathbf{x}^0$ , rectificamos la frontera (como siempre) cerca de  $\mathbf{x}^0$ . Usando la desigualdad previa y cambiando variables obtenemos la cota

$$\int_{\Gamma} |u|^p dS \leq C \int_U (|u|^p + |Du|^p) d\mathbf{x},$$

donde  $\Gamma$  es algún subconjunto abierto de  $\partial U$  que incluye el punto  $\mathbf{x}^0$ .

- 3.) Puesto que  $\partial U$  es compacto existen un número finito de puntos  $\mathbf{x}_i^0 \in \partial U$  y subconjuntos abiertos  $\Gamma_i \subset \partial U$  ( $i = 1, \dots, N$ ) tales que

$$\partial U = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Es decir, si escribimos  $Tu = u|_{\partial U}$ , entonces

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad (4.10)$$

donde la constante  $C$  no depende de  $u$ .

- 4.) La desigualdad (4.10) es válida para  $u \in C^1(\bar{U})$ . Supongamos ahora que  $u \in W^{1,p}(U)$ . Entonces existe una sucesión de funciones  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{U})$  que converge a  $u$  en  $W^{1,p}(U)$ . Según (4.10),

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}; \quad (4.11)$$

por lo tanto  $\{Tu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^p(\partial U)$ . Se define entonces

$$Tu := \lim_{m \rightarrow \infty} Tu_m,$$

donde el límite se toma en  $L^p(\partial U)$ . Según (4.11), esta definición no depende de la selección particular de las funciones que aproximan  $u$ .

- 5.) Finalmente, si  $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ , notamos que las funciones  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$  construidas en la demostración del Teorema 4.6 converge uniformemente a  $u$  en  $\bar{U}$ . Por lo tanto,  $Tu = u|_{\partial U}$ . ■

**Teorema 4.9** (Funciones con traza cero en  $W^{1,p}$  [6]). *Sea  $U$  acotado y  $\partial U \in C^1$ . Entonces para  $u \in W^{1,p}(U)$  se tiene que*

$$u \in W_0^{1,p}(U) \iff Tu = 0 \quad \text{en } \partial U.$$

**4.1.3. Desigualdades de Sobolev.** Queremos ahora analizar el siguiente problema: si una función  $u$  pertenece a un espacio de Sobolev, ¿automáticamente pertenece también a otros espacios de Sobolev? Empezamos con  $W^{1,p}(U)$ . La respuesta depende de si (1)  $1 \leq p < n$ , (2)  $p = n$  o (3)  $n < p \leq \infty$ . Estudiaremos primero los casos (1) y (3); el caso intermedio será analizado más adelante.

Entonces supongamos que  $1 \leq p < n$ , y nos preguntamos si podemos establecer una cota del tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.12)$$

para algunas constantes  $C > 0$  y  $1 \leq q < \infty$  y todas las funciones  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Demostraremos primeramente que la desigualdad (4.12) puede ser válida solamente si  $q$  tiene una forma específica.

Sean  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \not\equiv 0$ ,  $\lambda > 0$  y  $u_\lambda(\mathbf{x}) := u(\lambda\mathbf{x})$  para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Usando (4.12) obtenemos la desigualdad

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.13)$$

Insertando las identidades

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{y})|^q d\mathbf{y}, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \end{aligned}$$

en (4.13) obtenemos la desigualdad

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{n/p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

por lo tanto

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.14)$$

Entonces si

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$$

podemos considerar o  $\lambda \rightarrow 0$  o  $\lambda \rightarrow \infty$  en (4.14) para generar una contradicción. Entonces, si la desigualdad (4.12) es válida, se debe necesariamente satisfacer

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0 \iff \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \iff q = p^* := \frac{np}{n-p},$$

donde  $p^*$  se llama *conjugada de Sobolev* de  $p$ .

**Teorema 4.10** (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Sea  $1 \leq p < n$ . Entonces existe una constante  $C = C(p, n)$  tal que*

$$\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.15)$$

*Demostración.*

1.) Sea primero  $p = 1$ . Dado que  $u$  tiene soporte compacto, podemos escribir

$$\forall i = 1, \dots, n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i,$$

lo que implica que

$$\forall i = 1, \dots, n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad |u(\mathbf{x})| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i,$$

por lo tanto

$$|u(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando esta desigualdad con respecto a  $x_1$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{n}{n-1}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde para el último paso utilizamos la desigualdad de Hölder generalizada (1.12). Integrando el resultado (4.16) con respecto a  $x_2$  obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

donde

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1, \quad I_i := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i, \quad i = 3, \dots, n.$$

Aplicando nuevamente (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \\ &\quad \times \prod_{i=3}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Continuamos integrando con respecto a  $x_3, \dots, x_n$  para finalmente llegar a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} d\mathbf{x} &\leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \cdots dy_i \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du| d\mathbf{x} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Esto es (4.15) para  $p = 1$ .

- 2.) Consideremos ahora el caso  $1 < p < n$ . Aplicando (4.17) a  $v := |u|^\gamma$ , donde  $\gamma > 1$  queda por especificar, obtenemos

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma| d\mathbf{x} = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| d\mathbf{x} \\ &\leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

de acuerdo a la desigualdad de Hölder (1.8). Ahora sea  $\gamma$  elegido tal que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1} \iff \gamma := \frac{p(n-1)}{n-p} > 1.$$

En este caso,

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*,$$

y (4.18) se convierte en

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} d\mathbf{x} \right)^{1/p^*} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

**Teorema 4.11** (Cotas para  $W^{1,p}$ ,  $1 \leq p < n$ ). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  acotado y abierto, y sea  $\partial U \in C^1$ . Entonces*

$$u \in L^{p^*}(U), \quad \|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)} \quad \text{para } 1 \leq p < n \text{ y } u \in W^{1,p}(U).$$

*Demostración.* Dado que  $\partial U \in C^1$  existe una extensión  $\bar{u} := Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\bar{u} = u \text{ en } U, \quad \bar{u} \text{ tiene soporte compacto,} \quad \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \quad (4.19)$$

Según el Teorema 4.4 existen funciones  $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , tales que

$$u_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \bar{u} \quad \text{en } W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \quad (4.20)$$

Aplicando el Teorema 4.10 concluimos que

$$\forall l, m \in \mathbb{N} : \quad \|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

por lo tanto

$$u_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \bar{u} \quad \text{en } L^{p^*}(\mathbb{R}^n). \quad (4.21)$$

Por otro lado, el Teorema 4.10 también implica que

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

por lo tanto, en virtud de (4.20) y (4.21),

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Esta desigualdad y (4.19) completan la demostración.  $\blacksquare$

**Teorema 4.12** (Cotas para  $W_0^{1,p}$ ,  $1 \leq p < n$ ). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  acotado y abierto, sea  $\partial U \in C^1$ , y sea  $u \in W_0^{1,p}(U)$  para algún  $1 \leq p < n$ . Entonces*

$$\forall q \in [1, p^*] : \exists C = C(p, q, n, U) : \|u\|_{L^q(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}.$$

En particular, para todo  $1 \leq p \leq \infty$ ,

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}. \quad (4.22)$$

A veces esta desigualdad es llamada *desigualdad de Poincaré*. Notar que en el lado derecho solamente aparece el gradiente  $Du$  de  $u$ .

*Demostración del Teorema 4.12.* Dado que  $u \in W_0^{1,p}(U)$  existen funciones  $u_m \in C_c^\infty(U)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , que convergen a  $u$  en  $W^{1,p}(U)$ . Podemos extender cada función  $u_m$  a cero en  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$  y aplicar el Teorema 4.10 para ver que  $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}$ . Como  $|U| < \infty$ , tenemos además que  $\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{L^{p^*}(U)}$  si  $1 \leq q \leq p^*$ .  $\blacksquare$

Comentamos que en virtud del Teorema 4.12, sobre  $W_0^{1,p}$  la norma  $\|Du\|_{L^p(U)}$  es equivalente a  $\|u\|_{W^{1,p}(U)}$  si  $U$  es acotado.

Respecto al caso  $p = n$  comentamos que en virtud del Teorema 4.11 y considerando que

$$p^* = \frac{np}{n-p} \xrightarrow{p \rightarrow n} \infty,$$

uno podría suponer que  $u \in L^\infty(U)$  si  $u \in W^{1,n}(U)$ . ¡Esto es falso para  $n > 1$ ! Por ejemplo, si  $U = B^0(0, 1)$ , la función definida por

$$u(\mathbf{x}) = \log \left( \log \left( 1 + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \right)$$

pertenece a  $W^{1,n}(U)$ , pero no pertenece a  $L^\infty(U)$ .

Sea ahora  $n < p < \infty$ . En este caso demostraremos que si  $u \in W^{1,p}(U)$ , entonces  $u$  es Hölder continua, posiblemente después de haber sido redefinida sobre un conjunto de medida cero.

**Teorema 4.13** (Desigualdad de Morrey). *Sea  $n < p \leq \infty$ . Entonces para todo  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$  existe una constante  $C = C(p, n)$  tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \gamma := 1 - \frac{n}{p}. \quad (4.23)$$

*Demostración.*

- 1.) Sea  $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n$  alguna bola. Ahora demostraremos que existe una constante  $C = C(n)$  tal que

$$\int_{B(\mathbf{x}, r)} |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} \leq C \int_{B(\mathbf{x}, r)} \frac{|Du(\mathbf{y})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n-1}} \, d\mathbf{y}. \quad (4.24)$$

Para demostrar esto se escoge  $\mathbf{w} \in \partial B(0, 1)$ . Entonces para  $0 < s < r$

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x} + s\mathbf{w}) - u(\mathbf{x})| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(\mathbf{x} + t\mathbf{w}) \, dt \right| = \left| \int_0^s Du(\mathbf{x} + t\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} \, dt \right| \\ &\leq \int_0^s |Du(\mathbf{x} + t\mathbf{w})| \, dt, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(\mathbf{x} + s\mathbf{w}) - u(\mathbf{x})| \, dS \leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(\mathbf{x} + t\mathbf{w})| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} \, dS \, dt.$$

Sea  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t\mathbf{w}$ , tal que  $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , entonces

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(\mathbf{x} + s\mathbf{w}) - u(\mathbf{x})| \, dS \leq \int_{B(\mathbf{x}, s)} \frac{|Du(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-1}} \, d\mathbf{y} \leq \int_{B(\mathbf{x}, r)} \frac{|Du(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-1}} \, d\mathbf{y}.$$

Multiplicando por  $s^{n-1}$  e integrando el resultado de 0 a  $r$  con respecto a  $s$  obtenemos

$$\int_{B(\mathbf{x}, r)} |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \, d\mathbf{y} \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \frac{|Du(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-1}} \, d\mathbf{y},$$

lo que concluye la demostración de (4.24).

- 2.) Ahora fijamos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y aplicamos la desigualdad (4.24) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| &\leq \int_{B(\mathbf{x}, 1)} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} + \int_{B(\mathbf{x}, 1)} |u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ &\leq C \int_{B(\mathbf{x}, 1)} \frac{|Du(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-1}} \, d\mathbf{y} + C \|u\|_{L^p(B(\mathbf{x}, 1))} \\ &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, d\mathbf{y} \right)^{1/p} \left( \int_{B(\mathbf{x}, 1)} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + C \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde la última desigualdad es válida porque  $p > n$  implica

$$(n-1)\frac{p}{p-1} < n,$$

tal que

$$\int_{B(\mathbf{x}, 1)} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} < \infty.$$

Como  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es arbitrario, (4.25) implica que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.26)$$

3.) Sean ahora  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  y  $W := B(\mathbf{x}, r) \cap B(\mathbf{y}, r)$ . Entonces

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq \int_W |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} + \int_W |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z}. \quad (4.27)$$

Por otro lado, usando (4.24) podemos acotar

$$\begin{aligned} \int_W |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} &\leq C \int_{B(\mathbf{x}, r)} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} \\ &\leq C \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} |\mathrm{D}u|^p \, d\mathbf{z} \right)^{1/p} \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} \frac{d\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C \left( r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = Cr^{1-\frac{n}{p}} \|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Análogamente,

$$\int_W |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z} \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Insertando esto y (4.28) en (4.27) obtenemos

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-\frac{n}{p}} \|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

por lo tanto

$$[u]_{C^{0,1-\frac{n}{p}}} = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \left\{ \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-\frac{n}{p}}} \right\} \leq C \|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Esta desigualdad y (4.26) completan la demostración de (4.23). ■

**Definición 4.6.** Una función  $u^*$  se llama versión de una función  $u$  si  $u^* = u$  c.t.p.

**Teorema 4.14** (Cotas para  $W^{1,p}$ ,  $n < p \leq \infty$ ). Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  acotado y abierto,  $\partial U \in C^1$ ,  $n < p \leq \infty$ , y  $u \in W^{1,p}(U)$ . Entonces  $u$  posee una versión  $u^*$  tal que

$$u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U}), \quad \gamma = 1 - \frac{n}{p}, \quad \|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

donde la constante  $C$  depende sólo de  $p$ ,  $n$  y  $U$ .

En lo siguiente se identificará una función  $u \in W^{1,p}(U)$ ,  $p > n$ , con su versión continua.

*Demostración del Teorema 4.14.* Se construye una extensión  $\bar{u} = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , la cual puede ser aproximada por una sucesión  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $u_m \rightarrow \bar{u}$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Por otro lado, el Teorema 4.13 asegura que existe  $u^* \in C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $u_m \rightarrow u^*$  en  $C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ ; entonces  $u^*$  es una versión de  $u$ . El Teorema 4.13 también implica que

$$\|u^*\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad \blacksquare$$

Usando los resultados anteriores podemos generar desigualdades más complicadas.

**Teorema 4.15** (Desigualdades de Sobolev generales [6]). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  con una frontera  $C^1$ . Sea además  $u \in W^{k,p}(U)$ .*

(i) *Si  $k < n/p$ , entonces  $u \in L^q(U)$ , donde*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n},$$

*además,*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

*donde la constante  $C$  depende sólo de  $k$ ,  $p$ ,  $n$  y  $U$ .*

(ii) *Si  $k > n/p$ , entonces*

$$u \in C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\bar{U}), \quad \text{donde } \gamma = \begin{cases} \left[ \frac{n}{p} \right] + 1 - \frac{n}{p} & \text{si } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ \text{cualquier número positivo} < 1 & \text{si } \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

*Adicionalmente,*

$$\|u\|_{C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

*donde  $C = C(k, p, n, \gamma, U)$ .*

**4.1.4. Compacidad.** Vimos que la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (4.15) implica la inmersión de  $W^{1,p}(U)$  en  $L^{p^*}(U)$  para  $1 \leq p < n$ ,  $p^* = pn/(n-p)$ . Demostraremos ahora que efectivamente  $W^{1,p}(U)$  está incluido compactamente en  $L^q(U)$  para  $1 \leq q < p^*$ . Esta compacidad será fundamental para las aplicaciones del análisis funcional lineal y no lineal a ecuaciones diferenciales parciales.

**Definición 4.7** (Inclusión compacta). *Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Banach. Se dice que  $X$  está incluido compactamente en  $Y$ ,  $X \subset\subset Y$ , siempre que*

- (i)  $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$  ( $x \in X$ ) para alguna constante  $C$ ,
- (ii) cada sucesión acotada en  $X$  es precompacta en  $Y$ .

**Teorema 4.16** (Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado con  $\partial U \in C^1$ . Sea  $1 \leq p < n$ . Entonces*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U) \quad \text{para cada } 1 \leq q < p^*.$$

*Demostración.*

- 1.) Fijamos  $1 \leq q < p^*$ . Como  $U$  es acotado, el Teorema 4.11 implica que

$$W^{1,p}(U) \subset L^q(U), \quad \|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Por lo tanto queda por demostrar que si  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada en  $W^{1,p}(U)$ , entonces existe una subsucesión  $\{u_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  que converge en  $L^q(U)$ .

- 2.) En virtud del Teorema de Extensión (Teorema 4.7) podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $U = \mathbb{R}^n$  y todas las funciones  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tienen soporte compacto en algún conjunto abierto y acotado  $V \subset \mathbb{R}^n$ . También podemos suponer que

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_{W^{1,p}} < \infty. \tag{4.29}$$



- 3.) Consideremos primero las funciones suavizadas  $u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ), donde  $\eta_\varepsilon$  denota la función mollifier habitual. Podemos suponer que todas las funciones  $\{u_m^\varepsilon\}_{m \in \mathbb{N}}$  igualmente tienen soporte en  $V$ .
- 4.) Demostraremos primeramente que

$$u_m^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_m \quad \text{en } L^q(V). \quad (4.30)$$

Para tal efecto notamos primero que si  $u_m$  es suave, entonces

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x}) &= \int_{B(0,1)} \eta(\mathbf{y}) (u_m(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y}) - u_m(\mathbf{x})) \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(\mathbf{y}) \int_0^1 \frac{d}{dt} (u_m(\mathbf{x} - \varepsilon t\mathbf{y})) \, dt \, d\mathbf{y} \\ &= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(\mathbf{y}) \int_0^1 \text{Du}_m(\mathbf{x} - \varepsilon t\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \, dt \, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_V |u_m^\varepsilon(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} &\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(\mathbf{y}) \int_0^1 \int_V |\text{Du}_m(\mathbf{x} - \varepsilon t\mathbf{y})| \, d\mathbf{x} \, dt \, d\mathbf{y} \\ &\leq \varepsilon \int_V |\text{Du}_m(\mathbf{z})| \, d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Por aproximación esta cota sigue válida si  $u_m \in W^{1,p}(V)$ , luego

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|\text{Du}_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon C \|\text{Du}_m\|_{L^p(V)},$$

donde la última desigualdad es válida porque  $V$  es acotado. En virtud de (4.29) obtenemos entonces que

$$u_m^\varepsilon \rightarrow u_m \quad \text{en } L^1(V), \text{ uniformemente en } m. \quad (4.31)$$

Como  $1 \leq q < p^*$  podemos utilizar la desigualdad de interpolación para normas  $L^p$  (Teorema 1.7) para obtener que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta},$$

donde

$$\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Ahora (4.29) y la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (4.15) implican que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta;$$

ahora (4.30) es una consecuencia de (4.31).

- 5.) Ahora demostraremos que

para cada  $\varepsilon > 0$ , la sucesión  $\{u_m^\varepsilon\}_{m \in \mathbb{N}}$  es uniformemente acotada y equicontinua. (4.32)

Efectivamente para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(\mathbf{x})| &\leq \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |u_m(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &\leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} |Du_m^\varepsilon(\mathbf{x})| &\leq \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})| |u_m(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &\leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Estas dos cotas implican (4.32).

- 6.) Ahora fijamos  $\delta > 0$ . Demostraremos que existe una subsucesión  $\{u_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\limsup_{j, k \rightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta. \quad (4.33)$$

Para tal efecto, utilizaremos primeramente (4.30) para elegir  $\varepsilon > 0$  tan pequeño que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \delta/2 \quad \text{para } m \in \mathbb{N}. \quad (4.34)$$

Observamos ahora que como las funciones  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , y luego también las funciones  $\{u_m^\varepsilon\}_{m \in \mathbb{N}}$ , poseen soporte en algún conjunto fijo acotado  $V \subset \mathbb{R}^n$ , podemos utilizar (4.32) y el criterio de compacidad de Arzelà-Ascoli (ver Sección 1.3.7) para concluir que existe una subsucesión  $\{u_{m_j}^\varepsilon\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{u_m^\varepsilon\}_{m \in \mathbb{N}}$  que converge uniformemente en  $V$ . En particular esto implica que

$$\limsup_{j, k \rightarrow \infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} = 0. \quad (4.35)$$

Pero en tal caso (4.34) y (4.35) implican que

$$\limsup_{j, k \rightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta,$$

lo que concluye la demostración de (4.33).

- 7.) Finalmente utilizaremos el enunciado (4.33) con  $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots$  y un argumento diagonal estándar para extraer una subsucesión  $\{u_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  que satisface

$$\limsup_{l, k \rightarrow \infty} \|u_{m_l} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0.$$

■

Observamos que como  $p^* > p$  y  $p^* \rightarrow \infty$  cuando  $p \rightarrow n$ , en particular se tiene que

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U) \quad \text{para todo } 1 \leq p \leq \infty.$$

(Notar que si  $n < p \leq \infty$ , esto es una consecuencia de la desigualdad de Morrey, (4.23), y del criterio de compacidad de Arzelà-Ascoli.) Notar también que

$$W_0^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U),$$

incluso cuando no suponemos que  $\partial U \in C^1$ .

## 4.2. Cuocientes de diferencias y diferenciabilidad c.t.p.

**4.2.1. Cuocientes de diferencias.** Sea  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función localmente sumable y  $V \subset\subset U$ .

**Definición 4.8.** El  $i$ -ésimo cuociente de diferencias del tamaño  $h$  de  $u$  está definido por

$$D_i^h u(\mathbf{x}) := \frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x})}{h}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \mathbf{x} \in V, \quad h \in \mathbb{R}, \quad 0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U);$$

además definimos  $D^h u := (D_1^h u, \dots, D_n^h u)$ .

**Teorema 4.17** (Cuocientes de diferencias y derivadas débiles).

(i) Sean  $1 \leq p < \infty$  y  $u \in W^{1,p}(U)$ . Entonces para cada  $V \subset\subset U$ ,

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}$$

para alguna constante  $C$  y todo  $h$  tal que  $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U)/2$ .

(ii) Supongamos que  $1 < p < \infty$ ,  $u \in L^p(V)$  y que existe una constante  $C$  tal que

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \tag{4.36}$$

para todo  $h$  tal que  $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U)/2$ . Entonces  $u \in W^{1,p}(V)$  y  $\|Du\|_{L^p(V)} \leq C$ . (Esto es falso para  $p = 1$ .)

*Demostración.*

1.) Sea  $1 \leq p < \infty$ , y supongamos por el momento que  $u$  es suave. Entonces para cada  $\mathbf{x} \in V$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U)/2$  se tiene que

$$u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x}) = \int_0^1 u_{x_i}(\mathbf{x} + t h\mathbf{e}_i) dt \cdot h\mathbf{e}_i,$$

por lo tanto

$$|u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x})| \leq h \int_0^1 |Du(\mathbf{x} + t h\mathbf{e}_i)| dt,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_V |D^h u|^p d\mathbf{x} &\leq C \sum_{i=1}^n \int_V \int_0^1 |Du(\mathbf{x} + t h\mathbf{e}_i)|^p dt d\mathbf{x} \\ &= C \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_V |Du(\mathbf{x} + t h\mathbf{e}_i)|^p d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_V |D^h u|^p d\mathbf{x} \leq C \int_U |Du|^p d\mathbf{x}.$$

Esta desigualdad es válida si  $u$  es suave, y por lo tanto es válida por aproximación para  $u \in W^{1,p}(U)$  arbitrario.

- 2.) Supongamos ahora que (4.36) es válida para todo  $h$  tal que  $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U)/2$  y alguna constante  $C$ . Sean  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $\phi \in C_c^\infty(V)$ . Ahora, si  $h$  es suficientemente pequeño tenemos que

$$\int_V u(\mathbf{x}) \frac{\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{x})}{h} d\mathbf{x} = - \int_V \frac{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_i)}{h} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

es decir

$$\int_V u(D_i^h \phi) d\mathbf{x} = - \int_V (D_i^{-h} u) \phi d\mathbf{x}. \quad (4.37)$$

Esto es la fórmula de “integración por partes” para cuocientes de diferencias. Ahora (4.36) implica que

$$\sup_h \|D_i^{-h} u\|_{L^p(V)} < \infty;$$

por lo tanto, puesto que  $1 < p < \infty$  existen una función  $v_i \in L^p(V)$  y una subsucesión  $h_k \rightarrow 0$  tales que

$$D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i \quad \text{débilmente en } L^p(V).$$

(Recordamos que para un espacio de Banach  $X$  se dice que una sucesión  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  converge débilmente a  $u \in X$ ,  $u_k \rightharpoonup u$ , cuando  $\langle u^*, u_k \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle$  para cada funcional lineal acotado  $u^* \in X^*$ .) Pero ahora

$$\begin{aligned} \int_V u \phi_{x_i} d\mathbf{x} &= \int_U u \phi_{x_i} d\mathbf{x} = \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_U u D_i^{h_k} \phi d\mathbf{x} = - \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_V D_i^{-h_k} u \phi d\mathbf{x} \\ &= - \int_V v_i \phi d\mathbf{x} = - \int_U v_i \phi d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $v_i = u_{x_i}$  en el sentido débil ( $i = 1, \dots, n$ ) y luego  $Du \in L^p(V)$ . Como  $u \in L^p(V)$  concluimos que  $u \in W^{1,p}(V)$ . ■

Variantes del Teorema 4.17 pueden ser válidas incluso si no se tiene que  $V \subset\subset U$ . Por ejemplo, si  $U = B^0(0, 1) \cap \{x_n > 0\}$  y  $V = B^0(0, 1/2) \cap \{x_n > 0\}$  se produce la cota

$$\int_V |D_i^h u|^p d\mathbf{x} \leq \int_U |u_{x_i}|^p d\mathbf{x} \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1.$$

La demostración es similar a la del Teorema 4.17.

**Teorema 4.18** (Caracterización de  $W^{1,\infty}$ ). *Sea  $U$  abierto y acotado con  $\partial U \in C^1$ . Entonces  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  es Lipschitz continua si y sólo si  $u \in W^{1,\infty}(U)$ .*

*Demostración.*

- 1.) Supongamos primero que  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$  es una función suave y  $u^\varepsilon \rightarrow u$  uniformemente cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y  $\|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ . Sean  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  dos puntos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) - u^\varepsilon(\mathbf{y}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u^\varepsilon(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt = \int_0^1 Du^\varepsilon(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

es decir

$$|u^\varepsilon(\mathbf{x}) - u^\varepsilon(\mathbf{y})| \leq \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

- 2.) Por otro lado supongamos ahora que  $u$  es Lipschitz continua; entonces hay que demostrar que  $u$  tiene derivadas débiles esencialmente acotadas. Puesto que  $u$  es Lipschitz continua,  $\|D_i^{-h}u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \text{Lip}(u)$ , entonces existen una función  $v_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y una subsucesión  $h_k \rightarrow 0$  tal que

$$D_i^{-h_k}u \rightharpoonup v_i \quad \text{débilmente en } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n). \quad (4.38)$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \phi_{x_i} \, d\mathbf{x} = \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u D_i^{h_k} \phi \, d\mathbf{x} = - \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} D_i^{-h_k} u \phi \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^n} v_i \phi \, d\mathbf{x}.$$

Esta igualdad es válida para toda función  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , por lo tanto  $v_i = u_{x_i}$  en el sentido débil para  $i = 1, \dots, n$ , luego  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

- 3.) En el caso general, cuando  $U$  es acotado con  $\partial U \in C^1$ , aplicamos el operador de extensión  $Eu = \bar{u}$  y usamos el argumento previo. ■

Este argumento fácilmente puede ser modificado para demostrar que para todo conjunto abierto  $U$ ,  $u \in W^{1,\infty}(U)$  si y sólo si  $u$  es localmente Lipschitz continua en  $U$ . No existe ninguna caracterización análoga de los espacios  $W^{1,p}$  para  $1 \leq p < \infty$ .

Si  $n < p < \infty$ , cada  $u \in W^{1,p}$  pertenece a  $C^{0,1-n/p}$ ; por otro lado, una función Hölder continua con un exponente menor que uno puede no pertenecer a ningún espacio  $W^{1,p}$ .

**4.2.2. Diferenciabilidad c.t.p.** Estudiaremos ahora con más detalle la relación entre derivadas parciales débiles y derivadas parciales en el sentido clásico habitual. Primeramente recordamos la definición de la diferenciabilidad.

**Definición 4.9** (Diferenciabilidad). *Una función  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  se llama diferenciable en  $\mathbf{x} \in U$  si existe un vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + o(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \quad \text{cuando } \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x},$$

en otras palabras,

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0.$$

En lo siguiente una función siempre será identificada con su versión continua.

**Teorema 4.19** (Diferenciabilidad c.t.p). *Sea  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$  para algún  $n < p \leq \infty$ . Entonces  $u$  es diferenciable c.t.p. en  $U$ , y su gradiente es igual a su gradiente débil c.t.p.*

*Demostración.*

- 1.) Supongamos primero que  $n < p < \infty$ . Una demostración similar a la del Teorema 4.13 demuestra que

$$|v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})| \leq Cr^{1-n/p} \left( \int_{B(\mathbf{x},2r)} |Dv(\mathbf{z})|^p \, d\mathbf{z} \right)^{1/p}, \quad \mathbf{y} \in B(\mathbf{x},r), \quad (4.39)$$

- para todas las funciones  $v \in C^1$ , y por aproximación para todas las funciones  $v \in W^{1,p}$ .
- 2.) Sea  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$ . Ahora para casi todo  $\mathbf{x} \in U$ , una versión del Teorema de Derivación de Lebesgue (Teorema 1.17) implica que

$$\int_{B(\mathbf{x},r)} |Du(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{z})|^p dz \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad (4.40)$$

donde como siempre,  $Du$  denota la derivada débil de  $u$ . Fijamos un tal punto  $\mathbf{x}$ , y ponemos en (4.39)

$$v(\mathbf{y}) := u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad r := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} & |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \\ & \leq Cr^{1-n/p} \left( \int_{B(\mathbf{x},2r)} |Du(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{z})|^p dz \right)^{1/p} \\ & \leq Cr \left( \int_{B(\mathbf{x},2r)} |Du(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{z})|^p dz \right)^{1/p} = o(r) = o(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \end{aligned}$$

Entonces  $u$  es diferenciable en  $\mathbf{x}$ , y su gradiente es igual a su gradiente débil en  $\mathbf{x}$ .

- 3.) Para el caso  $p = \infty$  notamos que  $W_{\text{loc}}^{1,\infty}(U) \subset W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ , y aplicamos el razonamiento anterior. ■

**Teorema 4.20** (Teorema de Rademacher [6]). *Sea  $u$  localmente Lipschitz continua en  $U$ . Entonces  $u$  es diferenciable c.t.p. en  $U$ .*

### 4.3. Formulación variacional, soluciones débiles y estimaciones de energía

En lo siguiente consideraremos el problema de valores de frontera

$$Lu = f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U, \quad (4.41)$$

donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y acotado,  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función desconocida,  $u = u(\mathbf{x})$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  está dada y el operador  $L$  está dado por

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(\mathbf{x})u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x})u_{x_i} + c(\mathbf{x})u, \quad (4.42)$$

en tal caso se dice que la ecuación  $Lu = f$  está *en forma de divergencia*, o por

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x})u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x})u_{x_i} + c(\mathbf{x})u;$$

en este caso se dice que  $Lu = f$  está *en forma de no divergencia*. El requerimiento “ $u = 0$  sobre  $\partial U$ ” a veces se llama *condición de Dirichlet homogénea*.

La forma de divergencia es la más natural para métodos de energía, basados en integración por partes, mientras que la forma de no divergencia es más útil para la aplicación del principio del máximo. En lo siguiente se supone que  $a^{ij} = a^{ji}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Definición 4.10** (Elípticidad uniforme). *El operador  $L$  se llama uniformemente elíptico si existe una constante  $\theta > 0$  tal que*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \geq \theta|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \text{para } \mathbf{x} \in U \text{ c.t.p., } \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

En lo siguiente consideraremos primero el problema (4.41) cuando  $L$  está en forma de divergencia (4.42). Sean  $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$  y  $f \in L^2(U)$ . ¿Cómo deberíamos definir una solución débil? Supongamos por el momento que  $u$  efectivamente es una solución suave, y multiplicamos  $Lu = f$  por una función test  $v \in C_c^\infty(U)$  e integramos el resultado sobre  $U$  para obtener

$$\int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) d\mathbf{x} = \int_U f v d\mathbf{x}.$$

La misma identidad es válida para toda función  $v \in H_0^1(U)$  (por aproximación), y es razonable si solamente  $u \in H_0^1(U)$ . (Se utiliza el espacio  $H_0^1(U)$  para incorporar la condición de borde homogénea.)

**Definición 4.11** (Formulación variacional).

- (i) *La forma bilineal  $B[\cdot, \cdot]$  asociada con el operador  $L$  en forma de divergencia (4.42) está definida por*

$$B[u, v] := \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) d\mathbf{x}.$$

- (ii) *Una función  $u \in H_0^1(U)$  se llama solución débil de (4.41) si*

$$\forall v \in H_0^1(U) : \quad B[u, v] = (f, v), \quad (4.43)$$

*donde  $(\cdot, \cdot)$  es el producto interior en  $L^2(U)$ . El problema (4.43) se llama a veces formulación variacional de (4.41).*

Más generalmente consideraremos el problema de valores de frontera

$$Lu = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U, \quad (4.44)$$

donde el operador  $L$  está definido en (4.42) y  $f^i \in L^2(U)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Definición 4.12** (Espacio  $H^{-1}(U)$ ). *Se denota por  $H^{-1}(U)$  el espacio dual de  $H_0^1(U)$ , es decir  $f \in H^{-1}(U)$  si  $f$  es un funcional lineal acotado sobre  $H_0^1(U)$ . Si  $f \in H^{-1}(U)$ , definimos su norma*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} := \sup \{ \langle f, u \rangle \mid u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1 \}.$$

**Teorema 4.21** (Caracterización de  $H^{-1}$  [6]).

(i) Supongamos que  $f \in H^{-1}(U)$ . Entonces existen funciones  $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(U)$  tales que

$$\langle f, v \rangle = \int_U \left( f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} \right) d\mathbf{x}, \quad v \in H_0^1(U). \quad (4.45)$$

(ii)

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left[ \int_U \left( \sum_{i=0}^n |f^i|^2 \right) d\mathbf{x} \right]^{1/2} \mid f \text{ satisface (4.45) para } f^0, \dots, f^n \in L^2(U) \right\}.$$

Escribimos

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i$$

siempre cuando (4.45) es válido. Así que en (4.44),

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i \in H^{-1}(U).$$

**Definición 4.13** (Solución débil). Una función  $u \in H_0^1(U)$  se llama solución débil del problema (4.44) si

$$\forall v \in H_0^1(U) : \quad B[u, v] = \langle f, v \rangle, \quad \text{donde} \quad \langle f, v \rangle = \int_U \left( f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} \right) d\mathbf{x}.$$

El caso de condiciones de frontera no homogéneas puede fácilmente ser transformado al caso homogéneo. Sea  $\partial U \in C^1$  y  $u \in H^1(U)$  una solución débil de

$$Lu = f \quad \text{en } U, \quad u = g \quad \text{sobre } \partial U.$$

Esto significa que  $u = g$  en  $\partial U$  en el sentido de trazas, y además la identidad  $B[u, v] = \langle f, v \rangle$  debe ser válida para toda función  $v \in H_0^1(U)$ . Para que esto pueda suceder, la función  $g$  necesariamente debe ser la traza de alguna función en  $H^1(U)$ , por ejemplo  $w$ . En este caso,  $\tilde{u} := u - w \in H_0^1(U)$ , y  $\tilde{u}$  es una solución débil de

$$L\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{en } U, \quad \tilde{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial U, \quad \tilde{f} := f - Lw \in H^{-1}(U).$$

**4.3.1. Existencia de soluciones débiles.** Sea ahora  $H$  un espacio de Hilbert equipado con la norma  $\|\cdot\|$  y el producto interior  $(\cdot, \cdot)$ . Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto de dualidad (es decir entre  $H$  y su dual).

**Teorema 4.22** (Teorema de Lax-Milgram [6]). Sea  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación bilineal para la cual existan constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad u, v \in H, \quad \beta \|u\|^2 \leq B[u, u], \quad u \in H.$$



Si  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional lineal y acotado en  $H$ , entonces existe un elemento  $u \in H$  único tal que

$$\forall v \in H : \quad B[u, v] = \langle f, v \rangle.$$

La observación importante es que  $B[\cdot, \cdot]$  no necesariamente debe ser simétrica. Consideremos ahora la forma bilineal  $B[\cdot, \cdot]$  definida por

$$B[u, v] := \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) d\mathbf{x}, \quad u, v \in H_0^1(U).$$

Trataremos de verificar las presuposiciones del Teorema 4.22.

**Teorema 4.23** (Estimaciones de energía). *Existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  y  $\gamma \geq 0$  tales que para todo  $u, v \in H_0^1(U)$ ,*

- (i)  $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$  y
- (ii)  $\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2$ .

*Demostración.*

1.) Chequeamos que existe una constante  $\alpha$  tal que

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_U |Du| |Dv| d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du| |v| d\mathbf{x} \\ &\quad + \|c\|_{L^\infty} \int_U |u| |v| d\mathbf{x} \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}. \end{aligned}$$

2.) Usando la condición de elipticidad concluimos que

$$\begin{aligned} \theta \int_U |Du|^2 d\mathbf{x} &\leq \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) d\mathbf{x} \\ &= B[u, u] - \int_U \left( \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} u + cu^2 \right) d\mathbf{x} \\ &\leq B[u, u] + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du| |u| d\mathbf{x} + \|c\|_{L^\infty} \int_U u^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

En virtud de de la desigualdad de Cauchy con  $\varepsilon$  (1.4),

$$\int_U |Du| |u| d\mathbf{x} \leq \varepsilon \int_U |Du|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U u^2 d\mathbf{x} \quad (\varepsilon > 0).$$

Insertando esta desigualdad en (4.46) y luego escogiendo  $\varepsilon$  tan pequeño que

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} < \frac{\theta}{2}$$

obtenemos que

$$\exists C > 0 : \quad \frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2 d\mathbf{x} \leq B[u, u] + C \int_U u^2 d\mathbf{x}.$$

Acordándonos de la desigualdad de Poincaré (4.22) llegamos fácilmente a

$$\exists \beta > 0, \gamma \geq 0 : \quad \beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2.$$

**Teorema 4.24** (Primer teorema de existencia de soluciones débiles). *Existe un número  $\gamma \geq 0$  tal que para cada  $\mu \geq \gamma$  y cada función  $f \in L^2(U)$  existe una solución  $u \in H_0^1(U)$  única del problema de valores de frontera*

$$Lu + \mu u = f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U. \quad (4.47)$$

*Demostración.*

1.) Sea  $\gamma$  como en el Teorema 4.23,  $\mu \geq \gamma$ , y

$$B_\mu[u, v] := B[u, v] + \mu(u, v), \quad u, v \in H_0^1(U),$$

correspondiente al operador  $L_\mu$  definido por  $L_\mu u := Lu + \mu u$ . Entonces  $B_\mu[\cdot, \cdot]$  satisface las hipótesis del Teorema 4.22.

2.) Sea ahora  $f \in L^2(U)$  y  $\langle f, v \rangle := (f, v)_{L^2(U)}$ . Esto es un funcional lineal y acotado en  $L^2(U)$ , y entonces en  $H_0^1(U)$ . Por lo tanto, según el Teorema 4.22 existe una función  $u \in H_0^1(U)$  que satisface  $B_\mu[u, v] = \langle f, v \rangle$  para todo  $v \in H_0^1$ , por lo tanto  $u$  es la única solución débil de (4.47).

Comentamos que para  $Lu = -\Delta u$  obtenemos la forma bilineal

$$B[u, v] = \int_U Du \cdot Dv d\mathbf{x};$$

usando la desigualdad (4.22) verificamos que el Teorema 4.23 es válido con  $\gamma = 0$ . Algo similar es válido para el siguiente operador si  $c \geq 0$  en  $U$ :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + cu.$$

**Definición 4.14.** *Un operador lineal acotado  $K : X \rightarrow Y$  se llama compacto si para cada sucesión acotada  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ , la sucesión  $\{Ku_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es precompacta en  $Y$ , es decir, existe una subsucesión  $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{Ku_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge en  $Y$ .*

Sea ahora  $H$  un espacio de Hilbert real con el producto interior  $(\cdot, \cdot)$ . Es fácil ver que si un operador lineal  $K : H \rightarrow H$  es compacto y  $u_k \rightharpoonup u$ , entonces  $Ku_k \rightarrow Ku$ .

**Teorema 4.25** (Compacidad del operador adjunto [6]). *Si  $K : H \rightarrow H$  es compacto, también  $K^* : H \rightarrow H$  es compacto.*

**Teorema 4.26** (Alternativa de Fredholm [6]). *Sea  $K : H \rightarrow H$  un operador lineal compacto. Entonces*

- (i)  $N(I - K)$  tiene dimensión finita,
- (ii)  $R(I - K)$  es cerrado,
- (iii)  $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$ ,
- (iv)  $N(I - K) = \{0\}$  si y sólo si  $R(I - K) = H$ ,
- (v)  $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$ .

Utilizando el Teorema 4.26 se puede demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 4.27** (Espectro de un operador compacto [6]). *Sea  $\dim H = \infty$  y  $K : H \rightarrow H$  compacto. Entonces*

- (i)  $0 \in \sigma(K)$ ,
- (ii)  $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ ,
- (iii) o  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  es finito, o  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  es una sucesión que tiende a cero.

**Teorema 4.28** (Segundo teorema de existencia para soluciones débiles).

- (i) Uno y sólo uno de los siguientes enunciados es válido:

- (a) Para cada  $f \in L^2(U)$ , el problema

$$Lu = f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U \quad (4.48)$$

posee una solución única.

- (b) El problema

$$Lu = 0 \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U \quad (4.49)$$

posee una solución débil  $u \neq 0$ .

- (ii) Cuando la alternativa (b) es válida, la dimensión del subespacio  $N \subset H_0^1(U)$  de las soluciones débiles de (4.49) es finita y es igual a la dimensión del subespacio  $N^* \subset H_0^1(U)$  de las soluciones débiles de

$$L^*v = 0 \quad \text{en } U, \quad v = 0 \quad \text{sobre } \partial U. \quad (4.50)$$

- (iii) El problema (4.48) posee una solución débil si y sólo si

$$\forall v \in N^* : (f, v) = 0.$$

*Demostración.*

- 1.) Sea  $\mu = \gamma$  como en el Teorema 4.24, y  $B_\gamma[u, v] := B[u, v] + \gamma(u, v)$  la forma bilineal asociada al operador  $L_\gamma u := Lu + \gamma u$ . Entonces para cada  $g \in L^2(U)$  existe una función  $u \in H_0^1(U)$  única que es solución de

$$B_\gamma[u, v] = (g, v) \quad \forall v \in H_0^1(U). \quad (4.51)$$

Si (4.51) es válido escribimos  $u = L_\gamma^{-1}g$ .

- 2.) Ahora  $u \in H_0^1(U)$  es una solución débil de (4.48) si y sólo si

$$B_\gamma[u, v] = (\gamma u + f, v) \quad \forall v \in H_0^1(U);$$

es decir, si y sólo si

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f).$$

Esto lo escribimos como

$$u - Ku = h, \quad Ku := \gamma L_\gamma^{-1}u, \quad h = L_\gamma^{-1}f. \quad (4.52)$$

- 3.) Ahora demostramos que  $K : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$  es un operador acotado, lineal y compacto. De hecho, debido a nuestra selección de  $\gamma$  y las estimaciones de energía (Teorema 4.23) podemos concluir que si (4.51) es válido, entonces

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B_\gamma[u, u] = (g, u) \leq \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)} \leq \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{H_0^1(U)}.$$

Por lo tanto,  $Ku = \gamma L_\gamma^{-1}u$  implica que

$$\|Kg\|_{H_0^1(U)} \leq C \|g\|_{L^2(U)} \quad (g \in L^2(U))$$

para alguna constante  $C$ . Pero como  $H_0^1(U) \subset L^2(U)$  según el Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema 4.16), deducimos que  $K$  es un operador compacto.

- 4.) En virtud de lo anterior se puede aplicar la alternativa de Fredholm para concluir que se cumple exactamente una de la siguientes alternativas:

- (a) Para cada  $h \in L^2(U)$ ,  $u - Ku = h$  tiene una solución  $u \in L^2(U)$  única.  
 (b) La ecuación  $u - Ku = 0$  tiene soluciones no triviales en  $L^2(U)$ .

Si (a) es válido, entonces existe una solución débil única del problema (4.48). Por otro lado, en el caso (b) necesariamente se tiene que  $\gamma \neq 0$ , y la dimensión del espacio  $N$  de soluciones de  $u - Ku = 0$  es finita e igual a la dimensión del espacio  $N^*$  de soluciones de

$$v - K^*v = 0. \quad (4.53)$$

Pero  $u - Ku = 0$  es válido si y sólo si  $u$  es una solución débil de (4.49), y (4.53) es válido si y sólo si  $v$  es una solución débil de (4.50).

- 5.) Finalmente recordemos que  $u - Ku = h$  posee una solución si y sólo si  $(h, v) = 0$  para todo  $v$  que es solución de (4.53). Pero a partir de (4.52) y (4.53) obtenemos

$$(h, v) = \frac{1}{\gamma} (Kf, v) = \frac{1}{\gamma} (f, K^*v) = \frac{1}{\gamma} (f, v).$$

Por lo tanto, (4.48) tiene una solución si y sólo si  $(f, v) = 0$  para todas las soluciones débiles  $v$  de (4.50). ■

**Teorema 4.29** (Tercer teorema de existencia para soluciones débiles).

- (i) Existe un conjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  a lo más numerable tal que el problema

$$Lu = \lambda u + f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U \quad (4.54)$$

tiene una solución débil única para cada  $f \in L^2(U)$  si y sólo si  $\lambda \notin \Sigma$ .

- (ii) Si  $\Sigma$  es infinito, entonces

$$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad \lambda_i \leq \lambda_j \quad \text{si } i \leq j, \quad \lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

El conjunto  $\Sigma$  se llama espectro real del operador  $L$ .

En particular, el problema  $Lu = \lambda u$  en  $U$ ,  $u = 0$  sobre  $\partial U$  posee una solución  $w \neq 0$  si y sólo si  $\lambda \in \Sigma$ , caso en el cual  $\lambda$  se llama *valor propio de  $L$*  y  $w$  una *función propia*. Para  $L = -\Delta$  la ecuación de derivadas parciales  $Lu = \lambda u$  se llama *ecuación de Helmholtz*.

*Demostración.*

- 1.) Sea  $\gamma$  la constante del Teorema 4.23, y supongamos que  $\gamma > 0$  y  $\lambda > -\gamma$ .
- 2.) Según el Teorema 4.26, el problema (4.54) tiene una solución débil única para cada  $f \in L^2(U)$  si y sólo si  $u \equiv 0$  es la solución débil única del problema homogéneo  $Lu = \lambda u$  en  $U$ ,  $u = 0$  sobre  $\partial U$ , lo que a su vez es válido si y sólo si  $u \equiv 0$  es la solución única del problema

$$Lu + \gamma u = (\gamma + \lambda)u \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U. \quad (4.55)$$

Ahora (4.55) es válido si y sólo si

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma + \lambda)u = \frac{\gamma + \lambda}{\gamma}Ku, \quad (4.56)$$

donde como en la demostración del Teorema 4.28, definimos  $Ku = \gamma L_\gamma^{-1}u$ . Recordemos que  $K : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$  es un operador acotado, lineal y compacto. Ahora, si  $u \equiv 0$  es la solución única de (4.56),

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \text{ no es un valor propio de } K. \quad (4.57)$$

Por lo tanto, (4.54) tiene una solución débil única para cada  $f \in L^2(U)$  si y sólo si (4.57) es válido.

- 3.) Según el Teorema 4.27, el conjunto de todos los valores propios de  $K$  o es finito, o forma una sucesión que converge a cero. En el segundo caso, de acuerdo a  $\lambda > -\gamma$  y (4.56), el problema (4.54) tiene una solución única para todo  $f \in L^2(U)$  con la excepción de una sucesión  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con  $\lambda_k \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . ■

**Teorema 4.30** (Acotamiento de la inversa [6]). *Sea  $\lambda \notin \Sigma$ . Entonces existe una constante  $C$  tal que*

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|f\|_{L^2(U)}$$

siempre que  $f \in L^2(U)$  y  $u \in H_0^1(U)$  es la única solución débil de

$$Lu = \lambda u + f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U.$$

**4.3.2. Regularidad.** Queremos analizar ahora si una solución débil del problema

$$Lu = f \quad \text{en } U \quad (4.58)$$

es suave. Esto se llama el *problema de regularidad*. La conjetura de que una solución débil de (4.58) es posiblemente “mejor” que una función “típica”  $u \in H_0^1(U)$  está basada en el siguiente razonamiento.

Consideremos el problema  $-\Delta u = f$  en  $\mathbb{R}^n$ , suponiendo que  $u$  desaparece rápidamente cuando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , para justificar los siguientes cálculos. En este caso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 \, d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} \, d\mathbf{x} = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Concluimos que en el presente caso la norma en  $L^2$  de las segundas derivadas de  $u$  es igual a la norma de  $f$ . Análogamente podemos derivar  $-\Delta u = f$  para obtener las ecuaciones  $-\Delta \tilde{u} = \tilde{f}$  con  $\tilde{u} = u_{x_k}$  y  $\tilde{f} = f_{x_k}$  para  $k = 1, \dots, n$ . Aplicando el mismo método obtenemos que la norma  $L^2$  de las terceras derivadas de  $u$  puede ser acotada por las primeras derivadas de  $f$ , etc. Continuando vemos que las normas en  $L^2$  de las  $(m+2)$ -ésimas derivadas de  $u$  pueden ser controladas por las  $m$ -ésimas derivadas de  $f$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ .

Ahora podemos suponer que para la ecuación de Poisson,  $u \in H_0^1$  efectivamente pertenece a  $H^{m+2}$  siempre que  $f \in H^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Informalmente, podemos decir que “ $u$  posee dos derivadas más que  $f$ ”. (Para  $m = \infty$ ,  $u \in H^m$  para  $m \in \mathbb{N}$  y por lo tanto  $u \in C^\infty$ .)

Estos cálculos aún no forman una demostración, dado que supusimos que  $u$  es suave, o por lo menos una función en  $C^3$ , para poder realizar este cálculo; no podemos encontrar una justificación inmediata cuando empezamos solamente con una solución débil  $u \in H_0^1$ . Tendremos que utilizar el análisis de ciertos cocientes de diferencias.

La idea central en el siguiente análisis consiste en aprovechar la elipticidad. Efectivamente queremos derivar estimaciones desde la condición algebraica de la elipticidad.

En lo siguiente siempre se supone que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es acotado y abierto, y que  $u \in H_0^1(U)$  es una solución débil de  $Lu = f$ , donde

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(\mathbf{x})u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x})u_{x_i} + c(\mathbf{x})u. \quad (4.59)$$

**Teorema 4.31** (Regularidad  $H^2$  interior). Sean  $a^{ij} \in C^1(U)$ ,  $b^i, c \in L^\infty(U)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $f \in L^2(U)$ , y  $u \in H^1(U)$  una solución débil de  $Lu = f$  en  $U$ , donde el operador  $L$  está dado por (4.59). En este caso,  $u \in H_{\text{loc}}^2(U)$ , y para cada subconjunto abierto  $V \subset\subset U$  sabemos que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

donde la constante  $C$  depende solamente de  $U$ ,  $V$ , y los coeficientes de  $L$ .

Antes de demostrar el Teorema 4.31 comentamos que no exigimos que  $u \in H_0^1(U)$ , es decir no necesariamente tenemos que  $u = 0$  sobre  $\partial U$  en el sentido de trazas. Observamos adicionalmente que en virtud de  $u \in H_{\text{loc}}^2(U)$ , se tiene que  $Lu = f$  c.t.p. en  $U$ . Entonces  $u$  es una solución de la EDP por lo menos en casi todas partes en  $U$ . Para ver eso, notamos que

$$B[u, v] = (f, v) \quad \forall v \in C_c^\infty(U).$$

Como  $u \in H_{\text{loc}}^2(U)$  podemos integrar por partes para obtener  $B[u, v] = (Lu, v)$ . Entonces

$$(Lu - f, v) = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(U),$$

y por lo tanto  $Lu = f$  c.t.p.

*Demostración del Teorema 4.31.*

- 1.) Sea  $V$  algún conjunto abierto  $V \subset\subset U$ , y  $W$  un conjunto abierto tal que  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Sea  $\zeta$  una función suave, llamada *función de corte*, tal que  $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $\zeta \equiv 1$  en  $V$ ,  $\zeta \equiv 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus W$ . El propósito de introducir esta función es la restricción de todas las funciones al subconjunto  $W$  que posee una distancia positiva a  $\partial U$ .

2.) Ahora, como  $u$  es una solución débil,  $B[u, v] = (f, v)$  para toda función  $v \in H_0^1(U)$ , por lo tanto

$$\mathcal{A} := \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \, d\mathbf{x} = \int_U \tilde{f} v \, d\mathbf{x} =: \mathcal{B}, \quad \tilde{f} := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu. \quad (4.60)$$

3.) Sea  $|h| > 0$  pequeño,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , y sea

$$v := -D_k^{-h} (\zeta^2 D_k^h u)$$

en (4.60), donde definimos el cociente de diferencias

$$D_k^h u(\mathbf{x}) := \frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - u(\mathbf{x})}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0.$$

4.) Utilizando las fórmulas

$$\int_U v D_k^{-h} w \, d\mathbf{x} = - \int_U w D_k^h v \, d\mathbf{x}, \quad D_k^h(vw) = v^h D_k^h w + w D_k^h v,$$

donde  $v^h(\mathbf{x}) := v(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k)$ , podemos empezar a estimar  $\mathcal{A}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= - \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} [D_k^{-h} (\zeta^2 D_k^h u)]_{x_j} \, d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n \int_U D_k^h (a^{ij} u_{x_i}) (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_U \left( a^{ij,h} (D_k^h u_{x_i}) (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} + (D_k^h a^{ij}) u_{x_i} (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} \right) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

lo que significa que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij,h} D_k^h u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \zeta^2 \, d\mathbf{x}, \\ \mathcal{A}_2 &= \sum_{i,j=1}^n \int_U \left( a^{ij,h} D_k^h u_{x_i} D_k^h u \cdot 2\zeta \zeta_{x_j} + (D_k^h a^{ij}) u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \zeta^2 \right. \\ &\quad \left. + (D_k^h a^{ij}) u_{x_i} D_k^h u \cdot 2\zeta \zeta_{x_j} \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La condición de elipticidad uniforme implica que

$$\mathcal{A}_1 \geq \theta \int_U |D_k^h Du|^2 \, d\mathbf{x};$$

por otro lado, en virtud de  $a^{ij} \in C^1(U)$  y  $b^i, c \in L^\infty(U)$  existe una constante  $C$  tal que

$$|\mathcal{A}_2| \leq C \int_U \zeta \left( |D_k^h Du| |D_k^h u| + |D_k^h Du| |Du| + |D_k^h u| |Du| \right) \, d\mathbf{x}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy con  $\varepsilon$ , (1.4), obtenemos

$$|\mathcal{A}_2| \leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{C}{\varepsilon} \int_U \left( |D_k^h u|^2 + |Du|^2 \right) \, d\mathbf{x}.$$

Utilizando  $\varepsilon = \theta/2$  y la desigualdad

$$\int_W |D_k^h u|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_U |Du|^2 d\mathbf{x}$$

(proveniente del Teorema 4.17), obtenemos

$$|\mathcal{A}_2| \leq \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} + C \int_U |Du|^2 d\mathbf{x},$$

luego

$$\mathcal{A} \geq \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} - C \int_U |Du|^2 d\mathbf{x}. \quad (4.61)$$

5.) Para acotar  $\mathcal{B}$  podemos utilizar las definiciones de  $\tilde{f}$ ,  $v$  y  $\mathcal{B}$  para obtener

$$|\mathcal{B}| \leq C \int_U (|f| + |Du| + |u|) |v| d\mathbf{x}. \quad (4.62)$$

Aplicando nuevamente el Teorema 4.17 concluimos que

$$\begin{aligned} \int_U |v|^2 d\mathbf{x} &\leq C \int_U |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_W (|D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2) d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_U (|Du|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Entonces, a partir de (4.62) y la desigualdad de Cauchy con  $\varepsilon$ , (1.4), obtenemos

$$|\mathcal{B}| \leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} + \frac{C}{\varepsilon} \int_U (f^2 + u^2) d\mathbf{x} + \frac{C}{\varepsilon} \int_U |Du|^2 d\mathbf{x},$$

y poniendo  $\varepsilon = \theta/4$ ,

$$|\mathcal{B}| \leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} + C \int_U (f^2 + u^2 + |Du|^2) d\mathbf{x}. \quad (4.63)$$

6.) Combinando  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , (4.61) y (4.63) obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} - C \int_U |Du|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \mathcal{A} = \mathcal{B} \leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} + \tilde{C} \int_U (f^2 + u^2 + |Du|^2) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} \leq \tilde{C} \int_U (f^2 + u^2 + |Du|^2) d\mathbf{x}.$$

En virtud de lo anterior podemos concluir que para  $k = 1, \dots, n$  y cada  $|h| \neq 0$  suficientemente pequeño,

$$\int_V |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} \leq \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_U (f^2 + u^2 + |Du|^2) d\mathbf{x}.$$



Usando nuevamente el Teorema 4.17 concluimos que  $Du \in H_{\text{loc}}^1(U; \mathbb{R}^n)$  y luego  $u \in H_{\text{loc}}^2(U)$ , con

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}). \quad (4.64)$$

7.) Ahora refinamos la cota (4.64), notando que si  $V \subset\subset W \subset\subset U$ , el mismo argumento muestra que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)})$$

para alguna constante  $C$  que depende de  $V, W$ , etc. Ahora elegimos una nueva función de corte  $\zeta$  que satisfaga  $\zeta \equiv 1$  en  $W$ ,  $\text{supp } \zeta \subset U$  y  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Insertando  $v = \zeta^2 u$  en la identidad (4.60) obtenemos

$$\int_U \zeta^2 |Du|^2 \, d\mathbf{x} \leq C \int_U (f^2 + u^2) \, d\mathbf{x},$$

por lo tanto  $\|u\|_{H^1(W)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$ . Esta desigualdad y (4.64) llevan al resultado deseado. ■

**Teorema 4.32** (Regularidad interior superior). Sean  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U)$  para  $i, j = 1, \dots, n$  y  $f \in H^m(U)$ . Si  $u \in H^1(U)$  es una solución débil de la EDP elíptica  $Lu = f$  en  $U$ , entonces

$$u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(U) \quad (4.65)$$

y para cada  $V \subset\subset U$  se satisface

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}), \quad (4.66)$$

donde la constante  $C$  depende solamente de  $m, U, V$ , y los coeficientes de  $L$ .

*Demostración.*

- 1.) Demostraremos (4.65) y (4.66) por inducción sobre  $m$ . El Teorema 4.31 establece el enunciado para  $m = 0$ .
- 2.) Sean (4.65) y (4.66) válidos para algún  $m \geq 0$  y todos los conjuntos abiertos  $U$ , y sean  $a^{ij}, b^i$  y  $c$  como arriba. Supongamos entonces que

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+2}(U), \quad f \in H^{m+1}(U), \quad (4.67)$$

y sea  $u \in H^1(U)$  una solución débil de  $Lu = f$  en  $U$ . Según la hipótesis de inducción,

$$u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(U), \quad \|u\|_{H^{m+2}(W)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (4.68)$$

para cada  $W \subset\subset U$  y alguna constante  $C$  apropiada que depende solamente de  $W$ , los coeficientes de  $L$ , etc. Fijemos  $V \subset\subset W \subset\subset U$ .

- 3.) Sea ahora  $\alpha$  cualquier multi-índice con  $|\alpha| = m + 1$ . Elegimos una función test  $\tilde{v} \in C_c^\infty(W)$  arbitraria. Insertando  $v := (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v}$  en la identidad  $B[u, v] = (f, v)_{L^2(U)}$  obtenemos la identidad

$$B[\tilde{u}, \tilde{v}] = (\tilde{f}, \tilde{v}), \quad (4.69)$$

donde  $\tilde{u} := D^\alpha u \in H^1(W)$  y

$$\begin{aligned} \tilde{f} = D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left( - \sum_{i,j=1}^n (D^{\alpha-\beta} a^{ij} D^\beta u_{x_i})_{x_j} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_{x_i} + D^{\alpha-\beta} c D^\beta u \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Como (4.69) es válida para cada función  $\tilde{v} \in C_c^\infty(W)$ , vemos que  $\tilde{u}$  es una solución débil de  $L\tilde{u} = \tilde{f}$  en  $W$ . Usando (4.67), (4.68) y (4.70) obtenemos que  $\tilde{f} \in L^2(W)$  con

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

4.) En virtud del Teorema 4.31 vemos que  $\tilde{u} \in H^2(V)$  con

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(V)} \leq C(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}) \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Esta desigualdad es válida para cada multi-índice  $\alpha$  con  $|\alpha| = m + 1$  y  $\tilde{u} = D^\alpha u$  definida como arriba. Por lo tanto  $u \in H^{m+3}(V)$  y

$$\|u\|_{H^{m+3}(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \quad \blacksquare$$

Ahora podemos aplicar el Teorema 4.32 repetidamente para  $m = 0, 1, 2, \dots$  para concluir que  $u$  es infinitamente diferenciable.

**Teorema 4.33** (Diferenciabilidad infinita en el interior). *Supongamos que  $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(U)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $f \in C^\infty(U)$ . Si  $u \in H^1(U)$  es una solución débil de la EDP elíptica  $Lu = f$  en  $U$ , entonces  $u \in C^\infty(U)$ .*

Notar que nuevamente no suponemos nada sobre el comportamiento de  $u$  sobre  $\partial U$ . En particular, constatamos que cualquier singularidad que  $u$  tenga en la frontera no se “propaga” hacia el interior.

*Demostración del Teorema 4.33.* Según el Teorema 4.32,  $u \in H_{\text{loc}}^m(U)$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , lo que de acuerdo al Teorema 4.15 implica que  $u \in C^k(U)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .  $\blacksquare$

**Teorema 4.34** (Regularidad  $H^2$  sobre la frontera). *Supongamos que*

$$\begin{aligned} a^{ij} \in C^1(\bar{U}), \quad b^i, c \in L^\infty(U), \quad i, j = 1, \dots, n, \\ f \in L^2(U), \end{aligned} \quad (4.71)$$

*y que  $u \in H_0^1(U)$  es una solución débil del problema de valores de frontera elíptico*

$$Lu = f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U.$$

*Si  $\partial U$  es de clase  $C^2$ , entonces  $u \in H^2(U)$  y*

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}), \quad (4.72)$$

*donde la constante  $C$  depende solamente de  $U$  y los coeficientes de  $L$ .*

Comentamos que si  $u \in H_0^1(U)$  es la única solución débil, (4.72) se simplifica a

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}.$$

Por otro lado enfatizamos que al contrario del Teorema 4.31, ahora sí suponemos que  $u = 0$  a lo largo de  $\partial U$  (en el sentido de trazas).

*Demostración del Teorema 4.34.*

- 1.) Estudiaremos primero el caso de una semibola,  $U = B^0(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^n$ . Se define el conjunto  $V := B^0(0, 1/2) \cap \mathbb{R}_+^n$ , y sea  $\zeta$  una función de corte suave tal que  $\zeta \equiv 1$  en  $B(0, 1/2)$ ,  $\zeta \equiv 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$  y  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Entonces  $\zeta \equiv 1$  en  $V$ , y  $\zeta$  desaparece cerca de la parte curvada de  $\partial U$ .
- 2.) Como  $u$  es una solución débil,  $B[u, v] = (f, v)$  para todo  $v \in H_0^1(U)$ , es decir

$$\forall v \in H_0^1(U) : \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \, d\mathbf{x} = \int_U \tilde{f} v \, d\mathbf{x}, \quad \tilde{f} := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu. \quad (4.73)$$

- 3.) Sea  $h > 0$  pequeño,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , y

$$v := -D_k^{-h} (\zeta^2 D_k^h u).$$

Notamos que

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h} \left( \zeta^2(\mathbf{x}) (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - u(\mathbf{x})) \right) \\ &= -\frac{1}{h^2} \left( \zeta^2(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_k) (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_k)) - \zeta^2(\mathbf{x}) (u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - u(\mathbf{x})) \right) \end{aligned}$$

para  $\mathbf{x} \in U$ . Como  $u = 0$  a lo largo de  $\{x_n = 0\}$  en el sentido de trazas y  $\zeta \equiv 0$  cerca de la parte curvada de  $\partial U$ , vemos que  $v \in H_0^1(U)$ . Insertando  $v$  en (4.73) obtenemos

$$\mathcal{A} := \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \, d\mathbf{x} = \int_U \tilde{f} v \, d\mathbf{x} =: \mathcal{B}.$$

- 4.) Ahora podemos acotar estos términos de manera muy similar a la demostración del Teorema 4.31. Después de algunos cálculos encontramos que para constantes  $C$  apropiadas

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\geq \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, d\mathbf{x} - C \int_U |Du|^2 \, d\mathbf{x}, \\ |\mathcal{B}| &\leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, d\mathbf{x} + C \int_U (f^2 + u^2 + |Du|^2) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int_V |D_k^h Du|^2 \, d\mathbf{x} \leq C \int_U (f^2 + u^2 + |Du|^2) \, d\mathbf{x}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

En virtud del comentario que sigue la demostración del Teorema 4.17 concluimos que

$$u_{x_k} \in H^1(V), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

con la cota

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l < 2n}} \|u_{x_k x_l}\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}). \quad (4.74)$$

- 5.) Ahora tenemos que conseguir una cota para la norma  $L^2$  de  $u_{x_n x_n}$  sobre  $V$ . Para tal efecto recordamos que según el comentario que sigue el Teorema 4.31,  $Lu = f$  c.t.p. en  $U$ . Usando la definición de  $L$  podemos re-escribir esto en forma de no divergencia

$$-\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i u_{x_i} + cu = f; \quad \tilde{b}^i := b^i - \sum_{j=1}^n a^{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces

$$a^{nn} u_{x_n x_n} = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j < 2n}} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i u_{x_i} + cu - f.$$

De acuerdo a la condición de elipticidad uniforme,

$$\forall \mathbf{x} \in U, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \quad \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \theta |\boldsymbol{\xi}|^2,$$

y poniendo  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{e}_n$  obtenemos  $a^{nn}(\mathbf{x}) \geq \theta > 0$ . Usando (4.71) obtenemos

$$|u_{x_n x_n}| \leq C \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j < 2n}} (|u_{x_i x_j}| + |Du| + |u| + |f|) \quad \text{en } U.$$

Utilizando esto en la desigualdad (4.74) obtenemos

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

para alguna constante  $C$ .

- 6.) En el caso que  $U$  no es una semi-bola elegimos  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$  y notamos que como  $\partial U \in C^2$ , posiblemente después de re-etiquetar los ejes,

$$U \cap B(\mathbf{x}^0, r) = \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

para algún  $r > 0$  y alguna función  $\gamma \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ . Como siempre utilizamos la transformación de coordenadas  $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{y})$ .

- 7.) Sea  $s > 0$  tan pequeño que

$$U' := B^0(0, s) \cap \{y_n > 0\} \subset \Phi(U \cap B(\mathbf{x}^0, r)).$$

Se define, además,

$$V' := B^0(0, s/2) \cap \{y_n > 0\}; \quad u'(\mathbf{y}) := u(\Psi(\mathbf{y})) \quad \text{para } \mathbf{y} \in U'.$$

Podemos verificar que  $u' \in H^1(U')$  y  $u' = 0$  sobre  $\partial U' \cap \{y_n = 0\}$  en el sentido de trazas.

8.) Luego se demuestra que  $u'$  es una solución débil de

$$L'u' = f' \quad \text{en } U' \quad (4.75)$$

para

$$f'(\mathbf{y}) := f(\Psi(\mathbf{y})), \quad L'u' := - \sum_{k,l=1}^n (a'^{kl} u'_{y_k})_{y_l} + \sum_{k=1}^n b'^k u'_{y_k} + c'u',$$

donde definimos

$$a'^{kl}(\mathbf{y}) := \sum_{r,s=1}^n a^{rs}(\Psi(\mathbf{y})) \Phi_{x_r}^k(\Psi(\mathbf{y})) \Phi_{x_s}^l(\Psi(\mathbf{y})), \quad k, l = 1, \dots, n, \quad (4.76)$$

$$b'^k(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n b^r(\Psi(\mathbf{y})) \Phi_{x_r}^k(\Psi(\mathbf{y})), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$c'(\mathbf{y}) := c(\Psi(\mathbf{y})).$$

Si  $v' \in H_0^1(U')$  y  $B'[\cdot, \cdot]$  denota la forma bilineal asociada con el operador  $L'$  se tiene que

$$B'[u', v'] = \int_{U'} \left( \sum_{k,l=1}^n a'^{kl} u'_{y_k} v'_{y_l} + \sum_{k=1}^n b'^k u'_{y_k} v' + c' u' v' \right) d\mathbf{y}. \quad (4.77)$$

Definiendo  $v(\mathbf{x}) := v'(\Phi(\mathbf{x}))$  obtenemos de (4.77)

$$\begin{aligned} B'[u', v'] &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^n \int_{U'} a'^{kl} u_{x_i} \Psi_{y_k}^i v_{x_j} \Psi_{y_l}^j d\mathbf{y} \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{U'} b'^k u_{x_i} \Psi_{y_k}^i v d\mathbf{y} + \int_{U'} c' u v d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

De acuerdo a (4.76) obtenemos que

$$\sum_{k,l=1}^n a'^{kl} \Psi_{y_k}^i \Psi_{y_l}^j = \sum_{r,s=1}^n \sum_{k,l=1}^n a^{rs} \Phi_{x_r}^k \Phi_{x_s}^l \Psi_{y_k}^i \Psi_{y_l}^j = a^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

puesto que  $D\Phi = (D\Psi)^{-1}$ . Análogamente,

$$\sum_{k=1}^n b'^k \Psi_{y_k}^i = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n b^r \Phi_{x_r}^k \Psi_{y_k}^i = b^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Insertando ambas identidades en (4.78), cambiando las variables y considerando que  $|\det D\Phi| = 1$  obtenemos

$$\begin{aligned} B'[u', v'] &= \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + c u v \right) d\mathbf{x} \\ &= B[u, v] = (f, v)_{L^2(U)} = (f', v')_{L^2(U')}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de (4.75).

9.) Se verifica ahora que el operador  $L'$  es uniformemente elíptico en  $U'$ . Efectivamente si  $\mathbf{y} \in U'$  y  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$  notamos que

$$\sum_{k,l=1}^n a'^{kl}(\mathbf{y})\xi_k\xi_l = \sum_{r,s=1}^n \sum_{k,l=1}^n a^{rs}(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y}))\Phi_{x_r}^k\Phi_{x_s}^l\xi_k\xi_l = \sum_{r,s=1}^n a^{rs}(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y}))\eta_r\eta_s \geq \theta|\boldsymbol{\eta}|^2 \quad (4.79)$$

donde  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}D\boldsymbol{\Phi}$ , es decir,

$$\eta_r = \sum_{k=1}^n \Phi_{x_r}^k \xi_k, \quad r = 1, \dots, n.$$

Pero en virtud de  $D\boldsymbol{\Phi}D\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}$  se tiene que  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}D\boldsymbol{\Psi}$ , luego  $|\boldsymbol{\xi}| \leq C|\boldsymbol{\eta}|$  para alguna constante  $C$ . Esta desigualdad y (4.79) implican que

$$\sum_{k,l=1}^n a'^{kl}(\mathbf{y})\xi_k\xi_l \geq \theta'|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad (4.80)$$

para alguna constante  $\theta' > 0$  y todo  $\mathbf{y} \in U'$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ . Notamos también que en virtud de (4.76),  $a'^{kl} \in C^1$  para  $k, l = 1, \dots, n$ , dado que  $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in C^2$ .

10.) En virtud de (4.75) y (4.80) podemos aplicar los resultados de los pasos 1.)–5.) para asegurar que  $u' \in H^2(V')$  con la cota

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C(\|f'\|_{L^2(U')} + \|u'\|_{L^2(U')}),$$

luego  $\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$  para  $V := \boldsymbol{\Psi}(V')$ .

Como  $\partial U$  es compacto, podemos cubrir  $\partial U$  con un número finito de conjuntos  $V_1, \dots, V_N$ . Sumando las cotas correspondientes junto con la cota interior obtenemos  $u \in H^2(U)$  con la desigualdad (4.72). ■

**Teorema 4.35** (Regularidad de orden superior sobre la frontera). *Sea  $m \in \mathbb{N}_0$  y*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{U}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.81)$$

$$f \in H^m(U). \quad (4.82)$$

*Sea  $u \in H_0^1(U)$  una solución débil del problema de valores de frontera*

$$Lu = f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial U.$$

*Finalmente sea  $\partial U \in C^{m+2}$ . En este caso,  $u \in H^{m+2}(U)$  y*

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}), \quad (4.83)$$

*donde la constante  $C$  depende solamente de  $U$  y los coeficientes de  $L$ .*

Comentamos que si  $u$  es la única solución, entonces (4.83) se simplifica a

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C\|f\|_{H^m(U)}.$$

*Demostración del Teorema 4.35.*

1.) Primeramente estudiamos el caso particular

$$U := B^0(0, s) \cap \mathbb{R}_+^n, \quad s > 0. \quad (4.84)$$

Se fija  $0 < t < s$  y se define  $V := B^0(0, t) \cap \mathbb{R}_+^n$ .

2.) Queremos demostrar por inducción sobre  $m$  que siempre que  $u = 0$  a lo largo de  $\{x_n = 0\}$  en el sentido de trazas, (4.81) y (4.82) implican que

$$u \in H^{m+2}(V) \quad (4.85)$$

con la cota

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}), \quad (4.86)$$

donde la constante  $C$  depende solamente de  $U, V$  y los coeficientes de  $L$ . El caso  $m = 0$  sigue como en la demostración del Teorema 4.34. Supongamos entonces

$$\begin{aligned} a^{ij}, b^i, c &\in C^{m+2}(\bar{U}), \quad i, j = 1, \dots, n, \\ f &\in H^{m+1}(U), \end{aligned} \quad (4.87)$$

y sea  $u$  una solución débil de  $Lu = f$  en  $U$ , la cual desaparezca en el sentido de trazas a lo largo de  $\{x_n = 0\}$ . Fijemos cualquier  $0 < t < r < s$ , y sea  $W := B^0(0, r) \cap \mathbb{R}_+^n$ . En virtud de la hipótesis de inducción tenemos que  $u \in H^{m+2}(W)$  con la cota

$$\|u\|_{H^{m+2}(W)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \quad (4.88)$$

Además, de acuerdo al Teorema 4.32,  $u \in H_{\text{loc}}^{m+3}(U)$ .

3.) Sea ahora  $\alpha$  un multi-índice tal que

$$|\alpha| = m + 1 \quad (4.89)$$

y  $\alpha_n = 0$ . Entonces  $\tilde{u} := D^\alpha u$  pertenece a  $H^1(U)$ , y desaparece a lo largo del plano  $\{x_n = 0\}$  en el sentido de trazas. Además, tal como en la demostración del Teorema 4.32,  $\tilde{u}$  es una solución débil de  $L\tilde{u} = \tilde{f}$  en  $U$  si  $\tilde{f}$  está definida por (4.70). En virtud de (4.81), (4.82), (4.87) y (4.88) obtenemos  $\tilde{f} \in L^2(W)$  con la cota

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \quad (4.90)$$

Por lo tanto, la demostración del Teorema 4.34 muestra que  $\tilde{u} \in H^2(V)$  con la cota

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(V)} \leq C(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}) \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

En virtud de (4.89)–(4.90) concluimos que

$$\|D^\beta u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (4.91)$$

para cualquier multi-índice  $\beta$  con  $|\beta| = m + 3$  y

$$\beta_n \in \{0, 1, 2\}. \quad (4.92)$$

4.) Hay que extender la cota (4.91) para poder remover la condición (4.92). Para tal efecto, supongamos por inducción que

$$\|D^\beta u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (4.93)$$

para cualquier multi-índice  $\beta$  con  $|\beta| = m + 3$  y

$$\beta_n = 0, 1, \dots, j \quad (4.94)$$

para algún  $j \in \{2, \dots, m + 2\}$ . Supongamos entonces que  $|\beta| = m + 3$  y  $\beta_n = j + 1$ . Escribimos ahora  $\beta = \gamma + \delta$ , donde  $\delta = (0, \dots, 0, 2)$  y  $|\gamma| = m + 1$ . Puesto que  $u \in H_{\text{loc}}^{m+3}(U)$  y  $Lu = f$  en  $U$ , se tiene que  $D^\gamma Lu = D^\gamma f$  c.t.p. en  $U$ . Ahora

$$D^\gamma Lu = a^{nm} D^\beta u + \left\{ \begin{array}{l} \text{suma de términos con a lo más } j \text{ derivadas con} \\ \text{respecto a } x_n \text{ y a lo más } m + 3 \text{ derivadas en total} \end{array} \right\}.$$

En virtud de  $a^{nn} \geq \theta > 0$ , utilizando (4.93) (4.94) que

$$\|D^\beta u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

siempre que  $|\beta| = m + 3$  y  $\beta_n = j + 1$ . Por inducción sobre  $j$  obtenemos entonces

$$\|u\|_{H^{m+3}(U)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Esta cota completa la inducción sobre  $m$  empezada en el paso 2.).

- 5.) Hemos demostrado que (4.81) y (4.82) implican (4.85) y (4.86), siempre que  $U$  posee la forma (4.84). El caso general es una consecuencia de esto una vez que hayamos rectificado la frontera, siguiendo las ideas explicadas en la demostración del Teorema 4.34. ■

Iterando las cotas anteriores llegamos al siguiente teorema.

**Teorema 4.36** (Diferenciabilidad infinita hasta la frontera). *Sean  $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar{U})$  para  $i, j = 1, \dots, n$  y  $f \in C^\infty(\bar{U})$ . Sea  $u \in H_0^1(U)$  una solución débil del problema de valores de frontera  $Lu = f$  en  $U$ ,  $u = 0$  sobre  $\partial U$ . Sea  $\partial U \in C^\infty$ . Entonces  $u \in C^\infty(\bar{U})$ .*

*Demostración.* De acuerdo al Teorema 4.35 se tiene que  $u \in H^m(U)$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces el Teorema 4.15 implica que  $u \in C^k(\bar{U})$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . ■

#### 4.4. Principios del máximo

Los principios del máximo están basados en la observación de que si una función  $u \in C^2$  asume su máximo sobre un conjunto abierto  $U$  en un punto  $\mathbf{x}_0 \in U$ , entonces

$$Du(\mathbf{x}_0) = 0, \quad D^2u(\mathbf{x}_0) \leq 0, \quad (4.95)$$

donde la desigualdad significa que la matriz simétrica  $D^2u = (u_{x_i x_j})$  es definida no positiva en  $\mathbf{x}_0$ . Obviamente, análisis basados en (4.95) tienen carácter puntual, al contrario de los resultados deducidos por los métodos de energía en el análisis de regularidad.

En lo siguiente exigiremos que las soluciones sean al menos  $C^2$ , para que valores puntuales de  $Du$  y  $D^2u$  estén bien definidos. (Sabemos de la teoría de regularidad que una solución débil es tan suave, por lo menos si los coeficientes etc. son suficientemente suaves.) Se supone en lo siguiente que el operador  $L$  posee la forma de no divergencia

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu,$$



donde los coeficientes son continuos, y (como siempre) se supone que la condición de elipticidad esté satisfecha. Sin pérdida de generalidad se supone, además, que  $a^{ij} = a^{ji}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

**4.4.1. Principio del máximo débil.** Primero identificamos circunstancias bajo las cuales una función debe asumir su máximo (o mínimo) en la frontera, siempre que  $U \subset \mathbb{R}^n$  sea acotado y abierto.

**Teorema 4.37** (Principio del máximo débil para  $c \equiv 0$ ). Sean  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  y  $c \equiv 0$  en  $U$ .

(i) Si  $u$  es una subsolución, es decir  $Lu \leq 0$  en  $U$ , entonces

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(ii) Si  $u$  es una sobresolución, es decir  $Lu \geq 0$  en  $U$ , entonces

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

*Demostración.*

- 1.) Supongamos primero que  $Lu < 0$  en  $U$ , pero que existe un  $\mathbf{x}_0 \in U$  tal que  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{U}} u$ . En el punto  $\mathbf{x}_0$  se tiene que  $Du(\mathbf{x}_0) = 0$  y  $D^2u(\mathbf{x}_0) \leq 0$ .
- 2.) Como  $\mathbf{A} = (a^{ij}(\mathbf{x}_0))$  es simétrica y definida positiva, existe una matriz ortogonal  $\mathbf{Q} = (q_{ij})$  tal que  $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ,  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , con  $d_k > 0$  para  $k = 1, \dots, n$ . Sea  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , entonces  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)$ , luego

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{y_k} q_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} q_{ki} q_{lj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Entonces en  $\mathbf{x}_0$  se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{y_k y_l} q_{ki} q_{lj} = \sum_{k=1}^n d_k u_{y_k y_k} \leq 0,$$

puesto que  $d_k > 0$  y  $u_{y_k y_k}(\mathbf{x}_0) \leq 0$  para  $k = 1, \dots, n$ , en virtud de  $D^2u(\mathbf{x}_0) \leq 0$ . Por lo tanto, en  $\mathbf{x}_0$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} \geq 0,$$

una contradicción.

- 3.) En el caso general de  $Lu \leq 0$  en  $U$ , sea

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \varepsilon \exp(\lambda x_1), \quad \mathbf{x} \in U,$$

donde  $\lambda > 0$  será fijado más adelante y  $\varepsilon > 0$ . Como  $a^{ii}(\mathbf{x}) \geq \theta$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $\mathbf{x} \in U$ , sabemos que

$$\begin{aligned} Lu^\varepsilon &= Lu + \varepsilon L(\exp(\lambda x_1)) \leq \varepsilon \exp(\lambda x_1) (-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1) \\ &\leq \varepsilon \exp(\lambda x_1) (-\lambda^2 \theta + \lambda \|\mathbf{b}\|_\infty) < 0 \end{aligned}$$

en  $U$ , siempre que  $\lambda > 0$  es suficientemente grande. Luego encontramos que  $\max_{\bar{U}} u^\varepsilon = \max_{\partial U} u^\varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  deducimos que  $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$ , lo que implica (i).

4.) Para demostrar (ii) basta observar que  $-u$  es una subsolución si  $u$  es una sobresolución. ■

**Teorema 4.38** (Principio del máximo débil para  $c \geq 0$ ). Sean  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ ,  $c \geq 0$  en  $U$ ,  $u^+ := \max\{u, 0\}$ ,  $u^- := -\min\{u, 0\}$ .

(i) Si  $Lu \leq 0$  en  $U$ , entonces

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+.$$

(ii) Si  $Lu \geq 0$  en  $U$ , entonces

$$\min_{\bar{U}} u \geq -\max_{\partial U} u^-.$$

Comentamos que si  $Lu = 0$  en  $U$ , entonces

$$\max_{\bar{U}} |u| = \max_{\partial U} |u|.$$

*Demostración del Teorema 4.38.*

1.) Sea  $u$  una subsolución y  $V := \{\mathbf{x} \in U \mid u(\mathbf{x}) > 0\}$ . Entonces

$$Ku := Lu - cu \leq -cu \leq 0 \quad \text{en } V.$$

Aplicando el Teorema 4.37 podemos concluir que

$$\max_{\bar{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial U} u^+,$$

lo que entrega (i) si  $V \neq \emptyset$ ; en el caso  $V = \emptyset$  ya tenemos que  $u \leq 0$  en  $U$ .

2.) La afirmación (ii) sigue de (i) si observamos que  $(-u)^+ = u^-$ . ■

**4.4.2. Principio del máximo fuerte.** En lo siguiente fortaleceremos nuestro análisis demostrando que una subsolución  $u$  no puede asumir su máximo en ningún punto interior de una región conexa a menos que  $u$  sea constante. Este enunciado se llama *principio del máximo fuerte*. Este resultado depende de un análisis sutil de la derivada  $\partial u / \partial \boldsymbol{\nu}$  en un punto máximo de la frontera.

**Lema 4.2** (Lema de Hopf). Sean  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  y  $c \equiv 0$  en  $U$ . Supongamos también que  $Lu \leq 0$  en  $U$ , y que existe un punto  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$  tal que

$$\forall \mathbf{x} \in U : \quad u(\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x}). \quad (4.96)$$

Supongamos, además, que existe una bola abierta  $B \subset U$  tal que  $\mathbf{x}^0 \in \partial B$ .

(i) En este caso,

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}^0) > 0, \quad (4.97)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es la normal unitaria exterior a  $B$  en  $\mathbf{x}^0$ .

(ii) Si  $c \geq 0$  en  $U$ , la misma condición es válida siempre que  $u(\mathbf{x}^0) \geq 0$ .

Comentamos que la desigualdad *estricta* en (4.97) es importante.

*Demostración del Lema 4.2.*

1.) Supongamos que  $c \geq 0$  y que  $B = B^0(0, r)$  para algún radio  $r > 0$ . Se define la función

$$v(\mathbf{x}) := \exp(-\lambda|\mathbf{x}|^2) - \exp(-\lambda r^2), \quad \mathbf{x} \in B(0, r),$$

para  $\lambda > 0$  (el valor de  $\lambda$  será especificado abajo). Utilizando la condición de elipticidad uniforme obtenemos

$$\begin{aligned} Lv &= - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i v_{x_i} + cv \\ &= \exp(-\lambda|\mathbf{x}|^2) \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda \delta^{ij}) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda b^i x_i \right) \\ &\quad + c \left( \exp(-\lambda|\mathbf{x}|^2) - \exp(-\lambda r^2) \right) \\ &\leq \exp(-\lambda|\mathbf{x}|^2) \left( -4\theta\lambda^2 |\mathbf{x}|^2 + 2\lambda \operatorname{tr} \mathbf{A} + 2\lambda |\mathbf{b}| |\mathbf{x}| + c \right). \end{aligned}$$

Sea ahora  $R := B^0(0, r) \setminus B(0, r/2)$ . Entonces

$$Lv \leq \exp(-\lambda|\mathbf{x}|^2) \left( -\theta\lambda^2 r^2 + 2\lambda \operatorname{tr} \mathbf{A} + 2\lambda |\mathbf{b}| r + c \right) \leq 0 \quad (4.98)$$

en  $R$ , siempre que  $\lambda > 0$  es suficientemente grande.

2.) En virtud de (4.96) existe una constante  $\varepsilon > 0$  tan pequeña que

$$u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}) + \varepsilon v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B(0, r/2). \quad (4.99)$$

Adicionalmente, notamos que

$$u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}) + \varepsilon v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial B(0, r), \quad (4.100)$$

puesto que  $v \equiv 0$  sobre  $\partial B(0, r)$ .

3.) Como consecuencia de (4.98), observamos que

$$L(u + \varepsilon v - u(\mathbf{x}^0)) \leq -cu(\mathbf{x}^0) \leq 0 \quad \text{en } R;$$

por otro lado, (4.99) y (4.100) implican que

$$u + \varepsilon v - u(\mathbf{x}^0) \leq 0 \quad \text{en } \partial R.$$

En virtud del principio del máximo débil,

$$u + \varepsilon v - u(\mathbf{x}^0) \leq 0 \quad \text{en } R.$$

Pero  $u(\mathbf{x}^0) + \varepsilon v(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = 0$ , y por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}^0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}^0) \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}^0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}^0) = -\frac{\varepsilon}{r} Dv(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{x}^0 = 2\lambda \varepsilon r \exp(-\lambda r^2) > 0.$$

■

**Teorema 4.39** (Principio del máximo fuerte). *Sea  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  y  $c \equiv 0$  en  $U$ . Supongamos también que  $U$  es conexo, acotado y abierto.*

- (i) *Si  $Lu \leq 0$  en  $U$  y  $u$  asume su máximo sobre  $\bar{U}$  en un punto interior, entonces  $u$  es constante en  $U$ .*
- (ii) *Análogamente, si  $Lu \geq 0$  en  $U$  y  $u$  asume su mínimo sobre  $\bar{U}$  en un punto interior, entonces  $u$  es constante en  $U$ .*

*Demostración.* Sean  $M := \max_{\bar{U}} u$  y  $C := \{\mathbf{x} \in U \mid u(\mathbf{x}) = M\}$ . Si  $u \not\equiv M$  definimos  $V := \{\mathbf{x} \in U \mid u(\mathbf{x}) < M\}$ . Sea  $\mathbf{y} \in V$  tal que  $\text{dist}(\mathbf{y}, C) < \text{dist}(\mathbf{y}, \partial U)$ , y sea  $B$  la bola del tamaño mayor con centro  $\mathbf{y}$  cuyo interior pertenezca a  $V$ . Entonces existe algún punto  $\mathbf{x}^0 \in C$  tal que  $\mathbf{x}^0 \in \partial B$ . Obviamente  $V$  satisface la condición de la bola interior en  $\mathbf{x}^0$ , por lo tanto el Lema 4.2, (i), implica que  $\partial u / \partial \nu(\mathbf{x}^0) > 0$ . Pero esto es una contradicción, ya que  $Du(\mathbf{x}^0) = 0$  porque  $u$  asume su máximo en  $\mathbf{x}^0 \in U$ . ■

Si el término  $c$  es no negativo tenemos la siguiente versión del principio del máximo fuerte. La demostración es similar a la del Teorema 4.39, con la excepción de que ahora se utiliza el ítem (ii) del Lema 4.2.

**Teorema 4.40** (Principio del máximo fuerte con  $c \geq 0$ ). *Sea  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  y  $c \geq 0$  en  $U$ .*

- (i) *Si  $Lu \leq 0$  en  $U$  y  $u$  asume un máximo no negativo sobre  $\bar{U}$  en un punto interior, entonces  $u$  es constante en  $U$ .*
- (ii) *Análogamente, si  $Lu \geq 0$  en  $U$  y  $u$  asume su mínimo no positivo sobre  $\bar{U}$  en un punto interior, entonces  $u$  es constante en  $U$ .*

## Ecuaciones parabólicas de segundo orden

### 5.1. Espacios de Sobolev que involucran el tiempo

Para la construcción de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas necesitamos un tipo de espacios de Sobolev que involucre aplicaciones del tiempo en espacios de Banach. Sea ahora  $X$  un espacio de Banach real con la norma  $\|\cdot\|$ .

**Definición 5.1** (Espacio  $L^p(0, T; X)$ ). *El espacio  $L^p(0, T; X)$  consiste en todas las funciones fuertemente medibles  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$  tales que*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0, T; X)} := \left( \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

**Definición 5.2** (Espacio  $C([0, T]; X)$ ). *Por  $C([0, T]; X)$  se denota el espacio de todas las funciones continuas  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$  tales que*

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0, T]; X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

**Definición 5.3** (Derivada débil de  $\mathbf{u} \in L^1(0, T; X)$ ). *Sea  $\mathbf{u} \in L^1(0, T; X)$ . Se dice que  $\mathbf{v} \in L^1(0, T; X)$  es la derivada débil de  $\mathbf{u}$ , es decir  $\mathbf{u}' = \mathbf{v}$ , si*

$$\int_0^T \phi'(t) \mathbf{u}(t) dt = - \int_0^T \phi(t) \mathbf{v}(t) dt \quad \text{para toda función test escalar } \phi \in C_c^\infty(0, T).$$

**Definición 5.4** (Espacios de Sobolev que involucran el tiempo).

- (i) *El espacio de Sobolev  $W^{1,p}(0, T; X)$  consiste en todas las funciones  $\mathbf{u} \in L^p(0, T; X)$  para las cuales  $\mathbf{u}'$  existe en el sentido débil y  $\mathbf{u}' \in L^p(0, T; X)$ . Además,*

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0, T; X)} := \begin{cases} \left( \int_0^T \left( \|\mathbf{u}(t)\|^p + \|\mathbf{u}'(t)\|^p \right) dt \right)^{1/p} & \text{para } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left( \|\mathbf{u}(t)\| + \|\mathbf{u}'(t)\| \right) & \text{para } p = \infty. \end{cases}$$

- (ii) *Escribimos  $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$ .*

**Teorema 5.1** (Cálculo en un espacio abstracto). *Sea  $\mathbf{u} \in W^{1,p}(0, T; X)$  para algún  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces*

- (i)  *$\mathbf{u} \in C([0, T]; X)$ , después de posiblemente redefinir  $\mathbf{u}$  sobre un conjunto de medida cero (conjunto nulo).*

(ii) Para todo  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \int_s^t \mathbf{u}'(\tau) \, d\tau.$$

(iii) Además, existe una constante que depende solamente de  $T$  tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\| \leq C \|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)}. \quad (5.1)$$

*Demostración.*

1.) Se extiende  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{0}$  sobre  $(-\infty, 0)$  y  $(T, \infty)$ , luego definimos  $\mathbf{u}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \mathbf{u}$ , donde  $\eta_\varepsilon$  es la función mollifier estándar definida sobre  $\mathbb{R}^1$ . Tal como en la demostración del Teorema 4.4 verificamos que  $(\mathbf{u}^\varepsilon)' = \eta_\varepsilon * \mathbf{u}'$  sobre  $(\varepsilon, T - \varepsilon)$ , luego

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{en } L^p(0, T; X), \quad (\mathbf{u}^\varepsilon)' \rightarrow \mathbf{u}' \quad \text{en } L^p_{\text{loc}}(0, T; X) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Fijando  $0 < s < t < T$  calculamos

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \mathbf{u}^\varepsilon(s) + \int_s^t (\mathbf{u}^\varepsilon)'(\tau) \, d\tau,$$

luego, de acuerdo a (5.2),

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \int_s^t \mathbf{u}'(\tau) \, d\tau \quad \text{para } 0 < s < t < T \text{ c.t.p.} \quad (5.3)$$

Como la aplicación

$$t \mapsto \int_0^t \mathbf{u}'(\tau) \, d\tau$$

es continua llegamos a las conclusiones (i) y (ii).

2.) La desigualdad (5.1) fácilmente sigue a partir de (5.3). ■

Los dos teoremas siguientes se refieren a funciones  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}'$  que pertenecen a espacios diferentes.

**Teorema 5.2** (Más cálculo). *Sea  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$  con  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Entonces*

- (i)  $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(U))$  (después de posiblemente modificar  $\mathbf{u}$  sobre un conjunto nulo),
- (ii) la aplicación  $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2$  es absolutamente continua con

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle \quad \text{para casi todo } 0 \leq t \leq T.$$

(iii) Además, existe una constante  $C$  que depende solamente de  $T$  tal que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}). \quad (5.4)$$

*Demostración.*

- 1.) Se extiende  $\mathbf{u}$  por cero al intervalo  $[-\sigma, T + \sigma]$  para  $\sigma > 0$ , y se definen las regularizaciones  $\mathbf{u}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \mathbf{u}$  como en la demostración anterior, luego para  $\varepsilon, \delta > 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2(\mathbf{u}^{\varepsilon'}(t) - \mathbf{u}^{\delta'}(t), \mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t))_{L^2(U)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 &= \|\mathbf{u}^\varepsilon(s) - \mathbf{u}^\delta(s)\|_{L^2(U)}^2 \\ &\quad + 2 \int_s^t \langle \mathbf{u}^{\varepsilon'}(\tau) - \mathbf{u}^{\delta'}(\tau), \mathbf{u}^\varepsilon(\tau) - \mathbf{u}^\delta(\tau) \rangle d\tau \end{aligned} \quad (5.5)$$

para todo  $0 \leq s, t \leq T$ .

Ahora sea  $s \in (0, T)$  elegido tal que  $\mathbf{u}^\varepsilon(s) \rightarrow \mathbf{u}(s)$  en  $L^2(U)$ . Entonces (5.5) implica que

$$\begin{aligned} &\limsup_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 \\ &\leq \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_0^T \left( \|\mathbf{u}^{\varepsilon'}(\tau) - \mathbf{u}^{\delta'}(\tau)\|_{H^{-1}(U)}^2 + \|\mathbf{u}^\varepsilon(\tau) - \mathbf{u}^\delta(\tau)\|_{H_0^1(U)}^2 \right) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Así, las funciones suavizadas  $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$  convergen en  $C([0, T]; L^2(U))$  a un límite  $\mathbf{v} \in C([0, T]; L^2(U))$ . Como también sabemos que  $\mathbf{u}^\varepsilon(t) \rightarrow \mathbf{u}(t)$  para casi todo  $t$ , concluimos que  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  c.t.p.

- 2.) Análogamente tenemos que

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{L^2(U)}^2 = \|\mathbf{u}^\varepsilon(s)\|_{L^2(U)}^2 + 2 \int_s^t \langle \mathbf{u}^{\varepsilon'}(\tau), \mathbf{u}^\varepsilon(\tau) \rangle d\tau,$$

es decir identificando  $\mathbf{u}$  con la función  $\mathbf{v}$  definida arriba,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 = \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2(U)}^2 + 2 \int_s^t \langle \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{u}(\tau) \rangle d\tau \quad \text{para } 0 \leq s, t \leq T. \quad (5.6)$$

- 3.) Para obtener (5.4), integramos (5.6) respecto a  $s$ , nos acordamos de la desigualdad

$$|\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle| \leq \|\mathbf{u}'\|_{H^{-1}(U)} \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(U)},$$

y realizamos algunas acotaciones. ■

Para la discusión de la teoría de la regularidad para ecuaciones parabólicas e hiperbólicas de segundo orden necesitamos el siguiente teorema.

**Teorema 5.3** (Aplicaciones en espacios “mejores”). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado con una frontera  $\partial U$  suave, y sea  $m \in \mathbb{N}_0$ . Sea  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^{m+2}(U))$  con  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^m(U))$ . Entonces*

- (i) *Después de posiblemente redefinir  $\mathbf{u}$  sobre un conjunto nulo,  $\mathbf{u} \in C([0, T]; H^{m+1}(U))$ .*  
(ii) *Existe una constante  $C$  dependiente solamente de  $T, U$  y  $m$  tal que*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^{m+1}(U)} \leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^{m+2}(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; H^m(U))}). \quad (5.7)$$

*Demostración.*

- 1.) Supongamos primeramente que  $m = 0$ . En este caso,  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(U))$  y  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(U))$ . Se elige un conjunto abierto  $V$  tal que  $U \subset\subset V$ , y se construye una extensión  $\bar{\mathbf{u}} = E\mathbf{u}$  como en el Teorema 4.7. En virtud de (4.9) obtenemos  $\bar{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H^2(V))$  y para una constante  $C$  apropiada,

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(0, T; H^2(V))} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^2(U))}. \quad (5.8)$$

Además, se tiene que  $\bar{\mathbf{u}}' \in L^2(0, T; L^2(V))$  con la cota

$$\|\bar{\mathbf{u}}'\|_{L^2(0, T; L^2(V))} \leq C \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))}. \quad (5.9)$$

Las cotas (5.8) y (5.9) pueden ser demostradas si consideramos cocientes de diferencias en  $t$ , nos acordamos de los métodos de la Sección 4.2.1 y observamos que  $E$  es un operador lineal acotado  $E : L^2(U) \rightarrow L^2(V)$ .

- 2.) Supongamos por el momento que  $\bar{\mathbf{u}}$  es suave. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \left( \int_V |\mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} \right) \right| &= 2 \left| \int_V \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}' d\mathbf{x} \right| = 2 \left| \int_V \Delta \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}' d\mathbf{x} \right| \\ &\leq C (\|\bar{\mathbf{u}}\|_{H^2(V)}^2 + \|\bar{\mathbf{u}}'\|_{L^2(V)}^2). \end{aligned}$$

No aparece ningún término de frontera al integrar por partes porque la extensión  $\bar{\mathbf{u}} = E\mathbf{u}$  posee soporte compacto en  $V$ . Integrando y utilizando (5.8) y (5.9) obtenemos

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(U)} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))}). \quad (5.10)$$

Obtenemos la misma cota si  $\mathbf{u}$  no es suave, aproximando por  $\mathbf{u}^\varepsilon := \eta_\varepsilon * \mathbf{u}$ , como arriba. Tal como en las demostraciones anteriores sigue que  $\mathbf{u} \in C([0, T]; H^1(U))$ .

- 3.) En el caso general  $m \geq 1$ , sea  $\boldsymbol{\alpha}$  un multi-índice del orden  $|\boldsymbol{\alpha}| \leq m$ , y sea  $\mathbf{v} := \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{u}$ . Entonces  $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^2(U))$  y  $\mathbf{v}' \in L^2(0, T; L^2(U))$ . Aplicando (5.10) con  $\mathbf{v}$  reemplazando  $\mathbf{u}$  y sumando sobre todos los índices  $|\boldsymbol{\alpha}| \leq m$  obtenemos (5.7). ■

## 5.2. Ecuaciones parabólicas de segundo orden

Las ecuaciones parabólicas de segundo orden son las generalizaciones naturales de la ecuación del calor estudiada en la Sección 2.3. Aquí estudiaremos la existencia y la unicidad de soluciones débiles apropiadamente definidas, su suavidad y otras propiedades.

**5.2.1. Definiciones.** En este capítulo suponemos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es acotado y abierto, y como antes definimos  $U_T := U \times (0, T]$  para algún tiempo fijo  $T > 0$ . Estudiaremos primeramente el problema de valores iniciales y de frontera

$$u_t + Lu = f \text{ en } U_T, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial U \times [0, T], \quad u = g \text{ sobre } U \times \{t = 0\}, \quad (5.11)$$

donde las funciones  $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  son dadas y  $u : \bar{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$  es la incógnita,  $u = u(\mathbf{x}, t)$ . La letra  $L$  denota para cada tiempo  $t$  un operador diferencial parcial de segundo



orden, el cual puede poseer la forma de divergencia

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(\mathbf{x}, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}, t)u_{x_i} + c(\mathbf{x}, t)u \quad (5.12)$$

o la forma de no divergencia

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}, t)u_{x_i} + c(\mathbf{x}, t)u, \quad (5.13)$$

en ambos casos para coeficientes  $a^{ij}$ ,  $b^i$  y  $c$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , dados.

**Definición 5.5** (Operador uniformemente parabólico). *Se dice que el operador diferencial parcial  $\partial/\partial t + L$  es uniformemente parabólico si existe una constante  $\theta > 0$  tal que*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}, t)\xi_i \xi_j \geq \theta |\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \text{para todo } (\mathbf{x}, t) \in U_T, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

En particular, para cada tiempo fijo  $0 \leq t \leq T$ , el operador  $L$  es un operador uniformemente elíptico en la variable espacial  $\mathbf{x}$ .

Un ejemplo obvio viene dado por  $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$ ,  $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$ . En este caso,  $L = -\Delta$  y la EDP  $u_t + Lu = 0$  se convierte en la ecuación del calor. Veremos que efectivamente las soluciones de la EDP parabólica de segundo orden general son similares (en muchos respectos) a las soluciones de la ecuación del calor.

En las aplicaciones físicas, las ecuaciones parabólicas de segundo orden generales describen la evolución temporal de la densidad  $u$  de alguna cantidad, por ejemplo una concentración química, al interior de la región  $U$ . El término de segundo orden  $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}, t)u_{x_i x_j}$  describe la difusión, el término de primer orden  $\sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}, t)u_{x_i}$  describe el transporte, y el término de orden cero  $cu$  describe la creación. Las ecuaciones de Fokker-Planck y de Kolmogorov que aparecen en el estudio probabilístico de procesos de difusión igualmente son ecuaciones parabólicas de segundo orden.

Repitiendo el desarrollo de la Sección 4.3, consideremos primeramente el caso de un operador  $L$  dado en forma de divergencia (5.12) y tratemos de hallar un concepto apropiado de solución débil del problema de valores iniciales y de frontera (5.11). Para tal efecto suponemos que  $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $f \in L^2(U_T)$  y  $g \in L^2(U)$ . Igualmente siempre se supone que  $a^{ij} = a^{ji}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

En analogía con la notación introducida en el Capítulo 4 definimos la siguiente forma bilineal dependiente del tiempo para  $u, v \in H_0^1(U)$  y  $0 \leq t \leq T$  c.t.p.:

$$B[u, v; t] := \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t)u_{x_i}v + c(\cdot, t)uv \right) d\mathbf{x}.$$

Para motivar la siguiente definición de solución débil, supongamos por el momento que  $u = u(\mathbf{x}, t)$  efectivamente es una solución suave de (5.11). Ahora cambiamos nuestro punto de vista, asociando a  $u$  una aplicación  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow H_0^1(U)$  definida por  $[\mathbf{u}(t)](\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}, t)$  para  $\mathbf{x} \in U$ ,  $0 \leq t \leq T$ . En otras palabras, no se considerará  $u$  como una función de  $\mathbf{x}$  y  $t$  combinados, sino como una aplicación  $\mathbf{u}$  de  $t$  en el espacio  $H_0^1(U)$  de funciones de  $\mathbf{x}$ .

Este punto de vista altamente clarificará la siguiente presentación. Para el problema (5.11) definimos en forma similar  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow L^2(U)$  mediante  $[\mathbf{f}(t)](\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, t)$  para  $\mathbf{x} \in U$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Así, fijando una función  $v \in H_0^1$  podemos multiplicar la EDP  $u_t + Lu = f$  por  $v$  e integrar por partes para obtener

$$(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v) \quad \left( ' \equiv \frac{d}{dt} \right) \quad (5.14)$$

para cada  $0 \leq t \leq T$ , donde  $(\cdot, \cdot)$  denota el producto interior en  $L^2(U)$ . Observamos que

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^n g_{x_j}^j \quad \text{en } U_T \quad (5.15)$$

para

$$g^0 := f - \sum_{i=1}^n b u_{x_i} - c u; \quad g^j := \sum_{i=1}^n a^{ij} u_{x_i}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Concluimos en virtud de (5.15) y de la Definición 4.12, que el lado derecho de (5.15) pertenece al espacio de Sobolev  $H^{-1}(U)$ , donde

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leq \left( \sum_{j=0}^n \|g^j\|_{L^2(U)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)}).$$

Esta cota sugiere tratar de buscar una solución débil tal que  $\mathbf{u}' \in H^{-1}(U)$  para  $0 \leq t \leq T$  c.t.p. En este caso, el primer término de (5.14) puede ser escrito como  $\langle \mathbf{u}', v \rangle$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto de dualidad entre  $H^{-1}(U)$  y  $H_0^1(U)$ .

Las presentes consideraciones motivan la siguiente definición.

**Definición 5.6.** *Se dice que una función  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$  con  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$  es una solución débil del problema de valores iniciales y de frontera (5.11) si*

- (i)  $\langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v)$  para todo  $v \in H_0^1(U)$  y casi todo  $0 \leq t \leq T$ , y
- (ii)  $\mathbf{u}(0) = g$ .

## 5.2.2. Existencia de soluciones débiles.

5.2.2.1. *Aproximación de Galerkin.* Queremos construir una solución débil del problema parabólico

$$u_t + Lu = f \text{ en } U_T, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial U \times [0, T], \quad u = g \text{ sobre } U \times \{t = 0\} \quad (5.16)$$

primeramente construyendo soluciones de ciertas aproximaciones de (5.16) de dimensión finita y luego pasando a los límites correspondientes. Esto se llama *método de Galerkin*.

Más precisamente se supone que las funciones  $w_k = w_k(\mathbf{x})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , son suaves y que

$$\begin{aligned} \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} &\text{ es una base ortogonal de } H_0^1(U), \\ \{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} &\text{ es una base ortonormal de } L^2(U). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sea ahora  $m \in \mathbb{N}$  fijo. Estaremos buscando una función  $\mathbf{u}_m : [0, T] \rightarrow H_0^1$  de la forma

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k, \quad (5.18)$$

donde esperamos poder hallar coeficientes  $d_m^k(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ,  $k = 1, \dots, m$ ) de tal forma que

$$d_m^k(0) = (g, w_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.19)$$

$$(\mathbf{u}'_m, w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.20)$$

Estamos entonces buscando una función  $\mathbf{u}_m$  de la forma (5.18) que satisface la “proyección” (5.20) del problema (5.16) sobre el espacio finito-dimensional generado por  $\{w_1, \dots, w_m\}$ .

**Teorema 5.4** (Construcción de soluciones aproximadas). *Para cada  $m \in \mathbb{N}$  existe una y sólo una función  $\mathbf{u}_m$  de la forma (5.18) que satisface (5.19) y (5.20).*

*Demostración.* Suponiendo que la función  $\mathbf{u}_m$  posee la forma (5.18), notamos a partir de (5.17) que  $(\mathbf{u}'_m(t), w_k) = d_m^{k'}(t)$  para  $k = 1, \dots, m$ . Además,

$$B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t), \quad k = 1, \dots, m,$$

donde  $e^{kl}(t) := B[w_l, w_k; t]$  para  $k, l = 1, \dots, m$ . Sea además  $f^k(t) := (\mathbf{f}(t), w_k)$  para  $k = 1, \dots, m$ . Entonces (5.20) se convierte en el sistema lineal de EDOs

$$d_m^{k'}(t) + \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t), \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.21)$$

sujeto a las condiciones iniciales (5.19). De acuerdo a la teoría estándar de existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una solución única absolutamente continua  $\mathbf{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$  que satisface (5.19) y (5.21) para casi todo  $0 \leq t \leq T$ , luego  $\mathbf{u}_m$  definida por (5.18) es una solución de (5.20) para casi todo  $0 \leq t \leq T$ . ■

5.2.2.2. *Estimaciones de energía.* En lo siguiente queremos considerar el límite  $m \rightarrow \infty$  y demostrar que una subsucesión de las soluciones  $\mathbf{u}_m$  de los problemas aproximados (5.19), (5.20) converge a una solución débil de (5.16). Para tal efecto necesitamos ciertas cotas uniformes.

**Teorema 5.5** (Estimaciones de energía). *Existe una constante  $C$  que depende solamente de  $U$ ,  $T$  y los coeficientes de  $L$  tal que*

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \\ & \leq C (\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

*Demostración.*

- 1.) Multiplicando (5.20) por  $d_m^k(t)$ , sumando sobre  $k = 1, \dots, m$  y utilizando (5.18) obtenemos

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ c.t.p.} \quad (5.23)$$

En la Sección 4.3.1 demostramos que existen constantes  $\beta > 0$  y  $\gamma \geq 0$  tales que

$$\beta \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T, m \in \mathbb{N}. \quad (5.24)$$

Además,

$$\begin{aligned} |(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)| &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ c.t.p.}, \\ (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \right) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ c.t.p.} \end{aligned}$$

En virtud de lo anterior, a partir de (5.23) obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2) + 2\beta \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \\ \leq C_1 \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 + C_2 \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ c.t.p.} \end{aligned} \quad (5.25)$$

para constantes  $C_1$  y  $C_2$  apropiadas.

2.) Ahora escribimos

$$\eta(t) := \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)}^2, \quad \xi(t) := \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(U)}^2. \quad (5.26)$$

Entonces (5.25) implica que

$$\eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t) \quad \text{para casi todo } 0 \leq t \leq T,$$

luego la desigualdad de Gronwall en su forma diferencial (Teorema 1.9) entrega la cota

$$\eta(t) \leq \exp(C_1 t) \left( \eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.27)$$

En virtud de (5.19),

$$\eta(0) = \|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 \leq \|g\|_{L^2(U)}^2,$$

luego a partir de (5.26)–(5.27) obtenemos

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)}^2 \leq C (\|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2). \quad (5.28)$$

3.) Integrando (5.24) sobre  $[0, T]$  y utilizando (5.28) obtenemos

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}^2 = \int_0^T \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \leq C (\|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2).$$

4.) Fijamos cualquier  $v \in H_0^1(U)$  con  $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$  escribiendo  $v = v^1 + v^2$ , donde  $v^1 \in \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$  y  $(v^2, w_k) = 0$  para  $k = 1, \dots, m$ . Como las funciones  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  son ortogonales en  $H_0^1(U)$ , se tiene que

$$\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq \|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1.$$

Utilizando (5.20) concluimos para casi todo  $0 \leq t \leq T$  que

$$(\mathbf{u}'_m, v^1) + B[\mathbf{u}_m, v^1; t] = (\mathbf{f}, v^1).$$

Ahora (5.18) implica que

$$\langle \mathbf{u}'_m, v \rangle = (\mathbf{u}'_m, v) = (\mathbf{u}'_m, v^1) = (\mathbf{f}, v^1) - B[\mathbf{u}_m, v^1; t].$$

Entonces, considerando que  $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ , obtenemos

$$|\langle \mathbf{u}'_m, v \rangle| \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}),$$

luego

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)}^2 dt &\leq C \int_0^T (\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2) dt \\ &\leq C(\|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2). \end{aligned}$$

■

5.2.2.3. *Existencia y unicidad.* En lo siguiente consideramos el límite  $m \rightarrow \infty$  para construir una solución débil del problema de valores iniciales y de frontera (5.16).

**Teorema 5.6** (Existencia de una solución débil). *Existe una solución débil del Problema (5.16).*

*Demostración.*

- 1.) De acuerdo a las estimaciones de energía (5.22), la sucesión  $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es acotada en  $L^2(0, T; H_0^1(U))$ , y la sucesión  $\{\mathbf{u}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es acotada en  $L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Por lo tanto, existe una subsucesión  $\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$  y una función  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ , con  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ , tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m_l} &\rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{débilmente en } L^2(0, T; H_0^1(U)), \\ \mathbf{u}'_{m_l} &\rightharpoonup \mathbf{u}' \quad \text{débilmente en } L^2(0, T; H^{-1}(U)). \end{aligned} \tag{5.29}$$

- 2.) Ahora fijamos  $N \in \mathbb{N}$  y elegimos una función  $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$  de la forma

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k, \tag{5.30}$$

donde  $d^1, \dots, d^N$  son funciones suaves dadas. Ahora elegimos  $m \geq N$ , multiplicamos (5.20) por  $d^k(t)$ , sumamos sobre  $k = 1, \dots, N$  e integramos el resultado sobre  $t$  para obtener

$$\int_0^T (\langle \mathbf{u}'_m, \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt. \tag{5.31}$$

Ponemos  $m = m_l$ . En virtud de (5.29) y pasando a límites débiles obtenemos

$$\int_0^T (\langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt. \tag{5.32}$$

Esta identidad es válida para toda función  $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ , considerando que las funciones de la forma (5.30) son densas en este espacio. Entonces, en particular

$$\langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v) \quad \text{para cada } v \in H_0^1(U) \text{ y casi todo } 0 \leq t \leq T. \tag{5.33}$$

A partir del Teorema 5.2 obtenemos, además, que  $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(U))$ .

3.) Para demostrar que  $\mathbf{u}(0) = g$ , notamos primero que en virtud de (5.32),

$$\int_0^T (-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)) \quad (5.34)$$

para cada  $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$  con  $\mathbf{v}(T) = 0$ .

Similarmente, a partir de (5.31) deducimos que

$$\int_0^T (-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}_m \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}(0)).$$

Poniendo  $m = m_l$  y utilizando (5.29) una vez más obtenemos

$$\int_0^T (-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt + (g, \mathbf{v}(0)), \quad (5.35)$$

porque  $\mathbf{u}_{m_l}(0) \rightarrow g$  en  $L^2(U)$ . Como  $\mathbf{v}(0)$  es arbitrario, comparando (5.34) y (5.35) concluimos que  $\mathbf{u}(0) = g$ . ■

**Teorema 5.7** (Unicidad de soluciones débiles). *Una solución débil de (5.16) es única.*

*Demostración.* Basta verificar que la única solución débil de (5.16) con  $\mathbf{f} \equiv 0$  y  $g \equiv 0$  es  $\mathbf{u} \equiv 0$ . Para demostrar esto ponemos  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  en (5.33) (para  $\mathbf{f} \equiv 0$ ). Utilizando el Teorema 5.2 obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \right) + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = 0. \quad (5.36)$$

Como

$$B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] \geq \beta \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(U)}^2 - \gamma \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \geq -\|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2,$$

la desigualdad de Gronwall y (5.36) implican que  $\mathbf{u} \equiv 0$ . ■

**5.2.3. Regularidad.** En lo siguiente discutiremos la regularidad de soluciones débiles  $\mathbf{u}$  del problema de valores iniciales y de frontera para problemas parabólicos de segundo orden. Nuestra última meta es la demostración que  $\mathbf{u}$  es suave siempre que los coeficientes de la EDP, la frontera del dominio y otros ingredientes del problema sean suaves. La siguiente presentación es muy similar a la de la Sección 4.3.2.

Para ganar una idea de qué tipo de resultados de regularidad posiblemente pueden ser válidos, supongamos por el momento que  $u = u(\mathbf{x}, t)$  es una solución suave del siguiente problema de valores iniciales y de frontera para la ecuación del calor:

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad u = g \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}.$$

Se supone, además, que  $u \rightarrow 0$  cuando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  suficientemente rápidamente para justificar los siguientes cálculos. En este caso, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 - 2\Delta u u_t + (\Delta u)^2) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + 2Du \cdot Du_t + (\Delta u)^2) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Además,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 2Du \cdot Du_t \, d\mathbf{x} \, ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt} (|Du|^2) \, d\mathbf{x} \, ds = \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 \, d\mathbf{x} \Big|_{s=0}^{s=t}.$$

Insertando estas dos identidades en (5.37) e integrando sobre  $t$  obtenemos

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 \, d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + |D^2u|^2) \, d\mathbf{x} \, dt \\ & \leq C \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, d\mathbf{x} \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2 \, d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Observamos que podemos acotar las normas  $L^2$  de  $u_t$  y  $D^2u$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  en términos de la norma  $L^2$  de  $f$  sobre  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  y de la norma  $L^2$  de  $Dg$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora diferenciamos la EDP con respecto a  $t$  y definimos  $\tilde{u} := u_t$ . Entonces

$$\tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T], \quad \tilde{u} = \tilde{g} \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

para  $\tilde{f} := f_t$  y  $\tilde{g} := u_t(\cdot, 0) = f(\cdot, 0) + \Delta g$ . Multiplicando por  $\tilde{u}$ , integrando por partes y utilizando la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 \, d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \\ & \leq C \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 \, d\mathbf{x} \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} (|D^2g|^2 + f(\cdot, 0)^2) \, d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pero de acuerdo al ítem (iii) del Teorema 5.1,

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C (\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))}),$$

además, escribiendo  $-\Delta u = f - u_t$  encontramos como en la Sección 4.3.2 que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2u|^2 \, d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (f^2 + u_t^2) \, d\mathbf{x}. \quad (5.40)$$

Combinando (5.39)–(5.40) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t|^2 + |D^2u|^2) \, d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \\ & \leq C \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (f_t^2 + f^2) \, d\mathbf{x} \, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2g|^2 \, d\mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

para alguna constante  $C$ .

Estos cálculos formales sugieren que estimaciones similares a (5.38) y (5.41) son válidas para la solución débil de una EDP parabólica de segundo orden general. Por supuesto estos cálculos aún no constituyen una demostración porque la solución débil de (5.16) no posee regularidad suficiente como para justificarlos. Efectivamente, nuestro cálculo será aplicado a las aproximaciones de Galerkin. Para facilitar la presentación supongamos ahora que  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

es el conjunto completo de las funciones propias del operador  $-\Delta$  sobre  $H_0^1(U)$ , donde  $U$  es un conjunto acotado y abierto con una frontera  $\partial U$  suave. Se supone, además, que

$$a^{ij}, b^i, c \quad (i, j = 1, \dots, n) \text{ son suaves sobre } \bar{U} \text{ e independientes de } t. \quad (5.42)$$

**Teorema 5.8** (Regularidad mejorada).

- (i) *Supongamos que  $g \in H_0^1(U)$ ,  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(U))$ , y que  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ , con  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ , es la solución débil del problema (5.16). Entonces efectivamente  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(U)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(U))$ ,  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(U))$ , y existe una constante  $C$  que depende solamente de  $U, T$  y los coeficientes de  $L$  tal que*

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))} \\ & \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)}). \end{aligned}$$

- (ii) *Si, además,  $g \in H^2(U)$  y  $\mathbf{f}' \in L^2(0, T; L^2(U))$ , entonces  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^2(U))$ ,  $\mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; L^2(U)) \cap L^2(0, T; H_0^1(U))$  y  $\mathbf{u}'' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ , y existe una constante  $C$  que depende solamente de  $U, T$  y los coeficientes de  $L$  tal que*

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left( \|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(U)} + \|\mathbf{u}'(t)\|_{L^2(U)} \right) + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}''\|_{L^2(0, T; H^{-1}(U))} \\ & \leq C(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}). \end{aligned}$$

Comentamos que los enunciados (i) e (ii) del Teorema 5.8 son versiones precisas de las ecuaciones formales (5.38) y (5.41), respectivamente, obtenidas para la ecuación del calor sobre  $U = \mathbb{R}^n$ .

*Demostración del Teorema 5.8.*

- 1.) Fijamos  $m \geq 1$ , multiplicamos (5.20) por  $d_m^k(t)$  y sumamos sobre  $k = 1, \dots, m$  para obtener que

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m) \quad \text{para casi todo } 0 \leq t \leq T.$$

Ahora notamos que  $B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m] = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ , donde

$$\mathcal{A} := \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}'_{m,x_j} \right) d\mathbf{x}, \quad \mathcal{B} := \int_U \left( \sum_{i=1}^n b^i \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}'_m + c \mathbf{u}_m \mathbf{u}'_m \right) d\mathbf{x}.$$

Como  $a^{ij} = a^{ji}$  para  $i, j = 1, \dots, n$  y estos coeficientes no dependen de  $t$ , obtenemos que

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right),$$

donde se define la forma bilineal simétrica

$$A[u, v] := \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \right) d\mathbf{x}, \quad u, v \in H_0^1(U).$$



Además, para cada  $\varepsilon > 0$  se tiene que

$$|\mathcal{B}| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \varepsilon \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2, \quad |(\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \varepsilon \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2.$$

2.) Combinando las desigualdades anteriores obtenemos que

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right) \leq \frac{C}{\varepsilon} (\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2) + 2\varepsilon \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2.$$

Eligiendo  $\varepsilon = 1/4$  e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2 dt + \sup_{0 \leq t \leq T} A[\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)] \\ & \leq C \left( A[\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0)] + \int_0^T (\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2) dt \right) \\ & \leq C (\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2) \end{aligned}$$

de acuerdo al Teorema 5.5, donde estimamos  $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)} \leq \|g\|_{H_0^1(U)}$ . Como

$$A[u, u] \geq \theta \int_U |Du|^2 dx \quad \text{para cada } u \in H_0^1(U),$$

obtenemos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{H_0^1(U)}^2 \leq C (\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2). \quad (5.43)$$

Pasando a los límites cuando  $m = m_l \rightarrow \infty$ , concluimos que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H_0^1(U))$  y  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(U))$  con las cotas señaladas.

3.) En particular, para casi todo  $t$  tenemos la identidad  $(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v] = (\mathbf{f}, v)$  para cada  $v \in H_0^1(U)$ . Esta identidad la escribimos como  $B[\mathbf{u}, v] = (\mathbf{h}, v)$  para  $\mathbf{h} := \mathbf{f} - \mathbf{u}'$ . Como  $\mathbf{h}(t) \in L^2(U)$  para casi todo  $0 \leq t \leq T$ , deducimos del teorema de regularidad elíptica (Teorema 4.34) que  $\mathbf{u}(t) \in H^2(U)$  para casi todo  $0 \leq t \leq T$ , donde

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2(U)}^2 \leq C (\|\mathbf{h}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2) \leq C (\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2).$$

Integrando y utilizando las estimaciones del Paso 2 podemos completar la demostración de (i).

4.) Ahora demostraremos la regularidad superior para la solución débil. Supongamos ahora que  $g \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$  y  $\mathbf{f} \in H^1(0, T; L^2(U))$ . Fijamos  $m \geq 1$  y derivamos (5.20) respecto a  $t$ . En virtud de (5.42) obtenemos

$$(\tilde{\mathbf{u}}'_m, w_k) + B[\tilde{\mathbf{u}}_m, w_k] = (\mathbf{f}', w_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (5.44)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}}_m := \mathbf{u}'_m$ . Multiplicando (5.44) por  $d_m^k(t)$  y sumando sobre  $k = 1, \dots, m$  obtenemos  $(\tilde{\mathbf{u}}'_m, \tilde{\mathbf{u}}_m) + B[\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{\mathbf{u}}_m] = (\mathbf{f}', \tilde{\mathbf{u}}_m)$ . Utilizando la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \\ & \leq C (\|\mathbf{u}'_m(0)\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2) \end{aligned}$$

$$\leq C(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2 + \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2). \quad (5.45)$$

- 5.) Hay que estimar el último término en (5.45). Debido a nuestra selección de las funciones  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , se tiene que  $\Delta \mathbf{u}_m = 0$  sobre  $\partial U$ , por lo tanto

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \leq C\|\Delta \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 = C(\mathbf{u}_m(0), \Delta^2 \mathbf{u}_m(0)).$$

Como  $\Delta^2 \mathbf{u}_m(0) \in \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$  y  $(\mathbf{u}_m(0), w_k) = (g, w_k)$  para  $k = 1, \dots, m$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 &\leq C(g, \Delta^2 \mathbf{u}_m(0)) = C(\Delta g, \Delta \mathbf{u}_m(0)) \\ &\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 + C\|g\|_{H^2(U)}^2, \end{aligned}$$

por lo tanto  $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)} \leq C\|g\|_{H^2(U)}$  y (5.45) implica que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \leq C(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2 + \|g\|_{H^2(U)}^2). \quad (5.46)$$

- 6.) Ahora

$$B[\mathbf{u}_m, w_k] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}'_m, w_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.47)$$

Sea  $\lambda_k$  el  $k$ -ésimo valor propio de  $-\Delta$  sobre  $H_0^1(U)$ . Multiplicando (5.47) por  $\lambda_k d_m^k(t)$  y sumando el resultado sobre  $k = 1, \dots, m$ , obtenemos que para  $0 \leq t \leq T$

$$B[\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}'_m, -\Delta \mathbf{u}_m). \quad (5.48)$$

Como  $\Delta \mathbf{u}_m = 0$  sobre  $\partial U$ , obtenemos que  $B[\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m] = (L\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m)$ . Luego utilizaremos la desigualdad

$$\beta \|u\|_{H^2(U)}^2 \leq (Lu, -\Delta u) + \gamma \|u\|_{L^2(U)}, \quad u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$$

para constantes  $\beta > 0$  y  $\gamma \geq 0$ . (Si  $L$  fuera simétrico, podríamos haber alternativamente definido  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  como una base de funciones propias de  $L$  en  $H_0^1(U)$ , así evitando esta desigualdad.)

A partir de (5.48) concluimos que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{H^2(U)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}).$$

Esta desigualdad, (5.46), (5.43), y el Teorema 5.2 implican que

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq T} (\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^2(U)}^2) + \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \\ &\leq C(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2 + \|g\|_{H^2(U)}^2). \end{aligned}$$

Pasando a los límites cuando  $m = m_l \rightarrow \infty$  obtenemos la misma cota para  $\mathbf{u}$ .

- 7.) Queda por demostrar que  $\mathbf{u}'' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Para tal efecto sea  $v \in H_0^1(U)$ , con  $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ , y sea  $v = v^1 + v^2$  como en la demostración del Teorema 5.5. Entonces, en virtud de (5.44),

$$\langle \mathbf{u}''_m, v \rangle = (\mathbf{u}''_m, v) = (\mathbf{u}''_m, v^1) = (\mathbf{f}', v^1) - B[\mathbf{u}'_m, v^1] \quad \text{para casi todo } 0 \leq t \leq T,$$

donde  $\mathbf{u}''_m = \tilde{\mathbf{u}}'_m$ . Por lo tanto, como  $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ ,

$$|\langle \mathbf{u}''_m, v \rangle| \leq C(\|\mathbf{f}'\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}),$$

luego

$$\|\mathbf{u}''_m\|_{H^{-1}(U)} \leq C(\|\mathbf{f}'\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}),$$

y así  $\mathbf{u}''_m$  es acotado en  $L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Pasando a los límites obtenemos que  $\mathbf{u}'' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ , con la cota afirmada. ■

**Teorema 5.9** (Regularidad superior). *Supongamos que  $g \in H^{2m+1}(U)$  y*

$$\frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m-2k}(U)), \quad k = 0, \dots, m.$$

*Supongamos además que las siguientes condiciones de compatibilidad de orden  $m$  están satisfechas:*

$$g_0 := g \in H_0^1(U), \quad g_1 := \mathbf{f}(0) - Lg_0 \in H_0^1(U), \dots, g_m := \frac{d^{m-1} \mathbf{f}}{dt^{m-1}}(0) - Lg_{m-1} \in H_0^1(U).$$

*Entonces*

$$\frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U)), \quad k = 0, \dots, m+1,$$

*y existe una constante  $C$  que depende solamente de  $m, U, T$  y los coeficientes de  $L$  tal que*

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))} \leq C \left( \sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)} \right).$$

Comentamos que considerando el Teorema 5.3, obtenemos que  $\mathbf{f}(0) \in H^{2m-1}(U)$ ,  $\mathbf{f}'(0) \in H^{2m-3}(U)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{f}^{(m-1)}(0) \in H^1(U)$ , luego  $g_0 \in H^{2m+1}(U)$ ,  $g_1 \in H^{2m-1}(U)$ ,  $\dots$ ,  $g_m \in H^1(U)$ . Entonces las condiciones de compatibilidad son requerimientos que exigen que cada una de estas funciones se anule sobre  $\partial U$  en el sentido de trazas.

*Demostración del Teorema 5.9.*

- 1.) La demostración procede por inducción sobre  $m$ . El caso  $m = 0$  corresponde al ítem (i) del Teorema 5.8.
- 2.) Supongamos que el Teorema 5.9 es válido para algún  $m \in \mathbb{N}_0$ . Supongamos ahora que

$$g \in H^{2m+3}(U), \quad \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U)), \quad k = 0, \dots, m+1,$$

y que las condiciones de compatibilidad de orden  $m+1$  están satisfechas. Sea ahora  $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}'$ . Diferenciando la EDP con respecto a  $t$  verificamos que  $\tilde{\mathbf{u}}$  es la única solución débil del problema

$$\tilde{\mathbf{u}}_t + L\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \text{ en } U_T, \quad \tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ sobre } \partial U \times [0, T], \quad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{g}} \text{ sobre } U \times \{t = 0\}$$

para  $\tilde{\mathbf{f}} := f_t$  y  $\tilde{\mathbf{g}} := f(\cdot, 0) - Lg$ . En particular, para  $m = 0$  utilizaremos el enunciado (ii) del Teorema 5.8 para asegurar que  $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$  y  $\tilde{\mathbf{u}}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ .

Como  $\tilde{f}$  y  $g$  satisfacen las condiciones de compatibilidad de orden  $m + 1$ , las funciones  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  satisfacen las condiciones de compatibilidad de orden  $m$ . Entonces a partir de la hipótesis de inducción se tiene que

$$\frac{d^k \tilde{\mathbf{u}}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U)), \quad k = 0, \dots, m + 1,$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \tilde{\mathbf{u}}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))} \leq C \left( \sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k \tilde{\mathbf{f}}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m-2k}(U))} + \|\tilde{g}\|_{H^{2m+1}(U)} \right)$$

para  $\tilde{\mathbf{f}} := \mathbf{f}'$ . Como  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'$  podemos escribir lo anterior como

$$\begin{aligned} \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} &\in L^2(0, T; H^{2m+4-2k}(U)), \quad k = 1, \dots, m + 2, \\ \sum_{k=1}^{m+2} \left\| \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+4-2k}(U))} &\leq C \left( \sum_{k=1}^{m+1} \left\| \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))} + \|\mathbf{f}(0)\|_{H^{2m+1}(U)} + \|Lg\|_{H^{2m+1}(U)} \right) \\ &\leq C \left( \sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+3}(U)} \right). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Aquí utilizamos la siguiente cota que es una consecuencia del Teorema 5.3:

$$\|\mathbf{f}(0)\|_{H^{2m+1}(U)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; H^{2m+2}(U))} + \|\mathbf{f}'\|_{L^2(0, T; H^{2m}(U))}).$$

- 3.) Ahora escribimos para casi todo  $0 \leq t \leq T$ :  $L\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{u}' =: \mathbf{h}$ . De acuerdo al Teorema 4.35, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H^{2m+4}(U)} &\leq C(\|\mathbf{h}\|_{H^{2m+2}(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}) \\ &\leq C(\|\mathbf{f}\|_{H^{2m+2}(U)} + \|\mathbf{u}'\|_{H^{2m+2}(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}). \end{aligned}$$

Integrando con respecto a  $t$  sobre  $[0, T]$  y sumando la expresión resultante a (5.49) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+2} \left\| \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+4-2k}(U))} &\leq C \left( \sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+3}(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; L^2(U))} \right). \end{aligned}$$

Como

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; L^2(U))} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}),$$

obtenemos así el enunciado del Teorema 5.9 para  $m + 1$ . ■

Aplicando el Teorema 5.9 para  $m = 0, 1, 2, \dots$ , podemos demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 5.10** (Diferenciabilidad infinita). *Supongamos que  $g \in C^\infty(\bar{U})$ ,  $f \in C^\infty(\bar{U}_T)$ , y que las condiciones de compatibilidad de orden  $m$  estan satisfechas para  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces el problema de valores iniciales y de frontera (5.16) posee una solución única  $u \in C^\infty(\bar{U}_T)$ .*

Tal como hicimos para operadores elípticos en el Capítulo 4, hemos logrado aplicar estimaciones de “energía” bastante simples para producir una solución suave del problema de valores iniciales y de frontera parabólico (5.11). Este resultado requiere que las condiciones de compatibilidad (5.48) esten satisfechas para todo  $m$ , y estas condiciones son necesarias para la existencia de una solución suave sobre la totalidad de  $\bar{U}_T$ . Comentamos que también se pueden estimaciones interiores análogas a los resultados para EDPs elípticas obtenidos en los Teoremas 4.31, 4.32 y 4.33. Tales resultados no dependen de las condiciones de compatibilidad.

**5.2.4. Principios del máximo.** En esta sección desarrollaremos el principio del máximo y la desigualdad de Harnack para operadores parabólicos de segundo orden. En lo siguiente suponemos que el operador  $L$  posee la forma de no divergencia (5.13), donde las funciones  $a^{ij}$ ,  $b^i$  y  $c$  son continuas. Siempre se supone que la condición de parabolicidad uniforme (ver Definición 5.5) está satisfecha, y que  $a^{ij} = a^{ji}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Recordamos también que la frontera parabólica de  $U_T$  es  $\Gamma_T := \bar{U}_T \setminus U_T$ .

**Teorema 5.11** (Principio del máximo débil). *Sea  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  y  $c \equiv 0$  en  $U_T$ .*

(i) Si

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{en } U_T \quad (5.50)$$

(en tal caso,  $u$  se llama subsolución), entonces  $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$ .

(ii) Si  $u_t + Lu \geq 0$  en  $U_T$  ( $u$  se llama sobresolución), entonces  $\min_{\bar{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u$ .

*Demostración.*

1.) Supongamos primeramente que la siguiente desigualdad estricta es válida:

$$u_t + Lu < 0 \quad \text{en } U_T, \quad (5.51)$$

pero que existe un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$  tal que  $u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$ .

2.) Si  $0 < t_0 < T$ , entonces  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  pertenece al interior de  $U_T$ , por lo tanto  $u_t = 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  porque  $u$  asume su máximo en este punto. Por otro lado,  $Lu \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , como explicamos en la demostración del Teorema 4.37. Por lo tanto,  $u_t + Lu \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , lo que se contradice con (5.51).

3.) Supongamos ahora que  $t_0 = T$ . Ahora, como  $u$  asume su máximo sobre  $\bar{U}_T$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , obtenemos que  $u_t \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Como además tenemos la desigualdad  $Lu \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , nuevamente llegamos a la contradicción causada por  $u_t + Lu \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .

4.) En el caso general, cuando (5.50) es válido, escribimos  $u^\varepsilon(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x}, t) - \varepsilon t$  para  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $u_t^\varepsilon + Lu^\varepsilon = u_t + Lu - \varepsilon < 0$  en  $U_T$ , luego  $\max_{\bar{U}_T} u^\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u^\varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos  $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$ , lo que demuestra (i).

5.) Como  $-u$  es una subsolución siempre cuando  $u$  es una sobresolución, inmediatamente obtenemos que (ii) igualmente es válido. ■

En lo siguiente permitiremos términos de orden cero.

**Teorema 5.12** (Principio del máximo débil para  $c \geq 0$ ). *Sea  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  y  $c \geq 0$  en  $U_T$ .*

- (i) *Si  $u_t + Lu \leq 0$  en  $U_T$ , entonces  $\max_{\bar{U}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+$ .*
- (ii) *Si  $u_t + Lu \geq 0$  en  $U_T$ , entonces  $\min_{\bar{U}_T} u \geq -\max_{\Gamma_T} u^-$ .*

*En particular, si  $u_t + Lu = 0$  en  $U_T$ , entonces  $\max_{\bar{U}_T} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|$ .*

*Demostración.*

- 1.) Supongamos que  $u$  satisface

$$u_t + Lu < 0 \quad \text{en } U_T \quad (5.52)$$

y que  $u$  asume un máximo *positivo* en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ . Como  $u(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$  y  $c \geq 0$ , como arriba llegamos a la contradicción  $u_t + Lu \geq 0$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .

- 2.) Si en lugar de (5.52) tenemos solamente  $u_t + Lu \leq 0$  en  $U_T$ , entonces  $u^\varepsilon(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x}, t) - \varepsilon t$  satisface  $u_t^\varepsilon + Lu^\varepsilon < 0$  en  $U_T$ . Además, si  $u$  asume un máximo positivo en algún punto de  $U_T$ , también  $u^\varepsilon$  asume un máximo positivo en algún punto de  $U_T$ , siempre cuando  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño. Pero tal como en la demostración anterior, así llegamos a una contradicción.
- 3.) La demostración de (ii) es análoga. ■

La desigualdad de Harnack afirma que si  $u$  es una solución no negativa de la EDP parabólica, entonces el máximo de  $u$  en alguna región interior en un tiempo positivo puede ser estimado por el mínimo de  $u$  en la misma región en un tiempo posterior.

**Teorema 5.13** (Desigualdad de Harnack parabólica). *Sea  $u \in C_1^2(U_T)$  una solución de*

$$u_t + Lu = 0 \quad \text{en } U_T, \quad (5.53)$$

*y que  $u \geq 0$  en  $U_T$ . Sea  $V \subset\subset U$  conexo. Entonces para cada  $0 < t_1 < t_2 \leq T$  existe una constante  $C$ , que depende solamente de  $V$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ , y los coeficientes de  $L$ , tal que*

$$\sup_V u(\cdot, t_1) \leq C \inf_V u(\cdot, t_2). \quad (5.54)$$

Este enunciado es válido si los coeficientes son continuos, o incluso son solamente acotados y medibles. En la siguiente demostración consideraremos solamente el caso  $b^i \equiv c \equiv 0$ , y que las funciones  $a^{ij}$  son suaves ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Los siguientes cálculos son elementales, pero delicados.

*Demostración del Teorema 5.13.*

- 1.) Sea  $v := \log u$  en  $U_T$ . Utilizando (5.53), calculamos que

$$v_t = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i x_j} + a^{ij} v_{x_i} v_{x_j} \quad \text{en } U_T. \quad (5.55)$$

Definiendo

$$w := \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i x_j}, \quad \tilde{w} := \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i} v_{x_j}, \quad (5.56)$$

podemos escribir (5.55) como  $v_t = w + \tilde{w}$ .

2.) A partir de (5.56) y de  $v_t = w + \tilde{w}$  calculamos que

$$v_{x_k x_l t} = w_{x_k x_l t} + \sum_{i,j=1}^n 2a^{ij} v_{x_i x_k x_l} v_{x_j} + 2a^{ij} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} + R,$$

donde para cada  $\varepsilon > 0$  el término  $R$  satisface una desigualdad del tipo

$$|R| \leq \varepsilon |D^2 v|^2 + C(\varepsilon) |Dv|^2 + C, \quad (5.57)$$

luego

$$\begin{aligned} w_t &= \sum_{k,l=1}^n a^{kl} v_{x_k x_l t} + a_t^{kl} v_{x_k x_l} \\ &= \sum_{k,l=1}^n a^{kl} w_{x_k x_l} + 2 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_j} w_{x_i} + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} + R, \end{aligned}$$

donde  $R$  es otro término que satisface (5.57). Por lo tanto, eligiendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño y acordándonos de la condición de parabolicidad uniforme obtenemos que

$$w_t - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} w_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^n b^k w_{x_k} \geq \theta^2 |D^2 v|^2 - C |Dv|^2 - C, \quad (5.58)$$

donde

$$b^k := -2 \sum_{l=1}^n a^{kl} v_{x_l}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.59)$$

3.) La desigualdad (5.58) es una desigualdad diferencial para  $w$ , y nuestra próxima tarea consiste en desarrollar una desigualdad similar para  $\tilde{w}$ . Efectivamente, utilizando (5.56) y (5.55) calculamos que

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \tilde{w}_{x_k x_l} &= 2 \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i} \left( v_{t x_j} - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} v_{x_k x_l x_j} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{ij} a^{kl} v_{x_i x_k} v_{x_j x_l} + R, \end{aligned}$$

donde  $R$  es otro término residual que satisface (5.57) para todo  $\varepsilon > 0$ . Utilizando (5.55) y (5.59) obtenemos

$$\tilde{w}_t - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \tilde{w}_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^n b^k \tilde{w}_{x_k} \geq -C |D^2 v|^2 - C |Dv|^2 - C \quad \text{en } U_T. \quad (5.60)$$

- 4.) Ahora ponemos  $\hat{w} := w + \kappa\tilde{w}$ , donde la constante  $\kappa > 0$  será elegida más adelante. Combinando (5.58) y (5.60) deducimos que

$$\hat{w}_t - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \hat{w}_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^n b^k \hat{w}_{x_k} \geq \frac{\theta^2}{2} |D^2 v|^2 - C |Dv|^2 - C, \quad (5.61)$$

siempre que  $0 < \kappa \leq 1/2$  ha sido fijado suficientemente pequeño.

- 5.) Sea ahora  $V \subset\subset U$  una bola abierta y  $0 < t_1 < t_2 \leq T$ . Sea  $\zeta \in C^\infty(U_T)$  una función de corte tal que  $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $\zeta = 0$  sobre  $\Gamma_T$  y  $\zeta \equiv 1$  sobre  $V \times [t_1, t_2]$ . Notar que  $\zeta$  se anula a lo largo de  $\{t = 0\}$ .

Sea ahora  $\mu > 0$  una constante a ser ajustada más adelante, y supongamos que

$$\zeta^4 \hat{w} + \mu t \text{ asume un mínimo negativo en algún punto } (\mathbf{x}_0, t_0) \in (0, T]. \quad (5.62)$$

Entonces

$$\zeta \hat{w}_{x_k} + 4\zeta_{x_k} \hat{w} = 0 \quad \text{en } (\mathbf{x}_0, t_0), k = 1, \dots, n, \quad (5.63)$$

además

$$0 \geq (\zeta^4 \hat{w} + \mu t)_t - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} (\zeta^4 \hat{w} + \mu t)_{x_k x_l} \quad \text{en } (\mathbf{x}_0, t_0).$$

Concluimos que en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ ,

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \left( \hat{w}_t - \sum_{k,l=1}^n a^{kl} \hat{w}_{x_k x_l} \right) - 2 \sum_{k,l=1}^n a^{kl} (\zeta^4)_{x_l} \hat{w}_{x_k} + \hat{R},$$

donde

$$|\hat{R}| \leq C \zeta^2 |\hat{w}|. \quad (5.64)$$

Ahora a partir de (5.61) y (5.63) obtenemos

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \left( \frac{\theta^2}{2} |D^2 v|^2 - C |Dv|^2 - C - \sum_{k=1}^n b^k \hat{w}_{x_k} \right) + \hat{R},$$

donde  $\hat{R}$  es otro término residual que satisface (5.64). Utilizando (5.63) y (5.59) concluimos que

$$0 \geq \mu + \zeta^4 \left( \frac{\theta^2}{2} |D^2 v|^2 - C |Dv|^2 - C \right) + \tilde{R}, \quad (5.65)$$

donde ahora

$$|\tilde{R}| \leq C \zeta^2 |\hat{w}| + C \zeta^3 |Dv| |\hat{w}|. \quad (5.66)$$

Recordemos que las desigualdades (5.65) y (5.66) son válidas en el punto  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  donde la función  $\zeta^4 \hat{w} + \mu t$  asume un mínimo negativo. En particular, en este punto  $\hat{w} = w + \kappa\tilde{w} < 0$ . En virtud de la definición (5.56) de  $w$  y  $\tilde{w}$ , concluimos que

$$|Dv|^2 \leq C |D^2 v|, \quad (5.67)$$



luego  $|\hat{w}| \leq C|D^2v|$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . En virtud de lo anterior, (5.66) implica que

$$|\tilde{R}| \leq C\zeta^2|D^2v| + C\zeta^3|D^2v|^{3/2} \leq \varepsilon\zeta^4|D^2v|^2 + C(\varepsilon), \quad (5.68)$$

donde utilizamos la desigualdad de Young con  $\varepsilon$ , (1.7). Utilizando (5.65), (5.67) y (5.68) finalmente llegamos a una contradicción a (5.62), siempre que  $\mu$  ha sido elegido suficientemente grande.

- 6.) En virtud de lo anterior,  $\zeta^4\hat{w} + \mu t \geq 0$  en  $U_T$ , en particular  $\hat{w} + \mu t \geq 0$  en  $V \times [t_1, t_2]$ . Utilizando  $v_t = w + \tilde{w}$  concluimos que existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$v_t \geq \alpha|Dv|^2 - \beta \quad \text{en } V \times [t_1, t_2]. \quad (5.69)$$

- 7.) La desigualdad diferencial (5.69) para  $v = \log u$  nos lleva a la desigualdad de Harnack como describiremos a continuación. Fijamos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$  y  $t_2 > t_1$ . Entonces

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}_2, t_2) - v(\mathbf{x}_1, t_1) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} v(s\mathbf{x}_2 + (1-s)\mathbf{x}_1, st_2 + (1-s)t_1) ds \\ &= \int_0^1 (Dv \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + v_t(t_2 - t_1)) ds \\ &\geq \int_0^1 \left( -|Dv||\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| + (t_2 - t_1)(\alpha|Dv|^2 - \beta) \right) ds \geq -\gamma, \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  depende solamente de  $\alpha, \beta, |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  y  $|t_1 - t_2|$ . Por lo tanto,  $v = \log u$  en  $U_T$  implica que  $\log u(\mathbf{x}_2, t_2) \geq \log u(\mathbf{x}_1, t_1) - \gamma$ , es decir  $u(\mathbf{x}_2, t_2) \geq \exp(-\gamma)u(\mathbf{x}_1, t_1)$ . Esta desigualdad se obtiene para cada  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ , por lo tanto la desigualdad (5.54) es válida si  $V$  es una bola. En el caso general se recubre  $V \subset\subset U$  con bolas y se aplica esta cota en forma repetida. ■

Utilizando la desigualdad de Harnack, podemos demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 5.14** (Principio del máximo fuerte). *Sea  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  y  $c \equiv 0$  en  $U_T$ . Además, sea  $U$  conexo.*

- (i) *Si  $u_t + Lu \leq 0$  en  $U_T$  y  $u$  asume su máximo sobre  $\bar{U}_T$  en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ , entonces  $u$  es constante en  $U_{t_0}$ .*
- (ii) *Si  $u_t + Lu \geq 0$  en  $U_T$  y  $u$  asume su mínimo sobre  $\bar{U}_T$  en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ , entonces  $u$  es constante en  $U_{t_0}$ .*

Comentamos que el Teorema 5.14 ilustra que las ecuaciones diferenciales parciales uniformemente parabólicas exhiben el fenómeno de “velocidad de propagación infinita de perturbaciones”.

Para las siguientes demostraciones supondremos que la solución  $u$  y los coeficientes de  $L$  efectivamente son suaves.

*Demostración del Teorema 5.14.*

- 1.) Supongamos que  $u_t + Lu \leq 0$  en  $U_T$ , y que  $u$  asume su máximo en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ . Sea ahora  $W$  un conjunto suave y abierto tal que  $W \subset\subset U$ , con  $\mathbf{x}_0 \in W$ , y sea  $v$  la solución del problema  $v_t + Lv = 0$  en  $W_T$ ,  $v = u$  sobre  $\Delta_T$ , donde  $\Delta_T$  denota la

frontera parabólica de  $W_T$ . Entonces, en virtud del principio del máximo débil,  $u \leq v$ . Como  $u \leq v \leq M$  para  $M := \max_{\bar{U}_T} u$ , concluimos que  $v = M$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .

- 2.) Sea ahora  $\tilde{v} := M - v$ . Como  $c \equiv 0$ , sabemos que  $\tilde{v}_t + L\tilde{v} = 0$  y  $\tilde{v} \geq 0$  en  $W_T$ . Sea  $V$  cualquier conjunto conexo con  $V \subset\subset W$ ,  $\mathbf{x}_0 \in V$ . Sea  $0 < t < t_0$ . Entonces debido a la desigualdad de Harnack,

$$\max_V \tilde{v}(\cdot, t) \leq C \inf_V \tilde{v}(\cdot, t_0). \quad (5.70)$$

Pero  $\inf_V \tilde{v}(\cdot, t_0) \leq \tilde{v}(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ . Como  $\tilde{v} \geq 0$ , (5.70) implica que  $\tilde{v} \equiv 0$  sobre  $V \times \{t\}$  para cada  $0 < t < t_0$ . Esta derivación es válida para cualquier conjunto  $V$  como arriba, por lo tanto  $\tilde{v} \equiv 0$  en  $W_{t_0}$ , es decir  $v \equiv M$  en  $W_{t_0}$ . Como  $v = u$  en  $\Delta_T$ , concluimos que  $u \equiv M$  sobre  $\partial W \times [0, t_0]$ . Esta conclusión es válida para todos los conjuntos  $W$  como arriba, por lo tanto  $u \equiv M$  en  $U_{t_0}$ . ■

**Teorema 5.15** (Principio del máximo fuerte para  $c \geq 0$ ). *Sea  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$  y  $c \geq 0$  en  $U_T$ . Sea  $U$  conexo.*

- (i) *Si  $u_t + Lu \leq 0$  en  $U_T$  y  $u$  asume un máximo no negativo sobre  $\bar{U}_T$  en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ , entonces  $u$  es constante en  $U_{t_0}$ .*
- (ii) *Si  $u_t + Lu \geq 0$  en  $U_T$  y  $u$  asume un mínimo no positivo sobre  $\bar{U}_T$  en un punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ , entonces  $u$  es constante en  $U_{t_0}$ .*

*Demostración.*

- 1.) Tal como arriba, sea  $M := \max_{\bar{U}_T} u$ . Supongamos que  $M \geq 0$ ,  $u_t + Lu \leq 0$  en  $U_T$ , y que  $u$  asume este máximo  $M$  en algún punto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ . Si  $M = 0$ , podemos aplicar la demostración anterior directamente porque en este caso,  $\tilde{v}_t + L\tilde{v} = 0$  y  $\tilde{v} \geq 0$  en  $W_T$ .
- 2.) Supongamos ahora que  $M > 0$ . Tal como en la demostración del Teorema 5.14, elegimos un conjunto  $W \subset\subset U$  suave y abierto tal que  $\mathbf{x}_0 \in W$ . Sea  $v$  la solución del problema  $v_t + Kv = 0$  en  $W_T$ ,  $v = u^+$  sobre  $\Delta_T$ , donde  $Kv := Lv - cv$ . Notamos que  $0 \leq v \leq M$ . Como  $u_t + Ku \leq -cu \leq 0$  sobre  $\{u \geq 0\}$ , concluimos a partir del principio del máximo débil que  $u \leq v$ . Como en la demostración del Teorema 5.14 se tiene que  $v = M$  en  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .
- 3.) Sea ahora  $\tilde{v} := M - v$ . Como el operador  $K$  no posee términos de orden cero, se tiene que  $\tilde{v}_t + K\tilde{v} = 0$  y  $\tilde{v} \geq 0$  en  $W_T$ . Sea ahora  $V \subset\subset W$  cualquier conjunto conexo con  $\mathbf{x}_0 \in V$ . Sea  $0 < t < t_0$ . Entonces, tal como en la demostración del Teorema 5.14, la desigualdad de Harnack implica que  $v \equiv u^+ \equiv M$  sobre  $\partial W \times [0, t_0]$ . Como  $M > 0$ , concluimos que  $u \equiv M$  sobre  $\partial W \times [0, t_0]$ . Esta discusión es válida para todos los conjuntos  $W$  como arriba, por lo tanto  $u \equiv M$  sobre  $U_{t_0}$ . ■