
Mecánica del Medio Continuo

Apuntes
Curso Código 408.701
Primer Semestre 2014

Raimund Bürger
Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA)
& Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
Casilla 160-C
Concepción, Chile

13 de marzo de 2014

Índice general

Bibliografía	9
Capítulo 1. Álgebra y cálculo de tensores	11
1.1. Álgebra tensorial	11
1.1.1. Vectores	11
1.1.1.1. Álgebra vectorial	11
1.1.1.2. Productos escalares y vectoriales	12
1.1.1.3. Proyecciones, bases y marcos de coordenadas	12
1.1.2. Notación indicial	13
1.1.2.1. Convenio de sumación	13
1.1.2.2. El delta de Kronecker y los símbolos de permutación	14
1.1.2.3. Identidades de marco	15
1.1.2.4. Operaciones vectoriales en componentes	15
1.1.2.5. Identidades epsilon-delta	16
1.1.3. Tensores de segundo orden	17
1.1.3.1. Definición de un tensor de segundo orden	17
1.1.3.2. Álgebra de tensores de segundo orden	17
1.1.3.3. Representación en un marco de coordenadas	17
1.1.3.4. Productos diádicos de segundo orden y bases	18
1.1.3.5. Álgebra de tensores de segundo orden en componentes	18
1.1.3.6. Tensores especiales	19
1.1.3.7. Cambio de base	21
1.1.3.8. Trazas, determinantes y exponenciales	22
1.1.3.9. Valores propios, vectores propios e invariantes principales	23
1.1.3.10. Descomposiciones especiales	24
1.1.3.11. Producto escalar de tensores de segundo orden	25
1.1.4. Tensores de cuarto orden	26
1.1.4.1. Definición de un tensor de cuarto orden	26
1.1.4.2. Álgebra de tensores de cuarto orden	26
1.1.4.3. Representación en un marco de coordenadas	26
1.1.4.4. Productos diádicos de cuarto orden y bases	27
1.1.4.5. Propiedades de simetría	27
1.1.5. Funciones tensoriales isotrópicas	28
1.2. Cálculo tensorial	29
1.2.1. Preliminares	29
1.2.1.1. Puntos, tensores y representaciones	29

1.2.1.2.	Normas estándar y símbolos de orden	29
1.2.2.	Diferenciación de campos tensoriales	30
1.2.2.1.	Derivadas y gradientes	30
1.2.2.2.	Divergencia	33
1.2.2.3.	El rotacional de un campo vectorial	34
1.2.2.4.	El Laplaciano	35
1.2.3.	Teoremas integrales	35
1.2.3.1.	Teorema de Divergencia	35
1.2.3.2.	El Teorema de Stokes	37
1.2.3.3.	Teorema de Localización	38
1.2.4.	Funciones de tensores de segundo orden	38
1.2.4.1.	Funciones escalares de tensores de segundo orden	38
1.2.4.2.	Funciones tensoriales	41
1.3.	Ejercicios	42
Capítulo 2.	Conceptos de masa y fuerza del continuo	45
2.1.	Cuerpos continuos	45
2.2.	Masa	46
2.2.1.	Densidad de masa	46
2.2.2.	Centro de masa	46
2.3.	Fuerza	46
2.3.1.	Fuerza de cuerpo	47
2.3.2.	Fuerza de superficie	47
2.3.2.1.	Concepto de un campo de tracción	48
2.3.2.2.	Postulado de Cauchy, Ley de Acción y Reacción	48
2.3.3.	El tensor tensión	50
2.4.	Equilibrio	53
2.4.1.	Preliminares	53
2.4.2.	Condiciones necesarias	53
2.4.3.	Ecuaciones locales	54
2.5.	Conceptos fundamentales de la tensión	55
2.5.1.	Estados de tensión simples	56
2.5.2.	Tensiones principales, normales y de cizalla	57
2.5.3.	Tensiones normales y de cizalla máximas	58
2.5.4.	Tensores esférico y desviador	58
2.6.	Ejercicios	59
Capítulo 3.	Cinemática	63
3.1.	Configuraciones y deformaciones	63
3.2.	El mapa de deformación	64
3.3.	Medidas de la deformación	64
3.3.1.	El gradiente de deformación \mathbf{F}	65
3.3.2.	Interpretación de \mathbf{F} y deformaciones homogéneas	65
3.3.2.1.	Traslaciones y puntos fijos	66
3.3.2.2.	Rotaciones y estiramientos	66

3.3.2.3.	Extensiones	67
3.3.2.4.	Resumen	68
3.3.3.	El tensor deformación de Cauchy-Green \mathbf{C}	68
3.3.4.	Interpretación de \mathbf{C}	69
3.3.5.	Deformaciones rígidas	72
3.3.6.	El tensor de deformación infinitesimal \mathbf{E}	72
3.3.7.	Interpretación de \mathbf{E}	73
3.3.8.	Deformaciones infinitesimalmente rígidas	74
3.4.	Movimientos	75
3.4.1.	Campos materiales y espaciales	76
3.4.2.	Derivadas con respecto a coordenadas	76
3.4.3.	Derivadas temporales	76
3.4.4.	Campos de velocidad y aceleración	77
3.5.	Tasa de deformación y tasa de rotación	79
3.5.1.	Tensores tasa de deformación \mathbf{L} y tasa de rotación \mathbf{W}	79
3.5.2.	Interpretación de \mathbf{L} y \mathbf{W}	79
3.5.3.	Vorticidad	80
3.5.4.	Movimientos rígidos	80
3.6.	Cambio de variables	80
3.6.1.	Transformación de integrales de volumen	80
3.6.2.	Diferenciación de integrales que dependen del tiempo	82
3.6.3.	Transformación de integrales de superficie	83
3.7.	Movimientos isovolumétricos o isocóricos	85
3.8.	Ejercicios	85
Capítulo 4.	Leyes de balance	87
4.1.	Motivación	87
4.2.	Leyes de balance en forma integral	89
4.2.1.	Conservación de masa y leyes de inercia	89
4.2.2.	Primera y Segunda Ley de Termodinámica	90
4.2.2.1.	La temperatura y el calor	90
4.2.2.2.	Energía cinética, potencia de fuerzas externas y trabajo neto	92
4.2.2.3.	Energía interna y la Primera Ley	92
4.2.2.4.	La entropía y la Segunda Ley de Termodinámica	94
4.2.3.	Leyes de balance integrales versus locales	96
4.3.	Forma Euleriana localizada de leyes de balance	96
4.3.1.	Conservación de masa	96
4.3.2.	Balance de momento lineal	98
4.3.3.	Balance de momento angular	99
4.3.4.	Caracterización del trabajo neto	100
4.3.5.	Primera Ley de Termodinámica	101
4.3.6.	Segunda Ley de Termodinámica	101
4.3.7.	Resumen	103
4.4.	Forma Lagrangiana localizada de leyes de balance	103

4.4.1.	Conservación de masa	104
4.4.2.	Balance de momento lineal	104
4.4.3.	Balance de momento angular	106
4.4.4.	Caracterización del trabajo neto	106
4.4.5.	Primera Ley de Termodinámica	107
4.4.6.	Segunda Ley de Termodinámica	108
4.4.7.	Resumen	109
4.5.	Indiferencia respecto del marco	110
4.5.1.	Movimientos rígidos superpuestos	110
4.5.2.	Axioma de la indiferencia respecto del marco	111
4.6.	Restricciones materiales	112
4.7.	Consideraciones isotérmicas	114
4.8.	Ejercicios	117
Capítulo 5.	Mecánica de fluidos isotérmica	121
5.1.	Fluidos ideales	122
5.1.1.	Definición	122
5.1.2.	Las ecuaciones de Euler	123
5.1.3.	Consideraciones de indiferencia respecto del marco	124
5.1.4.	Consideraciones de energía mecánica	124
5.1.5.	Problemas de valores iniciales y de frontera	125
5.1.6.	Mapa de movimiento y otras condiciones de borde	126
5.1.7.	Movimiento irrotacional y Teorema de Bernoulli	127
5.2.	Fluidos elásticos	131
5.2.1.	Definición	131
5.2.2.	Las ecuaciones de un fluido elástico	131
5.2.3.	Consideraciones de indiferencia respecto del marco	132
5.2.4.	Consideraciones de energía mecánica	133
5.2.5.	Problemas de valores iniciales y de frontera	134
5.2.6.	Movimiento irrotacional y Teorema de Bernoulli Generalizado	135
5.2.7.	Linealización	137
5.3.	Fluidos Newtonianos	139
5.3.1.	Definición	139
5.3.2.	Ecuaciones de Navier-Stokes	140
5.3.3.	Consideraciones de indiferencia respecto del marco	142
5.3.4.	Consideraciones de energía mecánica	143
5.3.5.	Problemas de valores iniciales y de frontera	144
5.4.	Energía cinética del movimiento de fluidos	145
5.5.	Ejercicios	148
Capítulo 6.	Mecánica de sólidos isotérmica	151
6.1.	Sólidos elásticos	152
6.1.1.	Definición	152
6.1.2.	Ecuaciones de elasticidad	153
6.1.3.	Consideraciones de indiferencia respecto del marco	154

6.1.4.	Problemas de valores iniciales y de frontera	155
6.1.5.	Isotropía y funciones respuesta simplificadas	156
6.2.	Sólidos hiperelásticos	158
6.2.1.	Definición	159
6.2.2.	Consideraciones de indiferencia respecto del marco	159
6.2.3.	Consideraciones de energía mecánica	161
6.2.4.	Modelos comunes	162
6.3.	Linealización de las ecuaciones de la elasticidad	163
6.3.1.	Ecuaciones linealizadas y tensores de elasticidad	163
6.3.2.	Problemas de valores iniciales y de frontera	165
6.3.3.	Propiedades de los tensores de elasticidad	166
6.3.4.	Ecuación de elasticidad isotrópica y linealizada	168
6.4.	Sólidos elásticos lineales	169
6.4.1.	Definición	169
6.4.2.	Propiedades generales	170
6.5.	Ejercicios	173

Bibliografía

- [1] J. Altenbach & H. Altenbach, *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [2] M.C. Bustos, F. Concha, R. Bürger & E.M. Tory, *Sedimentation and Thickening: Phenomenological Foundation and Mathematical Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [3] C.M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Second Ed. Springer Verlag, Berlin, 2010.
- [4] D.A. Drew & S.L. Passman, *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer Verlag, New York, 1999.
- [5] O. Gonzalez & A.M. Stuart, *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] M.E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- [7] M.E. Gurtin, E. Fried & L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.
- [8] K. Hutter & K. Jöhnk, *Continuum Methods of Physical Modeling*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [9] I-S. Liu, *Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [10] A.I. Murdoch, *Physical Foundations of Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2012.
- [11] D.F. Parker, *Fields, Flows and Waves: An Introduction to Continuum Models*. Springer, London, 2003.
- [12] L.A. Segel, *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Macmillan Publishing Co., New York, NY, USA, 1977; republished by Dover Publications, Inc, New York, NY, USA, 1987.
- [13] M. Šilhavý, *The Mechanics and Thermomechanics of Continuous Media*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [14] E.B. Tadmor, R.E. Miller & R.S. Elliott, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [15] R. Temam & A. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [16] C. Truesdell & W. Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Edited by S. Antman. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [17] E. van Groesen & J. Molenaar, *Continuum Modeling in the Physical Sciences*. SIAM, Philadelphia, 2008.
- [18] K. Wilmański, *Thermomechanics of Continua*. Springer Verlag, Berlin, 1998.

Álgebra y cálculo de tensores

En lo siguiente se denota por \mathbb{R} al campo de los números reales y por \mathbb{E}^3 al espacio Euclidiano tri-dimensional. Nos referimos a los elementos de \mathbb{R} como *escalares*, denotados a , b , x , y etc., y a los elementos de \mathbb{E}^3 como *puntos*, denotados \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{x} , \mathbf{y} , etc. Además se define el conjunto de vectores \mathcal{V} . Los principales objetivos de la siguiente sección son

- (i) la distinción entre puntos y vectores,
- (ii) la distinción entre un vector y su representación en un marco de coordenadas,
- (iii) la notación de índices,
- (iv) la introducción del espacio de tensores de segundo orden \mathcal{V}^2 como el espacio de transformaciones lineales sobre \mathcal{V} , y
- (v) la definición del conjunto de tensores de cuarto orden \mathcal{V}^4 como el conjunto de las transformaciones lineales en \mathcal{V}^2 .

1.1. Álgebra tensorial

1.1.1. Vectores. Un *vector* es una cantidad con una magnitud y una dirección especificadas en el espacio tri-dimensional. Por ejemplo, un segmento de una recta en el espacio puede ser interpretado como un vector tal como los pueden ser otras cantidades tales como fuerzas, velocidades y aceleraciones. Se denota un vector por un símbolo negrita tal como \mathbf{v} y su magnitud por $|\mathbf{v}|$. Para cualquier vector, $|\mathbf{v}| \geq 0$. Se define, además, el *vector cero* $\mathbf{0}$ como un vector con magnitud cero y dirección indefinida. Además cualquier vector \mathbf{v} con $|\mathbf{v}| = 1$ se llama *vector unitario*.

Gráficamente un vector puede ser representado como una flecha. La orientación de la flecha representa la dirección del vector y su longitud representa la magnitud del vector. Además dos vectores se consideran iguales si poseen la misma dirección y la misma magnitud independientemente de su posición en el espacio.

Los escalares y los vectores son ejemplos de objetos más generales llamados *tensores*. Por ejemplo, un escalar es un tensor de orden cero, y un vector es un tensor de primer orden. Más adelante consideraremos tensores de segundo y cuarto orden, pero por mientras nos concentraremos en tensores de primer orden, es decir, vectores.

1.1.1.1. Álgebra vectorial. Si \mathcal{V} denota el conjunto de todos los vectores, entonces \mathcal{V} posee la estructura de un espacio vectorial real porque $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y $\alpha \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. En particular se define $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ como aquel elemento de \mathcal{V} producido cuando \mathbf{u} y \mathbf{v} se colocan en forma consecutiva. Para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $\alpha \mathbf{v}$ como aquel elemento de \mathcal{V} que tenga la magnitud $|\alpha||\mathbf{v}|$, donde $|\alpha|$ denota el valor absoluto de α , y que tenga la dirección idéntica u opuesta a \mathbf{v} , dependiendo de si $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Mediante el espacio vectorial \mathcal{V} podemos definir algunas operaciones matemáticas muy útiles entre los elementos de \mathbb{E}^3 y de \mathcal{V} . Dado cualquier par de puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} podemos definir $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ como el único vector que apunta desde \mathbf{x} a \mathbf{y} , es decir dado $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$ tenemos $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Dado cualquier punto \mathbf{z} y cualquier vector \mathbf{v} podemos definir $\mathbf{z} + \mathbf{v}$ como el único punto tal que $(\mathbf{z} + \mathbf{v}) - \mathbf{z} = \mathbf{v}$. Por lo tanto, dado $\mathbf{z} \in \mathbb{E}^3$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tenemos $\mathbf{z} + \mathbf{v} \in \mathbb{E}^3$.

En lo siguiente definiremos algunas operaciones geométricas entre vectores que nos permitirán construir representaciones matemáticas para \mathcal{V} y \mathbb{E}^3 .

1.1.1.2. *Productos escalares y vectoriales.* El *producto escalar* de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} está definido geoméricamente como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre las puntas de \mathbf{a} y \mathbf{b} . Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se dicen *ortogonales* o *perpendiculares* si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Para cualquier vector \mathbf{a} se tiene que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$. El *producto vectorial* entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se define geoméricamente como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta) \mathbf{e},$$

donde \mathbf{e} es un vector unitario perpendicular al plano que contiene \mathbf{a} y \mathbf{b} . La orientación de \mathbf{e} es definida de tal forma que una rotación de mano derecha por \mathbf{e} por un ángulo θ traslada \mathbf{a} a \mathbf{b} . Notar que la magnitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es igual al área de un paralelogramo con lados definidos por \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Ejemplo 1.1. Sea $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Entonces V es el volumen del paralelepípedo definido por \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} . En particular, se tiene que

$$V = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}| |\sin \theta| |\cos \phi|,$$

donde θ y ϕ son los ángulos entre \mathbf{a} y \mathbf{b} y entre \mathbf{c} y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, respectivamente. El factor $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| |\sin \theta|$ es el área del paralelogramo definido por \mathbf{a} y \mathbf{b} , y el factor $|\mathbf{c}| |\cos \phi|$ entrega la altura del paralelepípedo con respecto al plano abierto por \mathbf{a} y \mathbf{b} . ■

1.1.1.3. *Proyecciones, bases y marcos de coordenadas.* Sea \mathbf{e} un vector unitario. Entonces cualquier vector \mathbf{v} puede ser escrito como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e^\perp, \tag{1.1}$$

donde \mathbf{v}_e es paralelo a \mathbf{e} y \mathbf{v}_e^\perp es perpendicular a \mathbf{e} . El vector \mathbf{v}_e se llama *la proyección de \mathbf{v} paralela a \mathbf{e}* y es definido por

$$\mathbf{v}_e := (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}.$$

El vector \mathbf{v}_e^\perp se llama *la proyección de \mathbf{v} perpendicular a \mathbf{e}* . Se tiene que

$$\mathbf{v}_e^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}.$$

Una *base ortonormal dextrógira* de \mathcal{V} es un conjunto de tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ orientados en el sentido de

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares satisfacen $|(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}| = 1$, pero una base *dextrógira* satisface $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 1$. Una base *levógira* satisface, al contrario, $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = -1$.

Usando una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en lugar de $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y aplicando (1.1) repetidamente encontramos que cualquier vector \mathbf{v} puede ser representado en forma única por

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3, \quad \text{donde } v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Los números v_1 , v_2 y v_3 se llaman *componentes* de \mathbf{v} en la base dada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Frecuentemente denotaremos el conjunto de coordenadas por v_i y una base dada por $\{\mathbf{e}_i\}$ cuando está entendido que el rango del índice i es de 1 a 3. Frecuentemente será útil ordenar las componentes de un vector \mathbf{v} en una matriz columna de 3×1 , denotada $[\mathbf{v}]$, en particular

$$[\mathbf{v}] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

donde \mathbb{R}^3 denota el conjunto de todos los triples ordenados de números reales.

Ejemplo 1.2. Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ una base de \mathcal{V} y sea \mathbf{v} un vector cuya representación en esta base sea $[\mathbf{v}] = (1, 1, 0)^T$. Entonces

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3.$$

Luego consideraremos el mismo vector pero se rota la base $\{\mathbf{e}_i\}$ por un ángulo de $\pi/4$ con respecto a la base definida por \mathbf{e}_3 . El resultado de esta operación es una base nueva $\{\mathbf{e}'_i\}$, y con respecto a esta base las componentes de \mathbf{v} están dadas por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_1 = \sqrt{2}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_2 = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_3 = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = \sqrt{2}\mathbf{e}'_1 + 0\mathbf{e}'_2 + 0\mathbf{e}'_3.$$

La representación de \mathbf{v} en la base nueva está dada por $[\mathbf{v}]' = (\sqrt{2}, 0, 0)^T$. Obviamente, $[\mathbf{v}]' \neq [\mathbf{v}]$. ■

Como *marco de coordenadas Cartesiano* para \mathbb{E}^3 se entiende un punto de referencia $\mathbf{o} \in \mathbb{E}^3$, llamado *origen*, junto con una base ortonormal dextrógira $\{\mathbf{e}_i\}$ para el espacio vectorial \mathcal{V} asociado. A cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ se asocian entonces las *coordenadas* x_i de acuerdo a la expresión $x_i = (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. En tal caso las coordenadas de \mathbf{x} son los únicos números x_i tales que

$$\mathbf{x} - \mathbf{o} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

En lo siguiente utilizaremos el término “marco de coordenadas” sin referirnos explícitamente al punto $\mathbf{o} \in \mathbb{E}^3$ elegido como origen. Además frecuentemente se identificará un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ con su vector de posición $\mathbf{x} - \mathbf{o} \in \mathcal{V}$ y se utiliza el símbolo \mathbf{x} para ambos.

1.1.2. Notación indicial.

1.1.2.1. *Convenio de sumación.* La representación de operaciones vectoriales en términos de sus componentes naturalmente involucra sumatorias. Por ejemplo, sean \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores con componentes a_i y b_i en un marco $\{\mathbf{e}_i\}$. Entonces

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 b_i\mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 a_i b_i,$$

donde la última identidad es una consecuencia de

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Cada una de las expresiones para \mathbf{a} , \mathbf{b} y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ involucra una sumatoria sobre un par de índices. Como sumatorias de este tipo aparecen muy frecuentemente, adoptamos un convenio y abreviamos estas tres ecuaciones como $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$. El convenio es el siguiente: si un índice aparece dos veces en un término entonces se implica una sumatoria sobre este índice. En particular,

$$a_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i.$$

En lo siguiente siempre se supone que este convenio está vigente.

Cualquier índice que se utiliza para representar una sumatoria se llama *índice mudo*, lo que refleja que el símbolo utilizado para un índice repetido no importa ya que

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_j b_j.$$

Notar que el convenio solamente se aplica a *pares* de índices repetidos. Por lo tanto no se implican sumatorias en expresiones del tipo a_i , $a_i b_i b_i$, etc.

Cualquier índice que no es un índice mudo se llama *índice libre*. Por ejemplo en la expresión

$$a_i = c_j b_j b_i \tag{1.2}$$

el índice i es un índice libre y el índice j es un índice mudo. Un índice libre puede asumir cualquier de los valores 1, 2 o 3. Por ejemplo, (1.2) es una abreviatura para las tres ecuaciones

$$a_1 = c_j b_j b_1, \quad a_2 = c_j b_j b_2, \quad a_3 = c_j b_j b_3.$$

Similarmente, la ecuación $a_i b_j = c_i c_k c_k d_j$ es una abreviatura para nueve ecuaciones porque i y j son índices libres.

Cada término en una ecuación debe tener los mismos índices libres, y el mismo símbolo no puede ser utilizado simultáneamente para un índice mudo y un índice libre. Por ejemplo las siguientes ecuaciones son todas ambiguas e inadmisibles en nuestro uso del convenio de sumación:

$$a_i = b_j, \quad a_i b_j = c_i d_j d_j, \quad a_i b_j = c_i c_k d_k d_j + d_p c_i c_l d_q.$$

1.1.2.2. *El delta de Kronecker y los símbolos de permutación.* A cada marco $\{\mathbf{e}_i\}$ se asocia el *símbolo delta de Kronecker* δ_{ij} definido por

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j, \end{cases}$$

y el *símbolo de permutación* ε_{ijk} definido por

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 1 & \text{para } ijk = 123, 231, 312, \\ -1 & \text{para } ijk = 321, 213, 132, \\ 0 & \text{en los demás casos (índices repetidos).} \end{cases}$$

Los valores numéricos de δ_{ij} y ε_{ijk} son los mismos para cualquier marco ortonormal dextrógiro. Además, se verifica fácilmente que

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}, \quad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}.$$

El símbolo de permutación también puede ser escrito como

$$\varepsilon_{ijk} = \det([\mathbf{e}_i], [\mathbf{e}_j], [\mathbf{e}_k]),$$

donde $([\mathbf{e}_i], [\mathbf{e}_j], [\mathbf{e}_k])$ es la matriz 3×3 con columnas $[\mathbf{e}_i]$, $[\mathbf{e}_j]$ y $[\mathbf{e}_k]$. En particular todas las propiedades de ε_{ijk} pueden ser deducidas de las propiedades del determinante.

1.1.2.3. *Identidades de marco.* Algunas identidades útiles son válidas entre los vectores de un marco $\{\mathbf{e}_i\}$, el símbolo δ_{ij} y el símbolo de permutación ε_{ijk} . En particular desde la definición de δ_{ij} se deduce la identidad $\mathbf{e}_i = \delta_{ij}\mathbf{e}_j$. Esta identidad muestra que si δ_{ij} es sumado contra otra cantidad el efecto neto es una “transferencia de índice”. Además, la definición de ε_{ijk} implica la identidad

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k,$$

que representa en forma concisa los nueve productos vectoriales posibles entre dos vectores de un marco, es decir $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, etc. Una identidad similar está dada por

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k.$$

1.1.2.4. *Operaciones vectoriales en componentes.* En lo siguiente demostraremos como los símbolos delta de Kronecker y de permutación naturalmente aparecen cuando operaciones vectoriales están expresadas en términos de sus componentes en un marco dado. Para el producto escalar notamos que si $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{b} = b_j\mathbf{e}_j$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i\mathbf{e}_i) \cdot (b_j\mathbf{e}_j) = a_ib_j\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i.$$

Así, desde la definición geométrica del producto escalar obtenemos $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_ia_i$.

Para estudiar el producto vectorial sean $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = b_j\mathbf{e}_j$ y $\mathbf{d} = d_k\mathbf{e}_k$. Entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_ib_j(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = a_ib_j\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k,$$

donde la última identidad sigue de la identidad de marco

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k.$$

Entonces, si definimos $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, se tiene que $d_k = a_ib_j\varepsilon_{ijk}$.

Consideremos ahora el producto escalar triple. Sean $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = b_j\mathbf{e}_j$ y $\mathbf{c} = c_m\mathbf{e}_m$. Entonces

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a_ib_j\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k) \cdot (c_m\mathbf{e}_m) = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_m\delta_{km} = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k. \quad (1.3)$$

Además, aprovechando propiedades del símbolo de permutación bajo permutaciones cíclicas de sus índices obtenemos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

Desde el cálculo vectorial elemental se sabe que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det([\mathbf{a}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}]), \quad (1.4)$$

donde $([\mathbf{a}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}])$ es la matriz 3×3 con las columnas \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} . Si combinamos esto con (1.3) obtenemos

$$\det([\mathbf{a}], [\mathbf{b}], [\mathbf{c}]) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k, \quad (1.5)$$

lo que genera una expresión explícita del determinante en términos de una sumatoria triple.

Finalmente podemos considerar el producto vectorial triple. Sean $\mathbf{a} = a_q \mathbf{e}_q$, $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{c} = c_j \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{d} = d_p \mathbf{e}_p$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_q \mathbf{e}_q) \times (b_i c_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{ijk} a_q b_i c_j (\mathbf{e}_q \times \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{qkp} \varepsilon_{ijk} a_q b_i c_j \mathbf{e}_p \\ &= \varepsilon_{pqk} \varepsilon_{ijk} a_q b_i c_j \mathbf{e}_p, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde la última línea es una consecuencia de $\varepsilon_{qkp} = \varepsilon_{pqk}$. Es decir, si $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, entonces $d_p = \varepsilon_{pqk} \varepsilon_{ijk} a_q b_i c_j$.

Comentamos que las definiciones geométricas de los productos escalares dobles y triples implican que estas cantidades son independientes del marco. Es decir los productos escalares dobles y triples pueden ser calculados en términos de coordenadas en cualquier marco de coordenadas, con el mismo valor obtenido en cada marco. En lo siguiente la identificación de cantidades escalares con esta propiedad será un tema importante. Otros ejemplos aparecerán en la discusión de la traza, del determinante y de los invariantes principales de tensores de segundo orden.

1.1.2.5. *Identidades epsilon-delta.* En virtud de sus definiciones en términos de un marco ortogonal dextrógiro, el símbolo de permutación y el delta de Kronecker satisfacen las siguientes identidades.

Lema 1.1 (Identidades epsilon-delta). *Sean ε_{ijk} el símbolo de permutación y δ_{ij} el delta de Kronecker. Entonces*

$$\varepsilon_{pqs} \varepsilon_{nrs} = \delta_{pn} \delta_{qr} - \delta_{pr} \delta_{qn}, \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{pqs} \varepsilon_{rqs} = 2\delta_{pr}. \quad (1.8)$$

Demostración. Tarea. ■

Como aplicación del resultado anterior demostraremos que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \text{para todo } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}. \quad (1.9)$$

Para ver que esto es válido, basta ver que en virtud de (1.6) y el Lema 1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \varepsilon_{pqk} \varepsilon_{ijk} a_q b_i c_j \mathbf{e}_p = (\delta_{pi} \delta_{qj} - \delta_{pj} \delta_{qi}) a_q b_i c_j \mathbf{e}_p = (a_q c_q) b_p \mathbf{e}_p - (a_q b_q c_p) \mathbf{e}_p \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \end{aligned}$$

1.1.3. Tensores de segundo orden. En la mecánica del medio continuo aparecen cantidades tales como la tensión y el estiramiento que no pueden ser representadas por vectores sino que por transformaciones lineales entre vectores, dando origen al concepto de un tensor de segundo orden (precisado en lo siguiente). Resulta que tales cantidades pueden ser descritas por nueve componentes en cualquier marco de coordenadas Cartesiano para \mathbb{E}^3 .

1.1.3.1. *Definición de un tensor de segundo orden.* Un *tensor de segundo orden* sobre el espacio vectorial \mathcal{V} es una aplicación lineal $\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, es decir

- (i) $\mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$,
- (ii) $\mathbf{T}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{u}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Se denota el conjunto de todos los tensores de segundo orden sobre \mathcal{V} por \mathcal{V}^2 . Se define el tensor nulo \mathbf{O} por la propiedad $\mathbf{O}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$; además definimos el tensor identidad \mathbf{I} por $\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Además, $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ y $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ se dicen *iguales* si $\mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Ejemplo 1.3.

- (i) *Proyecciones.* La acción de proyectar un vector \mathbf{v} sobre un vector unitario dado \mathbf{e} puede ser descrita mediante un tensor de segundo orden \mathbf{P} . Específicamente,

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}.$$

- (ii) *Rotaciones.* La acción de rotar un vector \mathbf{v} por un ángulo dado θ con respecto a un eje fijo (por ejemplo, \mathbf{e}_3) puede ser expresada en términos de un tensor de segundo orden \mathbf{S} . En particular para cada uno de los vectores bases \mathbf{e}_i tenemos las respectivas identidades

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}_1) = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{S}(\mathbf{e}_2) = \cos \theta \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{S}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3.$$

- (iii) *Reflexiones.* La acción de reflejar un vector \mathbf{v} con respecto a un plano fijo, por ejemplo con la normal \mathbf{e}_1 , puede ser expresada en términos de un tensor de segundo orden \mathbf{T} como

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1.$$

■

1.1.3.2. *Álgebra de tensores de segundo orden.* El espacio \mathcal{V}^2 de tensores de segundo orden posee la estructura de un espacio vectorial real ya que $\mathbf{S} + \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ para todo $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ y $\alpha\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$. También podemos componer tensores de segundo orden en el sentido de $\mathbf{ST} \in \mathcal{V}^2$ para todo $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$. En particular se definen la suma $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ por medio de la relación $(\mathbf{S} + \mathbf{T})\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{T}\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, y la composición \mathbf{ST} mediante $(\mathbf{ST})\mathbf{v} = \mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Una definición similar es válida para $\alpha\mathbf{T}$.

1.1.3.3. *Representación en un marco de coordenadas.* Las *componentes* de un tensor de segundo orden \mathbf{S} en un marco de coordenadas $\{\mathbf{e}_i\}$ son los nueve números S_{ij} dados por $S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_j$. Estas componentes describen completamente la transformación $\mathbf{S} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Efectivamente, para vectores $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{u} = u_j\mathbf{e}_j$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u}$ se tiene que

$$v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}\mathbf{u} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_j)u_j = S_{ij}u_j, \tag{1.10}$$

por lo tanto las componentes de \mathbf{S} simplemente son los coeficientes en la relación lineal entre las componentes de \mathbf{v} y \mathbf{u} .

Frecuentemente se arreglan las nueve componentes S_{ij} en una matriz $[\mathbf{S}]$, en particular

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

La matriz $[\mathbf{S}]$ se llama *representación* de \mathbf{S} en el marco de coordenadas dado.

Se denota por $[\mathbf{S}]_{ij}$ el elemento de $[\mathbf{S}]$ en la fila i y la columna j , entonces $[\mathbf{S}]_{ij} = S_{ij}$. Se define la traspuesta de $[\mathbf{S}]$, denotada $[\mathbf{S}]^T$, por $[\mathbf{S}]_{ij}^T = [\mathbf{S}]_{ji}$.

Ejemplo 1.4. Si \mathbf{S} y \mathbf{T} son los tensores definidos en el Ejemplo 1.3, entonces en los respectivos marcos de coordenadas

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

1.1.3.4. *Productos diádicos de segundo orden y bases.* El *producto diádico* de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es el tensor de segundo orden $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ definido por

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

En términos de las componentes $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij}$ esta ecuación es equivalente a

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij}v_j = (b_j v_j)a_i \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

lo que significa que $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij} = a_i b_j$, es decir $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = [\mathbf{a}][\mathbf{b}]^T$.

Para cualquier marco de coordenadas $\{\mathbf{e}_i\}$ los nueve productos diádicos elementales $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ forman una base de \mathcal{V}^2 . En particular cada $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ posee una representación única como combinación lineal

$$\mathbf{S} = S_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \tag{1.11}$$

donde $S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}\mathbf{e}_j$. Para ver que esta representación es correcta consideremos la expresión $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u}$, donde $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{u} = u_k\mathbf{e}_k$. Entonces

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u} = (S_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)u_k\mathbf{e}_k = S_{ij}\delta_{jk}u_k\mathbf{e}_i = S_{ij}u_j\mathbf{e}_i,$$

lo que implica que $v_i = S_{ij}u_j$. Entonces (1.11) concuerda con (1.10) y da origen a una representación única de \mathbf{S} en términos de sus componentes S_{ij} .

1.1.3.5. *Álgebra de tensores de segundo orden en componentes.* Sean $\mathbf{S} = S_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ tensores de segundo orden con las representaciones matriciales $[\mathbf{S}]$ y $[\mathbf{T}]$. Utilizando las definiciones de $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ y $\alpha\mathbf{T}$ es fácil deducir que $[\mathbf{S} + \mathbf{T}] = [\mathbf{S}] + [\mathbf{T}]$ y $[\alpha\mathbf{T}] = \alpha[\mathbf{T}]$. Para deducir una expresión en componentes para la composición consideremos dos productos tensoriales arbitrarios $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$. Entonces para cualquier vector \mathbf{v} se tiene que

$$\begin{aligned} ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}))\mathbf{v} &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})((\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\mathbf{v}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d})\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Como \mathbf{v} es arbitrario, esto implica que

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}. \quad (1.12)$$

Ahora sean \mathbf{S} y \mathbf{T} como arriba, y sea $\mathbf{U} = \mathbf{ST}$. En virtud de (1.12) se tiene ahora que

$$\mathbf{U} = (S_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(T_{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = S_{ij}T_{kl}\delta_{jk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l = S_{ij}T_{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l,$$

por lo tanto las componentes de \mathbf{U} están dadas por $U_{il} = S_{ij}T_{jl}$. Esto corresponde a la notación estándar para la multiplicación de matrices para las representaciones de \mathbf{S} y \mathbf{T} , es decir $[\mathbf{U}] = [\mathbf{ST}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}]$.

1.1.3.6. *Tensores especiales.* A cada tensor $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ se asocia el *tensor traspuesto* $\mathbf{S}^T \in \mathcal{V}^2$, el cual es el único tensor con la propiedad

$$\mathbf{S}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}^T\mathbf{v} \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Se dice que \mathbf{S} es *simétrico* si $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$ y *antisimétrico* si $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$. Un tensor $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ se llama *definido positivo* si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, e *invertible* si existe su inverso $\mathbf{S}^{-1} \in \mathcal{V}^2$ tal que $\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{I}$. Las operaciones de traspuesta e inversa conmutan, $(\mathbf{S}^{-1})^T = (\mathbf{S}^T)^{-1}$, y se denota el tensor resultante por \mathbf{S}^{-T} .

Un tensor $\mathbf{Q} \in \mathcal{V}^2$ se dice *ortogonal* si $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, es decir $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Un tensor ortogonal se llama *rotación* si para cualquier marco de coordenadas $\{\mathbf{e}_i\}$ ortogonal y dextrógiro, el conjunto de vectores $\{\mathbf{Q}\mathbf{e}_i\}$ también es un marco ortogonal dextrógiro. Se tiene, además, que

$$[\mathbf{S}^T] = [\mathbf{S}]^T, \quad [\mathbf{S}^{-1}] = [\mathbf{S}]^{-1}, \quad [\mathbf{S}^{-T}] = [\mathbf{S}]^{-T}.$$

Lema 1.2 (Descomposición simétrica-antisimétrica). *Cada tensor de segundo orden puede ser escrito en forma única como $\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{W}$, donde \mathbf{E} es un tensor simétrico y \mathbf{W} es un tensor antisimétrico. Específicamente,*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T).$$

Demostración. Tarea. ■

El resultado anterior motiva la definición de las aplicaciones $\text{sym} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ y $\text{skew} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ de la forma

$$\text{sym}(\mathbf{S}) := \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T), \quad \text{skew}(\mathbf{S}) := \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T).$$

En cualquier sistema de coordenadas un tensor simétrico \mathbf{E} satisface $E_{ij} = E_{ji}$, y un tensor antisimétrico \mathbf{W} satisface $W_{ij} = -W_{ji}$.

Lema 1.3 (Tensor antisimétrico como producto vectorial). *Para cualquier tensor antisimétrico $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$ existe un vector $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ único tal que $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Se escribe $\mathbf{w} = \text{vec}(\mathbf{W})$; este vector se llama vector axial asociado a \mathbf{W} . En cualquier marco se tiene que*

$$w_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{njm}W_{nm}.$$

Recíprocamente, para cualquier vector $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ existe un tensor antisimétrico $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$ único tal que $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Se escribe $\mathbf{W} = \text{ten}(\mathbf{w})$; este tensor se llama tensor axial asociado al vector \mathbf{w} . En cualquier marco $W_{ik} = \varepsilon_{ijk}w_j$. Las funciones $\mathbf{w} \mapsto \text{ten}(\mathbf{w})$ y $\mathbf{W} \mapsto \text{vec}(\mathbf{W})$ son inversas.

Demostración. Para demostrar el primer resultado supongamos que el tensor \mathbf{W} está dado. Entonces estamos buscando un vector \mathbf{w} tal que $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ para todo \mathbf{v} . En componentes esta ecuación está dada por

$$W_{ik}v_k = \varepsilon_{ijk}w_jv_k.$$

Como v_k es arbitrario, esto implica que

$$W_{ik} = \varepsilon_{ijk}w_j. \quad (1.13)$$

Luego demostraremos que existe un vector w_j que satisface (1.13); después demostraremos que este vector es único. Para tal efecto sea

$$w_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{njm}W_{nm}. \quad (1.14)$$

Insertando esto en el lado derecho de (1.13), utilizando el Lema 1.1 y el hecho que $W_{ki} = -W_{ik}$ obtenemos

$$\varepsilon_{ijk}w_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{njm}W_{nm} = \frac{1}{2}(\delta_{in}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kn})W_{nm} = W_{ik}.$$

Obviamente el vector w_j definido en (1.14) satisface (1.13). Para demostrar la unicidad supongamos que w_j y u_j son dos soluciones. Entonces desde (1.13) se desprende que $0 = \varepsilon_{ijk}(w_j - u_j)$ para $i, k = 1, 2, 3$. Considerando esta ecuación con $i = 1$ y $k = 3$ encontramos que $w_2 = u_2$, y por consideraciones similares llegamos a $w_1 = u_1$ y $w_3 = u_3$, por lo tanto la solución (1.14) es única.

Para demostrar el segundo resultado supongamos que \mathbf{w} está dado, luego buscamos un tensor antisimétrico \mathbf{W} tal que $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{v}$ para todo \mathbf{v} . En componentes esta ecuación es $\varepsilon_{ijk}w_jv_k = W_{ik}v_k$, y como v_k es arbitrario llegamos a

$$W_{ik} = \varepsilon_{ijk}w_j. \quad (1.15)$$

Esta ecuación genera una expresión explícita para el tensor W_{ik} , el cual es antisimétrico debido a las propiedades del símbolo de permutación. La unicidad sigue inmediatamente porque W_{ik} es explícitamente determinado por w_j .

Para establecer el resultado final sea $\mathbf{W} \mapsto \text{vec}(\mathbf{W})$ la aplicación definida por (1.14) y sea $\mathbf{w} \mapsto \text{ten}(\mathbf{w})$ la aplicación definida por (1.15). Entonces para cualquier tensor antisimétrico \mathbf{W} se tiene, en virtud del Lema 1.1,

$$[\text{ten}(\text{vec}(\mathbf{W}))]_{ik} = [\text{ten}(\mathbf{w})]_{ik} = \varepsilon_{ijk}w_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{njm}W_{nm} = \frac{1}{2}(\delta_{in}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kn})W_{nm} = W_{ik}.$$

Entonces para cualquier tensor antisimétrico \mathbf{W} se tiene que $\text{ten}(\text{vec}(\mathbf{W})) = \mathbf{W}$. Similarmemente, $\text{vec}(\text{ten}(\mathbf{w}))$ para cualquier vector \mathbf{w} , por lo tanto las funciones $\mathbf{w} \mapsto \text{ten}(\mathbf{w})$ y $\mathbf{W} \mapsto \text{vec}(\mathbf{W})$ son inversas. ■

1.1.3.7. *Cambio de base.* En cualquier marco de coordenadas dado la representación de un vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ es un triple de componentes $[\mathbf{v}] \in \mathbb{R}^3$, y la representación de un tensor de segundo orden $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ es una matriz de componentes $[\mathbf{S}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Ahora discutiremos los cambios de las representaciones $[\mathbf{v}]$ y $[\mathbf{S}]$ bajo cambios del marco de coordenadas.

Sean $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$ dos marcos de coordenadas. El *tensor cambio de base* de $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}$ es el tensor \mathbf{A} definido por

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \text{donde } A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j. \quad (1.16)$$

También podríamos definir un tensor cambio de base \mathbf{B} de $\{\mathbf{e}'_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$ poniendo $\mathbf{B} = B_{ij}\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j$, donde $B_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$. Todos los resultados obtenidos para \mathbf{A} igualmente serán válidos para \mathbf{B} ; sin embargo por simplicidad trabajaremos solamente con \mathbf{A} .

Utilizando las componentes de \mathbf{A} podemos expresar los vectores de la base de un marco en términos del otro. Por ejemplo un vector de base \mathbf{e}'_j puede ser expresado en el marco $\{\mathbf{e}_i\}$ como

$$\mathbf{e}'_j = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_j)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_j)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_j)\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j)\mathbf{e}_i,$$

y en virtud de (1.16) esto puede ser escrito como

$$\mathbf{e}'_j = A_{ij}\mathbf{e}_i. \quad (1.17)$$

Similarmente un vector de base \mathbf{e}_i puede ser expresado en el marco $\{\mathbf{e}'_k\}$ como

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k)\mathbf{e}'_k = A_{ik}\mathbf{e}'_k. \quad (1.18)$$

Tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.4 (Ortogonalidad del tensor cambio de base). *Las componentes A_{ij} del tensor cambio de base \mathbf{A} satisfacen $A_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}$ y $A_{ik}A_{lk} = \delta_{il}$, o en notación matricial $[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}] = [\mathbf{I}]$ y $[\mathbf{A}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{I}]$. En particular el tensor \mathbf{A} es ortogonal.*

Demostración. Insertando (1.18) en (1.17) obtenemos $\mathbf{e}'_j = A_{ij}A_{ik}\mathbf{e}'_k$, lo que implica que $A_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}$. Similarmente, insertando (1.17) en (1.18) obtenemos $A_{ik}A_{lk} = \delta_{il}$. ■

Sea ahora $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ un vector arbitrario con las respectivas representaciones $[\mathbf{v}] = (v_1, v_2, v_3)^T$ y $[\mathbf{v}]' = (v'_1, v'_2, v'_3)^T$ en los marcos $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$. Sea \mathbf{A} el tensor cambio de base de $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}$. Como v_i y v'_i son componentes del mismo vector físico están relacionadas mediante A_{ij} . Para ver esto notamos que por la definición de componentes se tiene que $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i = v'_j\mathbf{e}'_j$, y por la definición de A_{ij} ,

$$\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i = v'_j\mathbf{e}'_j = v'_jA_{ij}\mathbf{e}_i,$$

lo que implica que $v_i = A_{ij}v'_j$. Análogamente, $v'_k = A_{ik}v_i$. En notación matricial podemos escribir esto como $[\mathbf{v}] = [\mathbf{A}][\mathbf{v}]'$ y $[\mathbf{v}]' = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{v}]$. Para tensores de segundo orden es fácil demostrar que

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{A}][\mathbf{S}][\mathbf{A}]^T, \quad [\mathbf{S}]' = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{S}][\mathbf{A}]. \quad (1.19)$$

1.1.3.8. *Trazas, determinantes y exponenciales.* La traza definida para tensores de segundo orden es una aplicación $\text{tr} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\text{tr } \mathbf{S} := \text{tr}[\mathbf{S}] := [\mathbf{S}]_{ii},$$

donde $[\mathbf{S}]$ denota la representación matricial en cualquier marco. Así, la traza de un tensor de segundo orden \mathbf{S} es simplemente la traza habitual (suma de los elementos diagonales) de una representación matricial $[\mathbf{S}]$. El próximo resultado muestra que esta definición es efectivamente independiente del marco de coordenadas.

Lema 1.5 (Invarianza de la traza). *Sea \mathbf{S} un tensor de segundo orden con las representaciones $[\mathbf{S}]$ y $[\mathbf{S}']$ en los respectivos marcos $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$. Entonces $\text{tr}[\mathbf{S}] = \text{tr}[\mathbf{S}']$, es decir el valor numérico de la traza es independiente del marco de coordenadas en el cual es calculado.*

Demostración. Sea \mathbf{A} el tensor de cambio de base de $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}$. Entonces en virtud de (1.19) se tiene que $[\mathbf{S}] = [\mathbf{A}][\mathbf{S}'][\mathbf{A}]^T$ o

$$[\mathbf{S}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ik}[\mathbf{S}']_{kl}[\mathbf{A}]_{jl},$$

y utilizando el Lema 1.4,

$$\text{tr}[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}]_{ii} = [\mathbf{S}']_{kl}[\mathbf{A}]_{ik}[\mathbf{A}]_{il} = [\mathbf{S}']_{kl}\delta_{kl} = [\mathbf{S}']_{kk} = \text{tr}[\mathbf{S}'].$$

■

La *función determinante* para tensores de segundo orden es una aplicación $\det : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\det \mathbf{S} = \det[\mathbf{S}] = \varepsilon_{ijk}[\mathbf{S}]_{i1}[\mathbf{S}]_{j2}[\mathbf{S}]_{k3},$$

donde $[\mathbf{S}]$ denota una representación matricial en cualquier marco de coordenadas, por lo tanto el determinante de un tensor de segundo orden \mathbf{S} es simplemente el determinante habitual de la representación matricial $[\mathbf{S}]$. La expresión explícita en términos del símbolo de permutación es una consecuencia de (1.5). El próximo resultado demuestra que esta definición no depende del marco de coordenadas.

Lema 1.6 (Invarianza del determinante). *Sea \mathbf{S} un tensor de segundo orden con las representaciones $[\mathbf{S}]$ y $[\mathbf{S}']$ en los respectivos marcos $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$. Entonces $\det[\mathbf{S}] = \det[\mathbf{S}']$.*

Demostración. Tarea. ■

La cantidad $|\det \mathbf{S}|$ posee la interpretación geométrica del volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\mathbf{S}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{S}\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{S}\mathbf{e}_3$. Además, un tensor \mathbf{S} es invertible si y sólo si $\det \mathbf{S} \neq 0$. Como $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$, cada tensor ortogonal \mathbf{Q} satisface $|\det \mathbf{Q}| = 1$, y los tensores de rotación son aquellos tensores ortogonales para los cuales $\det \mathbf{Q} = 1$.

La *función exponencial* sobre tensores de segundo orden es una aplicación $\exp : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ definida por

$$\exp(\mathbf{S}) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathbf{S}^j = \mathbf{I} + \mathbf{S} + \frac{1}{2} \mathbf{S}^2 + \dots$$

Se puede demostrar que esta serie converge para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ y por lo tanto la función exponencial está bien definida.

Lema 1.7 (Exponencial de un tensor antisimétrico). *Sea $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$ un tensor antisimétrico arbitrario. Entonces $\exp(\mathbf{W}) \in \mathcal{V}^2$ es una rotación en el sentido de que $(\exp(\mathbf{W}))^T \exp(\mathbf{W}) = \mathbf{I}$ y $\det(\exp(\mathbf{W})) = 1$. Además, $(\exp(\mathbf{W}))^T = \exp(\mathbf{W}^T)$.*

Demostración. Tarea. ■

1.1.3.9. *Valores propios, vectores propios e invariantes principales.* Sea \mathbf{S} un tensor de segundo orden. Sea \mathbf{e} un vector unitario y λ un escalar tal que $\mathbf{S}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$. Entonces λ se llama *valor propio* y \mathbf{e} *vector propio* de \mathbf{S} . Desde el álgebra lineal recordamos que λ es un valor propio si y sólo si es una raíz del polinomio (cúbico) característico

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}). \quad (1.20)$$

A cualquier valor propio λ se asocia uno o varios vectores propios independientes \mathbf{e} resolviendo (en componentes) la ecuación lineal homogénea

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (1.21)$$

Si \mathbf{S} es simétrico todas las raíces (posiblemente repetidas) de (1.20) son reales (tarea), por lo tanto en este caso todas las soluciones de la ecuación homogénea en (1.21) también son reales. Concluimos que cada tensor simétrico tiene exactamente tres valores propios reales, y cada valor propio distinto posee uno o más vectores propios independientes, los que a su vez son reales.

Lema 1.8 (Valores propios y vectores propios de tensores simétricos).

- 1.) *Los valores propios de un tensor simétrico y definido positivo son estrictamente positivos.*
- 2.) *Cualquier par de vectores propios correspondientes a dos valores propios de un tensor simétrico distintos son ortogonales.*

Demostración.

- 1.) Sea \mathbf{S} simétrico y definido positivo, y sea (λ, \mathbf{e}) un par propio (formado por un valor propio λ y un vector propio \mathbf{e} asociado). Entonces, como $\mathbf{S}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ y \mathbf{e} es unitario, se tiene que $0 < \mathbf{e} \cdot \mathbf{S}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \lambda$.
- 2.) Sea \mathbf{S} simétrico y sean (λ, \mathbf{e}) y (ω, \mathbf{d}) dos pares propios tales que $\lambda \neq \omega$. Entonces $\mathbf{S}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ y $\mathbf{S}\mathbf{d} = \omega\mathbf{d}$ implican que

$$\lambda\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{S}\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S}^T\mathbf{d} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S}\mathbf{d} = \omega\mathbf{e} \cdot \mathbf{d},$$

es decir $(\lambda - \omega)\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} = 0$. Como $\lambda \neq \omega$, llegamos a $\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} = 0$. ■

La demostración del siguiente resultado sigue del álgebra lineal.

Teorema 1.1 (Descomposición espectral). *Sea \mathbf{S} un tensor de segundo orden simétrico. Entonces existe una base ortonormal dextrógira $\{\mathbf{e}_i\}$ de \mathcal{V} que consiste en vectores propios de \mathbf{S} . Los valores propios correspondientes λ_i son los mismos (después de posiblemente ordenarlos) para toda base de este tipo y forman el conjunto completo de valores propios de \mathbf{S} .*

La representación diádica de \mathbf{S} en cualquier base de este tipo es

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

y la representación matricial es

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Los *invariantes principales* de un tensor de segundo orden son los tres escalares definidos por

$$I_1(\mathbf{S}) = \text{tr } \mathbf{S}, \quad I_2(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{S})^2 - \text{tr}(\mathbf{S}^2)), \quad I_3(\mathbf{S}) = \det \mathbf{S}.$$

(La siguiente notación se usa frecuentemente en la literatura: $\mathbf{I}_{\mathbf{S}} = I_1(\mathbf{S})$, $\mathbf{II}_{\mathbf{S}} = I_2(\mathbf{S})$, $\mathbf{III}_{\mathbf{S}} = I_3(\mathbf{S})$.) Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene para cualquier marco de coordenadas

$$\det(\mathbf{S} - \alpha \mathbf{I}) = -\alpha^3 + I_1(\mathbf{S})\alpha^2 - I_2(\mathbf{S})\alpha + I_3(\mathbf{S}).$$

Si \mathbf{S} es simétrico y λ_i son los valores propios de \mathbf{S} , entonces

$$I_1(\mathbf{S}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2(\mathbf{S}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad I_3(\mathbf{S}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

(demostración: tarea). Las cantidades $I_i(\mathbf{S})$ se llaman *invariantes* porque sus valores son independientes de cualquier marco de coordenadas en el cual son calculadas. La propiedad de invarianza de I_1 e I_2 sigue del Lema 1.5, y la invarianza de I_3 es una consecuencia del Lema 1.6.

En lo siguiente utilizaremos el símbolo $\mathcal{I}_{\mathbf{S}}$ para denotar el triple $(I_1(\mathbf{S}), I_2(\mathbf{S}), I_3(\mathbf{S}))$.

Teorema 1.2 (Cayley-Hamilton). *Cualquier tensor de segundo orden \mathbf{S} satisface*

$$\mathbf{S}^3 - I_1(\mathbf{S})\mathbf{S}^2 + I_2(\mathbf{S})\mathbf{S} - I_3(\mathbf{S})\mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

Demostración. Tarea. ■

1.1.3.10. *Descomposiciones especiales.*

Lema 1.9 (Raíz cuadrática tensorial). *Sea \mathbf{C} un tensor simétrico y definido positivo. Entonces existe un tensor simétrico y definido positivo único \mathbf{U} tal que $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$. En particular,*

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

donde $\{\mathbf{e}_i\}$ es cualquier marco formado por vectores propios de \mathbf{C} y $\lambda_i > 0$ son los valores propios correspondientes de \mathbf{C} . Habitualmente se escribe $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$.

Demostración. Tarea. ■

Teorema 1.3 (Descomposición polar). *Sea \mathbf{F} un tensor de segundo orden con $\det \mathbf{F} > 0$. Entonces existen las llamadas descomposiciones polares derecha e izquierda de \mathbf{F} dadas, respectivamente, por*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (1.22)$$

donde

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T}$$

son tensores simétricos y definidos positivos y \mathbf{R} es una rotación.

Demostración. Como $\det \mathbf{F} > 0$, el tensor \mathbf{F} es invertible, luego $\mathbf{F}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Análogamente, la transpuesta \mathbf{F}^T es invertible y $\mathbf{F}^T \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. En virtud de estas observaciones concluimos que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{v} = (\mathbf{F}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{v}) > 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{v} = (\mathbf{F}^T \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{v}) > 0 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

De donde $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ y $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ son definidos positivos y claramente simétricos, por lo tanto se pueden definir \mathbf{U} y \mathbf{V} utilizando el Lema 1.9.

Consideraremos ahora el tensor definido por $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$. Como $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ y $\det(\mathbf{R}\mathbf{U}) = (\det \mathbf{R})(\det \mathbf{U})$, se tiene que

$$\det \mathbf{R} = \frac{\det \mathbf{F}}{\det \mathbf{U}},$$

luego $\det \mathbf{R} > 0$ ya que $\det \mathbf{F} > 0$ y $\det \mathbf{U} > 0$. Además,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{U}^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^2 \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I},$$

por lo tanto \mathbf{R} efectivamente es una rotación y la descomposición polar derecha $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ está demostrada.

Para demostrar la descomposición polar izquierda $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ sea $\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}$. Entonces en virtud de argumentos similares a los anteriores deducimos que \mathbf{Q} también es una rotación, luego $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{Q}$. Queda por demostrar que $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$. Para tal efecto sea \mathbf{S} el tensor simétrico y definido positivo dado por $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V} \mathbf{Q}$, entonces $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{Q}\mathbf{S}$ y $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}$. Como \mathbf{R} es una rotación, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, lo que implica que $\mathbf{S}^2 = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Desde la unicidad del tensor raíz cuadrática deducimos que $\mathbf{S} = \mathbf{U}$, luego $\mathbf{R} = \mathbf{Q}$, lo que concluye la demostración de (1.22). ■

1.1.3.11. *Producto escalar de tensores de segundo orden.* Análogamente al producto escalar para vectores se define un producto escalar (interior) para tensores de segundo orden por

$$\mathbf{S} : \mathbf{D} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{D}). \quad (1.23)$$

In cualquier marco la base diádica $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ para \mathcal{V}^2 definida en la Sección 1.1.3.4 es efectivamente ortonormal con respecto al producto escalar definido por (1.23).

Lema 1.10 (Producto escalar tensorial). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco de coordenadas y sean $\mathbf{S} = S_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{D} = D_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ tensores de segundo orden. Entonces $\mathbf{S} : \mathbf{D} = S_{ij}D_{ij}$. Además, si \mathbf{S} es simétrico, entonces $\mathbf{S} : \mathbf{D} = \mathbf{S} : \text{sym}(\mathbf{D}) = \text{sym}(\mathbf{S}) : \text{sym}(\mathbf{D})$.*

Demostración. Tarea. ■

1.1.4. Tensores de cuarto orden. La descripción del comportamiento de cuerpos materiales requiere del concepto de *transformaciones lineales entre tensores de segundo orden*. Por ejemplo la relación entre la tensión y el estiramiento en un cuerpo material a veces es modelada mediante una de estas transformaciones. Las transformaciones lineales entre tensores de segundo orden dan origen al concepto de tensores de cuarto orden. Veremos que un tensor de cuarto orden será descrito por 81 componentes en cualquier marco de coordenadas Cartesiano para \mathbb{E}^3 .

1.1.4.1. *Definición de un tensor de cuarto orden.* Un *tensor de cuarto orden* \mathbf{C} sobre el espacio vectorial \mathcal{V} es una aplicación $\mathbf{C} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ que es lineal en el sentido de

- (i) $\mathbf{C}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{C}\mathbf{T}$ para todo $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$,
- (ii) $\mathbf{C}(\alpha\mathbf{T}) = \alpha\mathbf{C}\mathbf{T}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$.

Se denota el conjunto de todos los tensores de cuarto orden sobre \mathcal{V} por el símbolo \mathcal{V}^4 . Se define el tensor nulo de cuarto orden \mathbf{O} por la propiedad $\mathbf{O}\mathbf{T} = \mathbf{O}$ para todo $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$; además definimos el tensor identidad de cuarto orden \mathbf{I} por $\mathbf{I}\mathbf{T} = \mathbf{T}$ para todo $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$. Además, $\mathbf{C} \in \mathcal{V}^4$ y $\mathbf{D} \in \mathcal{V}^4$ se dicen *iguales* si $\mathbf{C}\mathbf{T} = \mathbf{D}\mathbf{T}$ para todo $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$.

Ejemplo 1.5. Para cualquier tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ la aplicación $\mathbf{C} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ dada por $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{A}\mathbf{T}$ define un tensor de cuarto orden. Para ver esto hay que verificar las dos propiedades mencionadas arriba, pero de acuerdo al álgebra de tensores de segundo orden,

$$\mathbf{C}(\alpha\mathbf{S} + \beta\mathbf{T}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{S} + \beta\mathbf{T}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{S} + \beta\mathbf{A}\mathbf{T} = \alpha\mathbf{C}(\mathbf{S}) + \beta\mathbf{C}(\mathbf{T})$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$. ■

1.1.4.2. *Álgebra de tensores de cuarto orden.* Sea \mathcal{V}^4 el conjunto de tensores de cuarto orden, entonces \mathcal{V}^4 posee la estructura de un espacio vectorial real porque $\mathbf{C} + \mathbf{D} \in \mathcal{V}^4$ para todo $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathcal{V}^4$ y $\alpha\mathbf{C} \in \mathcal{V}^4$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{C} \in \mathcal{V}^4$. Además podemos componer tensores de cuarto orden en el sentido de $\mathbf{C}\mathbf{D} \in \mathcal{V}^4$ para todo $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathcal{V}^4$. Similarmente a lo presentado en la Sección 1.1.3.2 definimos la suma $\mathbf{C} + \mathbf{D}$ mediante la relación $(\mathbf{C} + \mathbf{D})\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{T} + \mathbf{D}\mathbf{T}$ para todo $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$, y la composición $\mathbf{C}\mathbf{D}$ mediante $(\mathbf{C}\mathbf{D})\mathbf{T} = \mathbf{C}(\mathbf{D}\mathbf{T})$ para todo $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$. Una definición similar es válida para $\alpha\mathbf{C}$.

1.1.4.3. *Representación en un marco de coordenadas.* Las *componentes* de un tensor de cuarto orden \mathbf{C} en un marco de coordenadas $\{\mathbf{e}_i\}$ son los 81 números C_{ijkl} ($1 \leq i, j, k, l \leq 3$) definidos por

$$C_{ijkl} := \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_j.$$

Es decir, si definimos \mathbf{S}_{kl} como el tensor de segundo orden $\mathbf{S}_{kl} := \mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$, entonces $C_{ijkl} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}_{kl} \mathbf{e}_j$. Estas componentes describen completamente la transformación $\mathbf{C} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$. Efectivamente, si $\mathbf{U} = U_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{T} = T_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ son tensores relacionados por $\mathbf{U} = \mathbf{C}(\mathbf{T})$, por linealidad tenemos

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{U} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{T}) \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{C}(T_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_j T_{kl} \\ &= C_{ijkl} T_{kl}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

es decir las componentes de \mathbf{C} son los coeficientes en la relación lineal entre las componentes de \mathbf{U} y \mathbf{T} .

Ejemplo 1.6. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ dado, y sea el tensor de cuarto orden \mathbf{C} definido por $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{A}\mathbf{T}$. Entonces las componentes de \mathbf{C} son

$$C_{ijkl} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_k\delta_{lj} = A_{ik}\delta_{lj}.$$

■

Alternativamente podemos calcular las componentes C_{ijkl} utilizando el producto escalar para dos tensores de segundo orden, es decir como

$$C_{ijkl} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : \mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l). \quad (1.25)$$

Para ver esto, sea $\mathbf{S}_{kl} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$; notamos que

$$\mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \mathbf{S}_{kl} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}_{kl}\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = C_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Así,

$$(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) : \mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = C_{ijkl}(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = C_{ijkl}\delta_{mi}\delta_{nj} = C_{mnkl},$$

lo cual concluye la demostración de (1.25).

1.1.4.4. *Productos diádicos de cuarto orden y bases.* El *producto diádico* de cuatro vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y \mathbf{d} es el tensor de cuarto orden $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ definido por

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\mathbf{T} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{T}\mathbf{d})\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad \text{para todo } \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2.$$

Para cualquier marco de coordenadas $\{\mathbf{e}_i\}$ los 81 productos diádicos $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\}$ forman una *base* de \mathcal{V}^4 . En particular, cada $\mathbf{C} \in \mathcal{V}^4$ puede ser representado únicamente como

$$\mathbf{C} = C_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (1.26)$$

donde $C_{ijkl} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\mathbf{e}_j$. Para ver que la representación (1.26) es correcta consideramos la expresión $\mathbf{U} = \mathbf{C}\mathbf{T}$, donde $\mathbf{U} = U_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{T} = T_{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$. Luego

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}\mathbf{T} = (C_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\mathbf{T} = C_{ijkl}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_l)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = C_{ijkl}T_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

lo que implica $U_{ij} = C_{ijkl}T_{kl}$. Así (1.26) concuerda con (1.24) y da origen a una representación única de \mathbf{C} en términos de sus componentes C_{ijkl} .

1.1.4.5. *Propiedades de simetría.* Se dice que un tensor de cuarto orden $\mathbf{C} \in \mathcal{V}^4$ es *simétrico* o *posee simetría mayor* si

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}) : \mathbf{B} \quad \text{para todo } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2.$$

Se dice que \mathbf{C} *posee simetría menor a derecha* si

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \mathbf{A} : \mathbf{C}(\text{sym}(\mathbf{B})) \quad \text{para todo } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2,$$

y que \mathbf{C} *posee simetría menor a izquierda* si

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \text{sym}(\mathbf{A}) : \mathbf{C}(\mathbf{B}) \quad \text{para todo } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2.$$

Lema 1.11 (Simetrías de un tensor de cuarto orden). *Si un tensor de cuarto orden \mathbf{C} posee simetría mayor, entonces $C_{ijkl} = C_{klij}$. Si \mathbf{C} posee simetrías menores a derecha e izquierda, entonces $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ y $C_{ijkl} = C_{jikl}$, respectivamente.*

Demostración. Tarea. ■

1.1.5. Funciones tensoriales isotrópicas.

Definición 1.1 (Función isotrópica). *Una función $\mathbf{G} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ se llama isotrópica si*

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2 \text{ y toda rotación } \mathbf{Q}.$$

Similarmente, una función $g : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se llama isotrópica si

$$g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2 \text{ y toda rotación } \mathbf{Q}.$$

La condición de isotropía impone condiciones severas sobre funciones. El próximo resultado (aquí sin demostración) demuestra que cualquier función isotrópica que mapea el conjunto de tensores simétricos a si mismo debe tener una forma particularmente simple.

Lema 1.12 (Representación de funciones tensoriales isotrópicas). *Sea $\mathbf{G} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ una función isotrópica que mapea tensores simétricos a tensores simétricos, es decir $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ es simétrico si \mathbf{A} es simétrico. Entonces existen funciones $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \alpha_0(\mathcal{I}_{\mathbf{A}})\mathbf{I} + \alpha_1(\mathcal{I}_{\mathbf{A}})\mathbf{A} + \alpha_2(\mathcal{I}_{\mathbf{A}})\mathbf{A}^2 \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2 \text{ simétrico.}$$

Entonces, en virtud del Teorema 1.2 existen funciones $\beta_0, \beta_1, \beta_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \beta_0(\mathcal{I}_{\mathbf{A}})\mathbf{I} + \beta_1(\mathcal{I}_{\mathbf{A}})\mathbf{A} + \beta_2(\mathcal{I}_{\mathbf{A}})\mathbf{A}^{-1} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2 \text{ simétrico e invertible.}$$

Este resultado puede ser fortalecido si adicionalmente requerimos que \mathbf{G} sea lineal y que satisfaga $\mathbf{G}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}$ para todo \mathbf{W} antisimétrico. Este caso será de importancia particular para la discusión de modelos lineales de tensión en cuerpos sólidos y fluidos.

Lema 1.13 (Tensores de cuarto orden isotrópicos). *Sea $\mathbf{C} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ un tensor de cuarto orden isotrópico con las siguientes propiedades:*

- 1.) $\mathbf{C}(\mathbf{A}) \in \mathcal{V}^2$ es simétrico para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ simétrico.
- 2.) $\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}$ para todo $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$ antisimétrico.

Entonces existen escalares μ y λ tales que

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{A})\mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\mathbf{A}) \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2. \quad (1.27)$$

Demostración. Como $\mathbf{C} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ es una función isotrópica y mapea tensores simétricos a tensores simétricos podemos deducir del Lema 1.12 que existen funciones $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{C}(\mathbf{H}) = \alpha_0(\mathcal{I}_{\mathbf{H}})\mathbf{I} + \alpha_1(\mathcal{I}_{\mathbf{H}})\mathbf{H} + \alpha_2(\mathcal{I}_{\mathbf{H}})\mathbf{H}^2 \quad \text{para todo } \mathbf{H} \in \mathcal{V}^2 \text{ simétrico,}$$

donde recordamos que

$$\mathcal{I}_{\mathbf{H}} = \left(\text{tr } \mathbf{H}, \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{H})^2 - \text{tr}(\mathbf{H}^2)), \det \mathbf{H} \right).$$

Como $\mathbf{C}(\mathbf{H})$ es lineal en \mathbf{H} las únicas posibilidades son

$$\alpha_0(\mathcal{I}_{\mathbf{H}}) = c_0 \text{tr } \mathbf{H} + c_1, \quad \alpha_1(\mathcal{I}_{\mathbf{H}}) = c_2, \quad \alpha_2(\mathcal{I}_{\mathbf{H}}) = 0,$$

donde c_0, c_1 y c_2 son constantes escalares. Como $\mathbf{C}(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ se tiene que $c_1 = 0$. Así, poniendo $\lambda = c_0$ y $\mu = c_2/2$ obtenemos

$$\mathbf{C}(\mathbf{H}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{H} \quad \text{para todo } \mathbf{H} \in \mathcal{V}^2 \text{ simétrico.}$$

Combinando esto con el hecho de que $\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}$ para todo \mathbf{W} antisimétrico obtenemos (1.27) para $\mathbf{A} = \mathbf{H}$. ■

1.2. Cálculo tensorial

Para describir el comportamiento mecánico de un medio continuo se utilizarán escalares, vectores y tensores de segundo orden que en general pueden variar de punto a punto en un cuerpo material. Como un cuerpo puede ser identificado con un subconjunto del espacio Euclidiano nos interesan funciones de los tipos $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ y $\mathbf{S} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}^2$. Además, para describir la forma de cuerpos materiales y sus reacciones frente a cambios de forma estaremos interesados en funciones $\chi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $g : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{G} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$.

En la presente Sección 1.2 estudiaremos varios conceptos para diferentes tipos de funciones sobre \mathbb{E}^3 y \mathcal{V}^2 . Las ideas importantes que introduciremos son

- (i) la derivada o el gradiente, la divergencia, el rotacional o curl, y el Laplaciano para diferentes tipos de funciones sobre \mathbb{E}^3 ,
- (ii) los Teoremas de Divergencia, de Stokes y de Localización respectivos a integrales sobre diferentes subconjuntos de \mathbb{E}^3 ,
- (iii) la derivada de diferentes tipos de funciones sobre \mathcal{V}^2 .

Para todas las definiciones y resultados en esta sección suponemos (sin mención explícita) que las funciones siendo derivadas son suaves en el sentido que todas las derivadas parciales de todos los órdenes existen y son continuas. Tal hipótesis siempre será más restrictiva de lo que se necesita pero permite una presentación nítida.

1.2.1. Preliminares.

1.2.1.1. *Puntos, tensores y representaciones.* Se supone que un marco de coordenadas fijo y único $\{\mathbf{e}_i\}$ haya sido especificado para \mathbb{E}^3 . Bajo esta hipótesis podemos identificar puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$, vectores $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y tensores de segundo orden $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ con sus respectivas representaciones matriciales; en particular escribiremos

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{S} = S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Así, \mathbb{E}^3 y \mathcal{V} quedan identificados con \mathbb{R}^3 , y \mathcal{V}^2 queda identificado con $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Cualquier función de un punto \mathbf{x} es una función de las tres variables reales (x_1, x_2, x_3) , y cualquier función de un tensor de segundo orden \mathbf{S} es una función de las nueve variables $(S_{11}, S_{12}, \dots, S_{33})$.

1.2.1.2. *Normas estándar y símbolos de orden.*

Definición 1.2. Las normas estándar o Euclidianas sobre los espacios \mathbb{E}^3 , \mathcal{V} y \mathcal{V}^2 son las funciones escalares definidas por

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad |\mathbf{v}| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}, \quad |\mathbf{S}| := \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$, respectivamente.

Utilizando estas normas podemos definir límites en los espacios \mathbb{E}^3 , \mathcal{V} y \mathcal{V}^2 y la continuidad de funciones entre ellos.

Definición 1.3 (Símbolos \mathcal{O} y o). *Se considera una función $\mathbf{f} : U \rightarrow W$, donde U y W denotan cualquier de los espacios \mathbb{E}^3 , \mathcal{V} , \mathcal{V}^2 o \mathbb{R} .*

1.) *Si existen constantes $C > 0$ y $r > 0$ tales que*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{u})| \leq C|\mathbf{u}|^r \quad \text{cuando } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0},$$

entonces se escribe

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^r) \quad \text{cuando } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (1.28)$$

2.) *Si existe una constante $r > 0$ tal que*

$$\frac{|\mathbf{f}(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|^r} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0},$$

entonces se escribe

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = o(|\mathbf{u}|^r) \quad \text{cuando } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (1.29)$$

Los símbolos \mathcal{O} y o se llaman símbolos de orden estándar.

Los símbolos de orden son una manera de describir el comportamiento de una función $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ cuando \mathbf{u} aproxima cero o cualquier otro valor. El enunciado (1.28) significa que $|\mathbf{f}(\mathbf{u})|$ tiende a cero *por lo menos* tan rápidamente que $|\mathbf{u}|^r$. Por otro lado, (1.29) significa que $|\mathbf{f}(\mathbf{u})|$ tiende a cero *más* rápidamente que $|\mathbf{u}|^r$. Así, (1.29) implica (1.28), pero lo contrario no es válido. Sin embargo para $p > r$ encontramos que $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^p)$ implica $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = o(|\mathbf{u}|^r)$. Para dos funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g} : U \rightarrow W$ se utiliza la notación

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^r) \quad \text{cuando } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$$

para decir que

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^r) \quad \text{cuando } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0};$$

una notación similar se utiliza para el símbolo o .

1.2.2. Diferenciación de campos tensoriales. Se utiliza el término *campo* para referirse a una función definida en una región del espacio Euclidiano \mathbb{E}^3 . Un *campo escalar* es una función de la forma $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, un *campo vectorial* es de la forma $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$, y un *campo tensorial de segundo orden* es de la forma $\mathbf{S} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}^2$.

1.2.2.1. *Derivadas y gradientes.*

Definición 1.4. *Un campo escalar $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable en $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ si existe un vector $\nabla\phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ tal que*

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \phi(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|),$$

o equivalentemente

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = \left. \frac{d}{d\alpha}\phi(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) \right|_{\alpha=0} \quad \text{para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{V}, \quad (1.30)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. El vector $\nabla\phi(\mathbf{x})$ se llama derivada o gradiente de ϕ en \mathbf{x} .

Si ϕ es diferenciable en \mathbf{x} se puede demostrar que el vector $\nabla\phi(\mathbf{x})$ es único.

Lema 1.14 (Gradiente escalar en coordenadas). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario. Entonces*

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i, \quad (1.31)$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de \mathbf{x} en $\{\mathbf{e}_i\}$.

Demostración. Con un leve abuso de notación tenemos $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3)$. Para cualquier escalar α y cualquier vector $\mathbf{a} = a_k\mathbf{e}_k$ obtenemos

$$\phi(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) = \phi(x_1 + \alpha a_1, x_2 + \alpha a_2, x_3 + \alpha a_3).$$

Utilizando la Definición 1.4 y la regla de la cadena obtenemos

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = \left. \frac{d}{d\alpha}\phi(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(\mathbf{x})a_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(\mathbf{x})a_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\mathbf{x})a_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \cdot a_k\mathbf{e}_k,$$

lo cual implica (1.31). ■

Comentamos que la derivada de un campo escalar $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo vectorial $\nabla\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$. Además, a veces escribimos

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \phi_{,i}.$$

Como se supone que todas las derivadas parciales existen y son continuas podemos aplicar el Teorema de Taylor para concluir que para $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ pequeño,

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{x})h_i + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2), \quad (1.32)$$

o equivalentemente

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \phi(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2). \quad (1.33)$$

Así, en el caso suave, la diferencia entre $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ y $\phi(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ es $\mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2)$, no solamente $o(|\mathbf{h}|)$ como indicado en la definición de $\nabla\phi(\mathbf{x})$.

Definición 1.5. *Un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ se dice diferenciable en $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ si existe un tensor de segundo orden $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}^2$ tal que*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|),$$

o equivalentemente

$$\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{a} = \left. \frac{d}{d\alpha}\mathbf{v}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) \right|_{\alpha=0} \quad \text{para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{V}, \quad (1.34)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. El tensor $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$ se llama derivada o gradiente de \mathbf{v} en \mathbf{x} .

Si \mathbf{v} es diferenciable en \mathbf{x} se puede demostrar que el tensor $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$ necesariamente es único. El siguiente resultado genera una caracterización explícita de la derivada $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$ en cualquier marco de coordenadas.

Lema 1.15 (Gradiente vectorial en coordenadas). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario y sea $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$. Entonces*

$$\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (1.35)$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de \mathbf{x} en $\{\mathbf{e}_i\}$.

Demostración. Escribiendo las componentes v_i como funciones de las coordenadas x_j obtenemos (mediante un leve abuso de notación) $v_i(\mathbf{x}) = v_i(x_1, x_2, x_3)$. Para cualquier escalar α y vector $\mathbf{a} = a_k\mathbf{e}_k$ esto entrega

$$v_i(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) = v_i(x_1 + \alpha a_1, x_2 + \alpha a_2, x_3 + \alpha a_3),$$

luego utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$\left. \frac{d}{d\alpha} v_i(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial v_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})a_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2}(\mathbf{x})a_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3}(\mathbf{x})a_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})a_j.$$

Utilizando este resultado junto con la Definición 1.5 y propiedades del producto diádico obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{a} &= \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} v_i(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{a}) \right|_{\alpha=0} \mathbf{e}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})a_j \mathbf{e}_i \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) a_k \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

lo cual implica (1.35). ■

Comentamos que la derivada de un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ es un campo tensorial de segundo orden $\nabla\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}^2$. Además, a veces escribimos

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}.$$

Como se supone que todas las derivadas parciales existen y son continuas podemos aplicar el Teorema de Taylor para concluir que para $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ pequeño,

$$v_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = v_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})h_j + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2), \quad (1.36)$$

o equivalentemente, en notación tensorial,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h} + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2). \quad (1.37)$$

Así, en el caso suave, la diferencia entre $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ y $\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}$ es $\mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2)$, no solamente $o(|\mathbf{h}|)$ como indicado en la definición de $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Como identificamos puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ con sus vectores de posición $\mathbf{x} - \mathbf{o} \in \mathcal{V}$ relativos a un origen fijo, cualquier resultado válido para campos vectoriales $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ también es válido para *aplicaciones puntuales*, es decir para funciones del tipo $\chi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$. Así la

derivada o el gradiente de una aplicación puntual χ es un campo tensorial de segundo orden $\nabla\chi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}^2$, donde

$$\nabla\chi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\chi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

1.2.2.2. *Divergencia.*

Definición 1.6 (Divergencia de un campo vectorial). *A cada campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ se asocia un campo escalar $\nabla \cdot \mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $\nabla \cdot \mathbf{v} := \text{tr } \nabla\mathbf{v}$, llamado la divergencia de \mathbf{v} .*

Lema 1.16 (Divergencia de un campo vectorial en coordenadas). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario y $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$. Entonces*

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = v_{i,i}(\mathbf{x}),$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de \mathbf{x} en $\{\mathbf{e}_i\}$.

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa del Lema 1.15 y de la definición de la traza. ■

Para formular leyes de balance para cuerpos materiales sera útil extender esta definición a la divergencia de campos tensoriales de segundo orden. Hay varias extensiones posibles, pero aquí presentamos una extensión que entrega una forma conveniente del Teorema de Divergencia Tensorial (Teorema 1.4 abajo).

Definición 1.7 (Divergencia de un campo tensorial). *A cada campo tensorial de segundo orden $\mathbf{S} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}^2$ se asocia un campo vectorial $\nabla \cdot \mathbf{S} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ definido por*

$$(\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \quad \text{para todo vector } \mathbf{a} \text{ constante,}$$

llamado la divergencia de \mathbf{S} .

Teorema 1.4 (Divergencia tensorial en coordenadas). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario y $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = S_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Entonces*

$$(\nabla \cdot \mathbf{S})(\mathbf{x}) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i = S_{ij,j}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i,$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de \mathbf{x} en $\{\mathbf{e}_i\}$.

Demostración. Consideremos un vector arbitrario constante $\mathbf{a} = a_k\mathbf{e}_k$ y sea $\mathbf{q} = \mathbf{S}^T \mathbf{a}$. Entonces $\mathbf{q} = q_j\mathbf{e}_j$, donde $q_j = S_{ij}a_i$. Utilizando la Definición 1.7 y el Lema 1.16 obtenemos

$$(\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{q} = q_{j,j} = S_{ij,j}a_i = (S_{ij,j}\mathbf{e}_i) \cdot a_k\mathbf{e}_k,$$

lo cual implica $\nabla \cdot \mathbf{S} = S_{ij,j}\mathbf{e}_i$. ■

Lema 1.17 (Reglas de producto de gradiente y divergencia). *Sean ϕ , \mathbf{v} y \mathbf{S} campos escalares, vectoriales y tensoriales, respectivamente. Entonces*

$$\nabla(\phi\mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \nabla\phi + \phi\nabla\mathbf{v}, \quad \nabla \cdot (\phi\mathbf{S}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S}\nabla\phi, \quad \nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} : \nabla\mathbf{v}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{S} = S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Para demostrar el primer resultado notamos que $\phi \mathbf{v}$ es un campo vectorial y utilizamos el Lema 1.15 para obtener

$$\nabla(\phi \mathbf{v}) = \frac{\partial(\phi v_i)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = (v_i \phi_{,j} + \phi v_{i,j}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{v} \otimes \nabla \phi + \phi \nabla \mathbf{v}.$$

Para demostrar el segundo resultado notamos que $\phi \mathbf{S}$ es un campo vectorial de segundo orden, y utilizando el Teorema 1.4 obtenemos

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{S}) = \frac{\partial(\phi S_{ij})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = (S_{ij} \phi_{,j} + \phi S_{ij,j}) \mathbf{e}_i = \mathbf{S} \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{S}.$$

Para obtener el tercer resultado notamos que $\mathbf{S}^T \mathbf{v}$ es un campo tensorial; en particular $\mathbf{S}^T \mathbf{v} = S_{ij} v_i \mathbf{e}_j$. En virtud del Lema 1.16 obtenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{v}) = \frac{\partial(S_{ij} v_i)}{\partial x_j} = S_{ij,j} v_i + S_{ij} v_{i,j} = (\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v}.$$

■

1.2.2.3. El rotacional de un campo vectorial.

Definición 1.8 (Rotacional de un campo vectorial). *A cada campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ se asocia otro campo vectorial $\nabla \times \mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ definido por*

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{a} \quad \text{para todo vector constante } \mathbf{a}.$$

El campo vectorial $\nabla \times \mathbf{v}$ se llama rotacional o curl de \mathbf{v} .

Lema 1.18 (Rotacional vectorial en coordenadas). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario y sea $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$. Entonces*

$$(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk} v_{i,k}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j, \quad (1.38)$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de \mathbf{x} en $\{\mathbf{e}_i\}$. Equivalentemente,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \quad (1.39)$$

Demostración. En virtud del Lema 1.3 notamos que $\nabla \times \mathbf{v}$ es el vector axial asociado al tensor antisimétrico $\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T$. Si $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{T} = \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T$, entonces en cualquier marco tenemos

$$w_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (v_{i,k} - v_{k,i}). \quad (1.40)$$

Ejecutando la multiplicación en el lado derecho de (1.40) y utilizando que $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$ obtenemos

$$w_j = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} v_{i,k} - \varepsilon_{ijk} v_{k,i}) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} v_{i,k} + \varepsilon_{kji} v_{k,i}) = \varepsilon_{ijk} v_{i,k},$$

donde la última identidad sigue del hecho que i y k son índices mudos. Como $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ llegamos a (1.38). El resultado (1.39) sigue si ejecutamos las sumatorias indicadas utilizando la definición del símbolo de permutación. ■

1.2.2.4. *El Laplaciano.*

Definición 1.9 (Laplaciano de un campo escalar y vectorial). *A cualquier campo escalar $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se asocia otro campo escalar $\Delta\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$\Delta\phi := \nabla \cdot (\nabla\phi),$$

y a cualquier campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ se asocia otro campo vectorial $\Delta\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ definido por

$$\Delta\mathbf{v} := \nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}).$$

Los campos $\Delta\phi$ y $\Delta\mathbf{v}$ se llaman Laplaciano de ϕ y \mathbf{v} , respectivamente.

Lema 1.19 (Laplaciano escalar y vectorial en coordenadas). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario y $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$. Entonces*

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = \phi_{,ii}(\mathbf{x}), \quad \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_{i,jj}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i,$$

donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de \mathbf{x} en $\{\mathbf{e}_i\}$.

Demostración. En virtud del Lema 1.14 se sabe que $\nabla\phi = \phi_{,i}\mathbf{e}_i$ y utilizando el Lema 1.16 obtenemos $\Delta\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = (\phi_{,i})_{,i} = \phi_{,ii}$. Similarmente el Lema 1.15 nos entrega que $\nabla\mathbf{v} = v_{i,j}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, y utilizando el Lema 1.4 obtenemos

$$\Delta\mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}) = (v_{i,j})_{,j}\mathbf{e}_i = v_{i,jj}\mathbf{e}_i.$$

■

1.2.3. **Teoremas integrales.**

1.2.3.1. *Teorema de Divergencia.* En lo siguiente sea $B \subset \mathbb{E}^3$ una región *regular* en el siguiente sentido:

- (i) B consiste en un número finito de componentes abiertas, disjuntas y acotadas,
- (ii) la superficie ∂B es suave a trozos y a su vez consiste en un número finito de componentes disjuntas,
- (iii) cada componente de ∂B es orientable en el sentido de que claramente posee dos lados distintos.

El concepto de una región regular en \mathbb{E}^3 incluye muchos cuerpos de interés en la mecánica, en particular cuerpos con un número finito de “hoyos”.

Sea ahora dV un elemento de volumen infinitesimal en B y dA un elemento de superficie infinitesimal de ∂B . Se comunica el siguiente resultado sin demostración.

Teorema 1.5 (Teorema de Divergencia). *Sea B una región regular en \mathbb{E}^3 con una frontera suave a trozos ∂B , y sea $\mathbf{v} : B \rightarrow \mathcal{V}$ un campo vectorial arbitrario. Entonces*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_B \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV,$$

o en componentes,

$$\int_{\partial B} v_i n_i \, dA = \int_B v_{i,i} \, dV,$$

donde \mathbf{n} es el campo vectorial unitario normal exterior de ∂B . La cantidad que aparece en el lado izquierdo de esta relación se llama flujo de \mathbf{v} a través de la superficie orientada ∂B .

El Teorema 1.5 puede ser utilizado para aclarar el significado físico de la divergencia de un campo vectorial. Para tal efecto sea $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$ un punto arbitrario y sea Ω_δ la bola con centro \mathbf{y} , radio δ y frontera $\partial\Omega_\delta$. Entonces en virtud del Teorema 1.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dA &= \int_{\Omega_\delta} (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, dV = \int_{\Omega_\delta} ((\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\delta)) \, dV \\ &= \text{vol}(\Omega_\delta) ((\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\delta)), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\Omega_\delta)} \int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Concluimos que cuando δ es pequeño, $(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y})$ denota el flujo de \mathbf{v} a través de $\partial\Omega_\delta$ dividido por $\text{vol}(\Omega_\delta)$. Si interpretamos \mathbf{v} como un campo de velocidad en un fluido, entonces el flujo de \mathbf{v} a través de $\partial\Omega_\delta$ es igual a la tasa neta (volumen por tiempo unitario) con la cual el fluido sale de Ω_δ . En este sentido, $(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{y})$ es una medida de la expansión del volumen en \mathbf{y} .

La siguiente generalización del Teorema 1.5 a campos tensoriales de segundo orden será muy útil.

Teorema 1.6 (Teorema de Divergencia Tensorial). *Sea B una región regular en \mathbb{E}^3 con una frontera suave a trozos ∂B , y sea $\mathbf{S} : B \rightarrow \mathcal{V}^2$ un campo tensorial arbitrario. Entonces*

$$\int_{\partial B} \mathbf{S} \mathbf{n} \, dA = \int_B \nabla \cdot \mathbf{S} \, dV, \quad (1.41)$$

o en componentes,

$$\int_{\partial B} S_{ij} n_j \, dA = \int_B S_{ij,j} \, dV,$$

donde \mathbf{n} es el campo vectorial unitario normal exterior de ∂B .

Demostración. Sea \mathbf{a} un vector arbitrario constante. Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \int_{\partial B} \mathbf{S} \mathbf{n} \, dA = \int_{\partial B} \mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \mathbf{n} \, dA = \int_{\partial B} (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Como $\mathbf{S}^T \mathbf{a}$ es un campo vectorial podemos aplicar el Teorema 1.5 para obtener

$$\int_{\partial B} (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_B \nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \, dV,$$

y en virtud de la Definición 1.7,

$$\int_B \nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \, dV = \int_B \mathbf{a} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S}) \, dV = \mathbf{a} \cdot \int_B \nabla \cdot \mathbf{S} \, dV.$$

Como \mathbf{a} fue elegido arbitrario, concluimos que (1.41) efectivamente es válido. ■

1.2.3.2. *El Teorema de Stokes.* En lo siguiente se supone que $\Gamma \subset \mathbb{E}^3$ es una superficie acotada por una curva $C = \partial\Gamma$ simple, acotada y suave a trozos. Se supone que la superficie Γ es orientable, acotada y suave a trozos; además se supone que la orientación del campo tangencial unitario \mathbf{t} sobre C y el campo vectorial normal unitario \mathbf{n} sobre Γ son elegidas de tal manera que una “persona” que “camina” a lo largo de C en la dirección \mathbf{t} con la “cabeza” en la dirección \mathbf{n} siempre tiene la superficie Γ a su izquierda.

Se comunica el siguiente teorema sin demostración, donde dA denota un elemento de superficie en Γ infinitesimal, $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ es un campo vectorial arbitrario, y ds es un elemento de longitud infinitesimal sobre C .

Teorema 1.7 (Teorema de Stokes). *Sea Γ una superficie en \mathbb{E}^3 con una curva de frontera suave a trozos $C = \partial\Gamma$, y sea $\mathbf{v} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ un campo vectorial arbitrario. Entonces*

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds, \quad (1.42)$$

donde \mathbf{n} es un campo normal unitario sobre Γ y \mathbf{t} es un campo tangente unitario sobre C orientado tal como se especifica arriba. La cantidad que aparece en el lado derecho de (1.42) se llama *circulación de \mathbf{v} a lo largo de la curva orientada C* .

El Teorema 1.7 puede ser utilizado para aclarar la interpretación física del rotacional de un campo vectorial. Para tal efecto sea $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$ un punto arbitrario y sea Γ_{δ} un disco con centro \mathbf{y} , radio δ y frontera $\partial\Gamma_{\delta}$. Entonces el virtud del Teorema 1.7 se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Gamma_{\delta}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) \, ds &= \int_{\Gamma_{\delta}} (\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dA = \int_{\Gamma_{\delta}} ((\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\delta)) \, dA \\ &= \text{area}(\Gamma_{\delta})((\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\delta)), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area}(\Gamma_{\delta})} \int_{\partial\Gamma_{\delta}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds.$$

Supongamos que $(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y}) \neq 0$ en el punto \mathbf{y} bajo consideración, y sea el disco Γ_{δ} elegido tal que su vector normal está dado por

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y})}{|(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y})|}.$$

Entonces para esta selección de Γ_{δ} obtenemos

$$|(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y})| = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area}(\Gamma_{\delta})} \int_{\partial\Gamma_{\delta}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds,$$

es decir para valores pequeños de δ , $|(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y})|$ es la circulación de \mathbf{v} a lo largo de $\partial\Gamma_{\delta}$ dividida por el área de Γ_{δ} , donde Γ_{δ} es un disco del radio δ centrado en \mathbf{y} con normal \mathbf{n} en la dirección de $(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y})$. Si interpretamos \mathbf{v} como la velocidad de un fluido, entonces $(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{y})$ puede ser interpretado como dos veces la velocidad angular local del fluido en \mathbf{y} .

1.2.3.3. *Teorema de Localización.*

Teorema 1.8 (Teorema de Localización). *Sea $B \subset \mathbb{E}^3$ un conjunto abierto y sea $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea Ω un subconjunto abierto arbitrario de B . Si*

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \, dV = 0 \quad \text{para todo } \Omega \subseteq B, \quad (1.43)$$

entonces $\phi(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in B$.

Demostración. Supongamos que existe algún $\mathbf{y} \in B$ tal que $\phi(\mathbf{y}) \neq 0$, por ejemplo $\phi(\mathbf{y}) = 2\delta > 0$. Entonces, por la continuidad de ϕ y como B es abierto, existe una vecindad abierta Ω de \mathbf{y} tal que $\Omega \subset B$ y $\phi(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. En tal caso,

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \, dV > \delta \, \text{vol}(\Omega) > 0,$$

lo que se contradice con (1.43), por lo tanto $\phi(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in B$. ■

El Teorema 1.8 sigue siendo válido si el campo escalar ϕ es remplazado por un campo vectorial \mathbf{v} o un tensor de segundo orden \mathbf{S} . En particular el resultado para campos escalares puede ser aplicado a cada una de las componentes de un vector o un tensor de segundo orden. Por otro lado, el Teorema 1.8 puede ser generalizado a otro tipo de integrales. Por ejemplo, si Γ es un disco abierto y

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \, dA = 0 \quad \text{para todo subconjunto } \Omega \subseteq \Gamma \text{ abierto,}$$

entonces mediante un argumento similar podemos demostrar que $\phi(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Gamma$.

1.2.4. **Funciones de tensores de segundo orden.**1.2.4.1. *Funciones escalares de tensores de segundo orden.*

Definición 1.10. *Una función $\psi : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se llama diferenciable en $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ si existe un tensor de segundo orden $D\psi(\mathbf{A}) \in \mathcal{V}^2$, llamado derivada de ψ en \mathbf{A} , tal que*

$$\psi(\mathbf{A} + \mathbf{H}) = \psi(\mathbf{A}) + D\psi(\mathbf{A}) : \mathbf{H} + o(|\mathbf{H}|),$$

o equivalentemente,

$$D\psi(\mathbf{A}) : \mathbf{B} = \left. \frac{d}{d\alpha} \psi(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) \right|_{\alpha=0} \quad \text{para todo } \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2.$$

Si ψ es diferenciable en \mathbf{A} se puede demostrar que el tensor $D\psi(\mathbf{A})$ necesariamente es único. La segunda caracterización sigue de la primera si ponemos $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{B}$, dividiendo por α y tomando el límite $\alpha \rightarrow 0$.

Lema 1.20 (Derivada de una función escalar en componentes). *Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario, y sean $(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33})$ las componentes de \mathbf{A} en el marco $\{\mathbf{e}_i\}$. Entonces*

$$D\psi(\mathbf{A}) = \frac{\partial \psi}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.44)$$

Demostración. Escribiendo ψ como función de las componentes A_{ij} obtenemos (mediante un leve abuso de notación) $\psi(\mathbf{A}) = \psi(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33})$. Para cualquier escalar α y tensor $\mathbf{B} = B_{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ esto entrega

$$\psi(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) = \psi(A_{11} + \alpha B_{11}, \dots, A_{33} + \alpha B_{33}).$$

Utilizando la Definición 1.10 y la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} D\psi(\mathbf{A}) : \mathbf{B} &= \left. \frac{d}{d\alpha} \psi(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial\psi}{\partial A_{11}}(\mathbf{A}) + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial A_{33}}(\mathbf{A}) \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) : B_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de (1.44). ■

Comentamos que la derivada de una función escalar $\psi : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tensorial de segundo orden $D\psi : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$. Por otro lado, como se supone que todas las derivadas parciales existen y son continuas, podemos utilizar el Teorema de Taylor para deducir que para todo tensor $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$ pequeño,

$$\psi(\mathbf{A} + \mathbf{H}) = \psi(\mathbf{A}) + \frac{\partial\psi}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) H_{ij} + \mathcal{O}(|\mathbf{H}|^2)$$

o equivalentemente,

$$\psi(\mathbf{A} + \mathbf{H}) = \psi(\mathbf{A}) + D\psi(\mathbf{A}) : \mathbf{H} + \mathcal{O}(|\mathbf{H}|^2).$$

Así, en el caso suave la diferencia entre $\psi(\mathbf{A} + \mathbf{H})$ y $\psi(\mathbf{A}) + D\psi(\mathbf{A}) : \mathbf{H}$ es $\mathcal{O}(|\mathbf{H}|^2)$, y no solamente $o(|\mathbf{H}|)$ como la definición de $D\psi(\mathbf{A})$ indica.

Ejemplo 1.7. Consideremos la función $\psi : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \mathbf{A} : \mathbf{A} = \frac{1}{2} A_{kl} A_{kl}.$$

Para calcular $D\psi(\mathbf{A})$ tomamos la derivada parcial de ψ con respecto a una componente general A_{ij} , lo que entrega

$$\frac{\partial\psi}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{kl}}{\partial A_{ij}} A_{kl} + \frac{1}{2} A_{kl} \frac{\partial A_{kl}}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial A_{kl}}{\partial A_{ij}} A_{kl}.$$

Como $\partial A_{kl} / \partial A_{ij} = \delta_{ki} \delta_{lj}$ obtenemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial A_{ij}}(\mathbf{A}) = \delta_{ki} \delta_{lj} A_{kl} = A_{ij},$$

es decir $D\psi(\mathbf{A}) = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{A}$. ■

Lema 1.21 (Derivada del determinante). *Sea $\psi(\mathbf{S}) = \det \mathbf{S}$. Si \mathbf{A} es invertible, entonces la derivada de ψ en \mathbf{A} es*

$$D\psi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}. \quad (1.45)$$

Demostración. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{V}^2$ arbitrario, entonces para $\lambda = -1/\alpha$ se tiene que

$$\psi(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) = \det(\alpha\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})) = \det(\alpha\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}).$$

Por la definición del determinante de $\alpha\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ se tiene que $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^3 \det \mathbf{A}$, y por la definición de los invariantes principales del tensor de segundo orden $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= -\lambda^3 + \lambda^2 I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) - \lambda I_2(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) + I_3(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) + \frac{1}{\alpha} I_2(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) + I_3(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}), \end{aligned}$$

es decir

$$\psi(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \alpha(\det \mathbf{A})I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) + \alpha^2(\det \mathbf{A})I_2(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) + \alpha^3(\det \mathbf{A})I_3(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}).$$

Esta expresión y la Definición 1.10 implican que

$$D\psi(\mathbf{A}) : \mathbf{B} = (\det \mathbf{A})I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}),$$

y como $I_1(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{A}^{-\text{T}} : \mathbf{B}$ encontramos que

$$D\psi(\mathbf{A}) : \mathbf{B} = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-\text{T}} : \mathbf{B}.$$

El resultado deseado (1.45) sigue porque \mathbf{B} es arbitrario. ■

Lema 1.22 (Derivada del determinante con respecto al tiempo). *Sea \mathbf{S} un tensor de segundo orden que depende del tiempo, es decir $\mathbf{S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}^2$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}(\det \mathbf{S}) = (\det \mathbf{S}) \text{tr}(\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}) = \det(\mathbf{S})\mathbf{S}^{-\text{T}} : \dot{\mathbf{S}}, \quad (1.46)$$

donde

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{dS_{ij}}{dt} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Demostración. Sea $\psi(\mathbf{S}) = \det \mathbf{S}$, entonces

$$\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{S}) = \frac{d}{dt}\psi(S_{11}, S_{12}, \dots, S_{33}).$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{S}) = \frac{\partial\psi}{\partial S_{11}}(\mathbf{S}) \frac{dS_{11}}{dt} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial S_{33}}(\mathbf{S}) \frac{dS_{33}}{dt} = D\psi(\mathbf{S}) : \dot{\mathbf{S}}.$$

Como $D\psi(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S})\mathbf{S}^{-\text{T}}$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S})\mathbf{S}^{-\text{T}} : \dot{\mathbf{S}} = (\det \mathbf{S}) \text{tr}(\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}).$$

■

1.2.4.2. Funciones tensoriales.

Definición 1.11 (Función tensorial diferenciable). Una función $\Sigma : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ se dice diferenciable en $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ si existe un tensor de cuarto orden $D\Sigma(\mathbf{A}) \in \mathcal{V}^4$, llamado derivada de Σ en \mathbf{A} , tal que

$$\Sigma(\mathbf{A} + \mathbf{H}) = \Sigma(\mathbf{A}) + D\Sigma(\mathbf{A})\mathbf{H} + o(|\mathbf{H}|)$$

o equivalentemente

$$D\Sigma(\mathbf{A})\mathbf{B} = \left. \frac{d}{d\alpha} \Sigma(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) \right|_{\alpha=0} \quad \text{para todo } \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si Σ es diferenciable en \mathbf{A} se puede demostrar que el tensor $D\Sigma(\mathbf{A})$ necesariamente es único. La segunda caracterización sigue de la primera si ponemos $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{B}$, dividiendo por α y tomando el límite $\alpha \rightarrow 0$.

Lema 1.23 (Derivada de una función tensorial en componentes). Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario y sea $\Sigma(\mathbf{A}) = \Sigma_{ij}(\mathbf{A})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Sean $(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33})$ las componentes de \mathbf{A} en el marco $\{\mathbf{e}_i\}$. Entonces

$$D\Sigma(\mathbf{A}) = \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{kl}}(\mathbf{A})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (1.47)$$

Demostración. Escribiendo las componentes Σ_{ij} como funciones de las componentes A_{ij} obtenemos (mediante un leve abuso de notación) $\Sigma_{ij}(\mathbf{A}) = \Sigma_{ij}(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33})$. Para cualquier escalar α y tensor $\mathbf{B} = B_{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ esto entrega

$$\Sigma_{ij}(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) = \Sigma_{ij}(A_{11} + \alpha B_{11}, \dots, A_{33} + \alpha B_{33}).$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \Sigma_{ij}(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{11}}(\mathbf{A})B_{11} + \dots + \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{33}}(\mathbf{A})B_{33} = \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{kl}} B_{kl}.$$

Utilizando este resultado y la Definición 1.11 obtenemos

$$\begin{aligned} D\Sigma(\mathbf{A})\mathbf{B} &= \left. \frac{d}{d\alpha} \Sigma(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} \Sigma_{ij}(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) \right|_{\alpha=0} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{kl}}(\mathbf{A})B_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \left(\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{kl}}(\mathbf{A})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right) \mathbf{B}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de (1.47). ■

Comentamos que la derivada de una función tensorial de segundo orden $\Sigma : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ es una función tensorial de cuarto orden $D\Sigma : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^4$. Por otro lado, como se supone que todas las derivadas parciales existen y son continuas, podemos utilizar el Teorema de Taylor para deducir que para todo tensor $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$ pequeño,

$$\Sigma_{ij}(\mathbf{A} + \mathbf{H}) = \Sigma_{ij}(\mathbf{A}) + \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{kl}}(\mathbf{A})H_{kl} + \mathcal{O}(|\mathbf{H}|^2)$$

o en notación tensorial,

$$\Sigma(\mathbf{A} + \mathbf{H}) = \Sigma(\mathbf{A}) + D\Sigma(\mathbf{A})\mathbf{H} + \mathcal{O}(|\mathbf{H}|^2).$$

Así, en el caso suave la diferencia entre $\Sigma(\mathbf{A} + \mathbf{H})$ y $\Sigma(\mathbf{A}) + D\Sigma(\mathbf{A})\mathbf{H}$ es $\mathcal{O}(|\mathbf{H}|^2)$, y no solamente $o(|\mathbf{H}|)$ como la definición de $D\Sigma(\mathbf{A})$ indica.

Ejemplo 1.8. Consideremos la función $\Sigma : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ definida por $\Sigma(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A}$, o en componentes, $\Sigma_{ij}(\mathbf{A}) = A_{mm}A_{ij}$. Entonces las componentes $[D\Sigma(\mathbf{A})]_{ijkl}$ de la derivada $D\Sigma(\mathbf{A})$ están dadas por

$$\begin{aligned} [D\Sigma(\mathbf{A})]_{ijkl} &= \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial A_{kl}}(\mathbf{A}) = \frac{\partial A_{mm}}{\partial A_{kl}}A_{ij} + A_{mm} \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{kl}} = \delta_{mk}\delta_{ml}A_{ij} + A_{mm}\delta_{ik}\delta_{jl} \\ &= \delta_{kl}A_{ij} + A_{mm}\delta_{ik}\delta_{jl}. \end{aligned}$$

Para cualquier $\mathbf{B} \in \mathcal{V}^2$ se obtiene entonces

$$\begin{aligned} D\Sigma(\mathbf{A})\mathbf{B} &= [D\Sigma(\mathbf{A})]_{ijkl}B_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = (\delta_{kl}A_{ij}B_{kl} + A_{mm}\delta_{ik}\delta_{jl}B_{kl})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \text{tr}(\mathbf{B})\mathbf{A} + \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{B}. \end{aligned}$$

■

1.3. Ejercicios

Problema 1.1 (Tarea 1, Curso 2012).

- Resolver las expresiones (i) $\delta_{ii}\delta_{jj}$, (ii) $\delta_{\alpha 1}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma 1}$.
- Resolver las expresiones (i) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$, (ii) $\varepsilon_{ijk}\delta_{2j}\delta_{3k}\delta_{1i}$.
- Escribir la expresión $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ sin utilizar el producto vectorial \times , y sin índices.
- Demostrar que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) - \mathbf{d}(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))$.
- Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vectores linealmente independientes y \mathbf{v} un vector dado por $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Demostrar que

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{ijk}v_i b_j c_k}{\varepsilon_{pqr}a_p b_q c_r},$$

y encontrar fórmulas análogas para β y γ .

Problema 1.2 (Tarea 1, Curso 2012).

- Sea \mathbf{A} un tensor de segundo orden simétrico y \mathbf{B} un tensor de segundo orden anti-simétrico. Demostrar que $\mathbf{A} : \mathbf{B} = 0$.
- Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} tensores de segundo orden y \mathbf{v} un vector. Demostrar que (i) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\text{sym } \mathbf{A})\mathbf{v}$, (ii) $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{sym}(\mathbf{A}) : \text{sym}(\mathbf{B}) + \text{skew}(\mathbf{A}) : \text{skew}(\mathbf{B})$.
- Sea \mathbf{Q} un tensor de segundo orden e \mathbf{I} el tensor identidad. Demostrar que \mathbf{Q} es ortogonal si $\mathbf{H} = \mathbf{Q} - \mathbf{I}$ satisface $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{O}$.
- Sean \mathbf{S} y \mathbf{E} tensores de segundo orden simétricos tales que $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{E}$, donde $\mathbf{C} \in \mathcal{V}^4$ posee las componentes

$$C_{ijrs} = \lambda\delta_{ij}\delta_{rs} + \mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}).$$

Demostrar que

$$\mathbf{S} = \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{S} - \frac{\lambda \operatorname{tr} \mathbf{S}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\mathbf{I}.$$

Problema 1.3 (Tarea 1, Curso 2012).

a) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ un tensor invertible. Demostrar que

$$\frac{\partial(\ln \det \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-\text{T}}; \quad \frac{\partial(\ln \det(\mathbf{A}^{-1}))}{\partial \mathbf{A}} = -\mathbf{A}^{-\text{T}}.$$

b) Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} constantes. Demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\text{T}}))}{\partial \mathbf{S}} &= \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{B}, & \frac{\partial(\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{S}^{\text{T}}\mathbf{B}^{\text{T}}))}{\partial \mathbf{S}} &= \mathbf{B}^{\text{T}}\mathbf{A}, \\ \frac{\partial(\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\text{T}}\mathbf{S}^{\text{T}}))}{\partial \mathbf{S}} &= \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{S}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\text{T}}. \end{aligned}$$

c) Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ simétrico y definido positivo. Demostrar que

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} = I_1(\mathbf{S})\mathbf{I} - \mathbf{S}, \quad \frac{\partial I_3(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} = I_3(\mathbf{S})\mathbf{S}^{-\text{T}}.$$

Problema 1.4 (Tarea 1, Curso 2012).

a) Sea B una región en \mathbb{E}^3 con frontera ∂B y \mathbf{n} el vector normal unitario exterior sobre ∂B . Sea \mathbf{v} un campo vectorial definido en B . Utilizando el teorema de divergencia para tensores de segundo orden, demostrar que

$$\int_B \nabla \mathbf{v} \, dV = \int_{\partial B} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} \, dA.$$

b) Sea, además, \mathbf{w} otro campo vectorial y \mathbf{S} un campo tensorial definidos sobre B . Demostrar que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} (\mathbf{S}\mathbf{n}) \otimes \mathbf{v} \, dA &= \int_B ((\nabla \cdot \mathbf{S}) \otimes \mathbf{v} + \mathbf{S}\nabla \mathbf{v}^{\text{T}}) \, dV, \\ \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{n}) \, dA &= \int_B ((\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v}) \, dV, \\ \int_{\partial B} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})\mathbf{v} \, dA &= \int_B ((\nabla \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{w}) \, dV. \end{aligned}$$

c) Demostrar que el Teorema de Stokes puede ser escrito como

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times) : \nabla \mathbf{v} \, dA.$$

d) Supongamos que el campo vectorial \mathbf{v} satisface $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre Γ . Utilizando el Teorema de Stokes demostrar que

$$\int_C (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \nabla \mathbf{v} \, dA.$$

Problema 1.5 (Certamen 1, Curso 2012). Sea $\mathbf{C} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ un tensor de orden 4 definido por $\mathbf{C}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} + \mathbf{A}$, y sea la función $\psi : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{A})$. Demostrar que:

- $\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}) : \mathbf{B}$ para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2$,
- $D\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A})$.

Problema 1.6 (Certamen 1, Curso 2013). Sean $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\hat{\mathbf{e}}_i(t)\}$ dos marcos de coordenadas en \mathbb{E}^3 , donde el primero es fijo (independiente del tiempo) y el segundo es móvil (dependiente del tiempo). Además, sea $\mathbf{Q}(t)$ el tensor cambio de base desde $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\hat{\mathbf{e}}_i(t)\}$ tal que $\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i$ (omitiendo los argumentos t por brevedad).

- Demostrar que la derivada temporal $d\hat{\mathbf{e}}_i/dt$, como medida por un observador en el marco fijo, puede ser expresada como

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\hat{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_i,$$

donde $\boldsymbol{\Omega}(t)$ es el tensor antisimétrico definido por $d\mathbf{Q}/dt = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}$ o equivalentemente, $\boldsymbol{\Omega} = (d\mathbf{Q}/dt)\mathbf{Q}^T$, y $\boldsymbol{\omega}(t)$ es el vector axial de $\boldsymbol{\Omega}(t)$.

- Sean Q_{ij} y Ω_{jk} las componentes de \mathbf{Q} y $\boldsymbol{\Omega}$ en el marco fijo. Demostrar que para cualquier vector $\mathbf{v} = \hat{v}_i\hat{\mathbf{e}}_i = v_i\mathbf{e}_i$,

$$\frac{d\hat{v}_i}{dt} = Q_{ji} \left(\frac{dv_j}{dt} - \Omega_{jk}v_k \right). \quad (1.48)$$

- Sean

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{dv_i}{dt}\mathbf{e}_i, \quad \overset{\circ}{\mathbf{v}} = \frac{d\hat{v}_j}{dt}\hat{\mathbf{e}}_j.$$

El vector $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$ se llama *derivada co-rotacional* o *derivada de Jaumann* de \mathbf{v} con respecto a $\boldsymbol{\Omega}$. Demostrar que $\overset{\circ}{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}$ e interpretar el resultado.

Conceptos de masa y fuerza del continuo

En este capítulo introduciremos el concepto de un cuerpo continuo y discutiremos sus propiedades de masa, y los diferentes tipos de fuerza que pueden actuar sobre él. Veremos que la discusión de fuerzas internas de un cuerpo continuo nos llevará al concepto de un campo tensorial de tensión—nuestro primer ejemplo de un campo tensorial de segundo orden en un contexto físico. Introduciremos las condiciones básicas necesarias para el equilibrio mecánico de un cuerpo continuo, luego derivaremos el enunciado correspondiente en términos de ecuaciones diferenciales.

Las ideas importantes de este capítulo son las siguientes:

- (i) el concepto de la densidad de masa, el cual nos permite definir la masa de una parte arbitraria de un cuerpo,
- (ii) el concepto de los campos de fuerza de cuerpo y de superficie, los que nos permiten definir la fuerza resultante y el momento de torsión sobre una parte arbitraria del cuerpo,
- (iii) el concepto del campo de tensión de Cauchy y su relación con los campos de fuerza de superficie, y
- (iv) las ecuaciones del equilibrio de un cuerpo.

2.1. Cuerpos continuos

La hipótesis más básica consiste en que para cualquier cuerpo material, sea un sólido, fluido, o gas, el material involucrado puede ser modelado como *continuo*; se ignora la naturaleza atómica de la materia y se supone que la materia es infinitamente divisible. Esta hipótesis nos lleva a modelos materiales muy efectivos en escalas de longitud mucho mayores que el espacio interatómico típico. Sin embargo para escalas comparables o menores que el espacio interatómico esta hipótesis ya no es válida.

La hipótesis del continuo nos permite identificar, en cualquier instante fijo, un cuerpo material con un subconjunto $B \subseteq \mathbb{E}^3$ del espacio Euclidiano \mathbb{E}^3 . En particular, cualquier partícula material se identifica con un punto $\boldsymbol{x} \in B$. El conjunto B se llama *configuración* del cuerpo en \mathbb{E}^3 . A menos que el contrario sea mencionado explícitamente siempre se supondrá que B es un cuerpo regular en el sentido de la Sección 1.2.3.1. Se identifican cuerpos materiales con subconjuntos *abiertos* puramente por conveniencia matemática. Igualmente sería razonable identificar un cuerpo material con la clausura de un tal subconjunto.

De acuerdo a la experiencia física, un cuerpo tiende a moverse y en general cambia su forma bajo el efecto de influencia externa. Así, en general un cuerpo material dado asume diversas configuraciones en el transcurso del tiempo. Sin embargo para el propósito del análisis en este capítulo nos concentraremos en un instante fijo, y una configuración B única.

2.2. Masa

La *masa* es una propiedad física que cuantifica la resistencia a aceleración. Aquí introduciremos los conceptos centrales de la densidad de masa para un cuerpo continuo y del centro de masa.

2.2.1. Densidad de masa. De acuerdo a la hipótesis del continuo suponemos que el cuerpo B está distribuido continuamente sobre la totalidad del volumen, además se supone que cualquier subconjunto de B con volumen positivo posee masa positiva, y que esta masa tiende a cero cuando el volumen tiende a cero. Para precisar estas ideas denotamos por $\text{mass}(\Omega)$ la masa de un subconjunto abierto $\Omega \subseteq B$. Luego suponemos que existe un *campo de densidad de masa* por volumen unitario $\varrho : B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\text{mass}(\Omega) = \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}}.$$

Se supone que $\varrho(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in B$, y se utiliza $dV_{\mathbf{x}}$ para denotar un elemento de volumen infinitesimal en $\mathbf{x} \in \Omega$. En particular, el volumen de Ω está dado por

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dV_{\mathbf{x}}.$$

Formalmente el campo de densidad ϱ puede ser definido de acuerdo lo siguiente. Sea $\mathbf{x} \in B$ un punto arbitrario y sea $\Omega_{\delta}(\mathbf{x})$ una familia de volúmenes tal que $\text{vol}(\Omega_{\delta}(\mathbf{x})) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$ y $\mathbf{x} \in \Omega_{\delta}(\mathbf{x})$ para cada $\delta > 0$. Entonces

$$\varrho(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{mass}(\Omega_{\delta}(\mathbf{x}))}{\text{vol}(\Omega_{\delta}(\mathbf{x}))}.$$

Nuestra hipótesis básica sobre la distribución de masa en un continuo es que este límite existe y es positivo para cada $\mathbf{x} \in B$. Además suponemos que este límite es el mismo para cada familia Ω_{δ} con las propiedades mencionadas.

2.2.2. Centro de masa. El *centro de masa* de un subconjunto abierto $\Omega \subseteq B$ es el punto

$$\mathbf{x}_{\text{com}} = \frac{1}{\text{mass}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}}.$$

El *centro de volumen* de un subconjunto abierto $\Omega \subseteq B$ es el punto

$$\mathbf{x}_{\text{cov}} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathbf{x} \, dV_{\mathbf{x}}.$$

Notar que no necesariamente $\mathbf{x}_{\text{com}} \in B$ o $\mathbf{x}_{\text{cov}} \in B$.

2.3. Fuerza

Las interacciones mecánicas entre diferentes partes de un cuerpo o entre un cuerpo y su entorno se describen por *fuerzas*. Aquí describiremos dos tipos básicos de fuerzas: fuerzas de cuerpo, las cuales actúan sobre puntos interiores de un cuerpo, y fuerzas superficiales que actúan sobre superficies internas entre diferentes partes de un cuerpo, y sobre superficies externas entre el cuerpo y su entorno.

2.3.1. Fuerza de cuerpo. El término *fuerza de cuerpo* denomina cualquier fuerza que no origina en el contacto físico entre cuerpos. Tal fuerza es el resultado de una acción distante. Un ejemplo típico es la fuerza gravitacional. La fuerza de cuerpo, por volumen unitario, ejecutada por una influencia externa sobre un cuerpo B supuestamente está dada por una función $\hat{\mathbf{b}} : B \rightarrow \mathcal{V}$, llamada *campo de fuerza de cuerpo* sobre B .

Sea $\Omega \subseteq B$ un subconjunto abierto arbitrario de B . Entonces la fuerza resultante sobre Ω debido a un campo de fuerza de cuerpo por volumen unitario está definida como

$$\mathbf{r}_b(\Omega) = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}},$$

y el momento de torsión resultante en torno a un punto \mathbf{z} está definido por

$$\boldsymbol{\tau}_b(\Omega) = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}.$$

A veces es conveniente introducir un campo de fuerza de cuerpo por masa unitaria definido por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}).$$

En este caso la fuerza resultante es

$$\mathbf{r}_b(\Omega) = \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}},$$

y el momento de torsión resultante en torno a \mathbf{z} está dado por

$$\boldsymbol{\tau}_b(\Omega) = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times (\varrho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x})) dV_{\mathbf{x}}.$$

Se puede lograr que $\boldsymbol{\tau}_b(\Omega) = \mathbf{0}$ por la selección apropiada del punto de referencia \mathbf{z} . Por ejemplo, si \mathbf{b} es uniforme (constante), entonces el momento de torsión en torno al centro de masa \mathbf{x}_{com} desaparece. Similarmente, si la fuerza de cuerpo por volumen unitario $\hat{\mathbf{b}}$ es uniforme, entonces el momento de torsión $\boldsymbol{\tau}_b(\Omega)$ en torno al centro de volumen \mathbf{x}_{cov} desaparece.

2.3.2. Fuerza de superficie. Se denomina por *fuerza de superficie* cualquier fuerza que origina en el contacto físico entre cuerpos. Si nos referimos a una fuerza de superficie a lo largo de una superficie imaginaria en el interior de un cuerpo se dice que la fuerza es *interna*. Por otro lado, si nos referimos a una fuerza de superficie a lo largo de la superficie que limita un cuerpo se dice que la fuerza es *externa*. A grandes rasgos, las fuerzas de superficie internas son las que aseguran la cohesión de un cuerpo bajo la aplicación de una carga porque resisten a la tendencia de una parte del cuerpo de ser arrancada desde otra parte. Por otro lado, las fuerzas de superficie externas son las fuerzas de contacto aplicadas a un cuerpo por su entorno.

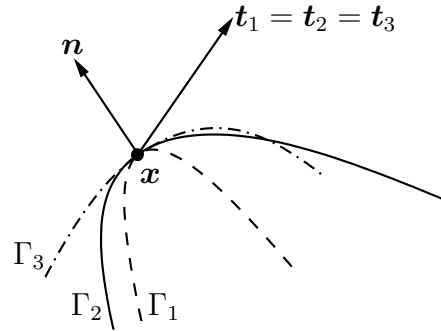


FIGURA 2.1. Ilustración del Axioma 2.1 (Postulado de Cauchy).

2.3.2.1. *Concepto de un campo de tracción.* Sea Γ una superficie arbitraria orientada en B con un campo normal unitario $\hat{\mathbf{n}} : \Gamma \rightarrow \mathcal{V}$. En cada punto $\mathbf{x} \in \Gamma$ la normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ define un lado positivo y un lado negativo de Γ . La fuerza por área unitaria que ejerce el material ubicado al lado positivo sobre el material al lado negativo supuestamente está dada por una función $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} : \Gamma \rightarrow \mathcal{V}$, la cual se llama *tracción* o *campo de fuerza superficial* sobre Γ . Si Γ pertenece a la superficie que acota B , siempre se elige $\hat{\mathbf{n}}$ como campo unitario normal exterior. En este caso $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}$ representa la fuerza por área unitaria aplicada a la superficie de B externamente.

La fuerza resultante de un campo de tracción aplicado a una superficie orientada está dada por

$$\mathbf{r}_s(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) \, dA_{\mathbf{x}},$$

donde $dA_{\mathbf{x}}$ representa un elemento de superficie infinitesimal en $\mathbf{x} \in \Gamma$. Similarmente el momento de torsión con respecto a un punto \mathbf{z} debido a un campo de tracción sobre Γ está dado por

$$\boldsymbol{\tau}_s(\Gamma) = \int_{\Gamma} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) \, dA_{\mathbf{x}}.$$

2.3.2.2. *Postulado de Cauchy, Ley de Acción y Reacción.* La teoría de fuerzas de superficie en la mecánica del medio continuo clásica está basada en la siguiente hipótesis, típicamente denominada *Postulado de Cauchy* (Figura 2.1).

Axioma 2.1 (Dependencia de la tracción de la geometría). *El campo de tracción $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}$ sobre una superficie Γ en B depende solamente puntualmente del campo normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$. En particular existe una función $\mathbf{t} : \mathcal{N} \times B \rightarrow \mathcal{V}$, donde $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}$ denota el conjunto de todos los vectores unitarios, tal que $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$. La función \mathbf{t} se llama función tracción para B .*

Así, el vector tracción $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}$ en un punto \mathbf{x} depende solamente de los valores de \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$. En particular, $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}}$ no depende del valor de $\nabla \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, el cual describe la curvatura de la superficie. Para ilustrar una consecuencia de esto, consideremos una familia de superficies Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 en B (ver Figura 2.1). Supongamos que un punto \mathbf{x} pertenece a todas estas superficies, y

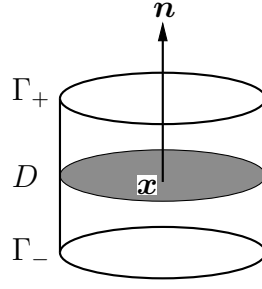


FIGURA 2.2. Ilustración de la demostración del Lema 2.1.

que tienen en común el vector normal unitario \mathbf{n} en \mathbf{x} . En particular, $\hat{\mathbf{n}}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$, donde $\hat{\mathbf{n}}_i$ es el campo normal unitario de Γ_i . Si $\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}_i}$ denota el campo de tracción de Γ_i , entonces

$$\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}_1}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}_3}(\mathbf{x}).$$

Como $\hat{\mathbf{n}}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$, el valor común de estos tres vectores de tracción es $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$.

El siguiente resultado demuestra que la función tracción satisface una cierta ley de acción y reacción. En lo siguiente Ω denota un subconjunto $\Omega \subseteq B$ regular y abierto con una frontera $\partial\Omega$ y el campo normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$.

Lema 2.1 (Ley de Acción y Reacción). *Sea $\mathbf{t} : \mathcal{N} \times B \rightarrow \mathcal{V}$ la función tracción para un cuerpo B . Sea $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ una función continua que para cualquier sucesión de subconjuntos Ω cuyos volúmenes tienden a cero satisfaga*

$$\frac{1}{\text{area}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \, dA_{\mathbf{x}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \text{vol}(\Omega) \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Entonces

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{n} \in \mathcal{N} \text{ y } \mathbf{x} \in B. \quad (2.2)$$

Demostración. Sean $\mathbf{x} \in B$ y $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ arbitrarios, y sea $D \subset B$ un disco de radio arbitrario fijo con centro \mathbf{x} y normal \mathbf{n} (ver Figura 2.2). Para $\delta > 0$ sea $\Omega_\delta \subset B$ el cilindro con centro \mathbf{x} , altura δ , eje \mathbf{n} , caras en los extremos Γ_\pm paralelas a D , y cara lateral Γ_δ . Notar que $\text{area}(\Gamma_\delta) \rightarrow 0$ y $\Gamma_\pm \rightarrow D$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el campo normal unitario exterior sobre $\partial\Omega_\delta$. Notamos que $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = \pm\mathbf{n}$ es constante sobre Γ_\pm . Considerando solamente el segundo factor en (2.1) obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \, dA_{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

y como $\partial\Omega_\delta = \Gamma_\delta \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\delta} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \, dA_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_+} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{y}) \, dA_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_-} \mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{y}) \, dA_{\mathbf{y}} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

El primer término desaparece porque $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ es una función continua, y por lo tanto acotada, y el hecho de que $\text{area}(\Gamma_\delta) \rightarrow 0$. Como $\Gamma_\pm \rightarrow D$ el límite (2.3) implica que

$$\int_D (\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + \mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{y})) \, dA_{\mathbf{y}} = \mathbf{0}.$$

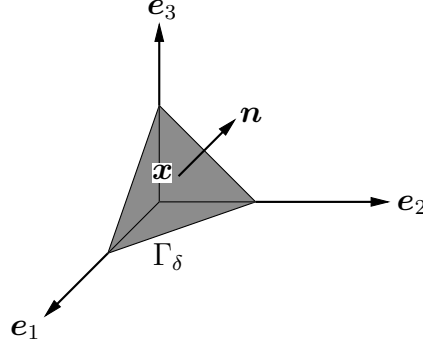


FIGURA 2.3. Ilustración de la demostración del Teorema 2.1.

Como el radio de D es arbitrario deducimos por una leve generalización del Teorema 1.8 que el integrando debe desaparecer en el centro de D , por lo tanto $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + \mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, lo que concluye la demostración de (2.2). ■

El Lema 2.1 implica que la tracción que el material ubicado en el lado positivo ejerce al material ubicado en el lado negativo de una superficie orientada, respectivamente, es igual y opuesta, en cada punto, a la tracción que el material ubicado en el lado negativo ejerce al material ubicado en el lado positivo.

La condición (2.1) afirma que la fuerza de superficie resultante, dividida por el área de superficie, tiende a cero cuando el volumen del cuerpo tiende a cero. Esta condición es consistente con el axioma de balance de momento lineal (Axioma 4.2) si suponemos que los campos de fuerza de cuerpo y de aceleración son acotados. En nuestro desarrollo siempre supondremos que esto es así.

Finalmente comentamos que la demostración del Lema 2.1 no hace uso completo de (2.1). En particular la demostración utiliza solamente el segundo factor de (2.1), lo que implica que la fuerza resultante tiende a cero cuando el volumen del cuerpo tiende a cero. El Teorema 2.1 abajo hará uso completo de (2.1).

2.3.3. El tensor tensión. Utilizando el Lema 2.1 podemos determinar la forma específica en la cual la función tracción $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ depende de \mathbf{n} . El siguiente resultado es típicamente referido como *Teorema de Cauchy* y será fundamental para el futuro desarrollo.

Teorema 2.1 (Existencia del Tensor Tensión). *Sea $\mathbf{t} : \mathcal{N} \times B \rightarrow \mathcal{V}$ la función tracción de un cuerpo B , y supongamos que esta función satisface las condiciones del Lema 2.1. Entonces $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ es lineal en \mathbf{n} , es decir para cada $\mathbf{x} \in B$ existe un tensor de segundo orden $\mathbf{S}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}^2$ tal que*

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{n}. \quad (2.4)$$

El campo $\mathbf{S} : B \rightarrow \mathcal{V}^2$ se llama campo tensión de Cauchy para B .

Demostración. Sea $\{\mathbf{e}_i\}$ un marco arbitrario, $\mathbf{x} \in B$ un punto arbitrario y se considera $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ arbitrario tal que $n_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j > 0$ para cada j . Para $\delta > 0$ sea $\Gamma_\delta \subset B$ una región triangular con centro \mathbf{x} , normal \mathbf{n} , longitud máxima de cada lado δ , y cada lado localizado

en un diferente plano de coordenadas (ver Figura 2.3). Además, sea $\Omega_\delta \subset B$ el tetraedro acotado por Γ_δ y los tres planos de coordenadas. En particular, Ω_δ posee tres caras Γ_j con los respectivos vectores normales unitarios exteriores \mathbf{e}_j , una cara Γ_δ con la normal exterior \mathbf{n} , y $\text{vol}(\Omega_\delta) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el campo vectorial normal unitario exterior sobre $\partial\Omega_\delta$, donde notamos que $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = -\mathbf{e}_j$ (constante) sobre Γ_j y $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = \mathbf{n}$ (constante) sobre Γ_δ . En virtud de (2.1) se tiene que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area}(\partial\Omega_\delta)} \int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \, dA_{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

y como $\partial\Omega_\delta = \Gamma_\delta \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area}(\partial\Omega_\delta)} \left(\int_{\Gamma_\delta} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{y}) \, dA_{\mathbf{y}} + \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} \mathbf{t}(-\mathbf{e}_j, \mathbf{y}) \, dA_{\mathbf{y}} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Como cada Γ_j puede ser mapeado linealmente a Γ_δ con el Jacobiano constante $n_j > 0$, se tiene que

$$\text{area}(\Gamma_j) = n_j \text{area}(\Gamma_\delta)$$

y

$$\text{area}(\partial\Omega_\delta) = \text{area}(\Gamma_\delta) + \sum_{i=1}^3 \text{area}(\Gamma_i) = \lambda \text{area}(\Gamma_\delta),$$

donde $\lambda = 1 + n_1 + n_2 + n_3$ es independiente de δ . Insertando este resultado en (2.5) obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area}(\partial\Omega_\delta)} \int_{\Gamma_\delta} \left(\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}(-\mathbf{e}_j, \mathbf{y}) n_j \right) \, dA_{\mathbf{y}} = \mathbf{0}.$$

En virtud del Teorema del Valor Medio para integrales, y considerando que el integrando es continuo y Γ_δ se contrae al punto \mathbf{x} , el límite en el lado izquierdo es el integrando en el punto \mathbf{x} , por lo tanto

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(-\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) n_j = \mathbf{0}.$$

Utilizando el Lema 2.1 y aplicando el convenio de sumación podemos escribir esto como

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) n_j = (\mathbf{t}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{n} = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{n}, \quad (2.6)$$

donde

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.7)$$

Concluimos que para \mathbf{x} arbitrario existe un tensor de segundo orden $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{n}$ para todo \mathbf{n} tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j > 0$.

Este resultado puede ser generalizado a otros vectores unitarios. Por ejemplo, si \mathbf{n} satisface $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 < 0$, con las demás componentes siendo positivas, podemos introducir un marco

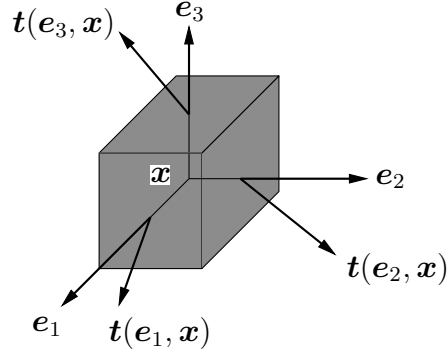


FIGURA 2.4. Ilustración de los vectores de tracción sobre los planos de coordenadas con las normales \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 . Estos vectores de tracción pueden ser interpretados como las fuerzas de superficie (por área unitaria) de un cubo infinitesimal centrado en \mathbf{x} .

nuevo $\{\mathbf{e}'_j\}$ tal que $\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2$. En este marco el vector \mathbf{n} satisface $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}'_j > 0$ y se pueden aplicar los argumentos anteriores con el resultado

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = (\mathbf{t}(\mathbf{e}'_j, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}'_j) \mathbf{n}.$$

Sin embargo, en virtud de la definición de $\{\mathbf{e}'_j\}$ y del Lema 2.1 obtenemos (todavía utilizando el convenio de sumación)

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}'_j, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}'_j = \mathbf{t}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_j,$$

por lo tanto (2.6) sigue siendo válido para todo \mathbf{n} tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 < 0$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j > 0$, $j = 2, 3$. Continuando así encontramos que $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{n}$ para todo \mathbf{n} tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \neq 0$ ($j = 1, 2, 3$). Como $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ es continuo según hipótesis este resultado se extiende a todo \mathbf{n} . ■

En lo siguiente denotaremos los campos normales por $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ en lugar de $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$. Así, en virtud del Axioma 2.1 y del Teorema 2.1, el campo de tracción sobre una superficie con la normal $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ está dado por

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}).$$

Si no hay riesgo de confusión, utilizaremos la abreviatura $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{n}$, o simplemente $\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n}$. En componentes, en cualquier marco $\{\mathbf{e}_i\}$ esta identidad es de la forma $t_i = S_{ij}n_j$.

Las nueve componentes del tensor tensión $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ pueden ser entendidas como las componentes de los tres vectores tracción $\mathbf{t}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})$ sobre los planos de coordenadas en \mathbf{x} . En particular, insertando $\mathbf{t}(\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) = t_i(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})\mathbf{e}_i$ en (2.7) obtenemos $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = S_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, donde $S_{ij}(\mathbf{x}) = t_i(\mathbf{e}_j, \mathbf{x})$. Así los vectores tracción sobre los planos de coordenadas con normales \mathbf{e}_k , $k = 1, 2, 3$, en \mathbf{x} están dados por

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_k, \mathbf{x}) = t_i(\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\mathbf{e}_i = S_{ik}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i, \quad k = 1, 2, 3,$$

ver Figura 2.4.

2.4. Equilibrio

Aquí se formula un axioma que proporciona las condiciones necesarias para que un cuerpo continuo esté en equilibrio mecánico, es decir esté estacionario en un marco fijo para el espacio Euclidiano \mathbb{E}^3 . Luego se derivara una forma local en términos de ecuaciones diferenciales.

2.4.1. Preliminares. Consideremos un cuerpo continuo en el espacio Euclidiano \mathbb{E}^3 . Supongamos que en un instante dado el cuerpo está sin movimiento y que posee la configuración B_0 . Supongamos luego que el cuerpo está expuesto a un campo de tracción exterior y un campo de fuerza de cuerpo tal que el cuerpo cambia de forma y queda fijado en una configuración B . En esta configuración se denota el campo de densidad de masa por volumen unitario por $\varrho : B \rightarrow \mathbb{R}$, el campo de tracción externo por área unitaria por $\mathbf{h} : \partial B \rightarrow \mathcal{V}$, y el campo de fuerza de cuerpo por masa unitaria como $\mathbf{b} : B \rightarrow \mathcal{V}$. Se supone que ϱ , \mathbf{h} y \mathbf{b} son independientes del tiempo.

2.4.2. Condiciones necesarias. Sea Ω cualquier subconjunto abierto $\Omega \subseteq B$ y sea $\mathbf{t} : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{V}$ el campo de tracción que actúa sobre su superficie, con la orientación determinada por el campo normal exterior. (Notar que $\mathbf{t} = \mathbf{h}$ en el caso especial $\Omega = B$.) La fuerza resultante debida a las fuerzas de cuerpo y de superficie está dada por

$$\mathbf{r}(\Omega) = \mathbf{r}_b(\Omega) + \mathbf{r}_s(\partial\Omega) = \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}}, \quad (2.8)$$

y el momento de torsión sobre Ω con respecto a un punto \mathbf{z} , debido a las mismas fuerzas de cuerpo y de superficie, es

$$\boldsymbol{\tau}(\Omega) = \boldsymbol{\tau}_b(\Omega) + \boldsymbol{\tau}_s(\partial\Omega) = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times (\varrho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \mathbf{t}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}}. \quad (2.9)$$

Las condiciones necesarias para el equilibrio, las cuales a su vez son consecuencia de un axioma más general a ser formulado más adelante (Axioma 4.2), pueden ser formuladas mediante el siguiente axioma.

Axioma 2.2 (Condiciones de equilibrio). *Si un cuerpo en una configuración B se encuentra en equilibrio mecánico, entonces la fuerza resultante y el momento de torsión resultante en torno a cualquier punto fijo (por ejemplo, el origen) deben desaparecer para cualquier subconjunto abierto $\Omega \subseteq B$, o sea*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\Omega) &= \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad \forall \Omega \subseteq B, \\ \boldsymbol{\tau}(\Omega) &= \int_{\Omega} \mathbf{x} \times (\varrho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad \forall \Omega \subseteq B. \end{aligned} \quad (2.10)$$

La libertad en la selección del punto de referencia para $\boldsymbol{\tau}(\Omega)$ es una consecuencia de la primera parte de (2.10). En particular, si $\mathbf{r}(\Omega) = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{\tau}(\Omega)$ (como definido en (2.9)) es independiente de \mathbf{z} (Tarea).

2.4.3. Ecuaciones locales.

Lema 2.2 (Ecuaciones locales de equilibrio). *Si el campo tensión de Cauchy \mathbf{S} es continuamente diferenciable, y los campos densidad ρ y fuerza de cuerpo \mathbf{b} son continuos, entonces las condiciones de equilibrio (2.10) son equivalentes a*

$$(\nabla \cdot \mathbf{S})(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B, \quad (2.11)$$

o en componentes,

$$S_{i,j,j}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x})b_i(\mathbf{x}) = 0, \quad S_{ij}(\mathbf{x}) = S_{ji}(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B.$$

Demostración. Para demostrar la primera identidad de (2.11) utilizamos la definición del campo tensión de Cauchy (Teorema 2.1) para escribir la primera identidad de (2.10) como

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n} \, dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} \rho\mathbf{b} \, dV_{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

donde omitimos la dependencia de los integrandos de \mathbf{x} , y \mathbf{n} denota el vector normal unitario exterior de $\partial\Omega$. Utilizando el Teorema 1.6 obtenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho\mathbf{b}) \, dV_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Como esta ecuación debe ser válida para cualquier subregión $\Omega \subseteq B$, y el integrando es continuo según hipótesis, podemos aplicar el Teorema 1.8 para obtener la primera expresión de (2.11).

Para establecer la segunda expresión de (2.11) utilizamos la definición del campo tensión de Cauchy para reescribir la segunda ecuación de (2.10) como

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times (\mathbf{S}\mathbf{n}) \, dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} \mathbf{x} \times (\rho\mathbf{b}) \, dV_{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

luego utilizamos el resultado $\rho\mathbf{b} = -\nabla \cdot \mathbf{S}$ de la primera ecuación de (2.11) para reescribir esto como

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times (\mathbf{S}\mathbf{n}) \, dA_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{S}) \, dV_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Para simplificar (2.12) definimos un campo tensorial $\mathbf{R} = R_{il}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l$ por

$$R_{il} = \varepsilon_{ijk}x_j S_{kl}.$$

Este campo tensorial satisface $\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{x} \times (\mathbf{S}\mathbf{n})$, y permite formular (2.12) como

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{R}\mathbf{n} \, dA_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{S}) \, dV_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Aplicando el Teorema 1.6 al primer término de (2.13) obtenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{R} - \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{S})) \, dV_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo subconjunto $\Omega \subseteq B$, y el integrando es continuo según hipótesis, podemos aplicar el Teorema 1.8 para obtener

$$\nabla \cdot \mathbf{R} - \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{0} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B,$$

es decir, en componentes,

$$(\varepsilon_{ijk}x_j S_{kl})_{,l} - \varepsilon_{ijk}x_j S_{kl,l} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B. \quad (2.14)$$

El lado izquierdo de esta ecuación puede ser simplificado utilizando que

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ijk}x_j S_{kl})_{,l} - \varepsilon_{ijk}x_j S_{kl,l} &= \varepsilon_{ijk}x_{j,l}S_{kl} + \varepsilon_{ijk}x_j S_{kl,l} - \varepsilon_{ijk}x_j S_{kl,l} = \varepsilon_{ijk}x_{j,l}S_{kl} = \varepsilon_{ijk}\delta_{jl}S_{kl} \\ &= \varepsilon_{ijk}S_{kj}. \end{aligned}$$

Así, (2.14) se convierte en $\varepsilon_{ijk}S_{kj} = 0$, lo que a su vez implica que $\varepsilon_{ijk}S_{kj} + \varepsilon_{ikj}S_{jk} = 0$ porque j y k son índices mudos. Utilizando propiedades del símbolo de permutación podemos escribir esta última identidad como

$$\varepsilon_{ijk}(S_{kj} - S_{jk}) = 0.$$

Si tomamos (i, j, k) distintos, y permitiendo que $i = 1, 2, 3$, concluimos que $S_{kj} = S_{jk}$ para $1 \leq j, k \leq 3$ para todo $\mathbf{x} \in B$, lo cual es el enunciado de la segunda identidad de (2.11).

Las ecuaciones integrales (2.10) pueden ser derivadas simplemente de las ecuaciones locales (2.11) por una simple integración de (2.11) sobre un subconjunto abierto $\Omega \subseteq B$, y revertiendo el orden de los argumentos previos. ■

Más adelante veremos que la simetría del campo tensión de Cauchy es válida incluso cuando un cuerpo no está en equilibrio (ver Capítulo 4).

Algunos textos definen un tensor tensión \mathbf{T} como el traspuesto del tensor tensión de Cauchy \mathbf{S} definido aquí: $\mathbf{T} = \mathbf{S}^T$. Sin embargo, como \mathbf{S} es simétrico esta distinción es irrelevante en la práctica.

Comentamos, además, que las ecuaciones locales (2.11) no determinan completamente el campo tensión de Cauchy para un cuerpo en equilibrio. En particular, la primera identidad de (2.11) es formada por tres ecuaciones diferenciales parciales, a la cual se agregan tres ecuaciones algebraicas de la segunda ecuación de (2.11), de las cuales hay que determinar las nueve componentes de \mathbf{S} . La falta de ecuaciones se presentará frecuentemente en los próximos capítulos. Este problema se resuelve mediante la introducción de *ecuaciones constitutivas*, las cuales describen las propiedades materiales específicas de un cuerpo.

El campo tracción \mathbf{h} definido sobre ∂B representa la fuerza de superficie, por área unitaria, efectuada por el entorno de B . Así, en virtud del Teorema 2.1 obtenemos $\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{h}$ para todo $\mathbf{x} \in \partial B$, donde \mathbf{n} es el campo normal unitario exterior sobre ∂B . Esta observación genera *condiciones de borde* para las ecuaciones diferenciales parciales en la primera ecuación de (2.11).

Finalmente enfatizamos que para derivar las ecuaciones de equilibrio hemos supuesto la continuidad de ϱ y \mathbf{b} , y la diferenciabilidad continua de \mathbf{S} . En la práctica la derivación de tales propiedades de regularidad para las ecuaciones de campo de la mecánica del medio continuo es un problema importante. En lo siguiente siempre supondremos (sin mención explícita) que los campos bajo consideración son suficientemente regulares para poder de leyes integrales a ecuaciones diferenciales mediante el argumento de localización.

2.5. Conceptos fundamentales de la tensión

Aquí describiremos varios estados de tensión que pueden existir en un punto en un cuerpo material y definiremos los valores y las direcciones principales de la tensión. Se introducirán

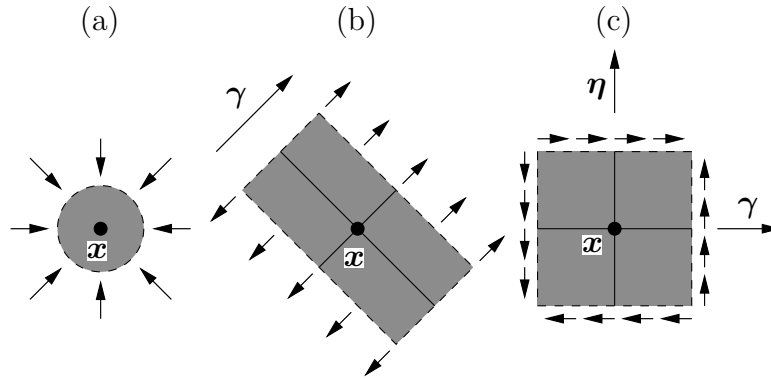


FIGURA 2.5. Ilustración de tres estados de tensión simples: (a) esférico, (b) uniaxial y (c) de cizalla pura.

los conceptos de tensión normal y de tensión de cizalla en un punto de superficie con un vector normal dado, luego determinaremos tres superficies que exhiben tensiones normal y de cizalla máximas. También introduciremos la descomposición de un campo de tensión en sus partes tensor esférico y tensor desviador, y discutiremos la interpretación física correspondiente.

2.5.1. Estados de tensión simples. Cuando el tensor tensión \mathbf{S} posee una forma particular en un punto \mathbf{x} de un cuerpo continuo frecuentemente se dice que el campo de tensión se encuentra en un *estado* particular en el punto \mathbf{x} . Por ejemplo, si en un punto \mathbf{x} el tensor tensión \mathbf{S} es de la forma

$$\mathbf{S} = -\pi\mathbf{I},$$

donde π es un escalar, se dice que en \mathbf{x} existe un estado de tensión *esférico* o *Euleriano*. Para este estado de tensión la tracción sobre cualquier superficie que posea el vector normal \mathbf{n} en \mathbf{x} está dada por

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n} = -\pi\mathbf{n},$$

lo que demuestra que la tracción siempre es normal a la superficie. Por ejemplo si suponemos que \mathbf{S} es constante en una vecindad de \mathbf{x} , el campo de tracción sobre la superficie de una esfera pequeña centrada en \mathbf{x} sería normal en cada punto de esta superficie, ver Figura 2.5 (a).

Se dice que el estado de tensión es *uniaxial* si existen un vector unitario $\boldsymbol{\gamma}$ y un escalar σ tales que

$$\mathbf{S} = \sigma\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}.$$

Tal estado se llama *tensión pura* si $\sigma > 0$, y *compresión pura* si $\sigma < 0$. Para un estado de tensión uniaxial la tracción sobre cualquier superficie con la normal \mathbf{n} en un punto \mathbf{x} está dada por

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n} = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n})\sigma\boldsymbol{\gamma}.$$

Notar que la tracción siempre es paralela a $\boldsymbol{\gamma}$ y desaparece cuando \mathbf{n} y $\boldsymbol{\gamma}$ son ortogonales. Por ejemplo, si \mathbf{S} es constante en una vecindad de \mathbf{x} y se considera un ortoedro que tiene

un eje alineado con $\boldsymbol{\gamma}$, el campo de tracción sobre la superficie del ortoedro será diferente de cero solamente sobre las caras con la normal $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{\gamma}$ (ver Figura 2.5 (b)).

Si en un punto \boldsymbol{x} existen un par de vectores unitarios y ortogonales $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\eta}$ tales que

$$\boldsymbol{S} = \tau(\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\gamma}),$$

se dice que en \boldsymbol{x} existe un estado de tensión de *cizalla pura*. Para este estado de tensión la tracción sobre cualquier superficie con normal \boldsymbol{n} en \boldsymbol{x} está dada por

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{n})\tau\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{n})\tau\boldsymbol{\eta}.$$

Notar que $\boldsymbol{t} = \tau\boldsymbol{\gamma}$ cuando $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\eta}$, y $\boldsymbol{t} = \tau\boldsymbol{\eta}$ cuando $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\gamma}$. Por ejemplo, si \boldsymbol{S} es constante en una vecindad de \boldsymbol{x} y se considera un ortoedro que tiene un eje alineado con $\boldsymbol{\gamma}$ y otro con $\boldsymbol{\eta}$, el campo de tracción sobre la superficie del ortoedro será diferente de cero solamente sobre las caras con la normal $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{\eta}$ (Figura 2.5 (c)).

Si en un punto \boldsymbol{x} existe un par de vectores unitarios y ortogonales $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\eta}$ tales que la representación matricial de \boldsymbol{S} en la base $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\eta}$ está dada por

$$[\boldsymbol{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces decimos que en \boldsymbol{x} existe un estado de *tensión plana*. Se puede verificar fácilmente que los casos descritos anteriormente de los estados de tensión uniaxial y de cizalla pura son casos especiales de un estado de tensión plana.

2.5.2. Tensiones principales, normales y de cizalla. Para un punto \boldsymbol{x} dado en un cuerpo continuo los valores propios de \boldsymbol{S} se llaman *tensiones principales*, y los vectores propios correspondientes se llaman *direcciones de tensión principales* en \boldsymbol{x} . Como el tensor tensión es simétrico, existen tres direcciones principales mutuamente ortogonales y tres tensiones principales en cada punto \boldsymbol{x} (ver Teorema 1.1).

Sea \boldsymbol{e} una dirección principal correspondiente a una tensión principal σ , entonces el vector de tracción sobre una superficie con normal \boldsymbol{e} en \boldsymbol{x} está dado por

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{e} = \sigma\boldsymbol{e},$$

por lo tanto el mismo vector de tracción es en la dirección \boldsymbol{e} .

Consideremos ahora una superficie arbitraria con normal unitaria \boldsymbol{n} en \boldsymbol{x} . Ahora el vector de tracción puede ser descompuesto como la suma de dos partes: de una *tracción normal*

$$\boldsymbol{t}_n := (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$

y de una *tracción de cizalla*

$$\boldsymbol{t}_s := \boldsymbol{t} - (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}.$$

En particular se tiene que $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_n + \boldsymbol{t}_s$. Las cantidades $\sigma_n = |\boldsymbol{t}_n|$ y $\sigma_s = |\boldsymbol{t}_s|$ se llaman *tensión normal* y *tensión de cizalla*, respectivamente, sobre la superficie con normal \boldsymbol{n} en el punto \boldsymbol{x} .

Si consideramos una superficie con normal $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}$, donde \boldsymbol{e} es una dirección principal con la tensión principal correspondiente σ , entonces $\boldsymbol{t}_n = \sigma\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{t}_s = \mathbf{0}$, por lo tanto la tensión normal sobre una tal superficie es $\sigma_n = |\sigma|$ y la tensión de cizalla es cero. En particular la tensión de cizalla sobre una superficie es cero si y sólo si \boldsymbol{n} es una dirección principal.

2.5.3. Tensiones normales y de cizalla máximas. Para un punto \mathbf{x} dado en un cuerpo continuo se desea saber cuales son las superficies que pasan por \mathbf{x} que exhiben una tensión normal máxima o una tensión de cizalla máxima. Es decir, queremos saber para qué dirección normal \mathbf{n} en \mathbf{x} la tensión normal σ_n es máxima, y similarmente para qué dirección normal σ_s es máxima.

Para tratar este problema denominamos las tensiones principales en \mathbf{x} por σ_i y las direcciones principales correspondientes por \mathbf{e}_i . Para simplificar la discusión suponemos que las tensiones principales son distintas y ordenadas en el sentido de

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (2.15)$$

Si las tensiones principales *no* son distintas puede ser que no existen direcciones aisladas \mathbf{n} para las cuales σ_n o σ_s asume su valor máximo. Por ejemplo, si $\sigma_i = \alpha$ ($i = 1, 2, 3$) se tiene que $\sigma_n = |\alpha|$ y $\sigma_s = 0$ para todo \mathbf{n} , es decir no existe ninguna dirección \mathbf{n} destacada para la cual σ_n o σ_s sea máxima. El próximo resulta demuestra que si las tensiones principales son distintas como en (2.15), entonces existen pares de direcciones destacadas $(\mathbf{n}, -\mathbf{n})$ para los cuales σ_n y σ_s asumen valores máximos.

Lema 2.3 (Tensiones normales y de cizalla máximas). *Consideremos un punto \mathbf{x} en un cuerpo continuo suponiendo que las tensiones principales son distintas y ordenadas de acuerdo a (2.15). Entonces:*

- 1.) *El valor máximo de σ_n es $|\sigma_k|$, y este valor es asumido para pares $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_k$, donde $k = 1$ o $k = 3$ dependiendo de cual de los valores de k asume el máximo en la definición*

$$|\sigma_k| = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\}.$$

- 2.) *El valor máximo de σ_s es $|\sigma_1 - \sigma_3|/2$, y este valor es asumido para los dos pares*

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3).$$

Demostración. Tarea. ■

2.5.4. Tensores esférico y desviador. En cualquier punto \mathbf{x} de un cuerpo continuo el tensor tensión de Cauchy puede ser descompuesto en la suma de dos partes: el *tensor tensión esférico*

$$\mathbf{S}_S = -p\mathbf{I}$$

y el *tensor tensión desviador*

$$\mathbf{S}_D = \mathbf{S} + p\mathbf{I}, \quad (2.16)$$

donde la cantidad

$$p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{S}$$

se llama *presión*. En particular, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_S + \mathbf{S}_D$.

El tensor tensión esférico es completamente determinado por la presión p . Como

$$-p = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{S} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

resulta que $-p$ es el promedio aritmético de las tres tensiones principales en un punto \mathbf{x} . Equivalentemente podemos interpretar $-p$ como el promedio de la componente normal de la tracción $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$, donde el promedio se toma sobre todas las direcciones posibles \mathbf{n} en \mathbf{x} . A grandes rasgos, la tensión esférica es aquella parte de la tensión total que tiende a cambiar el volumen de un cuerpo sin cambiar su forma, por lo tanto una bola esférica de un material uniforme expuesta a una presión uniforme debería exhibir un cambio de volumen manteniendo su forma esférica. Notar que hay un convenio de signo indicando que $p > 0$ corresponde a una compresión.

El tensor desviador de la tensión es la parte de la tensión total que es complementaria a la tensión esférica. En particular, el tensor desviador contiene información acerca de la tensión de cizalla, mientras que el tensor esférico contiene información sobre las tensiones normales. A grandes rasgos el tensor desviador es aquella parte de la tensión total que tiende a cambiar la forma de un cuerpo pero que causa poco o ningún cambio de volumen.

En virtud de su definición (2.16) el tensor desviador posee la propiedad de que

$$\text{tr } \mathbf{S}_D = 0, \quad (2.17)$$

por lo tanto $I_1(\mathbf{S}_D) = 0$ (Tarea). Para las invariantes $I_2(\mathbf{S}_D)$ e $I_3(\mathbf{S}_D)$ normalmente se utiliza la siguiente notación:

$$J_2(\mathbf{S}) := -I_2(\mathbf{S}_D), \quad J_3(\mathbf{S}) := I_3(\mathbf{S}_D).$$

En particular, en virtud de (2.17), de la simetría de \mathbf{S}_D y de la definición de los invariantes principales se tiene que

$$J_2(\mathbf{S}) = -I_2(\mathbf{S}_D) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_D : \mathbf{S}_D, \quad J_3(\mathbf{S}) = I_3(\mathbf{S}_D) = \det \mathbf{S}_D.$$

Estas invariantes juegan un rol central en la formulación de las llamadas *condiciones de fluencia* en teorías que describen la deformación plástica de materiales isotrópicos para esfuerzos pequeños.

2.6. Ejercicios

Problema 2.1 (Tarea 2, Curso 2012). Sea un cuerpo con la configuración $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid 0 < x_i < 1\}$ sujeto a un campo de fuerza de cuerpo por volumen unitario $\hat{\mathbf{b}} = \alpha x_3 \mathbf{e}_3$ y sea un campo de tracción sobre su superficie ∂B dado por

$$\mathbf{t} = \begin{cases} x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2) \mathbf{e}_3 & \text{sobre la cara } x_3 = 0, \\ \mathbf{0} & \text{sobre las demás caras.} \end{cases}$$

Calcular el valor de la constante α para el cual las fuerzas de cuerpo y de superficie están balanceadas, $\mathbf{r}_b(B) + \mathbf{r}_s(\partial B) = \mathbf{0}$.

Problema 2.2 (Tarea 2, Curso 2012). Se considera un cuerpo B con un campo densidad de masa $\rho > 0$ (constante) bajo la influencia de una fuerza de cuerpo por masa unitaria $\mathbf{b} = -4\mathbf{C}\mathbf{x}$, donde \mathbf{C} es un tensor de segundo orden dado (constante). Sea el campo tensión en B de la forma $\mathbf{S} = \rho(\mathbf{C}\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x}$.

- a) Demostrar que \mathbf{S} y \mathbf{b} satisfacen la ecuación de equilibrio local $\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$ para el balance de fuerzas.

- b) ¿Qué condiciones debe satisfacer \mathbf{C} para que la ecuación de equilibrio local $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$ para el balance del momento de torsión esté satisfecha?

Problema 2.3 (Tarea 2, Curso 2012). Sea el campo de tensión de Cauchy en un cuerpo $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \mid |x_i| < 1\}$ uniaxial de la forma

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \neq \sigma = \text{const.}$$

En este caso el campo tracción sobre cualquier plano por B será constante porque \mathbf{S} y \mathbf{n} son constantes.

- a) Se considera la familia de planos Γ_θ que contengan el origen y el eje x_1 , y cuyo vector normal unitario sea $(0, \cos \theta, \sin \theta)^T$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Encontrar las tensiones normal y de cizalla σ_n y σ_s de estos planos como función de θ .
- b) Demostrar que la tensión normal máxima está dada por $\sigma_n = |\sigma|$ y que este valor es asumido en el plano con $\theta = 0$. Similarmente, demostrar que la tensión de cizalla máxima está dada por $\sigma_s = |\sigma|/2$ y que este valor ocurre para $\theta = \pi/4$.

Problema 2.4 (Tarea 2, Curso 2012). Las funciones $f(\mathbf{S}) = |p|$ y $g(\mathbf{S}) = \sqrt{J_2}$, donde p es la presión y J_2 es la segunda invariante desviadora asociada al campo tensión de Cauchy \mathbf{S} , son dos medidas de la intensidad de la tensión. Determinar las funciones f y g para los siguientes estados de tensión $[\mathbf{S}]$:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (c) \quad \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

La función g se llama *función de fluencia de von Mises*.

Problema 2.5 (Certamen 1, Curso 2012). Se considera un cuerpo $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 : 0 < x_i < 1\}$ con una densidad $\varrho > 0$ constante sujeto a una fuerza de cuerpo por masa unitaria $[\mathbf{b}] = (0, 0, -g)^T$. Sea el campo tensión de Cauchy en B dado por

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho g x_3 \end{pmatrix}.$$

- a) Demostrar que \mathbf{S} y \mathbf{b} satisfacen la ecuación de equilibrio local para el balance de fuerzas.
- b) Identificar el campo tracción que actúa sobre cada una de las caras de la superficie ∂B .
- c) Utilizando un cálculo directo determinar la fuerza de cuerpo resultante $\mathbf{r}_b(B)$ y verificar que $\mathbf{r}_s(\partial B) + \mathbf{r}_b(B) = \mathbf{0}$. Explicar brevemente cómo este resultado es consistente con (a).

Problema 2.6 (Certamen 1, Curso 2012). Se considera un cuerpo continuo B sujeto a una fuerza por volumen unitario $\hat{\mathbf{b}}$ y un campo tracción \mathbf{h} sobre su superficie. Sea B en equilibrio y sea \mathbf{S} el campo tensión de Cauchy. Se define el *tensor tensión promedio*

$$\bar{\mathbf{S}} := \frac{1}{\text{vol}(B)} \int_B \mathbf{S} \, dV_x.$$

a) Utilizando las ecuaciones de equilibrio local para B demostrar que

$$\bar{\mathbf{S}} := \frac{1}{\text{vol}(B)} \left(\int_B \mathbf{x} \otimes \hat{\mathbf{b}} \, dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial B} \mathbf{x} \otimes \mathbf{h} \, dA_{\mathbf{x}} \right)$$

(*Teorema de Signorini*).

b) Supongamos que $\hat{\mathbf{b}} = 0$ y que la tracción aplicada \mathbf{h} es una presión uniforme, es decir, $\mathbf{h} = -p\mathbf{n}$, donde p es una constante y \mathbf{n} es el campo normal unitario exterior sobre ∂B . Utilizar el resultado de (a) para demostrar que el tensor tensión promedio $\bar{\mathbf{S}}$ es esférico, es decir $\bar{\mathbf{S}} = -p\mathbf{I}$.

c) Bajo las condiciones de (b), demostrar que el campo tensión uniforme esférico $\mathbf{S} = -p\mathbf{I}$ satisface las ecuaciones de equilibrio en B , y las condiciones de frontera $\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{h}$ sobre ∂B . (Entonces, en este caso, $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{S}}$ para todo $\mathbf{x} \in B$).

Problema 2.7 (Certamen 1, Curso 2013). Sea el tensor tensión de Cauchy en un punto \mathbf{x} en un cuerpo dado por

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y sean Γ y Γ' dos superficies con los respectivos vectores normales $[\mathbf{n}] = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ y $[\mathbf{n}'] = (1, 0, 0)^T$ en \mathbf{x} .

- Hallar las tracciones normal y de cizalla, $[\mathbf{t}_n]$ y $[\mathbf{t}_s]$, sobre cada superficie en \mathbf{x} . En particular, demostrar que Γ no recibe tracción de cizalla en \mathbf{x} , mientras que Γ' sí la recibe.
- Hallar las tensiones principales y direcciones de tensión en \mathbf{x} y verificar que $[\mathbf{n}]$ es una dirección principal.

Capítulo 3

Cinemática

La *cinemática* es el estudio del movimiento que ignora efectos de masa, esfuerzo y tensión; es el estudio de la geometría del movimiento. En este capítulo estudiaremos la cinemática de cuerpos continuos, concentrándonos en la cuantificación de la deformación y de la velocidad de deformación para un cuerpo que cambia su forma en el tiempo. En los capítulos siguientes se presentarán varios tipos de relaciones constitutivas entre la tensión y la deformación que caracterizan diferentes tipos de materiales. Este capítulo proporciona la base para el razonamiento físico asociado a estas relaciones. Las ideas importantes de este capítulo son las siguientes:

- (i) el concepto de la deformación y del mapa de deformación,
- (ii) la distinción entre coordenadas materiales y espaciales,
- (iii) el concepto de la deformación y su cuantificación,
- (iv) el concepto del movimiento y de la derivada temporal material,
- (v) el concepto de la velocidad de deformación y su cuantificación,
- (vi) las fórmulas del cambio de variables para la integración sobre coordenadas materiales y espaciales y
- (vii) tipos especiales de deformaciones y movimientos que preservan la forma y/o el volumen de un cuerpo.

3.1. Configuraciones y deformaciones

En cualquier instante un cuerpo material ocupa un subconjunto abierto B del espacio Euclidiano \mathbb{E}^3 . La identificación de las partículas materiales con puntos de B define la *configuración* del cuerpo en este instante. Normalmente nos referimos al conjunto B como configuración considerando la identificación de partículas con puntos como entendida implícitamente.

Como *deformación* denominamos un cambio de configuración entre una configuración inicial (no deformada) B y una configuración siguiente (deformada) B' (ver Figura 3.1). Por convenio la configuración B se llama *configuración referencial* y la configuración B' se llama *configuración deformada*. Los puntos en B y B' se denotan por $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, respectivamente. Como B y B' son configuraciones del mismo cuerpo material, cada partícula del cuerpo posee dos conjuntos de coordenadas: un conjunto de *coordenadas materiales* X_i para su localización en B , y un conjunto de *coordenadas espaciales* para su localización en B' .

Normalmente uno se imagina que una deformación cambia la forma de un cuerpo. Pero esto no necesariamente es así. Por ejemplo, la rotación de una bola sólida alrededor de su centro es una deformación que no altera la forma de la bola: sigue ocupando la misma región

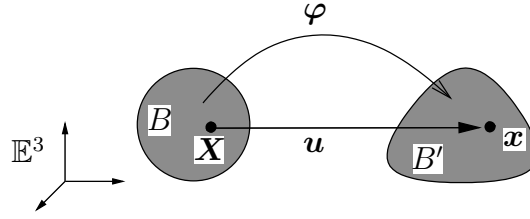


FIGURA 3.1. Ilustración de una deformación: B denota la configuración de referencia, y B' denota la configuración deformada. El punto negro en B y en B' se refiere a la misma partícula material.

espacial, pero sus partículas materiales cambian la ubicación en el interior de esta región. Así, una deformación puede efectuarse incluso cuando $B = B'$. A menudo será útil suponer que un cuerpo material ocupa el espacio completo. En este caso siempre se tiene que $B' = B = \mathbb{E}^3$.

3.2. El mapa de deformación

La deformación de un cuerpo desde una configuración B a otra configuración B' se describe por una función $\varphi : B \rightarrow B'$ que mapea cada punto $\mathbf{X} \in B$ a un punto $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \in B'$ (ver Figura 3.1). La aplicación φ se llama *mapa de deformación* relativo a la configuración de referencia B . Así, el desplazamiento de una partícula material desde su ubicación inicial \mathbf{X} a su ubicación final \mathbf{x} está dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}. \quad (3.1)$$

La aplicación $\mathbf{u} : B \rightarrow \mathcal{V}$ se llama *campo de desplazamiento* asociado a φ .

Hay que imponer ciertas restricciones al mapa φ para que éste efectivamente represente la deformación de un cuerpo material. En particular se supone que

- (i) $\varphi : B \rightarrow B'$ es biyectiva, y
- (ii) $\det \nabla \varphi(\mathbf{X}) > 0$ para todo $\mathbf{X} \in B$.

Las deformaciones que satisfacen estas hipótesis se llaman *admisibles*. La hipótesis (i) implica que dos o más puntos distintos de B no pueden ocupar simultáneamente la misma posición en B' . Por otro lado, la hipótesis (ii) implica que las deformaciones deberían preservar la orientación de un cuerpo; en particular un cuerpo no puede ser deformado continuamente hacia su imagen especular.

En el resto de nuestro desarrollo siempre se supone que todas las deformaciones son admisibles. Además suponemos que las deformaciones son suaves en el sentido de que las derivadas parciales de todos los ordenes existen y son continuas. Esta hipótesis siempre será mas que lo necesario pero permite una presentación nítida.

3.3. Medidas de la deformación

Se considera una bola abierta Ω del radio $\alpha > 0$ centrada en un punto $\mathbf{X}_0 \in B$ (ver Figura 3.2). Bajo una deformación φ el punto $\mathbf{X}_0 \in B$ es mapeado a un punto $\mathbf{x}_0 = \varphi(\mathbf{X}_0) \in B'$, y la bola $\Omega \subset B$ tiene como imagen una región $\Omega' \subset B'$, es decir

$$\Omega' = \{\mathbf{x} \in B' \mid \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega\},$$

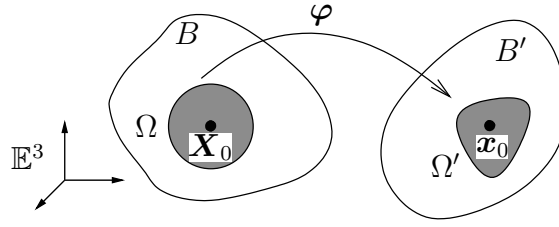


FIGURA 3.2. Una región pequeña $\Omega \subset B$ es mapeada a una región pequeña $\Omega' \subset B'$. La diferencia en forma entre Ω' y Ω da origen al concepto de la deformación.

o brevemente, $\Omega' = \varphi(\Omega)$. Cualquier diferencia relativa en la forma entre Ω' y Ω en el límite $\alpha \rightarrow 0$ se llama *deformación* en \mathbf{X}_0 . Intuitivamente, la deformación se refiere al estiramiento local de un cuerpo causado por φ . El concepto de la deformación es importante para el estudio de cuerpos sólidos, y en capítulos futuros veremos diversas generalizaciones de la ley de Hooke para sólidos elásticos que relacionan la tensión a la deformación.

3.3.1. El gradiente de deformación \mathbf{F} . Una manera natural de cuantificar la deformación es mediante el *gradiente de deformación*, el cual es un campo tensorial de segundo orden $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathcal{V}^2$ definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla \varphi(\mathbf{X}).$$

El campo \mathbf{F} proporciona información acerca del comportamiento local de una deformación φ . En particular, para $\mathbf{X}_0 \in B$ dado podemos aplicar un desarrollo en serie de Taylor para obtener

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}_0) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \mathcal{O}(|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^2),$$

o equivalentemente,

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{c} + \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)\mathbf{X} + \mathcal{O}(|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^2), \quad (3.2)$$

donde

$$\mathbf{c} = \varphi(\mathbf{X}_0) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)\mathbf{X}_0.$$

Así, $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ caracteriza el comportamiento local de $\varphi(\mathbf{X})$ para todos los puntos \mathbf{X} en una vecindad de \mathbf{X}_0 .

3.3.2. Interpretación de \mathbf{F} y deformaciones homogéneas. Ahora describiremos de que manera \mathbf{F} proporciona una medida de la deformación. Por simplicidad inicialmente supondremos que la deformación φ es *homogénea*, es decir que el campo gradiente de deformación \mathbf{F} es constante. En este caso los términos de orden mayor en (3.2) desaparecen y φ puede ser escrita como

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{c} + \mathbf{F}\mathbf{X}. \quad (3.3)$$

El caso de una deformación no homogénea será discutido al final de esta sección.

Estudiando el caso homogéneo veremos como \mathbf{F} cuantifica las cantidades de estiramiento y rotación que experimenta un cuerpo al ser deformado desde una configuración B a otra

configuración B' . En virtud de la naturaleza lineal de (3.3) cualquier segmento lineal en B es mapeado a un segmento lineal correspondiente en B' .

3.3.2.1. *Traslaciones y puntos fijos.* Una deformación homogénea φ se llama *traslación* si

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{c}$$

para algún vector \mathbf{c} constante. Para una tal deformación cada punto del cuerpo es trasladado o desplazado a lo largo del vector \mathbf{c} , y no hay ningún cambio en la forma o la orientación del cuerpo.

Se dice que una deformación homogénea φ *posee un punto fijo en \mathbf{Y}* si

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}). \quad (3.4)$$

El punto \mathbf{Y} es fijo en el sentido de que $\varphi(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$. Cualquier otro punto \mathbf{X} es desplazado por una cantidad determinada por \mathbf{F} y la posición relativa de \mathbf{X} con respecto a \mathbf{Y} . En una tal deformación el cuerpo puede cambiar tanto de forma como de orientación. Típicamente se supone que $\mathbf{Y} \in B$, aunque esto no necesariamente debe ser así.

El siguiente resultado demuestra que una deformación homogénea arbitraria siempre puede ser expresada como la composición de una traslación con una deformación con un punto fijo dado.

Lema 3.1 (Descomposición traslación-punto fijo). *Sea φ una deformación homogénea arbitraria con un gradiente de deformación \mathbf{F} constante. Entonces para cualquier punto \mathbf{Y} dado se puede descomponer φ como*

$$\varphi = \mathbf{d}_1 \circ \mathbf{g} = \mathbf{g} \circ \mathbf{d}_2,$$

donde \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 son traslaciones y \mathbf{g} es una deformación homogénea con \mathbf{Y} como punto fijo, en particular

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}).$$

Demostración. Tarea. ■

Como las traslaciones de un cuerpo son fáciles de comprender, nos concentraremos en deformaciones homogéneas que excluyan traslaciones, es decir, en deformaciones del tipo (3.4) con un punto fijo \mathbf{Y} . Demostraremos que (3.4) puede ser comprendida en términos geométricos simples siempre que se conozca la descomposición polar de \mathbf{F} (ver Teorema 1.3).

3.3.2.2. *Rotaciones y estiramientos.* Una deformación homogénea φ se llama *rotación* alrededor de un punto fijo \mathbf{Y} si

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{Q}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

para algún tensor de rotación \mathbf{Q} . Para una tal deformación se cambia la orientación del cuerpo (manteniendo \mathbf{Y} fijo), pero no hay ningún cambio de la forma del cuerpo.

Una deformación homogénea φ se llama *estiramiento* desde \mathbf{Y} si

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{S}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

para algún tensor simétrico y definido positivo \mathbf{S} . Para una tal deformación se extiende el cuerpo en diferentes medidas en direcciones diferentes manteniendo \mathbf{Y} fijo, pero no hay ningún cambio neto en la orientación del cuerpo.

Lema 3.2 (Descomposición estiramiento-rotación). *Sea φ una deformación homogénea arbitraria con un punto fijo \mathbf{Y} y el gradiente de deformación \mathbf{F} constante como en (3.4), y sea $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ la descomposición polar derecha e izquierda de acuerdo al Teorema 1.3. Entonces se puede descomponer φ como*

$$\varphi = \mathbf{r} \circ \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{r},$$

donde

$$\mathbf{r} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

es una rotación alrededor de \mathbf{Y} , y

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{Y} + \mathbf{V}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

son estiramientos desde \mathbf{Y} .

Demostración. Tarea. ■

3.3.2.3. *Extensiones.* Una deformación homogénea φ se llama *extensión* en \mathbf{Y} en la dirección de un vector unitario \mathbf{e} si

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad \text{donde } \mathbf{F} = \mathbf{I} + (\lambda - 1)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \quad \lambda > 0.$$

Este tipo de deformación es un caso especial de la deformación estiramiento introducida antes. En el presente caso el cuerpo es extendido por un factor λ a lo largo de la dirección \mathbf{x} donde el punto \mathbf{Y} queda fijo, pero no deformación en direcciones ortogonales a \mathbf{e} ; además, no hay ningún cambio en la orientación global del cuerpo. Para $\lambda = 1$ se tiene que $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, es decir $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, es decir cada punto del cuerpo es fijo y el cuerpo no es cambiado.

Lema 3.3 (Estiramientos como extensiones). *Sean \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 los estiramientos definidos en el Lema 3.2 y sean $\{\lambda_i, \mathbf{u}_i\}$ y $\{\lambda_i, \mathbf{v}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) los pares propios asociados con \mathbf{U} y \mathbf{V} , respectivamente. Entonces*

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_1 \circ \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2 \circ \mathbf{h}_3,$$

donde \mathbf{f}_i es una extensión en \mathbf{Y} por λ_i en la dirección \mathbf{u}_i , y \mathbf{h}_i es una extensión en \mathbf{Y} por λ_i en la dirección \mathbf{v}_i .

Demostración. Tarea. ■

Comentamos que los tensores \mathbf{U} y \mathbf{V} que aparecen en las descomposiciones polares de \mathbf{F} poseen los mismos valores propios, pero en general vectores propios diferentes, por lo tanto los estiramientos \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 dan origen a extensiones por los mismos montos, pero en direcciones diferentes.

Motivado por el Lema 3.3 llamamos *estiramientos principales* asociados al gradiente de deformación \mathbf{F} a los valores propios λ_i , y los vectores propios asociados \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i se llaman *direcciones principales*. Además, los tensores \mathbf{U} y \mathbf{V} se llaman *tensor de estiramiento* derecho e izquierdo, respectivamente.

Si para algún i un estiramiento principal satisface $\lambda_i = 1$, entonces el cuerpo no es extendido a lo largo de la dirección principal correspondiente. Si la dirección principal es derecha o izquierda depende de si la rotación \mathbf{r} es aplicada primero o por último, respectivamente (ver Lema 3.2 y el siguiente resumen). Cuando todos los estiramientos principales son unitarios,

entonces $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$. En este caso $\mathbf{s}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{s}_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ y el cuerpo no es extendido en ninguna dirección.

3.3.2.4. *Resumen.* Hemos demostrado que para cualquier punto \mathbf{Y} dado, una deformación homogénea arbitraria puede ser descompuesta como

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{d}_1 \circ \mathbf{g} = \mathbf{g} \circ \mathbf{d}_2,$$

donde \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 son traslaciones, y \mathbf{g} posee un punto fijo en \mathbf{Y} . A su vez, la deformación \mathbf{g} puede ser descompuesta como

$$\mathbf{g} = \mathbf{r} \circ \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{r},$$

donde \mathbf{r} es una rotación alrededor de \mathbf{Y} , y \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 son estiramientos desde \mathbf{Y} . Estos dos estiramientos pueden ser descompuestos como

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_1 \circ \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2 \circ \mathbf{h}_3,$$

donde \mathbf{f}_i y \mathbf{h}_i son extensiones desde \mathbf{Y} a lo largo de las direcciones derechas e izquierdas, respectivamente. El monto de cada extensión está determinado por el estiramiento principal correspondiente. Los estiramientos principales, direcciones principales y la rotación son determinados completamente por la descomposición polar del gradiente de deformación \mathbf{F} .

Los resultados anteriores implican que una deformación homogénea arbitraria $\boldsymbol{\varphi}$ puede ser comprendida en varias maneras (equivalentes). Por ejemplo podemos escribir $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{s}_2 \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{d}_2$, lo que implica que $\boldsymbol{\varphi}$ puede ser descompuesta en una sucesión de tres operaciones elementales: una traslación, seguida por extensiones a lo largo de las direcciones principales derechas, seguidas por una rotación. Otras descomposiciones igualmente son posibles.

Los resultados anteriores relativos a descomposiciones homogéneas también pueden ser aplicados a deformaciones generales para los cuales el campo del gradiente de deformación no es constante. En particular, la expansión en serie de Taylor en (3.2) demuestra que una deformación general es aproximadamente homogénea en una vecindad pequeña de cada punto $\mathbf{X}_0 \in B$. Así, la descomposición polar del gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ completamente determina como el material en una vecindad de \mathbf{X}_0 es estirado y rotado. Por lo tanto el gradiente de deformación juega un rol central en el modelamiento de la tensión en diferentes tipos de cuerpos materiales.

3.3.3. El tensor deformación de Cauchy-Green \mathbf{C} . Consideremos una deformación general $\boldsymbol{\varphi} : B \rightarrow B'$ con un gradiente de deformación asociado $\mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$. Entonces otra medida de la deformación está dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}.$$

El tensor $\mathbf{C} : B \rightarrow \mathcal{V}^2$ se llama *tensor deformación de Cauchy-Green (derecho)* asociado al campo de deformación $\boldsymbol{\varphi}$. Obviamente, el tensor \mathbf{C} es simétrico y definido positivo en cada punto de B .

Mientras que \mathbf{F} contiene una mezcla de información tanto acerca de rotaciones como de estiramientos, \mathbf{C} proporciona información solamente acerca de estiramientos. Esta observación es una consecuencia de la descomposición polar derecha $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, la cual implica

que

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2.$$

Como el tensor de rotación \mathbf{R} , que implícitamente aparece en \mathbf{F} , no aparece en \mathbf{C} , el tensor \mathbf{C} típicamente es una medida de la deformación más útil que \mathbf{F} .

Comentamos que el tensor de estiramiento derecho \mathbf{U} también es independiente de \mathbf{R} y contiene información solamente acerca de los estiramientos. Sin embargo introducimos el tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ porque éste frecuentemente es más fácil de calcular que

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}.$$

En particular se evita la computación de la raíz tensorial.

En virtud del Teorema 1.1, el tensor de estiramiento derecho puede ser escrito como

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i,$$

donde $\lambda_i > 0$ son los estiramientos principales y \mathbf{u}_i son las direcciones principales derechas. Desde la relación $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ se deduce que

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i,$$

es decir los valores propios de \mathbf{C} son los cuadrados de los estiramientos principales, y los vectores propios son las direcciones principales derechas. Así los estiramientos principales y direcciones pueden ser determinados sin calcular \mathbf{U} .

Otra medida del estiramiento relacionado a \mathbf{C} es el *tensor deformación de Cauchy-Green izquierdo* $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$. Sin embargo este tensor no se utilizará en nuestro desarrollo.

3.3.4. Interpretación de \mathbf{C} . Aquí demostraremos como cambios en la posición relativa y la orientación de puntos en un cuerpo material pueden ser cuantificados por \mathbf{C} . Para tal efecto consideremos un punto arbitrario \mathbf{X} en la configuración de referencia B , y sea Ω la bola abierta de radio $\alpha > 0$ centrada en \mathbf{X} . Para dos vectores unitarios \mathbf{e} y \mathbf{d} se consideran los puntos $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \alpha \mathbf{e}$ y $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \alpha \mathbf{d}$. Sean \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} los puntos correspondientes en Ω' , y sea $\phi \in [0, \pi]$ el ángulo entre los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$.

Teorema 3.1 (Relaciones de estiramiento Cauchy-Green). *Para cualquier punto $\mathbf{X} \in B$ y vectores unitarios \mathbf{e} y \mathbf{d} sean las cantidades $\lambda(\mathbf{e}) > 0$ y $\theta(\mathbf{e}, \mathbf{d}) \in [0, \pi]$ definidas por*

$$\lambda(\mathbf{e}) := \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \mathbf{e}}, \quad \cos \theta(\mathbf{e}, \mathbf{d}) = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \mathbf{e}} \sqrt{\mathbf{d} \cdot \mathbf{C} \mathbf{d}}}.$$

Entonces, cuando $\alpha \rightarrow 0$, se tiene que

$$\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|} \rightarrow \lambda(\mathbf{e}), \quad \frac{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|}{|\mathbf{Z} - \mathbf{X}|} \rightarrow \lambda(\mathbf{d}), \quad (3.5)$$

$$\cos \phi \rightarrow \cos \theta(\mathbf{e}, \mathbf{d}). \quad (3.6)$$

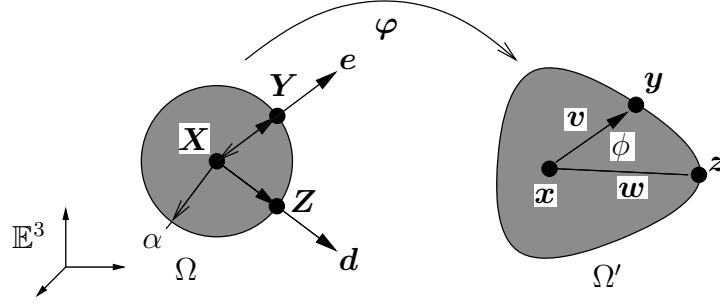


FIGURA 3.3. Interpretación del tensor de deformación \mathbf{C} . Los tres puntos \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} en Ω son mapeados a puntos correspondientes \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} en Ω' . Los cambios en la posición relativa y la orientación de los puntos pueden ser cuantificados por \mathbf{C} .

Demostración. Para demostrar el primer resultado de (3.5) notamos primeramente que el vector $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ puede ser escrito como

$$\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{Y}) - \varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{e}) - \varphi(\mathbf{X}).$$

Utilizando una expansión de Taylor alrededor de $\alpha = 0$ obtenemos

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{e} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (3.7)$$

y tomando en cuenta que $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ obtenemos

$$|\mathbf{v}|^2 = \alpha^2 \mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{e} + \mathcal{O}(\alpha^3) = \alpha^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\mathbf{e} + \mathcal{O}(\alpha^3).$$

Dividiendo por α^2 y notando que $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = |\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = \alpha$ llegamos a

$$\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\alpha^2} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\mathbf{e} + \mathcal{O}(\alpha), \quad (3.8)$$

lo cual implica el primer resultado de (3.5). Para demostrar el segundo resultado de (3.5) notamos que $\mathbf{w} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ puede ser escrito como

$$\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{Z}) - \varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{d}) - \varphi(\mathbf{X}).$$

Utilizando un desarrollo de Taylor (como arriba) se tiene que

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (3.9)$$

lo cual implica

$$|\mathbf{w}|^2 = \alpha^2 \mathbf{d} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\alpha^3).$$

Dividiendo por α^2 y notando que $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| = |\mathbf{w}|$ y $|\mathbf{Z} - \mathbf{X}| = \alpha$ llegamos a

$$\frac{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|^2}{|\mathbf{Z} - \mathbf{X}|^2} = \frac{|\mathbf{w}|^2}{\alpha^2} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\alpha), \quad (3.10)$$

lo cual implica el segundo resultado de (3.5). Para demostrar (3.6) utilizamos la identidad

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}. \quad (3.11)$$

Desde (3.7) y (3.9) obtenemos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \alpha^2 \mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\alpha^3) = \alpha^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\alpha^3),$$

lo cual implica que

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\alpha^2} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\alpha). \quad (3.12)$$

Combinando (3.12), (3.10) y (3.8) con (3.11) llegamos al resultado (3.6). ■

Comentamos que el resultado anterior demuestra que $\lambda(\mathbf{e})$ es el valor límite de la razón $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|/|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|$ cuando $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ a lo largo de una dirección \mathbf{e} . Por lo tanto $\lambda(\mathbf{e})$ se llama *estiramiento* en la dirección \mathbf{e} en \mathbf{X} . Esta cantidad es la razón de la longitud deformada versus la longitud inicial de un segmento lineal infinitesimal el cual antes de la deformación estaba alineado con \mathbf{e} .

Sea \mathbf{u}_i una dirección principal derecha en \mathbf{X} con el estiramiento principal correspondiente λ_i tal que

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_i = \lambda_i^2 \mathbf{u}_i \quad (\text{sin sumación}).$$

Entonces un cálculo directo demuestra que $\lambda(\mathbf{u}_i) = \lambda_i$, lo que proporciona justificación adicional para referirnos a λ_i , $i = 1, 2, 3$ como estiramientos principales.

Un análisis similar a aquel de la Sección 2.5.3 demuestra que en cualquier punto \mathbf{X} los extremos de $\lambda(\mathbf{e})$ ocurren cuando \mathbf{e} es un vector propio de \mathbf{C} (dirección principal derecha). Esto implica que los valores extremos de $\lambda(\mathbf{e})$ en un punto están dados por los estiramientos máximo y mínimo en este punto.

Finalmente comentamos que el ángulo $\theta(\mathbf{e}, \mathbf{d})$ es el valor límite de ϕ cuando $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ y $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}$ a lo largo de las direcciones \mathbf{e} y \mathbf{d} . Si denotamos por $\Theta(\mathbf{e}, \mathbf{d})$ al ángulo entre \mathbf{e} y \mathbf{d} , entonces la cantidad

$$\gamma(\mathbf{e}, \mathbf{d}) := \Theta(\mathbf{e}, \mathbf{d}) - \theta(\mathbf{e}, \mathbf{d})$$

se llama *la cizalla* entre las direcciones \mathbf{e} y \mathbf{d} en \mathbf{X} . Físicamente la cizalla es el cambio del ángulo entre dos segmentos lineales infinitesimales que antes de la deformación han estado alineados con \mathbf{e} y \mathbf{d} en \mathbf{X} . Un análisis directo demuestra que la cizalla entre dos vectores propios de \mathbf{C} (direcciones principales derechas) desaparece.

El siguiente resultado demuestra que al contrario de \mathbf{F} , las componentes de \mathbf{C} explícitamente cuantifican el estiramiento y la cizalla causados por una deformación φ .

Lema 3.4 (Componentes de \mathbf{C}). *Sean C_{ij} las componentes de \mathbf{C} en un marco de coordenadas arbitrario $\{\mathbf{e}_i\}$. Entonces para cada punto $\mathbf{X} \in B$ se tiene que*

$$C_{ii} = \lambda^2(\mathbf{e}_i), \quad C_{ij} = \lambda(\mathbf{e}_i)\lambda(\mathbf{e}_j) \sin \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (\text{sin sumación, } i \neq j).$$

Así, las componentes diagonales de \mathbf{C} son los cuadrados de los estiramientos a lo largo de las direcciones de coordenadas, y las demás componentes son relacionadas con la cizalla entre los pares de direcciones de coordenadas correspondientes.

Demostración. Tarea. ■

3.3.5. Deformaciones rígidas. Una deformación (homogénea) $\varphi : B \rightarrow B'$ se llama *rígida* si

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{X}$$

para algún vector \mathbf{c} y un tensor de rotación \mathbf{Q} . Esta clase de deformaciones incluye las traslaciones y rotaciones discutidas en la Sección 3.3.2. Para una deformación rígida se tiene que $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$, lo que implica que

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B.$$

En virtud de los Lemas 3.1 y 3.4, las deformaciones rígidas no producen ningún estiramiento de acuerdo a lo medido por \mathbf{C} . En particular, el estiramiento en cada dirección es unitario y la cizalla entre cualquier par de direcciones es cero en cada punto de B . Efectivamente, de acuerdo a la demostración del Lema 3.1 la posición relativa y la orientación entre cualquier selección de tres puntos en B no es cambiada por una deformación rígida. Las deformaciones rígidas pueden ser caracterizadas completamente en términos del campo tensorial \mathbf{C} . En particular se puede demostrar que una deformación es rígida si y sólo si $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$ para todo $\mathbf{X} \in B$.

3.3.6. El tensor de deformación infinitesimal \mathbf{E} . Consideremos una deformación $\varphi : B \rightarrow B'$ con el campo de desplazamiento asociado \mathbf{u} y el gradiente del desplazamiento $\nabla \mathbf{u}$. Entonces la cantidad

$$\mathbf{E} := \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

representa otra medida de la deformación. El campo tensorial $\mathbf{E} : B \rightarrow \mathcal{V}^2$ se llama *tensor de deformación infinitesimal* asociado a φ . Por definición, \mathbf{E} es simétrico en cada punto de B .

El tensor \mathbf{E} es relacionado al gradiente de deformación \mathbf{F} y al tensor deformación de Cauchy-Green \mathbf{C} . En particular la definición de \mathbf{u} (3.1) implica que

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I},$$

es decir

$$\mathbf{E} = \text{sym}(\mathbf{F} - \mathbf{I}).$$

Además, como $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, concluimos que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) - \frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}. \quad (3.13)$$

El tensor \mathbf{E} es particularmente útil para deformaciones pequeñas. Una deformación φ se dice *pequeña* si existe un número $0 \leq \varepsilon \ll 1$ tal que $|\nabla \mathbf{u}| = \mathcal{O}(\varepsilon)$, o equivalentemente, $\partial u_i / \partial X_j = \mathcal{O}(\varepsilon)$, para todos los puntos $\mathbf{X} \in B$. Así una deformación es pequeña si la norma del gradiente de desplazamiento es pequeña en todos los puntos del cuerpo. En tal caso (3.13) implica que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.14)$$

Notar que si despreciamos los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, entonces \mathbf{E} es equivalente a \mathbf{C} hasta una constante multiplicativa y un desplazamiento. El tensor \mathbf{E} aparece naturalmente en el estudio de modelos linealizados de la tensión en sólidos elásticos y termoelásticos.

Comentamos que si $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{O}$ para todo $\mathbf{X} \in B$, entonces $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ para todo $\mathbf{X} \in B$, es decir φ es una traslación. En este sentido, φ es una deformación pequeña si difiere sólo ligeramente de una traslación pura.

Comentamos además que el tensor \mathbf{E} esencialmente contiene la misma información que \mathbf{C} . Sin embargo, hay una diferencia importante: \mathbf{E} depende *linealmente* de \mathbf{u} , y por lo tanto de φ , mientras que \mathbf{C} depende no linealmente de \mathbf{u} .

3.3.7. Interpretación de \mathbf{E} . En lo siguiente describiremos como \mathbf{E} proporciona una medida de la deformación para una deformación pequeña. En particular se considera una deformación φ y se supone que ésta es pequeña en el sentido de que $\partial u_i / \partial X_j = \mathcal{O}(\varepsilon)$ para todo $\mathbf{X} \in B$, donde $0 \leq \varepsilon \ll 1$.

Lema 3.5 (Componentes de \mathbf{E}). *Sean E_{ij} las componentes de \mathbf{E} en un marco de coordenadas arbitrario $\{\mathbf{e}_i\}$. Despreciando términos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ para cada punto $\mathbf{X} \in B$ tenemos que*

$$E_{ii} \approx \lambda(\mathbf{e}_i) - 1, \quad E_{ij} \approx \frac{1}{2} \sin \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (\text{sin sumación, } i \neq j),$$

donde $\lambda(\mathbf{e}_i)$ es el estiramiento en la dirección \mathbf{e}_i y $\gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ denota la cizalla entre las direcciones \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j .

Demostración. Para demostrar el resultado para las componentes diagonales consideremos primero el caso $i = 1$. Desde (3.14) deducimos que

$$C_{11} = 1 + 2E_{11} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

y como $E_{11} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, las propiedades de la función raíz cuadrática entregan que

$$\sqrt{C_{11}} = 1 + E_{11} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Despreciando los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ y utilizando el Lema 3.4 obtenemos

$$E_{11} \approx \sqrt{C_{11}} - 1 = \lambda(\mathbf{e}_1) - 1,$$

que es el resultado deseado. Los demás casos diagonales son similares.

Para establecer el resultado para las componentes no diagonales consideremos $i = 1$ y $j = 2$. Entonces el Lema 3.4 implica que

$$\sin \gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}}. \quad (3.15)$$

Utilizando (3.14) y el hecho de que E_{11} , E_{12} y E_{22} son $\mathcal{O}(\varepsilon)$ obtenemos

$$C_{12} = 2E_{12} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad C_{11} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad C_{22} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

lo cual combinado con (3.15) implica que

$$\sin \gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 2E_{12} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Despreciando los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ concluimos que

$$E_{12} \approx \frac{1}{2} \sin \gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2),$$

lo cual es el resultado deseado. Las demás componentes no diagonales siguen por argumentos similares. ■

Tal como demostramos en el Lema 3.1, el estiramiento $\lambda(\mathbf{e}_i)$ es el valor límite de la razón $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|/|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|$ cuando $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ a lo largo de una dirección \mathbf{e}_i . De esto deducimos que $\lambda(\mathbf{e}_i) - 1$ es el valor límite de la cantidad

$$\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|} - 1 = \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| - |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|}{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|}. \quad (3.16)$$

Así, para una deformación pequeña el elemento diagonal E_{ii} (sin sumación) es aproximadamente igual al cambio relativo en longitud de un segmento lineal que antes de la deformación ha tenido la dirección \mathbf{e}_i en \mathbf{X} .

Cuando el ángulo de cizalla $\gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ es pequeño obtenemos

$$E_{ij} \approx \frac{1}{2} \sin \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \approx \frac{1}{2} \gamma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Así para una deformación pequeña los elementos no diagonales E_{ij} son aproximadamente iguales a la mitad del ángulo de cizalla entre dos segmentos lineales infinitesimales que antes de la deformación han tenido las direcciones \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j en \mathbf{X} .

3.3.8. Deformaciones infinitesimalmente rígidas. Una deformación φ se llama *infinitesimalmente rígida* si el campo de desplazamiento asociado \mathbf{u} posee la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{c} + \mathbf{W}\mathbf{X} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B,$$

donde \mathbf{c} es algún vector y \mathbf{W} un tensor antisimétrico. Equivalentemente, en virtud del Lema 1.3, el campo de desplazamiento para una deformación infinitesimalmente rígida puede ser escrito como

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{c} + \mathbf{w} \times \mathbf{X},$$

donde \mathbf{w} es el vector axial de \mathbf{W} . Tal como sugiere el nombre, una deformación infinitesimalmente rígida es relacionada a una deformación rígida pequeña. Para una deformación infinitesimalmente rígida el vector de desplazamiento está dado por $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{W}$ y el tensor de deformación infinitesimal es

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \text{sym } \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) = \mathbf{O} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B.$$

En virtud del Lema 1.6 obtenemos que una deformación infinitesimalmente rígida no produce ninguna deformación en términos de \mathbf{E} . En particular, el cambio de longitud de un segmento lineal a lo largo de cualquier dirección de coordenadas es aproximadamente cero, y la cizalla entre dos direcciones de coordenadas es aproximadamente cero en cada punto de B . Las deformaciones infinitesimalmente rígidas pueden ser caracterizadas completamente en

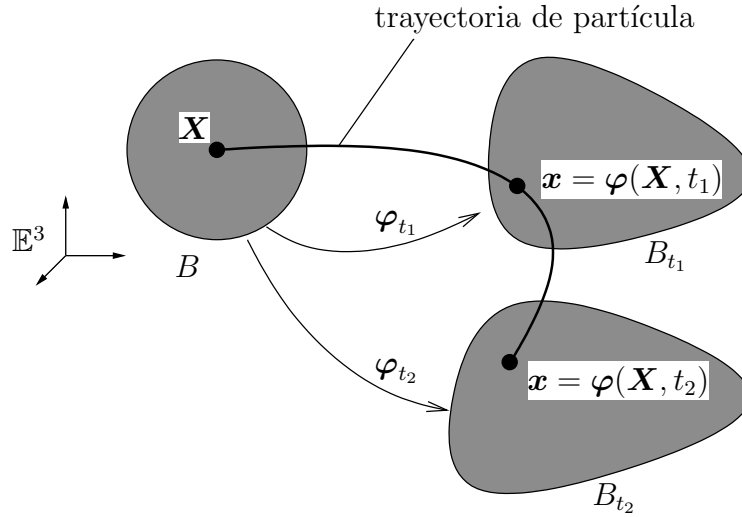


FIGURA 3.4. Varias configuraciones durante el movimiento de un cuerpo material. Se denota por B a la configuración de referencia en el instante $t = 0$, y B_t denota la configuración actual en el instante t .

términos de \mathbf{E} . En particular, se puede demostrar que una deformación es infinitesimalmente rígida si y sólo si

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{O} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B.$$

3.4. Movimientos

La deformación continua de un cuerpo en el transcurso del tiempo se llama *movimiento*. El movimiento de un cuerpo con la configuración referencial B es descrito por una aplicación continua $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$, donde para cada $t \geq 0$ fijo la función $\varphi(\cdot, t) = \varphi_t : B \rightarrow \mathbb{E}^3$ es una deformación de B . En cualquier instante $t \geq 0$ la aplicación φ_t mapea la configuración referencial B sobre una configuración $B_t = \varphi_t(B)$. La configuración B_t se llama *configuración actual* o *configuración deformada* en el instante t (ver Figura 3.4).

Se supone que φ_0 es el mapa identidad en el sentido de que $\varphi_0(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ para todo $\mathbf{X} \in B$, lo que implica que $B_0 = B$. Así, un movimiento representa la deformación continua de un cuerpo que empieza en la configuración B . La hipótesis de continuidad implica que durante un movimiento un cuerpo no puede romper en trozos disjuntos, formar hoyos, etc. Además suponemos que para cada $t \geq 0$ la deformación $\varphi_t : B \rightarrow B_t$ es admisible, por lo tanto podemos definir una deformación inversa $\psi_t = \varphi_t^{-1} : B_t \rightarrow B$ tal que

$$\mathbf{X} = \psi_t(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, t).$$

En virtud de propiedades de funciones inversas se tiene para todo $t \geq 0$ que

$$\mathbf{X} = \psi_t(\varphi_t(\mathbf{X})) = \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B,$$

y similarmente

$$\mathbf{x} = \varphi_t(\psi_t(\mathbf{x})) = \varphi(\psi(\mathbf{x}, t), t) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t.$$

En lo siguiente siempre se supone que todos los movimientos φ y sus inversas ψ son suaves en el sentido de que las derivadas parciales de todos los ordenes existen y son continuas.

3.4.1. Campos materiales y espaciales. En lo siguiente encontraremos campos definidos sobre la configuración actual B_t cuyos puntos se denominan por \mathbf{x} . Sin embargo, como $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, cualquier función de $\mathbf{x} \in B_t$ también puede ser expresada como una función de $\mathbf{X} \in B$. Similarmente encontraremos campos definidos sobre B , cuyos puntos se llaman \mathbf{X} . Como $\mathbf{X} = \psi(\mathbf{x}, t)$, cualquier función de $\mathbf{X} \in B$ también puede ser expresada como función de $\mathbf{x} \in B_t$. Para poder seguir donde un campo ha sido definido originalmente y como esta siendo expresado actualmente introducimos las siguientes definiciones.

Como *campo material* se entiende un campo expresado en términos de los puntos $\mathbf{X} \in B$, por ejemplo $\Omega = \Omega(\mathbf{X}, t)$. Un *campo espacial* es un campo expresado en términos de los puntos $\mathbf{x} \in B_t$; por ejemplo, $\Gamma = \Gamma(\mathbf{x}, t)$. A cualquier campo material $\Omega(\mathbf{X}, t)$ se puede asociar un campo espacial $\Omega_s(\mathbf{x}, t)$ mediante la relación

$$\Omega_s(\mathbf{x}, t) = \Omega(\psi(\mathbf{x}, t), t).$$

El campo Ω_s se llama *descripción espacial* del campo material Ω . Viceversa, a cada campo espacial $\Gamma(\mathbf{x}, t)$ se puede asociar un campo material Γ_m por medio de la relación

$$\Gamma_m(\mathbf{X}, t) = \Gamma(\varphi(\mathbf{X}, t), t),$$

donde Γ_m se llama *descripción material* del campo espacial Γ .

3.4.2. Derivadas con respecto a coordenadas. En el siguiente desarrollo habrá que distinguir cuidadosamente entre las coordenadas materiales $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ que denotan puntos en B y las coordenadas espaciales $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ para puntos en la configuración actual B_t . Para distinguir las derivadas con respecto a cada uno de estos conjuntos de derivadas se introduce la siguiente notación.

Se utiliza el símbolo $\nabla^{\mathbf{X}}$ para denotar el gradiente, la divergencia y el rotacional de campos materiales con respecto a las coordenadas materiales X_i para cualquier tiempo fijo $t \geq 0$. Similarmente se utiliza el símbolo $\nabla^{\mathbf{x}}$ para denotar el gradiente, la divergencia y el rotacional de campos espaciales con respecto a las coordenadas x_i para cualquier tiempo fijo $t \geq 0$. Así mismo definimos los Laplacianos $\Delta^{\mathbf{X}} = \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\nabla^{\mathbf{X}})$ y $\Delta^{\mathbf{x}} = \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\nabla^{\mathbf{x}})$.

3.4.3. Derivadas temporales. La *derivada temporal total* de un campo es la tasa de cambio como medida por un observador que esta rastreando el movimiento de cada partícula en el cuerpo. Es importante recordar que como la configuración referencial B está fija las coordenadas materiales \mathbf{X} son fijas. Por otro lado, como la configuración actual B_t cambia en el tiempo, las coordenadas espaciales \mathbf{x} de cada partícula cambian en el tiempo. La forma particular de estos cambios está dada por el movimiento, ya que $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$. Utilizando un punto para denotar la derivada temporal total, obtenemos que la derivada temporal total de un campo material $\Omega(\mathbf{X}, t)$ simplemente está dada por

$$\dot{\Omega}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\mathbf{X}, t).$$

Por otro lado, como $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$, la derivada temporal total de un campo espacial $\Gamma(\mathbf{x}, t)$ está dada por

$$\dot{\Gamma}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \right|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)} = \dot{\Gamma}_m(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)}, \quad (3.17)$$

es decir

$$\dot{\Gamma} = (\dot{\Gamma}_m)_s.$$

Comentamos que frecuentemente la derivada temporal total de un campo se llama *derivada temporal material*, *derivada temporal sustancial* o *derivada temporal convectiva*. Esta cantidad expresa la tasa de cambio de un campo que sería medida si siguiéramos cada partícula material en su movimiento por el espacio. Como cada partícula es identificada con coordenadas materiales fijas \mathbf{X} , esta derivada es aquella que se calcula con \mathbf{X} fijo.

En general se tiene que

$$\dot{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \neq \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{x}, t),$$

es decir la derivada total temporal de un campo espacial es diferente de la derivada temporal parcial calculada con \mathbf{x} fijo. En este caso la derivada temporal parcial no toma en cuenta el hecho de que las coordenadas espaciales \mathbf{x} de un cuerpo cambian durante el tiempo mediante $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$.

3.4.4. Campos de velocidad y aceleración. Sea $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo y sea \mathbf{X} una partícula material en la configuración referencial B . En cualquier instante $t \geq 0$ sea esta partícula identificada por $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ en la configuración actual B_t (ver Figura 3.4). Se denota por $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ la *velocidad* en el instante t de la partícula material identificada por $\mathbf{X} \in B$. Por definición del movimiento se tiene que

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t).$$

Similarmente denotamos por $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ la *aceleración* en el tiempo t de la partícula material etiquetada por $\mathbf{X} \in B$. Por definición de este movimiento se tiene que

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t).$$

Estas definiciones implican que la velocidad y la aceleración de partículas materiales naturalmente son campos materiales. Sin embargo frecuentemente se necesitan descripciones espaciales de estos campos. Se denota por $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ la descripción espacial del campo de velocidad material $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$, es decir

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_s(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \right) \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)}, \quad (3.18)$$

y se denota por $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ la descripción espacial del campo de aceleración material $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$, así que

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_s(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \right) \Big|_{\mathbf{X}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)}.$$

Notamos que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ corresponden a la velocidad y la aceleración, respectivamente, de la partícula material cuyas coordenadas actuales son \mathbf{x} en el instante t .

Lema 3.6 (Derivada temporal total). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ el movimiento de un cuerpo continuo con el campo de velocidad espacial asociado \mathbf{v} . Se considera un campo escalar espacial arbitrario $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ y un campo vectorial espacial arbitrario $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$. Entonces las derivadas temporales totales de ϕ y \mathbf{w} están dadas por las respectivas expresiones*

$$\dot{\phi} = \frac{\partial}{\partial t}\phi + \nabla^{\mathbf{x}}\phi \cdot \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w} + (\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{w})\mathbf{v}.$$

Demostración. Por definición de los gradientes de ϕ y \mathbf{w} se tiene que

$$\nabla^{\mathbf{x}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i, \quad \nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{w} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

donde $\{\mathbf{e}_k\}$ es cualquier marco fijo. En virtud de la definición de \mathbf{v} (3.18) se tiene que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{X}, t).$$

Usando la definición de la derivada temporal total (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)\right)\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t)\right)\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\mathbf{x}, t)\right)\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_i(\mathbf{X}, t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t)\right)\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(\mathbf{x}, t)\right)\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} v_i(\mathbf{x}, t)\Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)}. \end{aligned}$$

Expresando este resultado en términos de coordenadas espaciales \mathbf{x} se tiene

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t)v_i(\mathbf{x}, t),$$

lo cual establece el resultado para ϕ . Dado $\mathbf{w} = w_i\mathbf{e}_i$ aplicamos este resultado a cada campo escalar $w_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$, para obtener

$$\dot{w}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial w_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial w_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t)v_j(\mathbf{x}, t),$$

lo que implica el resultado deseado para \mathbf{w} . ■

Este resultado demuestra que si la velocidad espacial \mathbf{v} es conocida, la derivada temporal total de un campo espacial ϕ puede ser calculada sin conocimiento explícito del movimiento φ o de su inversa ψ .

Por definición el campo espacial de aceleración \mathbf{a} satisface $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, donde \mathbf{v} es el campo de velocidad espacial del movimiento. En virtud del Lema 3.6 obtenemos que

$$\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Así, el campo espacial de aceleración es efectivamente una función no lineal de la velocidad espacial y sus derivadas.

Finalmente comentamos que algunos textos utilizan la notación $\mathbf{v} \cdot \nabla^x \mathbf{w}$ en lugar de $(\nabla^x \mathbf{w})\mathbf{v}$. Sin embargo nosotros siempre utilizaremos $(\nabla^x \mathbf{w})\mathbf{v}$, lo que corresponde al producto habitual entre el tensor de segundo orden $\nabla^x \mathbf{w}$ y el vector \mathbf{v} .

3.5. Tasa de deformación y tasa de rotación

Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo, y sean B_t y $B_{t'}$ las configuraciones en los instantes $t \geq 0$ y $t' \geq t$. Además, sea Ω una bola pequeña con radio $\alpha > 0$ centrada en $\mathbf{x} \in B_t$, y sea Ω' la región correspondiente en $B_{t'}$. Cualquier medida cuantitativa de la tasa de cambio de forma entre Ω' y Ω en los límites $\alpha \rightarrow 0$ y $t' \rightarrow t$ generalmente se llama *tasa de deformación* en \mathbf{x} y t . Similarmente cualquier medida de la tasa de cambio de la orientación de Ω' con respecto a Ω se llama *tasa de rotación*. Notar que al contrario del concepto de deformación, los conceptos de tasa de deformación y tasa de rotación son independientes de la configuración referencial B , por lo tanto estas tasas juegan un rol importante en el estudio de fluidos.

3.5.1. Tensores tasa de deformación \mathbf{L} y tasa de rotación \mathbf{W} . Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con un campo espacial de velocidad \mathbf{v} . Entonces una medida de la tasa de deformación está dada por el tensor

$$\mathbf{L} := \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla^x \mathbf{v} + (\nabla^x \mathbf{v})^T).$$

El tensor $\mathbf{L}_t := \mathbf{L}(\cdot, t) : B_t \rightarrow \mathcal{V}^2$ se llama *campo tensorial tasa de deformación* asociado a \mathbf{v} . Por definición \mathbf{L} es un campo espacial y es simétrico para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y todo tiempo t .

A cualquier campo espacial de velocidad \mathbf{v} se puede asociar, además, el campo tensorial definido por

$$\mathbf{W} := \text{skew}(\nabla^x \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla^x \mathbf{v} - (\nabla^x \mathbf{v})^T).$$

El tensor $\mathbf{W}_t := \mathbf{W}(\cdot, t) : B_t \rightarrow \mathcal{V}^2$ se llama *campo tensorial tasa de rotación* asociado a \mathbf{v} . Por definición \mathbf{W} es un campo espacial y es antisimétrico para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y todo tiempo t .

Mientras que \mathbf{L} mide la tasa de deformación o de distorsión en un material, \mathbf{W} es una medida de la tasa de rotación.

3.5.2. Interpretación de \mathbf{L} y \mathbf{W} . Aplicando argumentos análogos a los usados para el tensor de deformación infinitesimal encontramos que los elementos diagonales de \mathbf{L} cuantifican la tasa de estiramiento instantánea de segmentos lineales infinitesimales localizados en $\mathbf{x} \in B_t$ y alineados con los ejes de coordenadas. Similarmente los elementos no diagonales de \mathbf{L} cuantifican la tasa instantánea de cizalla. En particular, si $\hat{\mathbf{E}}$ denota el tensor de deformación infinitesimal asociado a la deformación pequeña $\hat{\varphi} : B_t \rightarrow B_{t+s}$ ($0 \leq s \ll 1$), entonces \mathbf{L} es la tasa de cambio de $\hat{\mathbf{E}}$ con respecto a s en $s = 0$. Equivalentemente, si $\hat{\mathbf{U}}$ denota el tensor de estiramiento a derecha asociado a $\hat{\varphi}$, entonces \mathbf{L} es la tasa de cambio de $\hat{\mathbf{U}}$ con respecto a s en $s = 0$.

El tensor antisimétrico \mathbf{W} denota la tasa instantánea de rotación rígida de un volumen infinitesimal de material en $\mathbf{x} \in B_t$. En particular, si $\hat{\mathbf{R}}$ denota el tensor de rotación en la descomposición polar del gradiente de deformación $\nabla^x \hat{\varphi}$, entonces \mathbf{W} es la tasa de cambio de $\hat{\mathbf{R}}$ con respecto a s en $s = 0$.

3.5.3. Vorticidad. Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con un campo espacial de velocidad \mathbf{v} . Como *vorticidad* de un movimiento se define el campo espacial vectorial

$$\mathbf{w} = \nabla^x \times \mathbf{v}.$$

Efectivamente, en virtud de la Definición 1.8 y del Lema 1.3, \mathbf{w} es el vector axial asociado al tensor antisimétrico $2\mathbf{W}$. Concluimos que la vorticidad en un punto es una medida de la tasa de rotación en este punto. En particular, la discusión del Teorema 1.7 implica que la vorticidad en un punto en un cuerpo material puede ser interpretada como dos veces la velocidad angular local en este punto.

3.5.4. Movimientos rígidos. Un movimiento φ se llama *rígido* si

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{X}$$

para algún vector \mathbf{c} , que puede depender del tiempo t , y un tensor de rotación $\mathbf{R}(t)$, que igualmente puede depender de t . Para tales movimientos se puede demostrar que el campo de velocidad espacial puede ser escrito en la forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) + \dot{\mathbf{c}}(t),$$

donde $\boldsymbol{\omega}(t)$ es un vector que depende del tiempo llamado *velocidad espacial angular* del movimiento. Equivalentemente, utilizando el Lema 1.3 podemos escribir

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) + \dot{\mathbf{c}}(t), \quad (3.19)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}(t)$ es el tensor antisimétrico de segundo orden cuyo vector axial es $\boldsymbol{\omega}(t)$. Desde (3.19) obtenemos que $\nabla^x \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t)$, lo que a su vez implica que $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{O}$, $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t)$ y $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 2\boldsymbol{\omega}(t)$ para todo $t \geq 0$ y $\mathbf{x} \in B_t$. Así, los movimientos rígidos no producen una tasa de deformación medida por \mathbf{L} , pero sí producen una tasa de rotación medida por \mathbf{W} o \mathbf{w} .

3.6. Cambio de variables

Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo, y para cualquier tiempo $t \geq 0$ sea φ_t la deformación que mapea la configuración referencial B sobre la configuración actual B_t .

3.6.1. Transformación de integrales de volumen. En lo siguiente desarrollaremos la relación entre un elemento de volumen infinitesimal $dV_{\mathbf{x}}$ en el punto $\mathbf{x} \in B_t$ y el elemento de volumen correspondiente $dV_{\mathbf{X}}$ en el punto $\mathbf{X} \in B$. Luego utilizaremos esta relación para desarrollar una fórmula de cambio de variable para integrales de volumen en B_t y B .

Notamos primero que un elemento de volumen infinitesimal $dV_{\mathbf{X}}$ en un punto $\mathbf{X} \in B$ arbitrario puede ser representado en términos de un producto escalar triple. En particular, si $d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{X}_2$ y $d\mathbf{X}_3$ son tres vectores infinitesimales que se originan en \mathbf{X} , entonces el elemento de volumen infinitesimal definido por estos vectores está dado por

$$dV_{\mathbf{X}} = (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3.$$

Los tres vectores infinitesimales $d\mathbf{X}_k$ en \mathbf{X} son mapeados mediante la deformación φ_t a tres vectores infinitesimales $d\mathbf{x}_k$ en $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X})$ en B_t . En particular se tiene que

$$d\mathbf{x}_k = \nabla^{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}_k = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}_k. \quad (3.20)$$

Los vectores infinitesimales $d\mathbf{x}_k$ pueden ser utilizados para definir un elemento de volumen $dV_{\mathbf{x}}$ mediante el producto escalar triple:

$$dV_{\mathbf{x}} = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3. \quad (3.21)$$

Notar que en virtud de las propiedades del determinante y del producto escalar triple se tiene que

$$(\mathbf{F}\mathbf{u} \times \mathbf{F}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}\mathbf{w} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad (3.22)$$

para cualquier tensor de segundo orden \mathbf{F} y vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Insertando (3.20) en (3.21) y utilizando (3.22) obtenemos

$$\begin{aligned} dV_{\mathbf{x}} &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 = (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}_3 \\ &= \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la siguiente fórmula para el cambio de variables para la transformación de integrales de volumen.

Lema 3.7 (Transformación de integrales de volumen). *Sea $\phi(\mathbf{x}, t)$ un campo escalar arbitrario sobre B_t , sea Ω_t un subconjunto arbitrario de B_t , y sea Ω el subconjunto correspondiente de B tal que $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$. Entonces*

$$\int_{\Omega_t} \phi(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}}.$$

Comentamos que el resultado anterior explica un poco la interpretación física del campo $\det \mathbf{F}$. En particular, sea $\Omega_{\delta,0}$ una bola del radio $\delta > 0$ centrada en un punto $\mathbf{X}_0 \in B$, y sea $\Omega_{\delta,t} = \varphi_t(\Omega_{\delta,0})$. Entonces, utilizando el Lema 3.7 y una expansión en serie de Taylor de $\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ alrededor de \mathbf{X}_0 obtenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega_{\delta,t}) &= \int_{\Omega_{\delta,t}} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_{\delta,0}} \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega_{\delta,0}} (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t) + \mathcal{O}(\delta)) dV_{\mathbf{X}} \\ &= (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t) + \mathcal{O}(\delta)) \text{vol}(\Omega_{\delta,0}). \end{aligned}$$

Dividiendo por $\text{vol}(\Omega_{\delta,0})$ y tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos

$$\det \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\Omega_{\delta,t})}{\text{vol}(\Omega_{\delta,0})}.$$

Entonces $\det \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t)$ representa la razón local del volumen deformado con respecto al volumen referencial en un punto $\mathbf{X}_0 \in B$ bajo una deformación φ_t .

El campo definido por $J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ se llama *campo Jacobiano* para la deformación φ_t . Es una medida de la deformación de volumen causada por una deformación φ_t en un punto \mathbf{X} al instante t . La deformación comprime el material en una vecindad de \mathbf{X} si y sólo si $J(\mathbf{X}, t) < 1$ (el volumen disminuye). Similarmente, la deformación expande el material (aumenta el volumen) en una vecindad de \mathbf{X} si y sólo si $J(\mathbf{X}, t) > 1$. Si $J(\mathbf{X}, t) = 1$

no hay cambio de volumen material en una vecindad de \mathbf{X} . En este caso el material cerca de \mathbf{X} es distorsionado de la manera que el volumen es preservado. Por ejemplo el material puede ser comprimido a lo largo de ciertas direcciones y ser extendido a lo largo de otras.

3.6.2. Diferenciación de integrales que dependen del tiempo.

Lema 3.8 (Derivada temporal del Jacobiano). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con el campo de velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y el gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)(\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)}.$$

Demostración. Utilizando el Lema 1.22 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) &= \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-\text{T}} : \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \\ &= \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \operatorname{tr} \left(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \right) \\ &= \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \operatorname{tr} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \right] \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

En virtud de la definición del campo espacial de velocidad \mathbf{v} se tiene que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{X}, t)$$

o en componentes,

$$v_i(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i(\mathbf{X}, t).$$

Luego analizaremos el término $\operatorname{tr}(\{\partial \mathbf{F} / \partial t\} \mathbf{F}^{-1})$ en términos de \mathbf{v} . Para tal efecto notamos que

$$F_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial X_j} \varphi_i(\mathbf{X}, t)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X_j} \varphi_i(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(v_i(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} v_i(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \frac{\partial}{\partial X_j} \varphi_k(\mathbf{X}, t). \end{aligned}$$

Esto entrega que

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial x_k} v_i(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} F_{kj}(\mathbf{X}, t),$$

lo que en notación tensorial se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t).$$

Esta expresión implica que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \right) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-1} = \nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)},$$

luego tomando la traza obtenemos

$$\text{tr} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \right] \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-1} \right) = \text{tr}(\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} = (\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)}.$$

Insertando esta expresión en (3.23) obtenemos el resultado deseado. \blacksquare

El Lema 3.8 demuestra que la derivada temporal del campo Jacobiano depende solamente del mismo campo Jacobiano y de la divergencia del campo vectorial. Esta observación es aprovechada en el siguiente resultado.

Teorema 3.2 (Teorema del Transporte de Reynolds). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con un campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ asociado. Sea Ω_t un volumen arbitrario en B_t con una superficie denotada por $\partial\Omega_t$ y sea \mathbf{n} el campo unitario normal exterior sobre $\partial\Omega_t$. Entonces para cualquier campo espacial escalar $\Phi(\mathbf{x}, t)$ se tiene que*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi \, dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} (\dot{\Phi} + \Phi(\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})) \, dV_{\mathbf{x}},$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi \, dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \, dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega_t} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA_{\mathbf{x}}. \quad (3.24)$$

Demostración. Tarea. \blacksquare

Este resultado demuestra que si la velocidad espacial \mathbf{v} es conocida, entonces la derivada temporal de una integral de volumen sobre un subconjunto arbitrario Ω_t de B_t puede ser calculada sin conocimiento explícito del movimiento φ o de su inversa ψ .

Este teorema se llama *Teorema del Transporte* debido a la expresión en (3.24). En particular la tasa del cambio de la integral en Φ sobre Ω_t es igual a la tasa calculada si Ω_t quedará fijo en su posición actual más la tasa con la cual Φ es *transportada* a través de la frontera $\partial\Omega_t$ mediante la componente normal de la velocidad $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.

3.6.3. Transformación de integrales de superficie. Sea Γ una superficie en B orientada por un campo unitario normal $\mathbf{N} : \Gamma \rightarrow \mathcal{V}$, y sea $\gamma_t = \varphi_t(\Gamma)$ la superficie correspondiente en B_t con la orientación correspondiente dada por un campo unitario normal $\mathbf{n} : \gamma_t \rightarrow \mathcal{V}$. Dados un punto $\mathbf{X} \in \Gamma$ y un elemento de superficie infinitesimal $dA_{\mathbf{X}}$ en \mathbf{X} queremos saber como este elemento de superficie se transforma bajo la aplicación φ_t .

Sea la superficie Γ regular en el sentido de que para cualquier punto $\mathbf{Z} \in \Gamma$, se puede establecer un sistema de *coordenadas de superficie* sobre Γ cerca de \mathbf{Z} . Bajo esta hipótesis podemos encontrar una región $D \subset \mathbb{E}^2$ y una aplicación $\chi : D \rightarrow \mathbb{E}^3$ tal que cualquier punto $\mathbf{X} \in \Gamma$ cerca de \mathbf{Z} puede ser escrito como $\mathbf{X} = \chi(\boldsymbol{\xi})$, donde $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T \in D$. En términos

de las coordenadas $\boldsymbol{\xi}$ un elemento de superficie infinitesimal orientado en $\mathbf{X} \in \Gamma$ puede ser definido por

$$\mathbf{N}(\mathbf{X})dA_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) \times \frac{\partial}{\partial \xi_2} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.25)$$

Bajo la deformación $\boldsymbol{\varphi}_t$ las coordenadas de superficie sobre Γ cerca de \mathbf{Z} se convierten en coordenadas de superficie sobre γ_t cerca de $\mathbf{z} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{Z})$. Así, cualquier punto $\mathbf{x} \in \gamma_t$ cerca de \mathbf{z} puede ser escrito como $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}))$, donde $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T \in D$. En términos de las coordenadas superficiales $\boldsymbol{\xi}$ un elemento de superficie infinitesimal orientado en γ_t en \mathbf{x} es definido por

$$\mathbf{n}(\mathbf{x})dA_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})) \times \frac{\partial}{\partial \xi_2} \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})) d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.26)$$

Además se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi_t^i(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})) \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial X_j} \varphi_t^i(\mathbf{X}) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \chi_j(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_i = \mathbf{F}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}),$$

con una expresión similar válida para $\partial \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}))/\partial \xi_2$. Utilizando la identidad

$$\mathbf{F}\mathbf{u} \times \mathbf{F}\mathbf{v} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

válida para cualquier tensor de segundo orden invertible \mathbf{F} y vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , podemos escribir (3.26) como

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{x})dA_{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{F}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) \right) \times \left(\mathbf{F}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi})) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= (\det \mathbf{F}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}))) \mathbf{F}_t(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}))^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) \times \frac{\partial}{\partial \xi_2} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Comparando (3.27) con (3.24) encontramos que

$$\mathbf{n}(\mathbf{x})dA_{\mathbf{x}} = (\det \mathbf{F}_t(\mathbf{X})) \mathbf{F}_t(\mathbf{X})^{-T} \mathbf{N}(\mathbf{X})dA_{\mathbf{X}},$$

donde $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})$. Esta relación nos lleva al siguiente resultado.

Lema 3.9 (Transformación de integrales de superficie). *Sea $\phi(\mathbf{x}, t)$ un campo escalar espacial arbitrario, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ un campo vectorial espacial arbitrario, y $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ un campo tensorial de segundo orden espacial arbitrario. Sea Ω cualquier sub-región de B , y sea $B_t \supseteq \Omega_t = \boldsymbol{\varphi}_t(\Omega)$. Sea $\partial\Omega$ la superficie de Ω con el campo vectorial normal exterior $\mathbf{N}(\mathbf{X})$, y sea $\partial\Omega_t$ la superficie de Ω_t con el campo normal unitario exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Entonces*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_t} \phi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} &= \int_{\partial\Omega} \phi_m(\mathbf{X}, t) \mathbf{G}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) dA_{\mathbf{X}}, \\ \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_m(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) dA_{\mathbf{X}}, \\ \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}_m(\mathbf{X}, t) \mathbf{G}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) dA_{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{G} denota un campo material tensorial de segundo orden definido por

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}, t) = (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-T}.$$

3.7. Movimientos isovolumétricos o isocóricos

Un movimiento $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ de un cuerpo continuo se llama *isovolumétrico* o *isocórico* si

$$\text{vol}(\varphi_t(\Omega)) = \text{vol}(\Omega) \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ y todo subconjunto } \Omega \subseteq B.$$

En particular un movimiento es isocórico si el volumen del cuerpo, y de todas sus partes, queda constante durante todo el movimiento.

Lema 3.10 (Condiciones para la preservación del volumen). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con el campo espacial de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y el gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$. Entonces φ es isocórico si y sólo si $\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = 1$ para todo $\mathbf{X} \in B$ y $t \geq 0$, o equivalentemente, $(\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$.*

Demostración. Tarea. ■

Los movimientos simples tales como las traslaciones y rotaciones de un cuerpo son isocóricos porque no producen distorsión. Sin embargo un movimiento que distorsiona un cuerpo puede ser isocórico.

3.8. Ejercicios

Problema 3.1 (Tarea 2, Curso 2012). Sea $B = \mathbb{E}^3$ y un movimiento $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ dado por

$$x_1 = e^t X_1 + X_3, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 - tX_1.$$

a) Demostrar que el movimiento inverso está dado por

$$X_1 = \frac{x_1 - x_3}{t + e^t}, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = \frac{tx_1 + e^t x_3}{t + e^t}.$$

b) Verificar que $\varphi(\psi(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x}$ y $\psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{X}$.

c) Se considera el campo espacial $\Gamma(\mathbf{x}, t) = x_1 + t$. Determinar la derivada temporal material $\dot{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$.

d) Determinar la derivada temporal parcial $\partial\Gamma(\mathbf{x}, t)/\partial t$ y verificar que $\partial\Gamma(\mathbf{x}, t)/\partial t \neq \dot{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$.

Problema 3.2 (Certamen 1, Curso 2012). Se considera una deformación φ definida en componentes por

$$[\varphi(\mathbf{X})] = \begin{Bmatrix} pX_1 + a \\ qX_2 + b \\ rX_3 + c \end{Bmatrix},$$

con constantes p, q, r, a, b, c .

a) ¿Qué restricciones debe satisfacer p, q y r para que φ sea una deformación admisible?

- b) Dado un punto \mathbf{Y} arbitrario, determinar las componentes de \mathbf{d} , \mathbf{s} y \mathbf{r} tales que $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{r} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{d}$, donde \mathbf{d} es una traslación, \mathbf{s} es un estiramiento desde \mathbf{Y} y \mathbf{r} es una rotación alrededor de \mathbf{Y} .

Problema 3.3 (Certamen 1, Curso 2012). Sea $B = \mathbb{E}^3$ y el movimiento $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ definido por

$$x_1 = (1 + t)X_1, \quad x_2 = X_2 + tX_3, \quad x_3 = X_3 - tX_2.$$

Se considera, además, el campo espacial $\phi(\mathbf{x}, t) = tx_1 + x_2$.

- Demostrar que $\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) > 0$ para todo $t \geq 0$ y determinar las componentes del movimiento inverso $\mathbf{X} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$ para todo $t \geq 0$.
- Determinar las componentes del campo de velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.
- Determinar la derivada temporal material de ϕ utilizando la definición $\dot{\phi} = (\dot{\phi}_m)_s$.
- Determinar la derivada temporal material de ϕ utilizando el Lema 3.6. ¿Se obtiene el mismo resultado que en (c)?

Problema 3.4 (Certamen 1, Curso 2013). Sea el gradiente de deformación en un punto \mathbf{X}_0 en un cuerpo dado por las componentes

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar las componentes del tensor tensión de Cauchy-Green \mathbf{C} y el tensor estiramiento a derecha \mathbf{U} . Pista: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$.

Capítulo 4

Leyes de balance

4.1. Motivación

Para motivar el contenido de este capítulo consideremos algunas ideas de la mecánica de sistemas particulados. Para tal efecto consideremos un sistema de N partículas con masas m_i y posiciones \mathbf{x}_i . Será útil considerar estas partículas como átomos que forman un cuerpo continuo. Se supone que cada par de partículas distintas ($i \neq j$) interactúa con una energía U_{ij} , la cual se considera simétrica en el sentido de que $U_{ij} = U_{ji}$, y se denota la fuerza de interacción de la partícula j sobre la partícula i por

$$\mathbf{f}_{ij}^{\text{int}} = -\nabla^{\mathbf{x}_i} U_{ij}.$$

Se supone, además, que cada partícula está sujeta a una fuerza ambiental $\mathbf{f}_i^{\text{env}}$. Por simplicidad se supone que ninguna otra fuerza esté presente en el sistema.

Una descripción completa del movimiento del sistema particulado está dada por las siguientes ecuaciones (sin convenio de sumación):

$$\dot{m}_i = 0, \quad m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i^{\text{env}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{f}_{ij}^{\text{int}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

La primera ecuación afirma que la masa de cada partícula es constante. La segunda ecuación expresa que cada partícula obedece la *Segunda Ley de Newton*, es decir la masa de cada partícula multiplicada por su aceleración iguala la fuerza resultante sobre ella.

Bajo hipótesis apropiadas sobre las energías de interacción U_{ij} , las ecuaciones (4.1) pueden ser utilizadas para derivar leyes de balance de masa, momento lineal, momento de torsión y energía para cualquier subconjunto del sistema particulado. Para tal efecto se considera un subconjunto $I \subseteq \{1, \dots, N\}$, y sea Ω_t la configuración actual de las partículas indexadas por $i \in I$. A la configuración Ω_t en el instante $t \geq 0$ se asocia la masa total $M(\Omega_t)$, el momento lineal total $\mathbf{l}(\Omega_t)$, el momento angular total $\mathbf{j}(\Omega_t)$, la energía interna total $U(\Omega_t)$, y la energía cinética total $K(\Omega_t)$ dados por

$$\begin{aligned} M(\Omega_t) &= \sum_{i \in I} m_i, & \mathbf{l}(\Omega_t) &= \sum_{i \in I} m_i \mathbf{x}_i, & \mathbf{j}(\Omega_t) &= \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i), \\ U(\Omega_t) &= \sum_{\substack{i, j \in I \\ i < j}} U_{ij}, & K(\Omega_t) &= \sum_{i \in I} \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Suponiendo que U_{ij} depende de \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j solamente a través de la distancia $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ y que las interacciones son simétricas de acuerdo a lo discutido arriba, podemos deducir de (4.1)

las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}M(\Omega_t) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l}(\Omega_t) = \sum_{i \in I} \left(\mathbf{f}_i^{\text{env}} + \sum_{j \notin I} \mathbf{f}_{ij}^{\text{int}} \right), \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j}(\Omega_t) = \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i \times \left(\mathbf{f}_i^{\text{env}} + \sum_{j \notin I} \mathbf{f}_{ij}^{\text{int}} \right), \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt}(U(\Omega_t) + K(\Omega_t)) = \sum_{i \in I} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \left(\mathbf{f}_i^{\text{env}} + \sum_{j \notin I} \mathbf{f}_{ij}^{\text{int}} \right). \quad (4.6)$$

Típicamente las ecuaciones (4.3)–(4.6) son referidas como *leyes de balance*. Describen cómo la masa, el momento lineal, el momento angular y la energía de Ω_t pueden ser conservados, incrementados o disminuidos en dependencia de influencias externas. Por ejemplo, si Ω_t corresponde al sistema de partículas entero, es decir $I = \{1, \dots, N\}$, y si suponemos que todas las fuerzas ambientales son cero, las ecuaciones (4.3)–(4.6) implican que la masa, el momento lineal, el momento angular y la energía son conservados durante cualquier movimiento. Es decir, estas cantidades permanecerán constantes.

Las leyes de balance (4.3)–(4.6) forman un punto de partida importante para el modelamiento de cuerpos continuos. Las leyes de balance de masa, momento lineal y momento angular pueden ser generalizadas a cuerpos continuos de manera muy directa; esencialmente se reemplaza la suma por una integral. La ley de balance de energía igualmente puede ser generalizada; pero la situación es un poco más complicada. El modelamiento continuo no puede representar los detalles que ocurren en escalas espaciales comparables a, o inferiores que, las distancias típicas interatómicas. En particular, la velocidad en un punto en un cuerpo continuo debe ser interpretada como la velocidad en promedio de átomos individuales en la vecindad de este punto.

Las fluctuaciones de las velocidades de los átomos individuales alrededor del promedio no son representadas por el campo de velocidad del continuo. Estas fluctuaciones son asociadas a escalas temporales y espaciales a las que el modelo continuo ya no se aplica. Para considerar situaciones donde la energía de estas fluctuaciones es significativa, es necesario introducir dos conceptos nuevos al nivel continuo: *la temperatura*, para medir el tamaño de las fluctuaciones de velocidad, y *el calor* para medir la energía de estas fluctuaciones. La temperatura y el calor juegan un rol importante para la generalización de (4.6) a cuerpos continuos.

Bajo una generalización adecuada, las leyes de balance (4.3)–(4.6) forman la base de una teoría termo-mecánica de cuerpos continuos. En este caso las cuatro leyes esencialmente son postulados. Es decir, mientras que las leyes (4.3)–(4.6) son todas implicaciones de (4.1) para sistemas particulados bajo hipótesis especiales, no hay ninguna implicación de este tipo si descartamos estas hipótesis, por lo tanto simplemente postulamos estas leyes en el caso continuo, comentando que su validez ha sido comprobada experimentalmente. Una quinta ley de balance también será postulada en el caso continuo. Esta ley, que es motivada por la termodinámica de procesos homogéneos, involucra el concepto de entropía y asumirá la forma

de desigualdad. Las cuatro leyes de balance correspondientes a (4.3)–(4.6) y la desigualdad de entropía formarán una teoría termo-mecánica completa de cuerpos continuos.

4.2. Leyes de balance en forma integral

Ahora formularemos las leyes de balance de masa, momento, energía y entropía aplicadas a cualquier subconjunto abierto de un cuerpo continuo. Empezamos con una formulación de la conservación de masa, luego procederemos a las leyes de inercia que conectan las tasas de cambio del momento lineal y angular totales a las fuerzas externas aplicadas. Introduciendo el concepto de energía interna y del calentamiento de un cuerpo continuo y el trabajo neto de las fuerzas externas, formulamos las leyes de la termodinámica que describen como varias formas de energía, tales como la térmica y la mecánica, se convierten una en otra.

4.2.1. Conservación de masa y leyes de inercia. Se considera un cuerpo continuo con la configuración referencial B bajo un movimiento $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$. Sea B_t la configuración actual correspondiente, y sean $\varrho(\mathbf{x}, t)$ la densidad de masa y $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ la velocidad correspondientes en un punto $\mathbf{x} \in B_t$ en el instante $t \geq 0$. Además, sea Ω_t un subconjunto abierto arbitrario de B_t . Motivado por (4.2) definimos la *masa* de Ω_t por

$$\text{mass}(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}},$$

el *momento lineal* de Ω_t por

$$\mathbf{l}(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, \quad (4.7)$$

y el *momento de torsión* de Ω_t con respecto a un punto \mathbf{z} por

$$\mathbf{j}(\Omega_t)_{\mathbf{z}} := \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}}. \quad (4.8)$$

En la ausencia de reacciones químicas y de efectos relativistas la ley de balance (4.3) puede ser generalizada a cuerpos continuos de acuerdo al siguiente axioma.

Axioma 4.1 (Conservación de masa). *La masa de cualquier subconjunto abierto de un cuerpo continuo no cambia cuando el cuerpo cambia de posición y forma, es decir*

$$\frac{d}{dt} \text{mass}(\Omega_t) = 0 \quad \text{para todo } \Omega_t \subseteq B_t.$$

Sea Ω_t sujeto a un campo tracción externo $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ y un campo de fuerza de cuerpo por masa unitaria $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$. Entonces, de acuerdo a la Sección 2.3.1, la fuerza resultante sobre Ω_t es

$$\mathbf{r}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA_{\mathbf{x}}, \quad (4.9)$$

mientras que el momento de torsión resultante sobre Ω_t con respecto a \mathbf{z} está dado por

$$\boldsymbol{\tau}(\Omega_t)_{\mathbf{z}} = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA_{\mathbf{x}}. \quad (4.10)$$

Las leyes de balance expresadas en (4.4) y (4.5) se pueden generalizar a cuerpos continuos de acuerdo a lo siguiente.

Axioma 4.2 (Leyes de inercia). *Con respecto a un marco de referencia fijo la tasa de cambio del momento lineal de cualquier subconjunto abierto de un cuerpo continuo iguala la fuerza resultante aplicada a este cuerpo, y la tasa de cambio del momento angular con respecto al origen iguala el momento de torsión resultante alrededor del origen. Es decir,*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l}(\Omega_t) = \mathbf{r}(\Omega_t), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{j}(\Omega_t)_o = \boldsymbol{\tau}(\Omega_t)_o \quad \text{para todo } \Omega_t \subseteq B_t, \quad (4.11)$$

donde $\mathbf{l}(\Omega_t)$, $\mathbf{j}(\Omega_t)_o$, $\mathbf{r}(\Omega_t)$ y $\boldsymbol{\tau}(\Omega_t)_o$ están dados por (4.7), (4.8), (4.9) y (4.10), respectivamente (poniendo $\mathbf{z} = \mathbf{o}$ en (4.8) y (4.10)).

Las leyes (4.11) son postuladas para ser válidas para todo movimiento y todo subconjunto de un cuerpo continuo. Partiendo de estas leyes también es posible derivar formas alternativas de la ecuación del momento de torsión. En particular (4.11) implica las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j}(\Omega_t)_z = \boldsymbol{\tau}(\Omega_t)_z, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{j}(\Omega_t)_{\mathbf{x}_{\text{com}}} = \boldsymbol{\tau}(\Omega_t)_{\mathbf{x}_{\text{com}}} \quad \text{para todo } \Omega_t \subseteq B_t, \quad (4.12)$$

donde \mathbf{z} es cualquier punto fijo y \mathbf{x}_{com} es el centro de masa de Ω_t (el cual, en general, dependerá del tiempo). Esto es análogo a la situación de equilibrio descrita en la Sección 2.4. Las formas del momento de torsión dadas en (4.12) típicamente se usan para el estudio de cuerpos rígidos. La ecuación de momento lineal en (4.11) también puede ser expresada en términos del centro de masa \mathbf{x}_{com} de Ω_t (Tarea).

4.2.2. Primera y Segunda Ley de Termodinámica.

4.2.2.1. *La temperatura y el calor.* En el sentido más básico, *la temperatura* es una propiedad física de la materia basada en nuestra percepción natural del calor y del frío. Para el modelamiento de cuerpos continuos suponemos que la temperatura está definida en cada punto de un cuerpo en cada instante. En particular se supone que existe un *campo de temperatura absoluta* $\theta(\mathbf{x}, t) > 0$ definido para cada $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$. La temperatura en un punto de un cuerpo continuo debe ser interpretada como la medida de las fluctuaciones de la velocidad de los átomos individuales en una vecindad de este punto. Así, mientras que la velocidad del continuo es una medida del promedio, la temperatura del continuo es una medida de la variación de las velocidades atómicas cerca de un punto.

La *energía térmica* o el *contenido de calor* de un cuerpo es una energía asociada con las fluctuaciones de la velocidad de los átomos individuales en el cuerpo. En particular, el calor es una energía asociada a la temperatura. De acuerdo a la experiencia física, un cuerpo material es capaz de convertir el calor a trabajo mecánico, y viceversa. La deformación de un cuerpo puede afectar su temperatura y por lo tanto su contenido de calor. Asimismo, agregar calor a un cuerpo elevando su temperatura puede poner el cuerpo en movimiento, por ejemplo se puede expandir. Debido a estas conversiones, el calor puede ser expresado en las mismas unidades que el trabajo mecánico.

El contenido de calor puede ser afectado de dos maneras diferentes. Primeramente el calor puede ser producido o consumido en todos los volúmenes del cuerpo por mecanismos mecánicos, químicos o electromagnéticos. Por ejemplo, una corriente eléctrica puede producir

calor durante su flujo a través del volumen de un cuerpo continuo aislado. Segundamente, el calor puede ser transferido desde un cuerpo a otro mediante contacto físico o por radiación térmica en una superficie. Por ejemplo, cuando se pone un cuerpo caliente en contacto con un cuerpo frío, según nuestra experiencia el cuerpo inicialmente caliente se enfría (pierde calor) y el cuerpo inicialmente frío se calienta (gana calor). En este caso se realiza una transferencia de calor por área unitaria de la superficie de contacto. La transferencia de calor por contacto puede ser, además, clasificado como *conducción* y *convección* de acuerdo a las circunstancias y la naturaleza de los cuerpos involucrados.

Para un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ definimos el *calentamiento neto* $Q(\Omega_t)$ como la tasa por tiempo unitario con la cual se agrega calor a Ω_t . En analogía con nuestro tratamiento de fuerzas suponemos que el calentamiento neto puede ser descompuesto en un calentamiento de cuerpo $Q_b(\Omega_t)$ y un calentamiento superficial $Q_s(\Omega_t)$, tal que

$$Q(\Omega_t) = Q_b(\Omega_t) + Q_s(\Omega_t). \quad (4.13)$$

Se supone que el calentamiento de cuerpo $Q_b(\Omega_t)$ es una función continua del volumen. En particular se supone que existe un *campo suministro de calor por volumen unitario* $\hat{r}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_b(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \hat{r}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

También definimos un campo suministro de calor por masa unitaria $r(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ por

$$r(\mathbf{x}, t) = \frac{\hat{r}(\mathbf{x}, t)}{\varrho(\mathbf{x}, t)},$$

lo que significa que

$$Q_b(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}. \quad (4.14)$$

Se supone, además, que el calentamiento superficial $Q_s(\Omega_t)$ es una función continua del área de superficie. En particular se supone que existe un *campo transferencia de calor por superficie unitaria* $h(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_s(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} h(\mathbf{x}, t) dA_{\mathbf{x}}. \quad (4.15)$$

Se supone, además, que el campo transferencia de calor es de la forma

$$h(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (4.16)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior para la superficie $\partial\Omega_t$ y \mathbf{q} denota el *campo vectorial flujo del calor* de Fourier-Stokes en B_t .

La dirección y la intensidad del flujo de calor a través de cualquier superficie en un cuerpo son determinadas por el campo vectorial \mathbf{q} . El signo negativo en (4.16) se debe al hecho de que \mathbf{n} es elegido como vector normal exterior opuesto al vector normal interior. En particular, (4.16) implica que $h > 0$ cuando \mathbf{q} apunta hacia el interior de Ω_t . La relación entre la transferencia de calor de superficie y el vector flujo de calor es análoga a la relación entre la tracción de superficie y el tensor tensión de Cauchy (ver Teorema 2.1). En particular se puede

demostrar bajo hipótesis no muy restrictivas que tanto la tracción como la transferencia de calor deben ser lineales con respecto al vector normal de superficie.

Insertando (4.14), (4.15) y (4.16) en (4.13) obtenemos

$$Q(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}}. \quad (4.17)$$

Notar que el calor es absorbido por (o liberado desde) Ω_t en dependencia del signo de $Q(\Omega_t)$.

4.2.2.2. *Energía cinética, potencia de fuerzas externas y trabajo neto.* Se considera un subconjunto $\Omega_t \subseteq B_t$ arbitrario con un campo tracción externa $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ y una fuerza de cuerpo externa por masa unitaria $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$. Se define la *energía cinética* de Ω_t por

$$K(\Omega_t) := \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \varrho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 dV_{\mathbf{x}},$$

y la *potencia de fuerzas externas* sobre Ω_t dada por

$$\mathcal{P}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dA_{\mathbf{x}}.$$

El *trabajo neto* $\mathcal{W}(\Omega_t)$ de fuerzas externas sobre Ω_t es el trabajo mecánico entregado por estas fuerzas que no es consumido por la generación de movimiento, es decir

$$\mathcal{W}(\Omega_t) := \mathcal{P}(\Omega_t) - \frac{d}{dt} K(\Omega_t). \quad (4.18)$$

Si $\mathcal{W}(\Omega_t) = 0$ durante un intervalo de tiempo, toda la energía mecánica proporcionada al cuerpo por fuerzas externas es utilizada para generar movimiento. En particular esta energía es convertida en energía mecánica. Si $\mathcal{W}(\Omega_t) > 0$ durante un intervalo de tiempo, entonces alguna parte de la energía mecánica suministrada al cuerpo es almacenada o convertida en alguna forma de energía que no sea cinética. Por otro lado, si $\mathcal{W}(\Omega_t) < 0$, entonces la energía almacenada en el cuerpo es liberada como trabajo contrario a las fuerzas externas o como movimiento.

4.2.2.3. *Energía interna y la Primera Ley.* El contenido de energía de un cuerpo no asociada a energía cinética se llama *energía interna*. La energía interna de un cuerpo representa una cantidad de energía almacenada que puede ser incrementada en varias formas, por ejemplo suministrando calor al cuerpo o aplicándole trabajo mecánico. Una vez almacenada, la energía interna puede ser liberada en cualquier forma, por ejemplo por calor, trabajo mecánico o movimiento.

Aquí se supone que la energía interna de un cuerpo consiste solamente en energía térmica (calor) y energía mecánica (elástica). En particular, se desprecian otras energías tales como energía química o electromagnética, las cuales normalmente también contribuyen a la energía interna. Despreciar estas otras formas de energía es equivalente con suponer que éstas son constantes independientemente del calentamiento o del trabajo neto. Para el análisis de algunos problemas frecuentemente es posible y útil de introducir una energía potencial asociada a fuerzas externas. Tal energía no debe ser confundida con la energía interna.

Consideremos un subconjunto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$. Se denota por $U(\Omega_t)$ la energía interna de Ω_t . Se supone que $U(\Omega_t)$ es una función continua del volumen. En particular se supone que existe un *campo de energía interna* por volumen unitario $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$U(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Asimismo definimos un *campo de energía interna* por masa unitaria

$$\phi(\mathbf{x}, t) := \frac{\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\varrho(\mathbf{x}, t)}$$

tal que

$$U(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Considerando solamente la energía termomecánica podemos generalizar la ley de balance (4.6) a cuerpos continuos mediante el siguiente axioma.

Axioma 4.3 (Primera Ley de Termodinámica). *La tasa de cambio de la energía interna de cualquier subconjunto abierto de un cuerpo continuo iguala la suma del calentamiento neto y del trabajo neto aplicados a éste, es decir*

$$\frac{d}{dt}U(\Omega_t) = Q(\Omega_t) + \mathcal{W}(\Omega_t) \quad \text{para todo } \Omega_t \subseteq B_t.$$

En virtud de (4.18) esto significa que

$$\frac{d}{dt}(U(\Omega_t) + K(\Omega_t)) = Q(\Omega_t) + \mathcal{P}(\Omega_t) \quad \text{para todo } \Omega_t \subseteq B_t. \quad (4.19)$$

Existen varias diferencias fundamentales entre la ley de balance de energía (4.19) a nivel continuo y la ley correspondiente (4.6) para un sistema particulado. Por ejemplo, la energía cinética en un modelo continuo es una energía asociada a una velocidad en promedio local de partículas (átomos) individuales, mientras que la energía cinética en un modelo particulado es una energía asociada a velocidades individuales. Además, la energía interna en un modelo continuo posee contribuciones mecánicas (elásticas) tanto como térmicas (de calor). Al contrario, la energía interna en un modelo particulado solamente posee una contribución mecánica. En general, la ley de balance de energía (4.6) no posee explícitamente ninguna cantidad relacionada al calor. Existen diferencias fundamentales similares entre las leyes de balance del momento lineal entre los modelos continuo y particulado.

En algunos casos, la potencia de las fuerzas externas puede ser escrita en la forma

$$\mathcal{P}(\Omega_t) = -\frac{d}{dt}G(\Omega_t),$$

donde $G(\Omega_t)$ se llama *energía potencial para fuerzas externas*. En este caso especial, el balance de energía (4.19) asume la forma

$$\frac{d}{dt}(U(\Omega_t) + K(\Omega_t) + G(\Omega_t)) = Q(\Omega_t).$$

Esto significa que la tasa de cambio de la energía total $U + K + G$ iguala el calentamiento neto Q .

4.2.2.4. *La entropía y la Segunda Ley de Termodinámica.* La ley de balance de energía proporciona una relación entre la tasa de cambio de la energía interna y el calentamiento y el trabajo neto debido a influencias externas sobre un cuerpo. Mientras que esta relación implica que estas tasas siempre deben ser balanceadas, no se impone ninguna restricción sobre las tasa mismas. Por ejemplo, en cualquier intervalo de tiempo en el cual el trabajo neto es cero, la ley de balance de energía no limita la tasa con la cual el cuerpo puede absorber calor y almacenarlo como energía interna. Similarmente, esta ley de balance no limita la tasa con la cual un cuerpo puede liberar energía en la forma de calor. En su forma más simple, la *Segunda Ley de Termodinámica* expresa el hecho de que cada cuerpo posee un límite de la tasa con la cual el calor puede ser absorbido, pero no posee un límite para la tasa de liberación de energía.

La Segunda Ley posee una historia larga y complicada. Origina en el estudio de sistemas homogéneos bajo procesos reversibles, y su extensión al marco general de la mecánica del medio continuo aún no está completamente establecida. Aquí adoptaremos una forma de la Segunda Ley llamada *la desigualdad de Clausius-Duhem*, la cual será suficiente para nuestros propósitos. En particular se introduce esta desigualdad en primer lugar para ilustrar como ciertas consideraciones termodinámicas imponen restricciones sobre las relaciones constitutivas de un cuerpo, y como diversos enunciados acerca de la disipación y la irreversibilidad pueden ser decididos a partir de ella.

Para motivar la forma de la ley discutida aquí, consideremos primeramente un cuerpo homogéneo con una temperatura uniforme $\Theta(\Omega_t)$ para todo $t \geq 0$. Para un tal cuerpo la Segunda Ley postula la existencia de una cota superior menor $\Xi(\Omega_t)$ para el calentamiento neto $Q(\Omega_t)$ tal que

$$Q(\Omega_t) \leq \Xi(\Omega_t). \quad (4.20)$$

En general, la cantidad $\Xi(\Omega_t)$ depende de propiedades del cuerpo Ω_t . Si el trabajo neto es cero, entonces podemos deducir de la Primera Ley que

$$\frac{d}{dt}U(\Omega_t) = Q(\Omega_t).$$

Así, la cantidad $\Xi(\Omega_t)$ también puede ser interpretada como la tasa máxima con la cual el cuerpo puede almacenar energía en la ausencia de trabajo neto.

La *entropía* de un cuerpo homogéneo Ω_t es una cantidad $\mathcal{H}(\Omega_t)$ definida, hasta una constante aditiva, por

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\Omega_t) = \frac{\Xi(\Omega_t)}{\Theta(\Omega_t)}.$$

Así, la entropía de un cuerpo es una cantidad cuya tasa de cambio en cualquier instante iguala la cota superior del calentamiento por temperatura unitaria. En particular, la tasa de cambio de la entropía es una medida de la capacidad de un cuerpo para absorber calor. Al nivel atómico, la entropía puede ser interpretada como una medida del desorden, es decir, de la multitud de configuraciones atómicas compatibles con los valores impuestos de las variables macroscópicas.

En términos de la entropía, la desigualdad (4.20) se convierte en

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\Omega_t) \geq \frac{Q(\Omega_t)}{\Theta(\Omega_t)}. \quad (4.21)$$

Esta es una forma de expresar la Segunda Ley para sistemas homogéneos llamada *desigualdad de Clausius-Planck*. La irreversibilidad de procesos naturales se refleja en el hecho de que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\Omega_t) \geq 0 \quad \text{cuando } Q(\Omega_t) = 0.$$

En particular, la entropía de un cuerpo tiende a incrementar (o por lo menos no disminuir) cuando el calentamiento neto desaparece, tal como sucede en el caso de un cuerpo aislado.

En lo siguiente descartaremos la hipótesis de la homogeneidad y consideraremos una extensión de la desigualdad de Clausius-Planck a un cuerpo continuo general. Se supone que la entropía $\mathcal{H}(\Omega_t)$ de un cuerpo, tal como la energía interna, es una función continua del tiempo. En particular, se supone que existe un *campo densidad de entropía* por volumen unitario $\hat{\eta}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{H}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \hat{\eta}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Igualmente introduciremos una densidad de entropía por masa unitaria

$$\eta(\mathbf{x}, t) := \frac{\hat{\eta}(\mathbf{x}, t)}{\varrho(\mathbf{x}, t)}$$

tal que

$$\mathcal{H}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Una generalización de (4.21) a sistemas no homogéneos se formula en el siguiente axioma.

Axioma 4.4 (Segunda Ley de Termodinámica). *La tasa de producción de entropía en cualquier subconjunto abierto de un cuerpo continuo es acotada desde abajo por el calentamiento por temperatura unitaria, es decir*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\Omega_t) \geq \int_{\Omega_t} \frac{\varrho(\mathbf{x}, t)r(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} dV_{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega_t} \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}{\theta(\mathbf{x}, t)} dA_{\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \Omega_t \subseteq B_t. \quad (4.22)$$

La desigualdad (4.22) se llama *desigualdad de Clausius-Duhem*. Se supone que esta desigualdad es válida para todo movimiento y todo subconjunto de un cuerpo continuo. Luego se estudiarán las consecuencias de (4.22). Veremos que esta desigualdad impone ciertas restricciones para las relaciones constitutivas de un cuerpo, y genera varios enunciados acerca de la disipación de energía y el flujo de calor. Mientras que la forma precisa de la Segunda Ley en la mecánica del medio continuo no está establecida, se supone que las consecuencias derivadas de cualquier desigualdad que podría reemplazar (4.22) son similares.

4.2.3. Leyes de balance integrales versus locales. En el desarrollo anterior hemos resumido leyes de balance para la masa, el momento, la energía y la entropía en términos de subconjuntos abiertos Ω_t de la configuración actual B_t de un cuerpo continuo bajo un movimiento $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$. Ahora se aprovechará el Teorema de Localización (Teorema 1.8) para generar formas locales de estas leyes de balance en términos de ecuaciones diferenciales. Si la forma local de una ley de balance es formulada en términos de las coordenadas actuales $\mathbf{x} \in B_t$ en el instante t , se dice que la ley está en *forma espacial* o en *forma Euleriana*. Por otro lado, si una ley de balance es formulada en términos de coordenadas referenciales $\mathbf{X} \in B$ y del tiempo t se dice que está en *forma material* o en *forma Lagrangiana*. En las siguientes dos secciones desarrollaremos enunciados locales de las leyes de balance en forma Euleriana tanto como Lagrangiana.

4.3. Forma Euleriana localizada de leyes de balance

Se considera un cuerpo continuo con una configuración de referencia B bajo un movimiento $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$. Como antes, denotaremos la configuración actual por $B_t = \varphi_t(B)$, y se supone que $B_0 = B$, es decir φ_0 es la identidad. Para todo $t \geq 0$ se supone que la deformación $\varphi_t : B \rightarrow B_t$ es admisible, y se supone, además, que $\varphi(\mathbf{x}, t)$ es suave en el sentido de que las derivadas parciales de todos los ordenes existen y son continuas. Esto es más restrictivo que lo que se necesita para los enunciados locales, pero tal hipótesis simplifica la presentación siguiente.

4.3.1. Conservación de masa. Se considera un subconjunto arbitrario Ω_t de B_t , y sea Ω el subconjunto correspondiente de B tal que $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$. Entonces el Axioma 4.1 implica que $\text{mass}(\Omega_t) = \text{mass}(\Omega)$, donde $\Omega_0 = \Omega$. En virtud del Lema 3.7 se tiene que

$$\text{mass}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \varrho_m \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}},$$

donde ϱ_m es la descripción material del campo espacial ϱ , es decir, $\varrho_m(\mathbf{X}, t) = \varrho(\varphi(\mathbf{X}, t), t)$. Además, como $\varphi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$, se tiene que

$$\text{mass}(\Omega_0) = \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{X}, 0) dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega} \varrho_0(\mathbf{X}) dV_{\mathbf{X}},$$

donde $\varrho_0(\mathbf{X}) = \varrho(\mathbf{X}, 0)$. Así, la conservación de masa requiere que

$$\int_{\Omega} (\varrho_m(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \varrho_0(\mathbf{X})) dV_{\mathbf{X}} = 0$$

para todo tiempo $t \geq 0$ y todo subconjunto $\Omega \subseteq B$. En virtud del Teorema 1.8 esto significa que

$$\varrho_m(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \varrho_0(\mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0. \quad (4.23)$$

Tal como se menciona arriba, la ley de conservación de masa está en forma material o Lagrangiana. Luego convertimos esto a la forma espacial o Euleriana. Para tal efecto se deriva (4.23) con respecto a t para obtener

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \right) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \varrho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \right) = 0.$$

Utilizando el Lema 3.8 para la derivada con respecto a t del campo Jacobiano $\det \mathbf{F}$ obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \right) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \varrho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) (\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)} = 0.$$

Partiendo por $\det \mathbf{F}$ (como el movimiento es admisible, se tiene que $\det \mathbf{F} > 0$) y utilizando el Lema 3.6 para la derivada temporal total de un campo espacial obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\mathbf{x}, t) + \nabla^{\mathbf{x}} \varrho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \varrho(\mathbf{x}, t) (\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Finalmente, con la ayuda de la identidad

$$\nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\phi \mathbf{w}) = \nabla^{\mathbf{x}} \phi \cdot \mathbf{w} + \phi (\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}),$$

válida para cualquier campo escalar ϕ y cualquier campo vectorial \mathbf{w} , obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.1 (Conservación de masa en forma Euleriana). *Sea $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo asociado al campo espacial de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y el campo espacial de densidad $\varrho(\mathbf{x}, t)$. Entonces la conservación de masa requiere que*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

Equivalentemente, por la definición de la derivada total temporal, se tiene que

$$\dot{\varrho} + \varrho \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

Como la configuración actual B_t de un cuerpo continuo depende del tiempo, cualquier integral sobre B_t igualmente dependerá del tiempo. En lo siguiente aprovecharemos el Lema 4.1 para derivar una expresión simple para la derivada temporal de integrales sobre B_t expresadas con respecto a la densidad de masa ϱ .

Lema 4.2 (Derivada temporal de integrales con respecto a la masa). *Sea $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con los campos espaciales de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y de densidad $\varrho(\mathbf{x}, t)$ asociados. Sea $\Phi(\mathbf{x}, t)$ cualquier campo espacial escalar, vectorial o tensorial de segundo orden, y sea Ω_t un subconjunto abierto arbitrario de B_t . Entonces*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}. \quad (4.24)$$

Demostración. Una leve generalización del Lema 3.7 desde campos escalares a campos vectoriales y tensoriales de segundo orden entrega que

$$\int_{\Omega_t} \Phi(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \varrho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}},$$

donde $\Omega \subseteq B$ tal que $\Omega_t = \boldsymbol{\varphi}_t(\Omega)$. En virtud de la conservación de masa (4.23) obtenemos ahora

$$\int_{\Omega_t} \Phi(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \varrho_0(\mathbf{X}) dV_{\mathbf{X}}.$$

Notando que la región $\Omega \subseteq B$ no depende del tiempo, podemos tomar la derivada con respecto al tiempo para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \varrho_0(\mathbf{X}) dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \varrho_0(\mathbf{X}) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \right) \varrho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

donde la última línea es una consecuencia de (4.23). Utilizando la relación

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\varphi(\mathbf{X}, t), t)$$

junto con el Lema 3.7 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega} \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{X}, t)} \varrho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_t} \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

lo que es el resultado deseado. ■

4.3.2. Balance de momento lineal. Tal como ya se formula en el Axioma 4.2, la ley de balance para un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, \quad (4.25)$$

donde $\varrho(\mathbf{x}, t)$ es el campo espacial densidad de masa, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de velocidad espacial, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es el campo espacial fuerza de cuerpo por masa unitaria, y $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ es el campo tracción sobre la superficie $\partial\Omega_t$ en B_t .

Como el campo tracción sobre cualquier superficie material en la configuración B_t viene dado por el campo tensión de Cauchy $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ a través de $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es el vector normal unitario exterior dado sobre la superficie, podemos escribir (4.25) en la siguiente forma, donde omitimos los argumentos \mathbf{x} y t por brevedad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho \mathbf{v} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{S} \mathbf{n} dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \varrho \mathbf{b} dV_{\mathbf{x}}.$$

Utilizando el Lema 4.2 y el Teorema de Divergencia para campos tensoriales de segundo orden obtenemos

$$\int_{\Omega_t} \varrho \dot{\mathbf{v}} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} (\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S} + \varrho \mathbf{b}) dV_{\mathbf{x}}.$$

Como esto debe ser válido para todo subconjunto abierto $\Omega_t \subseteq B_t$, obtenemos el siguiente resultado aplicando el Teorema de Localización.

Lema 4.3 (Ley de balance de momento lineal en forma Euleriana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo asociado a los campos espaciales velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y densidad $\varrho(\mathbf{x}, t)$. Entonces el balance de momento lineal requiere que*

$$\varrho \dot{\mathbf{v}} = \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S} + \varrho \mathbf{b} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0,$$

donde $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ es el campo tensión de Cauchy y $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es la fuerza de cuerpo por masa unitaria.

Estas ecuaciones pueden ser consideradas como una generalización al caso dinámico de las condiciones de equilibrio (balance de fuerzas) descritas en el Lema 2.2. En particular, la condición del equilibrio corresponde al caso particular de $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$.

Comentamos que en virtud del Lema 3.6 se tiene que

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v}.$$

Así, la ecuación de balance del momento lineal puede ser escrita equivalentemente como

$$\varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S} + \varrho \mathbf{b}.$$

4.3.3. Balance de momento angular. Como se menciona en el Axioma 4.2, la ley de balance para el momento angular (alrededor del origen) para un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ viene dada por

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde $\varrho(\mathbf{x}, t)$ es el campo espacial densidad de masa, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de velocidad espacial, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es el campo espacial fuerza de cuerpo por masa unitaria, y $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ es el campo tracción sobre la superficie $\partial\Omega_t$ en B_t .

Para simplificar el lado izquierdo de (4.26) notamos que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ implica que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Así

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t),$$

y en virtud del Lema 4.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Insertando este resultado en (4.26) y utilizando la definición del campo tensión de Cauchy $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ obtenemos

$$\int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}) dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}}.$$

Utilizando el Lema 4.3 podemos reducir esta expresión a

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}) dA_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \times (\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S})(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = 0.$$

Repitiendo el procedimiento de la demostración del Lema 2.2 obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.4 (Ley de momento angular en forma Euleriana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo y sea $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ el campo tensión de Cauchy en B_t . Entonces el balance de momento angular requiere que*

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

4.3.4. Caracterización del trabajo neto. Antes de estudiar versiones localizadas de la Primera y Segunda Ley de Termodinámica utilizaremos los Lemas 4.3 y 4.4 para derivar una relación entre la tasa de cambio de la energía cinética y la potencia de las fuerzas externas e internas. Veremos que esta relación genera una expresión explícita para el trabajo neto de un cuerpo.

Para empezar consideramos el Lema 4.3. Tomando el producto escalar con el campo velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ obtenemos

$$\rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = (\nabla^x \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t \text{ y } t \geq 0. \quad (4.27)$$

Integrando (4.27) sobre un subconjunto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ obtenemos

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} -\mathbf{S} : \nabla^x \mathbf{v} dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{S}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV_{\mathbf{x}}.$$

En virtud de los Lemas 4.4 y 1.10 obtenemos que $\mathbf{S} : \nabla^x \mathbf{v} = \mathbf{S} : \mathbf{L}$, donde $\mathbf{L} = \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v})$ es el campo tasa de deformación. Reemplazando este resultado en la identidad anterior obtenemos

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} dV_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \mathbf{S} : \mathbf{L} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \mathbf{n} dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV_{\mathbf{x}},$$

lo que implica el siguiente resultado.

Lema 4.5 (Trabajo neto en forma Euleriana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de cuerpo continuo con los campos de tensión de Cauchy $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ y tasa de deformación $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ asociados. Sea $\Omega_t \subseteq B_t$ un subconjunto abierto. Entonces*

$$\frac{d}{dt} K(\Omega_t) + \int_{\Omega_t} \mathbf{S} : \mathbf{L} dV_{\mathbf{x}} = \mathcal{P}(\Omega_t) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

donde $K(\Omega_t)$ denota la energía cinética total y $\mathcal{P}(\Omega_t)$ es la potencia de las fuerzas externas sobre Ω_t . Así, en virtud de (4.18), el trabajo neto $\mathcal{W}(\Omega_t)$ queda dado por

$$\mathcal{W}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{S} : \mathbf{L} dV_{\mathbf{x}} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

La cantidad $\mathbf{S} : \mathbf{L}$ típicamente es denominada *potencia de tensión* asociada a un movimiento. Corresponde a la tasa de trabajo realizado por fuerzas internas (tensiones) en cada punto de un cuerpo continuo.

4.3.5. Primera Ley de Termodinámica. De acuerdo al Axioma 4.3 la ley de balance de energía para un subconjunto arbitrario abierto $\Omega_t \subseteq B_t$ es

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho \phi \, dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \mathbf{S} : \mathbf{L} \, dV_{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \varrho r \, dV_{\mathbf{x}},$$

donde las expresiones del Lema 4.5 y la ecuación (4.17) para el trabajo neto y el calentamiento neto, respectivamente, han sido utilizadas. Aquí $\varrho(\mathbf{x}, t)$ es el campo densidad de masa, $\phi(\mathbf{x}, t)$ es de campo energía interna por masa unitaria, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ es el campo vectorial flujo de calor de Fourier-Stokes, $r(\mathbf{x}, t)$ es el campo suministro del calor por masa unitaria, $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ es el campo tasa de deformación y $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ es el campo tensión de Cauchy en B_t .

Utilizando el Lema 4.2 y el Teorema de Divergencia obtenemos

$$\int_{\Omega_t} \varrho \dot{\phi} \, dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_t} \mathbf{S} : \mathbf{L} \, dV_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega_t} \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \, dV_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \varrho r \, dV_{\mathbf{x}}.$$

Como este enunciado debe ser válido para cualquier subconjunto abierto $\Omega_t \subseteq B_t$, mediante el Teorema de Localización llegamos al siguiente resultado.

Lema 4.6 (Ley de energía en forma Euleriana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo. Entonces*

$$\varrho \dot{\phi} = \mathbf{S} : \mathbf{L} - \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} + \varrho r \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

4.3.6. Segunda Ley de Termodinámica. De acuerdo al Axioma 4.4, la forma de Clausius-Duhem de la Segunda Ley de Termodinámica para un subconjunto $\Omega_t \subseteq B_t$ abierto arbitrario es

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho \eta \, dV_{\mathbf{x}} \geq \int_{\Omega_t} \frac{\varrho r}{\theta} \, dV_{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} \, dA_{\mathbf{x}},$$

donde $\varrho(\mathbf{x}, t)$ es el campo densidad de masa, $\eta(\mathbf{x}, t)$ es el campo entropía por masa unitaria, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ es el campo vectorial flujo de calor de Fourier-Stokes, $r(\mathbf{x}, t)$ es el campo suministro de calor por masa unitaria y $\theta(\mathbf{x}, t)$ es el campo de temperatura (absoluta) en B_t . Aplicando los Teoremas de Divergencia y de Localización llegamos al siguiente enunciado.

Lema 4.7 (Desigualdad de Clausius-Duhem en forma Euleriana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo. Entonces*

$$\varrho \dot{\eta} \geq \frac{\varrho r}{\theta} - \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \right) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0. \quad (4.28)$$

Expandiendo el término de divergencia en (4.28) y multiplicando la ecuación por θ obtenemos

$$\theta \varrho \dot{\eta} \geq \varrho r - \nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{q} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla^{\mathbf{x}} \theta. \quad (4.29)$$

Esta expresión puede ser escrita equivalentemente como

$$\delta - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla^{\mathbf{x}} \theta}{\theta} \geq 0, \quad (4.30)$$

donde la cantidad

$$\delta := \theta \varrho \dot{\eta} - (\varrho r - \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q})$$

se llama campo de *densidad de disipación interna por volumen unitario*. Esta cantidad representa la diferencia entre la tasa local de incremento de entropía y el calentamiento local. En otras palabras, δ es una medida de la tasa local del incremento de entropía debido a mecanismos diferentes del suministro local y de la transferencia local del calor.

Basándonos en (4.30) podemos hacer diferentes observaciones acerca de la disipación interna δ y el flujo de calor \mathbf{q} . Por ejemplo, en cualquier punto donde la temperatura satisface $\nabla^x \theta = \mathbf{0}$, la disipación interna debe satisfacer $\delta \geq 0$. Así, la disipación interna es no negativa en cualquier parte en cuerpos con una temperatura espacialmente homogénea. La desigualdad (4.30) también implica que en cualquier punto donde $\delta = 0$, el flujo del calor y la temperatura deben satisfacer

$$\mathbf{q} \cdot \nabla^x \theta \leq 0.$$

Esto significa que en todas partes el vector flujo del calor debe formar un ángulo obtuso con el gradiente de la temperatura en cuerpos sin disipación interna. En particular, el calor debe fluir desde zonas “calientes” a zonas “frías” en tales cuerpos.

Para estudiar las consecuencias de la desigualdad de Clausius-Duhem para varios modelos constitutivos a ser introducidos más adelante es conveniente introducir la cantidad

$$\psi(\mathbf{x}, t) := \phi(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}, t) \quad (4.31)$$

llamada *campo densidad de energía libre* por masa unitaria. De acuerdo a la teoría clásica de sistemas homogéneos bajo procesos reversibles, la energía libre es aquella parte de la energía interna que es disponible para realizar trabajo bajo temperatura constante. En términos de ψ podemos reformular el Lema 4.7 como sigue.

Lema 4.8 (Desigualdad de Clausius-Duhem en forma Euleriana reducida). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con un campo espacial energía libre $\psi(\mathbf{x}, t)$. Entonces*

$$\varrho \dot{\psi} \leq \mathbf{S} : \mathbf{L} - \varrho \eta \dot{\theta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla^x \theta}{\theta} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0. \quad (4.32)$$

Demostración. Desde (4.31) se obtiene que

$$\theta \dot{\eta} = \dot{\phi} - \dot{\theta} \eta - \dot{\psi}.$$

Multiplicando esta expresión por ϱ y utilizando el Lema 4.6 para eliminar $\varrho \dot{\phi}$ obtenemos

$$\varrho \theta \dot{\eta} = \mathbf{S} : \mathbf{L} - \nabla^x \cdot \mathbf{q} + \varrho r - \varrho \dot{\theta} \eta - \varrho \dot{\psi}.$$

Sustituyendo esta expresión en (4.29) obtenemos el resultado deseado. ■

Varios resultados pueden ser deducidos desde el Lema 4.8. Por ejemplo, en cuerpos con una temperatura constante y espacialmente homogénea se debe tener que

$$\varrho \dot{\psi} \leq \mathbf{S} : \mathbf{L}.$$

Si además suponemos que un cuerpo puede solamente estar sujeto a procesos reversibles en el sentido de que la desigualdad de Clausius-Duhem siempre es válida con igualdad obtenemos

$$\varrho \dot{\psi} = \mathbf{S} : \mathbf{L}.$$

Así, para tales cuerpos la tasa de cambio de la energía libre es igual a la potencia de la tensión. El termino “reducida” en el Lema 4.8 refleja el hecho de que considerada para el caso clásico de cuerpos homogéneos, la desigualdad en (4.32) es independiente del suministro del calor r y del flujo del calor \mathbf{q} , al contrario de (4.28).

4.3.7. Resumen. En la descripción Euleriana del movimiento de un cuerpo continuo general aparecen 22 campos básicos desconocidos:

$\varphi_i(\mathbf{X}, t)$	3 componentes del movimiento,
$v_i(\mathbf{x}, t)$	3 componentes de velocidad,
$\rho(\mathbf{x}, t)$	1 densidad de masa,
$S_{ij}(\mathbf{x}, t)$	9 componentes de la tensión,
$\theta(\mathbf{x}, t)$	1 temperatura,
$q_i(\mathbf{x}, t)$	3 componentes del flujo del calor,
$\phi(\mathbf{x}, t)$	1 energía interna por masa unitaria,
$\eta(\mathbf{x}, t)$	1 entropía por masa unitaria.

Para determinar estas cantidades tenemos a disposición las siguientes 11 ecuaciones:

$(v_i)_m = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i$	3 ecuaciones cinemáticas,
$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\rho v_i)_{,i} = 0$	1 conservación de masa,
$\rho \dot{v}_i = S_{ij,j} + \rho b_i$	3 ecuaciones de momento lineal,
$S_{ij} = S_{ji}$	3 ecuaciones independientes de momento angular,
$\rho \dot{\phi} = S_{ij} v_{i,j} - q_{i,i} + \rho r$	1 ecuación de energía.

Comentamos que frecuentemente el mapa del movimiento φ no es requerido en el marco Euleriano. En particular, cuando la configuración actual B_t es conocida o especificada para todo $t \geq 0$, las leyes de balance típicamente pueden ser aplicadas sin conocimiento explícito de φ . En tal caso el número de desconocidas es reducido a 19 (φ desaparece), y el número de ecuaciones es reducido a 8 (las ecuaciones cinemáticas desaparecen).

Como el número de incógnitas excede el de las ecuaciones en 11, necesitamos ecuaciones adicionales para poder cerrar el sistema. Como veremos más adelante, para tal efecto introduciremos *ecuaciones constitutivas* que relacionan $(\mathbf{S}, \mathbf{q}, \phi, \eta)$ a $(\rho, \mathbf{v}, \theta)$. Tales relaciones reflejan las propiedades materiales específicas del cuerpo.

Comentamos además que la Segunda Ley de Termodinámica (desigualdad de Clausius-Duhem) no proporciona una ecuación para determinar campos incógnitos. Al contrario, se interpreta la Segunda Ley como una restricción para las ecuaciones constitutivas. En particular, las relaciones constitutivas de un cuerpo deben garantizar la satisfacción de la Segunda Ley en cualquier movimiento del cuerpo posible.

Finalmente, si no se consideran efectos térmicos, el número de incógnitas se reduce más, de 19 a 13 (\mathbf{q}, ϕ, η y θ desaparecen), y el número de ecuaciones es reducido de 8 a 7 (el balance de energía desaparece). En este caso la clausura del sistema puede ser efectuada por 6 ecuaciones constitutivas que relacionan \mathbf{S} a (ρ, \mathbf{v}) .

4.4. Forma Lagrangiana localizada de leyes de balance

Nuevamente consideramos un cuerpo continuo con una configuración referencial B sujeto a un movimiento $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$. Se denota la configuración actual por $B_t = \varphi_t(B)$,

y se supone que $B_0 = B$, es decir φ_0 es la identidad. Como se supone que la deformación $\varphi_t : B \rightarrow B_t$ es admisible para cada $t \geq 0$, existe una biyección entre B y B_t para cada $t \geq 0$. Así, mediante un cambio de variable, cualquier ley de balance formulada en términos de $\mathbf{x} \in B_t$ también puede ser expresada para $\mathbf{X} \in B$. Esto da origen a la forma material o Lagrangiana de las leyes de balance.

4.4.1. Conservación de masa. Como antes, consideremos un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$, y sea $\Omega \subseteq B$ tal que $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$. Entonces el Axioma 4.1 implica que $\text{mass}(\Omega_t) = \text{mass}(\Omega_0)$, donde $\Omega_0 = \Omega$. En virtud de los argumentos que nos llevan a (4.23) tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.9 (Conservación de masa en forma Lagrangiana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con un campo gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ asociado y un campo densidad de masa $\varrho(\mathbf{x}, t)$. Sea $\varrho_0(\mathbf{X})$ el campo densidad de masa en la configuración referencial B . Entonces la conservación de masa requiere que*

$$\varrho_m(\mathbf{X}, t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \varrho_0(\mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

donde $\varrho_m(\mathbf{X}, t)$ es la descripción material del campo espacial $\varrho(\mathbf{x}, t)$.

4.4.2. Balance de momento lineal. Existen varias maneras de desarrollar la forma Lagrangiana de la ley de balance para el momento lineal. Podemos proceder directamente desde la forma integral de la ley en el Axioma 4.2. Alternativamente podríamos integrar la forma local Euleriana del Lema 4.3 sobre un subconjunto $\Omega_t \subseteq B_t$ arbitrario y efectuar un cambio de variable para obtener una integral sobre un subconjunto abierto $\Omega \subseteq B$, y luego aplicar el Teorema de Localización. Aquí optamos por seguir la primera manera.

Tal como afirma el Axioma 4.2, la ley de balance para el momento lineal para un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ viene dada por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}(\Omega_t) = \mathbf{r}(\Omega_t), \quad (4.33)$$

donde $\mathbf{l}(\Omega_t)$ es el momento lineal de Ω_t definido en (4.7) y $\mathbf{r}(\Omega_t)$ es la fuerza externa resultante sobre Ω_t definida por

$$\mathbf{r}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}}.$$

Aplicando un cambio de variable en al integral que define $\mathbf{l}(\Omega_t)$ y aplicando el Lema 4.9 obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\Omega_t) &= \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \varrho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega} \varrho_0(\mathbf{X}) \dot{\varphi}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Un cambio de variable similar en las integrales que definan $\mathbf{r}(\Omega_t)$ obtenemos

$$\mathbf{r}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-\text{T}} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \, dA_{\mathbf{X}} \\
&\quad + \int_{\Omega} \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \varrho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{b}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \, dV_{\mathbf{X}},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Lema 3.9 para la transformación de la integral de superficie. En particular, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es el campo vectorial normal exterior sobre $\partial\Omega_t$, y $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ es el campo normal unitario exterior sobre $\partial\Omega$. La siguiente definición nos permite simplificar nuestro desarrollo.

Definición 4.1 (Tensiones de Piola-Kirchhoff). *Sea $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ el campo tensión de Cauchy en B_t asociado a un movimiento $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$. Entonces como campo tensión nominal o primer campo tensión de Piola-Kirchhoff asociado a $\boldsymbol{\varphi}$ se define*

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) := (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-\text{T}} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

y como segundo campo tensión de Piola-Kirchhoff asociado a $\boldsymbol{\varphi}$ se define

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Para proceder, sea \mathbf{b}_m la definición de la fuerza de cuerpo espacial \mathbf{b} . Utilizando el Lema 4.9 y la Definición 4.1 obtenemos

$$\mathbf{r}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) \, dA_{\mathbf{X}} + \int_{\Omega} \varrho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t) \, dV_{\mathbf{X}}. \quad (4.35)$$

Insertando (4.34) y (4.35) en (4.33) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho_0(\mathbf{X}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}, t) \, dV_{\mathbf{X}} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) \, dA_{\mathbf{X}} + \int_{\Omega} \varrho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t) \, dV_{\mathbf{X}}.$$

Utilizando el Teorema de Divergencia y el hecho de que Ω es independiente del tiempo obtenemos

$$\int_{\Omega} \varrho_0(\mathbf{X}) \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}, t) \, dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega} ((\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P})(\mathbf{X}, t) + \varrho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t)) \, dV_{\mathbf{X}}.$$

Como tenemos una biyección entre B y B_t , cualquier ley de balance válida para un subconjunto arbitrario Ω_t de B_t también debe ser válida para un subconjunto arbitrario Ω de B . Esta observación da origen al siguiente resultado.

Lema 4.10 (Ley de momento lineal en forma Lagrangiana). *Sea $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo y sea $\varrho_0(\mathbf{X})$ el campo densidad de masa en la configuración de referencia B . Entonces el balance de momento lineal requiere que*

$$\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{b}_m \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ es el primer campo tensión de Piola-Kirchhoff y $\mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t)$ es la descripción material del campo espacial fuerza de cuerpo $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$.

4.4.3. Balance de momento angular. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 4.4 y de la Definición 4.1.

Lema 4.11 (Ley del momento angular en forma Lagrangiana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo asociado al campo gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$. Entonces el balance de momento angular requiere que*

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T \Leftrightarrow \boldsymbol{\Sigma}^T = \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ y $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}, t)$ son el primer y el segundo campo tensión de Piola-Kirchhoff asociados a φ , respectivamente.

4.4.4. Caracterización del trabajo neto. Antes de estudiar las versiones Lagrangianas localizadas de la Primera y Segunda Ley de Termodinámica utilizaremos el Lema 4.10 para desarrollar una relación entre la tasa de cambio de la energía cinética y la potencia de fuerza externas e internas. Este procedimiento, nuevamente, nos entregará una expresión explícita para el trabajo neto sobre un cuerpo.

Para empezar, consideremos un subconjunto arbitrario abierto $\Omega_t \subseteq B_t$, y sea Ω el subconjunto correspondiente de B . Entonces la energía cinética de Ω_t es definida por

$$K(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \varrho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 dV_{\mathbf{x}},$$

y la potencia de las fuerzas externas sobre Ω_t es definida por

$$\mathcal{P}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}}.$$

En la expresión para $\mathcal{P}(\Omega_t)$ hemos utilizado la identidad $\mathbf{S}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\mathbf{n}$.

Realizando un cambio de variable en la integral para $K(\Omega_t)$ y utilizando el Lema 4.9 obtenemos

$$K(\Omega_t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varrho_0(\mathbf{X}) |\dot{\varphi}(\mathbf{X}, t)|^2 dV_{\mathbf{X}}. \quad (4.36)$$

Similarmente, realizando un cambio de variable en las integrales para $\mathcal{P}(\Omega_t)$ obtenemos la siguiente expresión, donde omitimos los argumentos \mathbf{X} y t :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega_t) &= \int_{\Omega} \varrho_0 \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{v}_m dV_{\mathbf{X}} + \int_{\partial\Omega} (\det \mathbf{F}) \mathbf{S}_m^T \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega} \varrho_0 \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{v}_m dV_{\mathbf{X}} + \int_{\partial\Omega} (\det \mathbf{F}) \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{S}_m \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA_{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

lo cual, por definiciones del campo velocidad material $\dot{\varphi}$ y del primer campo tensión de Piola-Kirchhoff, entrega que

$$\mathcal{P}(\Omega_t) = \int_{\Omega} \varrho_0 \mathbf{b}_m \cdot \dot{\varphi} dV_{\mathbf{X}} + \int_{\partial\Omega} \dot{\varphi} \cdot \mathbf{P}\mathbf{N} dA_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega} \varrho_0 \mathbf{b}_m \cdot \dot{\varphi} dV_{\mathbf{X}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}^T \dot{\varphi} \cdot \mathbf{N} dA_{\mathbf{X}},$$

luego, utilizando el Teorema de Divergencia y el Lema 1.17, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega_t) &= \int_{\Omega} (\varrho_0 \mathbf{b}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{P}^T \dot{\boldsymbol{\varphi}})) \, dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega} ((\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{b}_m) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{P} : \nabla^{\mathbf{X}} \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \, dV_{\mathbf{X}}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Tomando la derivada temporal de (4.36) y utilizando el Lema 4.10 para sustituir $\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ obtenemos

$$\frac{d}{dt} K(\Omega_t) = \int_{\Omega} \varrho_0 \dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \, dV_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega} (\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{b}_m) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} \, dV_{\mathbf{X}}.$$

Sustituyendo (4.37) en el lado derecho de esta expresión y utilizando el hecho de que

$$\nabla^{\mathbf{X}} \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}, t) = \nabla^{\mathbf{X}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t),$$

llegamos al siguiente resultado.

Lema 4.12 (Trabajo neto en forma Lagrangiana). *Sea $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con el gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ y el primer campo tensión de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ asociados, y sea $\Omega_t \subseteq B_t$ un subconjunto arbitrario abierto con el subconjunto correspondiente $\Omega \subseteq B$. Entonces*

$$\frac{d}{dt} K(\Omega_t) + \int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV_{\mathbf{X}} = \mathcal{P}(\Omega_t) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

donde $K(\Omega_t)$ es la energía cinética total y $\mathcal{P}(\Omega_t)$ es la potencia de fuerzas externas sobre Ω_t . Entonces, en virtud de (4.18), el trabajo neto $\mathcal{W}(\Omega_t)$ es dado por

$$\mathcal{W}(\Omega_t) = \int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV_{\mathbf{X}} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Comparando los Lemas 4.12 y 4.5 vemos que cada una de las expresiones $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ y $\mathbf{S} : \mathbf{L}$ representa una medida de la tasa de trabajo (potencia) realizada por fuerzas internas (tensiones) en un cuerpo. Mientras que $\mathbf{S} : \mathbf{L}$ mide la potencia de tensión por volumen unitario en la configuración actual B_t , la cantidad $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ mide la potencia de tensión por volumen unitario en la configuración en la configuración referencial B .

4.4.5. Primera Ley de Termodinámica. Tal como se constata en el Axioma 4.3, la ley de balance de energía para un subconjunto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ es

$$\frac{d}{dt} U(\Omega_t) = Q(\Omega_t) + \mathcal{W}(\Omega_t),\tag{4.38}$$

donde $U(\Omega_t)$ es la energía interna de Ω_t definida por

$$U(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \, dV_{\mathbf{x}},$$

$Q(\Omega_t)$ es el calentamiento neto de Ω_t definido por

$$Q(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \varrho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) \, dV_{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dA_{\mathbf{x}},$$

y $\mathcal{W}(\Omega_t)$ es el trabajo neto de fuerzas externas sobre Ω_t .

Realizando un cambio de variable en la integral para $U(\Omega_t)$ obtenemos

$$U(\Omega_t) = \int_{\Omega} \varrho_0(\mathbf{X}) \Phi(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}}, \quad (4.39)$$

donde $\Phi(\mathbf{X}, t) = \phi_{\text{m}}(\mathbf{X}, t)$ es la descripción material del campo espacial de energía interna por masa unitaria $\phi(\mathbf{x}, t)$. Similarmente, aplicando un cambio de variable en las integrales para $Q(\Omega_t)$ (omitiendo los argumentos \mathbf{X} y t) obtenemos

$$Q(\Omega_t) = \int_{\Omega} \varrho_0 r_{\text{m}} dV_{\mathbf{X}} - \int_{\partial\Omega} (\det \mathbf{F}) \mathbf{q}_{\text{m}} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{N} dA_{\mathbf{X}}.$$

Introduciendo un campo material vector flujo de calor a través de

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) := (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-1} \mathbf{q}_{\text{m}}(\mathbf{X}, t) \quad (4.40)$$

y un campo material suministro de calor

$$R(\mathbf{X}, t) = r_{\text{m}}(\mathbf{X}, t)$$

podemos escribir el calentamiento neto en la forma conveniente

$$Q(\Omega_t) = \int_{\Omega} \varrho_0 R dV_{\mathbf{X}} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dA_{\mathbf{X}}. \quad (4.41)$$

Sustituyendo (4.41) y (4.39) en (4.38) y utilizando el Lema 4.12 junto con el Teorema de Divergencia obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.13 (Ley de energía en forma Lagrangiana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con los campos materiales asociados energía interna $\Phi(\mathbf{X}, t)$, vector flujo de calor $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$, y suministro de calor $R(\mathbf{X}, t)$. Entonces*

$$\varrho_0 \dot{\Phi} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} + \varrho_0 R \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

4.4.6. Segunda Ley de Termodinámica. Tal como en el caso de la ley de balance para el momento lineal existen diferentes maneras para desarrollar la forma Lagrangiana de la Segunda Ley de Termodinámica (desigualdad de Clausius-Duhem). Se puede avanzar directamente desde la forma integral del Axioma 4.4. Alternativamente podemos integrar la forma local Euleriana del Lema 4.7 sobre un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$, realizar un cambio de variable para obtener una integral sobre el subconjunto correspondiente $\Omega \subseteq B$, y luego localizar. Aquí seguiremos este segundo procedimiento.

Integrando la expresión del Lema 4.7 sobre un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ obtenemos

$$\int_{\Omega_t} \varrho \dot{\eta} dV_{\mathbf{x}} \geq \int_{\Omega_t} \frac{\varrho r}{\theta} dV_{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} dA_{\mathbf{x}},$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior sobre $\partial\Omega_t$. Aplicando un cambio de variable en estas integrales obtenemos

$$\int_{\Omega} \varrho_0 \dot{\eta}_{\text{m}} dV_{\mathbf{X}} \geq \int_{\Omega} \frac{\varrho R}{\Theta} dV_{\mathbf{X}} - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}}{\Theta} dA_{\mathbf{X}},$$

donde $\Theta = \theta_m$ es la descripción material del campo de temperatura espacial θ , η_m es la descripción material del campo espacial entropía η , y \mathbf{Q} es el campo material vector flujo de calor definido en (4.40). Los Teoremas de Divergencia y de Localización ahora entregan el siguiente resultado.

Lema 4.14 (Desigualdad de Clausius-Duhem en forma Lagrangiana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo. Entonces*

$$\varrho_0 \dot{\eta}_m \geq \frac{\varrho_0 R}{\Theta} - \nabla^{\mathbf{X}} \cdot \left(\frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \right) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Tal como en el caso Euleriano resulta útil introducir una densidad de energía libre por masa unitaria

$$\Psi(\mathbf{X}, t) := \Phi(\mathbf{X}, t) - \Theta(\mathbf{X}, t) \eta_m(\mathbf{X}, t).$$

Utilizando la energía libre y argumentos similares a los que resultaron en el Lema 4.8 (ver Problema 4.9) obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.15 (Desigualdad de Clausius-Duhem reducida en forma Lagrangiana). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo. Entonces*

$$\varrho_0 \dot{\Psi} \leq \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \varrho_0 \eta_m \dot{\Theta} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla^{\mathbf{X}} \Theta \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Todos los comentarios sobre la formulación Euleriana de la desigualdad de Clausius-Duhem respecto a la disipación interna, el flujo del calor y la energía libre también aplican a la presente formulación Lagrangiana.

4.4.7. Resumen. En la descripción Lagrangiana del movimiento de un cuerpo continuo general aparecen 21 campos básicos incógnitos:

$\varphi_i(\mathbf{X}, t)$	3 componentes del movimiento,
$V_i(\mathbf{X}, t)$	3 componentes de velocidad,
$P_{ij}(\mathbf{X}, t)$	9 componentes de la tensión,
$\Theta(\mathbf{X}, t)$	1 temperatura material,
$Q_i(\mathbf{X}, t)$	3 componentes del flujo del calor,
$\Phi(\mathbf{X}, t)$	1 energía interna por masa unitaria,
$\eta_m(\mathbf{X}, t)$	1 entropía por masa unitaria.

Para determinar estas cantidades tenemos a disposición las siguientes 10 ecuaciones:

$V_i = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i$	3 ecuaciones cinemáticas,
$\varrho_0 \dot{V}_i = P_{ij,j} + \varrho_0 (b_i)_m$	3 ecuaciones de momento lineal,
$P_{ik} F_{jk} = F_{ik} P_{jk}$	3 ecuaciones independientes de momento angular,
$\varrho_0 \dot{\Phi} = P_{ij} \dot{F}_{ij} - Q_{i,i} + \varrho_0 R$	1 ecuación de energía.

Al contrario de la formulación Euleriana (ver Sección 4.3.7), en la formulación Lagrangiana el campo densidad de masa es una cantidad conocida. Se trata simplemente de la densidad dada ϱ_0 del cuerpo en su configuración referencial.

Comentamos que frecuentemente el campo velocidad material \mathbf{V} no es requerido explícitamente. En tal caso el número de incógnitas es reducido a 18 (\mathbf{V} desaparece), y el número de ecuaciones es reducido a 7 (las ecuaciones cinemáticas desaparecen).

Como el número de desconocidad excede el de las ecuaciones en 11, necesitamos ecuaciones adicionales para poder cerrar el sistema. Como veremos más adelante, para tal efecto introduciremos *ecuaciones constitutivas* que relacionan $(\Sigma, \mathbf{Q}, \Phi, \eta_m)$ a (φ, Θ) , donde $\Sigma = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$ es el segundo tensor tensión de Piola-Kirchhoff. Tales relaciones reflejan las propiedades materiales específicas del cuerpo.

Volvemos a comentar, además, que la Segunda Ley de Termodinámica (desigualdad de Clausius-Duhem) no proporciona una ecuación para determinar campos incógnitos. Al contrario, se interpreta la Segunda Ley como una restricción para las ecuaciones constitutivas. En particular, las relaciones constitutivas de un cuerpo deben garantizar la satisfacción de la Segunda Ley en cualquier movimiento del cuerpo posible.

Finalmente, si no se consideran efectos térmicos, el número de incógnitas se reduce más, de 18 a 12 (\mathbf{Q} , Φ , η_m y Θ desaparecen), y el número de ecuaciones es reducido de 7 a 6 (el balance de energía desaparece). En este caso la clausura del sistema puede ser efectuada por 6 ecuaciones constitutivas que relacionan Σ a φ .

4.5. Indiferencia respecto del marco

En esta sección introduciremos la idea de un movimiento rígido superpuesto y la utilizaremos para definir el concepto de la independencia del marco. Luego formularemos un axioma que postula que ciertos campos en la mecánica del medio continuo son independientes del marco, o equivalentemente, independientes del observador. Veremos que este axioma impone restricciones estrictas sobre las ecuaciones constitutivas para un cuerpo material.

4.5.1. Movimientos rígidos superpuestos. Si dos observadores en diferentes marcos de referencia son testigos del movimiento de un cuerpo, entonces los dos movimientos observados, referidos a un marco de referencia común, deben ser relacionados por un movimiento rígido superpuesto.

Definición 4.2 (Movimiento rígido superpuesto). *Dos movimientos $\varphi, \varphi^* : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ de un cuerpo se dicen relacionados por un movimiento rígido superpuesto si existen una rotación $\mathbf{Q}(t)$ y un vector $\mathbf{c}(t)$ tales que*

$$\varphi^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\varphi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0. \quad (4.42)$$

En esta definición las funciones $\mathbf{Q}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$ describen el movimiento de un observador relativo al otro. En particular, $\mathbf{Q}(t)$ describe la rotación relativa, mientras que $\mathbf{c}(t)$ describe la traslación relativa. Así, diferentes pares de observadores quedan descritos por diferentes funciones $\mathbf{Q}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$. En nuestro desarrollo siempre supondremos (implícitamente) que cualquier par de observadores mide el tiempo relativo al mismo reloj. Una relación más general entre φ y φ^* sería necesaria para representar observadores con relojes diferentes.

La relación entre diversas medidas de la deformación y de la tasa de deformación vistas por dos observadores diferentes puede ser derivada desde (4.42). En particular, sean $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ la velocidad espacial y el gradiente de deformación, respectivamente, asociados a φ , y sean $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t)$ y $\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t)$ las cantidades correspondientes asociadas a φ^* . Además, sean \mathbf{C} , \mathbf{VR} y \mathbf{RU} el tensor de Cauchy-Green y las descomposiciones polares a izquierda y a derecha asociadas a \mathbf{F} , y \mathbf{C}^* , $\mathbf{V}^*\mathbf{R}^*$ y $\mathbf{R}^*\mathbf{U}^*$ las cantidades correspondientes asociadas

a \mathbf{F}^* . Finalmente, sea \mathbf{L} el campo tasa de deformación asociado a \mathbf{v} , y sea \mathbf{L}^* el campo tasa de deformación asociado a \mathbf{v}^* . Entonces (4.42) implica el siguiente resultado.

Lema 4.16 (Efecto de un movimiento rígido superpuesto). *La relación entre los campos materiales $(\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{C})$ y $(\mathbf{F}^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{C}^*)$ está dada por*

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

La relación entre los campos espaciales $(\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v}, \mathbf{L})$ y $(\nabla^{\mathbf{x}^}\mathbf{v}^*, \mathbf{L}^*)$ es*

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{x}^*}\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t) \Big|_{\mathbf{x}^*=\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)} &= \mathbf{Q}(t)\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^T + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}(t)^T, \\ \mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t) \Big|_{\mathbf{x}^*=\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)} &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^T \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t \text{ y } t \geq 0. \end{aligned}$$

Aquí $\dot{\mathbf{Q}}(t)$ denota la derivada de $\mathbf{Q}(t)$.

4.5.2. Axioma de la indiferencia respecto del marco. Para cualquier instante $t \geq 0$ sea B_t la configuración actual de B bajo el movimiento φ , sea B_t^* la configuración actual bajo φ^* , y sea \mathbf{g} el movimiento rígido definido por (4.42), es decir

$$\mathbf{g}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t).$$

Sean $\phi(\mathbf{x}, t)$ un campo escalar, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ un campo vectorial y $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ un campo tensorial de segundo orden asociados al cuerpo en su configuración B_t cuyos puntos sean denotados por \mathbf{x} , y sean $\phi^*(\mathbf{x}^*, t)$, $\mathbf{w}^*(\mathbf{x}^*, t)$ y $\mathbf{S}^*(\mathbf{x}^*, t)$ los campos correspondientes asociados al cuerpo en su configuración B_t^* , cuyos puntos sean denotados por \mathbf{x}^* .

Definición 4.3 (Indiferencia respecto del marco). *Los campos ϕ , \mathbf{w} y \mathbf{S} se llaman indiferentes respecto del marco si para todo movimiento rígido superpuesto $\mathbf{g}_t : B_t \rightarrow B_t^*$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{x}^*, t) &= \phi(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}^*, t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{S}^*(\mathbf{x}^*, t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^T \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$. Aquí $\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, es decir

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t).$$

Este concepto de indiferencia respecto del marco expresa la idea de que ciertas cantidades físicas asociadas a un cuerpo son inherentes al cuerpo y por lo tanto independientes del observador. Por ejemplo, cualquier par de observadores en marcos de referencia diferentes deben coincidir acerca de la masa y de la temperatura de un cuerpo continuo. Después de un cambio de base apropiado también deben coincidir sobre las componentes del vector flujo del calor y los campos tensoriales de tensión. Estas ideas son precisadas si decimos que la densidad de masa, la temperatura, el flujo del calor y los campos de tensión de Cauchy son todos indiferentes respecto del marco en el sentido de la Definición 4.3. Sin embargo, no todos los campos son indiferentes respecto del marco. Por ejemplo, dos observadores en movimiento relativo no coincidirán sobre los campos de velocidad y de aceleración de un cuerpo. La experiencia común y la intuición sugieren la siguiente hipótesis.

Axioma 4.5 (Indiferencia del marco material). *La densidad de masa espacial $\varrho(\mathbf{x}, t)$, la temperatura $\theta(\mathbf{x}, t)$, la entropía por masa unitaria $\phi(\mathbf{x}, t)$, la tensión de Cauchy $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ y el flujo del calor de Fourier-Stokes $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ son campos indiferentes respecto del marco.*

El Axioma 4.5 impone restricciones estrictas sobre las ecuaciones constitutivas utilizadas para describir las propiedades materiales de un cuerpo dado. Por ejemplo, supongamos que la energía interna, el flujo del calor y la tensión de Cauchy son modelados a través de ecuaciones constitutivas de la forma

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \hat{\phi}(\varrho(\mathbf{x}, t), \theta(\mathbf{x}, t), \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)), \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{q}}(\varrho(\mathbf{x}, t), \theta(\mathbf{x}, t), \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)), \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{S}}(\varrho(\mathbf{x}, t), \theta(\mathbf{x}, t), \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)),\end{aligned}$$

donde $\hat{\phi}$, $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$ son funciones dadas. Entonces, para ser compatibles con el Axioma 4.5, estas funciones deben tener la siguiente propiedad, donde omitimos los argumentos \mathbf{x} , \mathbf{x}^* y t por brevedad:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\varrho^*, \theta^*, \mathbf{L}^*) &= \hat{\phi}(\varrho, \theta, \mathbf{L}), \\ \hat{\mathbf{q}}(\varrho^*, \theta^*, \mathbf{L}^*) &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{q}}(\varrho, \theta, \mathbf{L}), \\ \hat{\mathbf{S}}(\varrho^*, \theta^*, \mathbf{L}^*) &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{S}}(\varrho, \theta, \mathbf{L})\mathbf{Q}^T.\end{aligned}$$

Como $\varrho^* = \varrho$ y $\theta^* = \theta$ en virtud del Axioma 4.5 y $\mathbf{L}^* = \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T$ debido al Lema 4.16, concluimos que las funciones $\hat{\phi}$, $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$ deben satisfacer

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\varrho, \theta, \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T) &= \hat{\phi}(\varrho, \theta, \mathbf{L}), \\ \hat{\mathbf{q}}(\varrho, \theta, \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{q}}(\varrho, \theta, \mathbf{L}), \\ \hat{\mathbf{S}}(\varrho, \theta, \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{S}}(\varrho, \theta, \mathbf{L})\mathbf{Q}^T\end{aligned}$$

para todas las rotaciones \mathbf{Q} y todos los valores admisibles de ϱ , θ y \mathbf{L} . Así, el axioma de indiferencia del marco impone restricciones severas sobre las formas posibles de $\hat{\phi}$, $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$. Funciones que violen estas restricciones entregarían resultados diferentes si fueran utilizadas por observadores diferentes. Por este motivo la indiferencia del marco se impone sobre las ecuaciones constitutivas exactamente, o para modelos linealizados, aproximadamente.

4.6. Restricciones materiales

De acuerdo a la experiencia física ciertos tipos de materiales resisten fuertemente ciertos tipos de deformaciones. Por ejemplo, líquidos como el agua resisten fuertemente cambios de volumen pero por otra parte son muy deformables. Normalmente modelamos tales materiales imponiendo restricciones a priori sobre sus movimientos.

Definición 4.4 (Restricción material o interna). *Se dice que un cuerpo continuo está sujeto a una restricción material o interna simple si cada movimiento $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ debe satisfacer una ecuación del tipo*

$$\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0, \quad (4.43)$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es el gradiente de deformación y $\gamma : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada.

Los materiales que no permiten un cambio de volumen se llaman *incompresibles*. Tales materiales pueden experimentar solamente movimientos isocóricos. En virtud del Lema 3.10, una función restricción adecuada para un material incompresible viene dada por

$$\gamma(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1. \quad (4.44)$$

Insertando esta función en (4.43) obtenemos

$$\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = 1 \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B \text{ y } t \geq 0,$$

lo que implica que el volumen local del material en una vecindad de cada punto es constante en el tiempo. El Lema 3.10 igualmente demuestra que una formulación equivalente de esta restricción es $\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$. En particular esta condición de divergencia implica que $\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = 1$ para todo $t > 0$ siempre que esta igualdad sea válida para $t = 0$.

Las restricciones materiales deben ser mantenidas por tensiones apropiadas. Como muchos sistemas de tensiones diferentes podrían mantener una restricción dada, introduciremos la siguiente hipótesis.

Axioma 4.6 (Campos de tensión en materiales restringidos). *El primer campo tensión de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ en un cuerpo continuo sujeto a una restricción material $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = 0$ puede ser descompuesto en dos partes:*

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{P}^{(a)}(\mathbf{X}, t).$$

Aquí $\mathbf{P}^{(a)}(\mathbf{X}, t)$ es un campo tensión activo determinado por una ecuación constitutiva, y $\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{X}, t)$ es un campo de tensión reactivo cuya potencia de tensión es cero en cualquier movimiento, es decir

$$\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0. \quad (4.45)$$

Desde (4.45) podemos deducir la forma más general de la tensión reactiva $\mathbf{P}^{(r)}$ asociada a una restricción dada. La condición de que $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ debe permanecer constante en el tiempo para todo $\mathbf{X} \in B$ es equivalente a la condición

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = D\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Así, todos los movimientos que satisfacen la restricción tienen la propiedad de que $\dot{\mathbf{F}}$ es ortogonal a $D\gamma(\mathbf{F})$ con respecto al producto interior estándar en el espacio de tensores de segundo orden. En particular, $\dot{\mathbf{F}}$ debe pertenecer al hiperplano ortogonal a $D\gamma(\mathbf{F})$ para todo $\mathbf{X} \in B$ y $t \geq 0$. Aquí $D\gamma(\mathbf{F})$ denota la derivada de γ en \mathbf{F} (ver Definición 1.10).

El hecho de que (4.45) debe ser válido para todo movimiento posible que satisfaga la restricción, implica que $\mathbf{P}^{(r)}$ debe ser ortogonal al hiperplano definido por $D\gamma(\mathbf{F})$. En particular, $\mathbf{P}^{(r)}$ debe ser paralelo a $D\gamma(\mathbf{F})$ para todo $\mathbf{X} \in B$ y $t \geq 0$. Así, la forma más general para la tensión reactiva viene dada por

$$\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{X}, t) = q(\mathbf{X}, t) D\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)),$$

donde $q(\mathbf{X}, t)$ es un campo escalar incógnito al cual nos referimos como *multiplicador*. Este campo es la parte incógnita de la tensión reactiva que hace cumplir la restricción

$\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = 0$. Por ejemplo, para materiales incompresibles definidos por (4.44) tenemos que (ver Lema 1.21)

$$\mathbf{P}^{(r)}(\mathbf{X}, t) = q(\mathbf{X}, t) \det(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^{-T}. \quad (4.46)$$

Utilizando la Definición 4.1 podemos formular una versión del Axioma 4.6 en términos del campo de tensión de Cauchy en lugar del campo de tensión de Piola-Kirchhoff. En particular, la tensión de Cauchy en un cuerpo sujeto a una restricción material puede ser descompuesto como

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}^{(r)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t),$$

donde $\mathbf{S}^{(r)}$ es un campo de tensión reactiva que corresponde a $\mathbf{P}^{(r)}$, y $\mathbf{S}^{(a)}$ es un campo de tensión activa que corresponde a $\mathbf{P}^{(a)}$. Por ejemplo, para materiales incompresibles, (4.46) implica que

$$\mathbf{S}^{(r)}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I},$$

donde $-p(\mathbf{x}, t) = q_s(\mathbf{x}, t)$ es la descripción espacial del campo material $q(\mathbf{X}, t)$. Así, observamos que la tensión de Cauchy reactiva es esférica, y el campo multiplicador puede ser interpretado como una presión.

El Axioma 4.5 afirma que el campo tensión de Cauchy es indiferente respecto del marco. En el caso anterior de un cuerpo sin ninguna restricción demostramos que este axioma impone una restricción sobre la ecuación constitutiva para $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$. En el presente caso de un cuerpo con una restricción interpretamos este axioma como imponiendo una restricción sobre las formas posibles de la función de restricción γ y la ecuación constitutiva para la tensión activa $\mathbf{S}^{(a)}$. En particular, siempre supondremos que ambas expresiones $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ y $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ son indiferentes respecto del marco. Estas hipótesis, juntas con la indiferencia respecto del marco de $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$, implican que el campo multiplicador, a su vez, es indiferente respecto del marco.

4.7. Consideraciones isotérmicas

Existe un buen número de modelos de fluidos y de sólidos que son puramente mecánicos. Aquí introduciremos el concepto de un proceso isotérmico como una forma de describir tales modelos en el marco de este capítulo, y discutiremos las leyes de balance relevantes para el modelamiento isotérmico de cuerpos continuos.

Definición 4.5 (Procesos termo-mecánico e isotérmico). *Como proceso termo-mecánico para un cuerpo continuo se denota un par de funciones (φ, Θ) , donde $\varphi(\mathbf{X}, t)$ es un movimiento admisible y $\Theta(\mathbf{X}, t)$ es un campo material de temperatura. Un proceso se llama isotérmico si $\Theta(\mathbf{X}, t)$ es constante independientemente de \mathbf{X} y t , o equivalentemente, si la temperatura espacial $\theta(\mathbf{x}, t)$ es constante independientemente de \mathbf{x} y t .*

Nuestra hipótesis básica para el modelamiento isotérmico de un cuerpo continuo es que el cuerpo puede experimentar procesos isotérmicos solamente. En particular, para cada movimiento φ se supone que la temperatura material Θ es constante para todo $\mathbf{X} \in B$ y $t \geq 0$. Esta hipótesis es razonable físicamente para cuerpos con fuentes de calor internas y externas despreciables. Se supone que las fuentes internas son despreciables cuando el cuerpo está sujeto a leves tasas de deformación. Las fuentes externas serán despreciables cuando la

temperatura del ambiente del cuerpo es aproximadamente uniforme, constante e igual a la del cuerpo.

Las leyes de balance de masa, momento lineal y momento angular y el axioma de indiferencia respecto del marco material son fundamentales para el modelamiento isotérmico de cuerpos materiales. La ley de balance de energía no es relevante directamente en este contexto porque ella contiene cantidades, en particular la energía interna, el vector flujo de calor y el suministro del calor, que típicamente quedan sin especificar en modelos isotérmicos. Si cualquier par de estas cantidades fuera conocido, podríamos utilizar la ley de balance de energía para generar información acerca de la tercera. Desde la primera vista parece, además, que la desigualdad de Clausius-Duhem (la Segunda Ley de Termodinámica) no es relevante directamente. Sin embargo demostraremos abajo que esta desigualdad da origen a una desigualdad de energía puramente mecánica para una clase de cuerpos importante.

Definición 4.6 (Proceso termo-mecánico cerrado). *Un proceso termo-mecánico (φ, Θ) se dice cerrado en un intervalo $[t_0, t_1]$ si $\varphi(\mathbf{X}, t_1) = \varphi(\mathbf{X}, t_0)$, $\dot{\varphi}(\mathbf{X}, t_1) = \dot{\varphi}(\mathbf{X}, t_0)$ y $\Theta(\mathbf{X}, t_1) = \Theta(\mathbf{X}, t_0)$ para todo $\mathbf{X} \in B$. Un cuerpo se llama energéticamente pasivo si para cualquier proceso cerrado su densidad material de energía libre satisface $\Psi(\mathbf{X}, t_1) - \Psi(\mathbf{X}, t_0) \geq 0$ para todo $\mathbf{X} \in B$.*

Así, un proceso es cerrado en un intervalo $[t_0, t_1]$ si todas las partículas de un cuerpo poseen la misma posición, velocidad y temperatura en el instante t_1 que en el instante t_0 . Además, un cuerpo es energéticamente pasivo si el cambio neto de su densidad de energía libre es no negativo para cualquier proceso cerrado. Por ejemplo, si Ψ depende solamente del valor actual de los campos φ , $\dot{\varphi}$ y Θ , y no de su historia pasada, el cambio neto de Ψ es cero. El siguiente resultado es una consecuencia de la desigualdad de Clausius-Duhem reducida en su forma Lagrangiana o Euleriana (Lemas 4.15 y 4.8, respectivamente).

Lema 4.17 (Desigualdad de energía mecánica). *Se considera un cuerpo energéticamente pasivo con una configuración referencial B . Entonces para cualquier proceso isotérmico en un intervalo $[t_0, t_1]$ se debe tener*

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) dt \geq 0 \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, \quad (4.47)$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ es el primer tensor tensión de Piola-Kirchhoff y $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es el gradiente de deformación. Equivalentemente, se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1} (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) : \mathbf{L}_m(\mathbf{X}, t) dt \geq 0 \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, \quad (4.48)$$

donde $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ es el campo tensión de Cauchy y $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ es el campo tasa de deformación.

Demostración. Para cualquier proceso termo-mecánico la desigualdad de Clausius-Duhem en su forma Lagrangiana (Lema 4.15) afirma que

$$\varrho_0 \dot{\Psi} \leq \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \varrho_0 \eta_m \dot{\Theta} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla^{\mathbf{X}} \Theta \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Si el proceso es isotérmico, entonces $\dot{\Theta} = 0$ y $\nabla^{\mathbf{X}}\Theta = \mathbf{0}$, e integrando sobre un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ obtenemos

$$\varrho_0(\mathbf{X})(\Psi(\mathbf{X}, t_1) - \Psi(\mathbf{X}, t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} P(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) dt.$$

Además, si el proceso es cerrado y el cuerpo es energéticamente pasivo, el lado izquierdo es no negativo, lo cual entrega el resultado (4.47).

Similarmente, para cualquier proceso la desigualdad de Clausius-Duhem reducida en su forma Euleriana (Lema 4.8) afirma que

$$\varrho\dot{\psi} \leq \mathbf{S} : \mathbf{L} - \varrho\eta\dot{\theta} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla^{\mathbf{x}}\theta \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

Si el proceso es isotérmico, entonces $\dot{\theta} = 0$ y $\nabla^{\mathbf{x}}\theta = \mathbf{0}$, por lo tanto

$$\varrho\dot{\psi} \leq \mathbf{S} : \mathbf{L} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

En forma material esto puede ser expresado por

$$\varrho_m \dot{\Psi} \leq \mathbf{S}_m : \mathbf{L}_m \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0, \quad (4.49)$$

donde $\Psi = \psi_m$. Por conservación de masa (Lema 4.9) se tiene que $\varrho_m = \varrho_0 / \det \mathbf{F}$. Insertando esto en la desigualdad (4.49) e integrando como arriba obtenemos el resultado (4.48). ■

El Lema 4.17 implica que en cualquier proceso isotérmico cerrado un cuerpo energéticamente pasivo puede consumir energía mecánica pero no puede generarla. En particular, para cualquier subconjunto abierto $\Omega_t \subseteq B_t$ se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(\Omega_t) dt \geq 0, \quad (4.50)$$

donde $\mathcal{P}(\Omega_t)$ es la potencia de fuerzas externas sobre Ω_t . Esta desigualdad puede ser deducida integrando (4.47) sobre un subconjunto arbitrario $\Omega \subseteq B$ y utilizando el Lema 4.12 junto con la definición de un proceso cerrado. Equivalentemente podemos integrar (4.48) y utilizar el Lema 4.5. La integral en (4.50) corresponde al trabajo de fuerzas externas sobre Ω_t . El hecho de que esta integral es no negativa implica que Ω_t solamente puede consumir energía.

Tal como en el caso de la desigualdad de Clausius-Duhem consideramos el Lema 4.17 como una restricción constitutiva. En particular, bajo la hipótesis de un cuerpo energéticamente pasivo, la ecuación constitutiva para el campo tensión debe garantizar que la desigualdad de energía mecánica esté satisfecha en todo proceso isotérmico cerrado. Así, el modelamiento isotérmico de cuerpos continuos involucra tres leyes de balance básicas relativas a la masa, el momento lineal, y el momento angular, respectivamente. Además se presentan dos restricciones constitutivas relacionadas a la indiferencia respecto del marco y la desigualdad de energía mecánica, respectivamente. Esta última se aplica solamente a una clase particular de cuerpos y procesos.

4.8. Ejercicios

Problema 4.1 (Certamen 2, Curso 2012). Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo. Demostrar que la desigualdad de Clausius-Duhem reducida está dada por

$$\varrho_0 \dot{\Psi} \leq \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \varrho_0 \eta_m \dot{\Theta} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla^{\mathbf{X}} \Theta \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Se puede utilizar que la desigualdad de Clausius-Duhem en forma Lagrangiana está dada por

$$\varrho_0 \dot{\eta}_m \geq \frac{\varrho_0 R}{\Theta} - \nabla^{\mathbf{X}} \cdot \left(\frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \right) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Se debe introducir una densidad de energía libre por masa unitaria definida adecuadamente.

Problema 4.2 (Certamen 2, Curso 2012). Sean $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ la velocidad espacial y el gradiente de deformación, respectivamente, asociados a un movimiento φ , y sean $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t)$ y $\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t)$ las cantidades correspondientes asociadas a φ^* , donde φ y φ^* sean relacionados por un *movimiento rígido superpuesto*, es decir se supone que existen una rotación $\mathbf{Q}(t)$ y un vector $\mathbf{c}(t)$ tales que

$$\varphi^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\varphi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Además, sean \mathbf{C} , \mathbf{VR} y \mathbf{RU} el tensor de Cauchy-Green y las descomposiciones polares a izquierda y a derecha asociadas a \mathbf{F} , y \mathbf{C}^* , $\mathbf{V}^*\mathbf{R}^*$ y $\mathbf{R}^*\mathbf{U}^*$ las cantidades correspondientes asociadas a \mathbf{F}^* . Finalmente, sea \mathbf{L} el campo tasa de deformación asociado a \mathbf{v} , y sea \mathbf{L}^* el campo tasa de deformación asociado a \mathbf{v}^* . Demostrar que la relación entre los campos materiales $(\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{C})$ y $(\mathbf{F}^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{U}^*, \mathbf{V}^*, \mathbf{C}^*)$ está dada por

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

y que la relación entre los campos espaciales $(\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v}, \mathbf{L})$ y $(\nabla^{\mathbf{x}^*}\mathbf{v}^*, \mathbf{L}^*)$ es

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{x}^*}\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t)|_{\mathbf{x}^*=g(\mathbf{x}, t)} &= \mathbf{Q}(t)\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}(t)^{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t)|_{\mathbf{x}^*=g(\mathbf{x}, t)} &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}(t)^{\mathbf{T}} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t \text{ y } t \geq 0. \end{aligned}$$

Aquí $\dot{\mathbf{Q}}(t)$ denota la derivada de $\mathbf{Q}(t)$.

Problema 4.3 (Certamen 2, Curso 2012). Con la ayuda del enunciado del problema anterior determinar cuales de las siguientes ecuaciones constitutivas para el campo tensión de Cauchy son indiferentes respecto del marco, donde μ , λ y γ son constantes arbitrarias: (a) $\mathbf{S} = 2\mu\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v}$, (b) $\mathbf{S} = \mu\mathbf{L}$, (c) $\mathbf{S} = \lambda\varrho^{\gamma}\mathbf{I}$.

Problema 4.4 (Tarea 3, Curso 2013). Utilizar los Axiomas 4.1 y 4.2 para demostrar que

$$M\dot{\mathbf{x}}_{\text{com}} = \mathbf{l}(\Omega_t) \quad \text{y} \quad M\ddot{\mathbf{x}}_{\text{com}} = \mathbf{r}(\Omega_t),$$

donde M denota la masa y \mathbf{x}_{com} es el centro de masa de Ω_t .

Problema 4.5 (Tarea 3, Curso 2013). Supongamos que la masa de un subconjunto abierto arbitrario $\Omega_t \subseteq B_t$ satisface la ley de crecimiento

$$\frac{d}{dt} \text{mass}(\Omega_t) = g(\Omega_t), \quad (4.51)$$

donde $g(\Omega_t)$ es una tasa neta de crecimiento de la forma

$$g(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \gamma(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}},$$

donde $\gamma(\mathbf{x}, t)$ es una tasa de crecimiento por masa unitaria dada. Demostrar que la forma Euleriana local de (4.51) es

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\varrho \mathbf{v}) = \gamma \varrho \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

Problema 4.6 (Tarea 3, Curso 2013). Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con el campo densidad de masa $\varrho(\mathbf{x}, t)$ y el campo velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Sean $\psi(\mathbf{x}, t)$ y $\phi(\mathbf{x}, t)$ campos escalares arbitrarios y sea $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ un campo vectorial arbitrario definidos sobre B_t .

- Demstrar que $(\ln \psi)^{\bullet} = \psi^{-1} \dot{\psi}$ y $(\psi \phi)^{\bullet} = \dot{\psi} \phi + \psi \dot{\phi}$, donde \bullet y $\dot{}$ denotan la derivada temporal total o material.
- Utilizar la parte (a) y el Lema 4.1 para demostrar que

$$(\varrho^{-1} \phi)^{\bullet} = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\phi \mathbf{v}) \right).$$

- Utilizar el resultado de (b) para demostrar que

$$(\varrho^{-1} \mathbf{w})^{\bullet} = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \right).$$

Problema 4.7 (Tarea 3, Curso 2013). Demostrar que la potencia de tensión $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ por volumen de referencia unitario puede ser escrito como

$$\mathbf{P} : \mathbf{F} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{C}},$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es el segundo tensor tensión de Piola-Kirchhoff y \mathbf{C} es el tensor tensión de Cauchy a derecha.

Problema 4.8 (Tarea 3, Curso 2013). Se estudia la ecuación de balance de energía (Lema 4.13) y la desigualdad de Clausius-Duhem (Lema 4.15) para un cuerpo bajo un movimiento rígido

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \mathbf{X} + \mathbf{c}(t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

donde $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ es una rotación y $\mathbf{c}(t)$ es un vector. Notar que $\boldsymbol{\Lambda}(t) = \mathbf{I}$ y $\mathbf{c}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$ corresponde al caso de un cuerpo en reposo en su configuración de referencia B .

- Utilizar el resultado del Problema 4.7 para demostrar que potencia de tensión $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ por volumen de referencia unitario se anula idénticamente para un movimiento rígido arbitrario.
- Sean la densidad de energía interna y el flujo de calor dados por las respectivas relaciones constitutivas de la forma $\Psi = \alpha \Theta$ y $\mathbf{Q} = -\kappa \nabla^{\mathbf{X}} \Theta$, donde α y κ son constantes escalares. Demostrar que la ecuación balance de energía se reduce a

$$\varrho_0 \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \kappa \Delta^{\mathbf{X}} \Theta + \varrho_0 R \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Esta ecuación de derivadas parciales es conocida como *ecuación del calor*.

- c) Supongamos que no se considera la ecuación constitutiva para Φ , y que al lugar de ésta se utilizan ecuaciones constitutivas para la energía libre Ψ y la entropía η_m de las respectivas formas

$$\Psi = \hat{\Psi}(\Theta), \quad \eta_m = -\frac{d\hat{\Psi}}{d\Theta}(\Theta),$$

donde $\hat{\Psi}$ es una función dada. Demostrar que en este caso la ecuación balance de energía se reduce a

$$-\varrho_0 \Theta \frac{d^2 \hat{\Psi}}{d\Theta^2}(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \kappa \Delta^{\mathbf{X}} \Theta + \varrho_0 R \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

lo que es una EDP *no* lineal para $\Theta(\mathbf{X}, t)$.

- d) Suponiendo las relaciones constitutivas de la parte (c), demostrar que la desigualdad de Clausius-Duhem del Lema 4.15 está satisfecha para movimientos rígidos arbitrarios y campos de temperatura sólo para $\kappa \geq 0$, es decir un modelo con $\kappa < 0$ violaría la Segunda Ley de Termodinámica.

Problema 4.9 (Certamen 2, Curso 2013). Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo. Demostrar que la desigualdad de Clausius-Duhem reducida está dada por

$$\varrho_0 \dot{\Psi} \leq \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \varrho_0 \eta_m \dot{\Theta} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla^{\mathbf{X}} \Theta \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Se puede utilizar que la desigualdad de Clausius-Duhem en forma Lagrangiana está dada por

$$\varrho_0 \dot{\eta}_m \geq \frac{\varrho_0 R}{\Theta} - \nabla^{\mathbf{X}} \cdot \left(\frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \right) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Se debe introducir una densidad de energía libre por masa unitaria definida adecuadamente.

Capítulo 5

Mecánica de fluidos isotérmica

En este capítulo se consideran varias aplicaciones de las leyes de balance en su forma Euleriana desarrolladas en el Capítulo 4. Como tal hipótesis es físicamente razonable en muchas circunstancias y como simplifica la exposición aquí despreciaremos los efectos térmicos. En tal caso aparecen solamente 16 campos incógnitos básicos en la descripción Euleriana de un cuerpo continuo, a saber:

$\varphi_i(\mathbf{X}, t)$	3 componentes del movimiento,
$v_i(\mathbf{x}, t)$	3 componentes de velocidad,
$\rho(\mathbf{x}, t)$	1 densidad de masa,
$S_{ij}(\mathbf{x}, t)$	9 componentes de la tensión.

Para determinar estas cantidades tenemos a disposición las siguientes 10 ecuaciones:

$(v_i)_m = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i$	3 ecuaciones cinemáticas,
$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\rho v_i)_{,i} = 0$	1 conservación de masa,
$\rho \dot{v}_i = S_{ij,j} + \rho b_i$	3 ecuaciones de momento lineal,
$S_{ij} = S_{ji}$	3 ecuaciones independientes de momento angular.

Así, necesitamos 6 ecuaciones adicionales para que el número de incógnitas coincida con el de las ecuaciones. Estas ecuaciones adicionales serán proporcionadas por ecuaciones constitutivas que relacionen las 6 componentes independientes del campo tensión de Cauchy \mathbf{S} a las variables ρ , \mathbf{v} y $\boldsymbol{\varphi}$. En el caso de un material sujeto a una restricción interna aparece una ecuación que define la restricción, además de un campo incógnito adicional, que es el campo del multiplicador que hace cumplir la restricción. Tanto las ecuaciones constitutivas como las restricciones deben ser consistentes con el axioma de indiferencia respecto del marco. Además, suponiendo que el material es energéticamente pasivo, la ecuación constitutiva también debe satisfacer la desigualdad de energía mecánica discutida en el Capítulo 4.

En este capítulo estudiaremos modelos constitutivos que relacionan la tensión de Cauchy \mathbf{S} a la densidad espacial de masa ρ y el gradiente espacial de velocidad $\nabla^x \mathbf{v}$. Tales modelos típicamente describen el comportamiento de varios tipos de fluidos. Como cada modelo constitutivo de este tipo es independiente de $\boldsymbol{\varphi}$, un sistema cerrado de ecuaciones para ρ , \mathbf{v} y \mathbf{S} viene dado por las ecuaciones de balance de masa, momento lineal y momento angular. Como veremos, estas ecuaciones generan una descripción completa del movimiento para cuerpos que ocupan regiones del espacio con fronteras dadas. Si las fronteras no están dadas o son incógnitas a priori, entonces $\boldsymbol{\varphi}$ y las ecuaciones cinemáticas también deben ser consideradas.

Los modelos constitutivos específicos a ser estudiados en este capítulo son los modelos para

- (i) fluidos ideales incompresibles,
- (ii) fluidos elásticos y

(iii) fluidos incompresibles Newtonianos.

Los modelos (i) y (ii) describen fluidos invíscidos, mientras que (iii) describe un fluido viscoso. Los modelos (i) y (iii) describen fluidos incompresibles, mientras que (ii) describe un fluido compresible. Para cada modelo resumiremos las ecuaciones gobernantes, daremos un ejemplo de un problema de valores iniciales y de frontera típico, y estudiaremos varias propiedades cualitativas. En el contexto del modelo (ii) estudiaremos también el concepto de linealización.

5.1. Fluidos ideales

En esta sección estudiaremos el modelo constitutivo de un fluido ideal. Demostraremos que el modelo es indiferente respecto del marco y que satisface la desigualdad de energía mecánica, luego discutiremos un problema de valores iniciales y de frontera estándar. Terminaremos con comentarios acerca de movimientos irrotacionales.

5.1.1. Definición.

Definición 5.1 (Fluido ideal). *Se dice que un cuerpo continuo con la configuración de referencia B es un fluido ideal si*

- 1.) *El campo referencial densidad de masa $\varrho_0(\mathbf{X})$ es uniforme en el sentido de que $\varrho_0(\mathbf{X}) = \varrho_0 > 0$ (constante).*
- 2.) *El material es incompresible (ver Sección 4.6), lo que significa que el campo velocidad espacial debe satisfacer*

$$\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- 3.) *El campo tensión de Cauchy es esférico o Euleriano (ver Sección 2.5), lo que significa que existe un campo escalar $p(\mathbf{x}, t)$, llamado la presión tal que*

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}.$$

En virtud de la discusión de la Sección 4.6, el campo presión en la Propiedad (3) puede ser identificado como el multiplicador asociado a la restricción expresada en la Propiedad (2). En particular, el campo tensión en un fluido ideal es puramente reactivo y es determinado completamente por la restricción de incompresibilidad. La Propiedad (3) implica, además, que el campo tensión necesariamente es simétrico. Así la ecuación de balance del momento angular (Lema 4.4) automáticamente está satisfecha y será dejada fuera de consideración.

Las Propiedades (1) y (2) y la conservación de masa (Lema 4.1) implican que la densidad de masa espacial es uniforme en el espacio y constante en el tiempo, en particular

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_0 > 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0. \quad (5.1)$$

Esta conclusión puede ser deducida insertando la condición de incompresibilidad $\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$ en la ecuación conservación de masa, lo cual entrega que

$$\dot{\varrho}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

En virtud de la definición de la derivada total o material se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Este resultado junto con la convención $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ y la definición de $\varrho_0(\mathbf{X})$ implican que

$$\varrho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) = \varrho(\mathbf{X}, 0) = \varrho_0(\mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

El resultado (5.1) sigue a partir de la condición sobre $\varrho_0(\mathbf{X})$ y la relación $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$.

5.1.2. Las ecuaciones de Euler. Insertando $\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_0$ y $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$ en la ecuación de balance de momento lineal (Lema 4.3) y la ecuación de conservación de masa (Lema 4.1) obtenemos un sistema cerrado de ecuaciones para los campos espaciales de velocidad y de presión en un cuerpo de fluido ideal. En particular se tiene que

$$\varrho_0 \dot{\mathbf{v}} = \nabla^x \cdot (-p\mathbf{I}) + \varrho_0 \mathbf{b}, \quad \nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0,$$

donde $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es una fuerza de cuerpo por masa unitaria espacial dada. Notar que la ecuación de conservación de masa se reduce a la restricción de incompresibilidad del campo espacial de velocidad.

En virtud del Lema 3.6 se tiene que

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v}.$$

Además es fácil verificar que

$$\nabla^x \cdot (-p\mathbf{I}) = -\nabla^x p.$$

Así, los campos espaciales de velocidad y de presión en un cuerpo de fluido ideal con la configuración referencial B deben satisfacer las siguientes ecuaciones para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$:

$$\varrho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla^x p + \varrho_0 \mathbf{b}, \quad (5.2a)$$

$$\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.2b)$$

Estas ecuaciones son conocidas como *Ecuaciones de Euler* para un fluido ideal.

Comentamos que en un fluido ideal no existe una ecuación explícita que relacione la presión con la velocidad o la densidad. Al contrario, la presión aparece como una incógnita fundamental que debe ser determinada simultáneamente con el campo velocidad. En particular, el campo presión puede ser identificado como el multiplicador asociado a la restricción de incompresibilidad (ver Sección 4.6). Las ecuaciones (5.2) determinan la presión sólo hasta una función aditiva del tiempo, esto es, si el par $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ satisface (5.2), entonces también lo hace $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t) + f(t)$ para cualquier función escalar $f(t)$. Esto sigue a partir de $\nabla^x(p + f(t)) = \nabla^x p$.

Comentamos además que en un fluido ideal no existen tensiones de cizalla. En particular, como el campo tensión de Cauchy es esférico, la tracción \mathbf{t} sobre una superficie con vector normal \mathbf{n} es, a su vez, normal respecto de la superficie ya que $\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n} = -p\mathbf{n}$ (ver Sección 2.5).

5.1.3. Consideraciones de indiferencia respecto del marco. Tal como discutimos en la Sección 4.6, el campo tensión de Cauchy en un cuerpo sujeto a una restricción material puede ser descompuesto como

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}^{(r)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t),$$

donde $\mathbf{S}^{(r)}$ es una tensión reactiva determinada por la restricción y $\mathbf{S}^{(a)}$ es una tensión activa dada por una ecuación constitutiva. Para un fluido ideal se tiene que

$$\mathbf{S}^{(r)}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}, \quad \mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{O},$$

donde p es el multiplicador asociado a la restricción de incompresibilidad $\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$, o equivalentemente, $\det \mathbf{F} = 1$. Esta restricción puede ser escrita en la forma material estándar

$$\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = 0,$$

donde $\gamma(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1$.

Para que un modelo restringido sea consistente con el Axioma de Indiferencia del Marco (Axioma 4.5) basta que el campo de restricción $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ y el campo de tensión activa $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ sean indiferentes respecto del marco en el sentido de la Definición 4.3. Para verificar que esto es válido aquí, sean B_t y B_t^* dos configuraciones de un cuerpo de fluido ideal relacionadas por un movimiento rígido superpuesto

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t),$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ es un tensor de rotación arbitrario y $\mathbf{c}(t)$ es un vector arbitrario. Sean $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ y $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ la restricción y la tensión activa asociadas a B_t , y sean $\gamma(\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t))$ y $\mathbf{S}^{(a)*}(\mathbf{x}^*, t)$ la restricción y la tensión activa asociadas a B_t^* . Recordamos que en virtud del Lema 4.16 se tiene que $\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$. Utilizando las definiciones de γ y $\mathbf{S}^{(a)}$ (la tensión activa desaparece idénticamente) junto con el hecho de que el determinante de una rotación es unitario deducimos lo siguiente, donde omitimos los argumentos \mathbf{x}^* , \mathbf{x} , \mathbf{X} y t por motivos de brevedad:

$$\gamma(\mathbf{F}^*) = \det \mathbf{F}^* - 1 = \det \mathbf{F} - 1 = \gamma(\mathbf{F}), \quad \mathbf{S}^{(a)*} = \mathbf{O} = \mathbf{Q}[\mathbf{O}]\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{S}^{(a)}\mathbf{Q}^T.$$

Concluimos que el modelo material de un fluido ideal es independiente del marco.

5.1.4. Consideraciones de energía mecánica. Aquí suponemos que un modelo isotérmico de un fluido ideal es energéticamente pasivo (de acuerdo a lo discutido en la Sección 4.7), y demostramos que se satisface la desigualdad de energía mecánica (Lema 4.17).

Como $\mathbf{S} = -p\mathbf{I}$ y $\mathbf{L} = \text{sym}(\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v})$, para cualquier movimiento de un fluido ideal se tiene que

$$\mathbf{S} : \mathbf{L} = -p\mathbf{I} : \text{sym}(\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v}).$$

Como $\mathbf{I} : \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A}$ y $\text{tr}(\text{sym}(\mathbf{A})) = \text{tr } \mathbf{A}$ para cualquier tensor de segundo orden \mathbf{A} , obtenemos

$$\mathbf{S} : \mathbf{L} = -p \text{tr}(\nabla^{\mathbf{x}}\mathbf{v}) = -p \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0,$$

donde la última igualdad es una consecuencia de la condición de incompresibilidad. Para cualquier intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ este resultado implica que

$$\int_{t_0}^{t_1} (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) : \mathbf{L}_m(\mathbf{X}, t) dt = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B,$$

donde \mathbf{F} es el gradiente de deformación. Esto demuestra que el modelo del fluido ideal es consistente con la desigualdad de energía mecánica. En particular la desigualdad es satisfecha para cualquier proceso isotérmico cerrado o no cerrado.

5.1.5. Problemas de valores iniciales y de frontera. Un *problema de valores iniciales y de frontera* para un cuerpo de fluido ideal, es un conjunto de ecuaciones que describe el movimiento del cuerpo sujeto a condiciones iniciales especificadas en B en el instante $t = 0$, y a condiciones de frontera sobre ∂B_t para $t \geq 0$. La forma Euleriana de las leyes de balance para un fluido ideal es particularmente apta para aquellos problemas en los cuales el cuerpo ocupa una región fija D en el espacio. Típicamente se supone que D es un conjunto acotado y abierto. Sin embargo en algunas aplicaciones también es útil considerar conjuntos abiertos no acotados tales como regiones exteriores a un conjunto acotado y cerrado, o bien la totalidad del espacio Euclidiano.

Un problema de valores iniciales y de frontera estándar para un cuerpo de fluido ideal ocupando una región fija D puede ser formulado como sigue: hallar $\mathbf{v} : D \times [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ y $p : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\varrho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\nabla^x p + \varrho_0 \mathbf{b} \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.3a)$$

$$\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial D \times [0, T], \quad (5.3c)$$

$$\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0(\cdot) \quad \text{en } D. \quad (5.3d)$$

En este sistema, ϱ_0 es una densidad de masa constante dada y \mathbf{b} es una fuerza de cuerpo por masa unitaria espacial dada. La ecuación (5.3a) es el balance de momento lineal y (5.3b) es la restricción material de incompresibilidad, la cual en este caso es equivalente con la ecuación de conservación de masa. La ecuación (5.3c) es una *condición de frontera* o *condición de borde* que expresa que el fluido no puede atravesar la frontera ∂D de D , y (5.3d) es una *condición inicial*. Aquí \mathbf{v}_0 es un campo dado que corresponde a la velocidad del fluido en el instante $t = 0$. El campo especificado \mathbf{v}_0 debe ser compatible con las condiciones de incompresibilidad y de frontera en el sentido de que $\nabla^x \mathbf{v}_0 = 0$ en D y $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre ∂D .

Comentamos que el sistema en (5.3) es un problema de valores iniciales y de frontera no lineal para los campos (\mathbf{v}, p) . Está garantizado que este sistema posee una solución sobre un intervalo de tiempo finito $[0, T]$ siempre que la región D sea suficientemente regular, y si el campo \mathbf{v}_0 es suficientemente suave y compatible con las condiciones de incompresibilidad y de frontera. Si D es acotado, el campo \mathbf{v} es único, mientras que p es única sólo hasta una función aditiva del tiempo. Si D es no acotada, típicamente se imponen condiciones de frontera en el infinito que resultan en la unicidad de \mathbf{v} y p .

Comentamos además que aunque una solución de (5.3) puede ser garantizada sobre un intervalo de tiempo finito en dependencia de los datos del problema, la existencia global

para todos los tiempos aún es un problema abierto. Además, mientras se conocen algunas soluciones exactas especiales de (5.3), en general se requiere de la aproximación numérica para obtener información cuantitativa acerca de soluciones.

Finalmente, comentamos que se supone que las soluciones son continuamente diferenciables en todas las variables tantas veces que se necesita.

5.1.6. Mapa de movimiento y otras condiciones de borde. Para problemas en los cuales el cuerpo fluido ocupa una región D completa, los campos velocidad del fluido y presión (\mathbf{v}, p) pueden ser determinados a partir de (5.3) independientemente del mapa del movimiento φ . En particular, φ no entra al problema porque la configuración actual del cuerpo es conocida para todo $t \geq 0$, esta configuración es $B_t = D$. Si así lo deseamos, podemos determinar φ a partir de \mathbf{v} utilizando las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in D, t \in [0, T], \quad (5.4)$$

$$\varphi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in D. \quad (5.5)$$

La ecuación (5.4) es la definición de la velocidad espacial a partir del mapa de movimiento (ver Capítulo 3) y (5.5) es una condición inicial que expresa el convenio de $B_0 = B$. Así, la solución de este sistema es la posición actual de la partícula material cuya posición inicial era $\mathbf{X} \in D$.

Típicamente se asocian dos familias de curvas diferentes para visualizar el movimiento de un cuerpo fluido. Como *línea de flujo* se entiende la trayectoria de una partícula individual del fluido para $t \geq 0$. En particular, las líneas de flujo son las curvas definidas por $\varphi(\mathbf{X}, t)$ con \mathbf{X} fijo. Las líneas de flujo proporcionan una imagen Lagrangiana del movimiento de un fluido. Por otro lado, una *línea de corriente* es una curva integral del campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ con t fijo. En particular, las líneas de corriente son las curvas solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{ds} \mathbf{y} = \mathbf{v}(\mathbf{y}(s), t).$$

Para cada $t \geq 0$ fijo, las líneas de corriente entregan un retrato del campo velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Mientras el conjunto de las líneas de corriente para un movimiento es, en general, diferente del conjunto de líneas de flujo, los dos conjuntos coinciden cuando la velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es independiente de t .

También se pueden considerar problemas en los cuales un cuerpo fluido no ocupa una región espacial fija. Por ejemplo, un fluido (líquido) en un contenedor abierto expuesto a su ambiente no ocupará, en general, una región espacial fija sino que desarrollará ondas sobre su superficie expuesta. Para tales problemas en general no se puede determinar (\mathbf{v}, p) en forma independiente de φ . En particular, φ se convierte en una incógnita adicional requerida para describir la forma de la superficie expuesta, y (5.4) sería incluida como ecuación adicional. Además, típicamente se impondría una condición de frontera para la presión (tracción) en la superficie expuesta.

La condición de frontera $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ es adecuada para describir la interfaz entre un fluido ideal y un sólido fijo e impermeable. Si el sólido no fuera fijo, pero sujeto a un campo de velocidad dado ϑ , entonces la condición de borde apropiada sería $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \vartheta \cdot \mathbf{n}$.

5.1.7. Movimiento irrotacional y Teorema de Bernoulli. En lo siguiente introduciremos el concepto de un movimiento irrotacional y estudiaremos las propiedades de tales movimientos. Demostraremos que los campos velocidad espacial y presión en un movimiento irrotacional satisfacen un sistema de ecuaciones mucho más simple que (5.3)

Definición 5.2 (Movimiento irrotacional). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con el campo velocidad espacial \mathbf{v} y el campo tasa de rotación $\mathbf{W} = \text{skew}(\nabla^x \mathbf{v})$. Entonces se dice que φ es irrotacional si*

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{O} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0,$$

o equivalentemente,

$$(\nabla^x \times \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0, \quad (5.6)$$

donde $\nabla^x \times \mathbf{v}$ es la vorticidad.

Así, se dice que un movimiento es irrotacional si el campo espacial de vorticidad es idénticamente cero. En virtud del Teorema de Stokes (Teorema 1.7), un movimiento irrotacional debe ser interpretado como un movimiento en el cual las partículas materiales no experimentan rotación neta. En particular, la circulación de material alrededor del borde de una superficie espacial arbitraria abierta (por ejemplo, un disco) debe anularse. Interpretaciones similares de movimientos irrotacionales pueden ser desprendidas de las propiedades del tensor tasa de rotación descritas en la Sección 3.5.2.

El siguiente resultado es un resultado clásico del análisis vectorial. Se omite la demostración.

Lema 5.1 (Potencial de velocidad para un movimiento irrotacional). *Sea B_t simplemente conexo para todo $t \geq 0$. Entonces un campo vectorial suave \mathbf{v} satisface (5.6) si y sólo si existe un campo espacial ϕ , llamado potencial para \mathbf{v} , tal que*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla^x \phi(\mathbf{x}, t) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

Comentamos que un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{E}^3$ se llama *conexo* si cualquier par de puntos en Ω puede ser conectado por una curva en Ω . Si además cualquier curva cerrada en Ω puede ser deformada continuamente a un punto sin salir de Ω , entonces Ω se llama *simplemente conexo*.

Por otro lado, cualquier campo vectorial cuyo rotacional se anula idénticamente como en (5.6) se dice *irrotacional*. En este sentido, el campo espacial velocidad de un movimiento irrotacional es irrotacional.

Lema 5.2 (Campo aceleración para un movimiento irrotacional). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo continuo con los campos espaciales velocidad \mathbf{v} y tasa de rotación \mathbf{W} . Entonces se tiene que*

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2) + 2\mathbf{W}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2) + (\nabla^x \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (5.7)$$

Así, para un movimiento irrotacional se tiene que

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2). \quad (5.8)$$

Demostración. De acuerdo al Lema 3.6 el campo espacial aceleración viene dado por

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v}, \quad (5.9)$$

y por definición de \mathbf{W} se tiene que

$$2\mathbf{W}\mathbf{v} = (\nabla^x \mathbf{v} - (\nabla^x \mathbf{v})^T) \mathbf{v}.$$

Utilizando que

$$(\nabla^x \mathbf{v})^T \mathbf{v} = v_{i,j} v_i \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} (v_i v_i)_{,j} \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2),$$

llegamos a

$$2\mathbf{W}\mathbf{v} = (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2). \quad (5.10)$$

Despejando $(\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v}$ a partir de (5.10) e insertando el resultado en (5.9) entrega la primera identidad en (5.7). La segunda sigue de la definición de $\nabla^x \times \mathbf{v}$ (Definición 1.8), y el resultado (5.8) es una consecuencia de la definición de un movimiento irrotacional. ■

No todos los movimientos de un fluido ideal son irrotacionales. No obstante el siguiente resultado demuestra que cualquier movimiento que comienza a partir de una velocidad inicial apropiada, por ejemplo una velocidad uniforme, será irrotacional para todos los tiempos siempre que la fuerza de cuerpo por masa unitaria sea conservativa. Aquí recordamos que un campo de fuerza espacial \mathbf{b} se llama *conservativo* si existe un campo espacial escalar β tal que

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = -\nabla^x \beta(\mathbf{x}, t).$$

Lema 5.3 (Criterio para el movimiento irrotacional de un fluido ideal). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo de fluido ideal con el campo espacial velocidad \mathbf{v} y la densidad de masa constante ρ_0 . Sea el cuerpo sujeto a una fuerza de cuerpo por masa unitaria conservativa $\mathbf{b} = -\nabla^x \beta$. Si \mathbf{v} es irrotacional en $t = 0$, entonces \mathbf{v} es irrotacional para todos los tiempos $t \geq 0$.*

Demostración. Sea $\mathbf{w} = \nabla^x \times \mathbf{v}$. Entonces, tomando el rotacional de (5.2a) y utilizando la segunda identidad de (5.7) y el hecho de que el rotacional de un gradiente se anula, obtenemos que \mathbf{w} satisface

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla^x \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \right) (\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Además, por las hipótesis respecto de \mathbf{v} tenemos la condición inicial

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}.$$

Ahora, desarrollando las operaciones del rotacional en (5.11) y dividiendo por la constante $\rho_0 > 0$ obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\nabla^x \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{w} + \mathbf{w}(\nabla^x \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla^x \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{0}.$$

Como $\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0$ (porque el flujo es incompresible) y $\nabla^x \cdot \mathbf{w} = 0$ (la divergencia de un rotacional siempre se anula), se tiene que

$$\dot{\mathbf{w}} - (\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Ahora demostraremos que $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ es la solución única de (5.12) bajo la condición inicial $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$. En lugar de utilizar la teoría general de ecuaciones diferenciales parciales demostraremos este resultado mediante un cálculo directo utilizando un cambio de variable conveniente. Para tal efecto sea $\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, t)$ la descripción material de $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, es decir $\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, t) = \mathbf{w}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)$, y sea $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t)$ el campo material definido por

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{w}_m \iff \mathbf{w}_m = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}. \quad (5.13)$$

La segunda de estas identidades implica que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_m = \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}\right)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{F}\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\xi}\right),$$

y despejando $\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t$ de esta ecuación y sustituyendo $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{w}_m$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_m - \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}\right)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{w}_m\right]. \quad (5.14)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}_m = (\dot{\mathbf{w}})_m, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}\right)\mathbf{F}^{-1} = (\nabla^x \mathbf{v})_m,$$

en virtud de (5.12) se anula el lado derecho de (5.14). Así, $\boldsymbol{\xi}$ satisface la ecuación simple

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}.$$

Esto significa que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, 0)$ para todo $t \geq 0$ y $\mathbf{X} \in B$. Además, como $\mathbf{F}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{I}$, se tiene que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{w}_m(\mathbf{X}, 0)$. Combinando estos resultados con la segunda identidad de (5.13) obtenemos

$$\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, 0).$$

Así, si un movimiento es irrotacional inicialmente en el sentido de que $\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{X} \in B$, entonces permanece irrotacional para siempre en el sentido de que $\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$ y $\mathbf{X} \in B$. ■

El siguiente resultado muestra que la ecuación de balance del momento lineal para un fluido ideal puede ser reducida a una forma particularmente simple si el movimiento es irrotacional.

Teorema 5.1 (Teorema de Bernoulli para fluidos ideales). *Sea $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un fluido ideal (con densidad de masa constante ρ_0). Sea para todo $t \geq 0$ el movimiento irrotacional con la velocidad espacial $\mathbf{v} = \nabla^x \phi$, y sea el cuerpo sujeto a una fuerza de cuerpo por masa unitaria $\mathbf{b} = -\nabla^x \beta$. Entonces la ecuación de balance del momento lineal implica que*

$$\nabla^x \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho_0} + \beta \right) = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\varrho_0} + \beta = f \quad (5.16)$$

para alguna función $f = f(t)$ que depende del movimiento.

Demostración. En virtud del Lema 5.2 y de las hipótesis $\mathbf{v} = \nabla^x \phi$ y $\mathbf{b} = -\nabla^x \beta$, el balance de momento lineal (5.2a) puede ser escrito como

$$\varrho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^x \phi) + \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2) \right) = -\nabla^x p - \varrho_0 \nabla^x \beta.$$

El resultado en (5.15) es una consecuencia del hecho de que los operadores $\partial/\partial t$ y ∇^x conmutan. El resultado (5.16) es una consecuencia de la definición de ∇^x . ■

El Teorema 5.1 implica que los campos espaciales velocidad \mathbf{v} y presión p en un movimiento irrotacional de un fluido ideal pueden ser determinados a partir de un sistema que es mucho más simple que las ecuaciones (5.3). En particular, supongamos que el cuerpo ocupa una región espacial fija D y consideremos la representación $\mathbf{v} = \nabla^x \phi$ garantizada por el Lema 5.1. Entonces (5.3b) y (5.3c) implican que ϕ debe satisfacer la ecuación

$$\Delta^x \phi = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D, t \geq 0 \quad (5.17)$$

y la condición de borde

$$\nabla^x \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial D, t \geq 0. \quad (5.18)$$

A partir de (5.3a) encontramos que p debe satisfacer (5.16) para todo $\mathbf{x} \in D$ y $t \geq 0$. La condición inicial (5.3d) no puede ser dada arbitrariamente. Debe ser compatible con el movimiento irrotacional determinado por (5.17) y (5.18).

Comentamos que el sistema (5.17), (5.18) forma un problema de valores de frontera lineal para el campo escalar ϕ . Este sistema puede determinar ϕ sólo hasta una función del tiempo aditiva, la cual no afecta el campo velocidad \mathbf{v} ya que $\mathbf{v} = \nabla^x \phi$. La ecuación (5.17) se llama *ecuación de Laplace* para ϕ .

Si D es acotado, el sistema (5.17), (5.18) admite sólo la solución trivial $\phi = 0$ hasta una función del tiempo aditiva, lo cual implica que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Así, el único movimiento irrotacional de un fluido ideal en un dominio acotado es el movimiento trivial. Por otro lado, si D no es acotado, el sistema (5.17), (5.18) típicamente es aumentado por condiciones de borde en el infinito, por ejemplo condiciones de flujo uniforme y de decaimiento, las cuales dan origen a campos únicos y no triviales ϕ y \mathbf{v} . Notar que estos campos pueden depender del tiempo mediante las condiciones de borde.

Comentamos, además, que el campo presión p correspondiente a un campo velocidad \mathbf{v} puede ser determinado a partir de (5.16) hasta una función incógnita $f(t)$. Esta función puede ser determinada si el valor de p es conocido en algún punto de referencia \mathbf{x}_* para todo $t \geq 0$. Así, la diferencia $p(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}_*, t)$ puede ser determinada para todo $\mathbf{x} \in D$ y $t \geq 0$.

Finalmente mencionamos que cualquier campo espacial que es independiente de t se llama *estacionario*. En el caso que todos los campos son estacionarios, la diferencia de presión

$p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}_*)$ queda dada por la relación simple

$$p - p_* = \frac{1}{2}\varrho_0(|\mathbf{v}_*|^2 - |\mathbf{v}|^2) + \varrho_0(\beta_* - \beta),$$

donde p_* , \mathbf{v}_* y β_* denotan los valores en \mathbf{x}_* .

5.2. Fluidos elásticos

En esta sección estudiaremos el model constitutivo de un fluido elástico, que es un modelo simple de un fluido compresible isotérmico. Demostraremos que el modelo es indiferente respecto del marco y que satisface la desigualdad de energía mecánica, luego discutiremos un problema de valores iniciales y de frontera estándar. Haremos comentarios acerca de movimientos irrotacionales y demostraremos una versión generalizada del Teorema 5.1. Terminaremos con la derivación de las ecuaciones de movimiento linealizadas para perturbaciones pequeñas.

5.2.1. Definición.

Definición 5.3 (Fluido elástico). *Se dice que un cuerpo continuo con la configuración de referencia B es un fluido elástico si:*

- 1.) *El campo tensión de Cauchy es esférico o Euleriano (ver Sección 2.5), lo que significa que existe un campo escalar $p(\mathbf{x}, t)$, llamado la presión tal que*

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}.$$

- 2.) *El campo presión $p(\mathbf{x}, t)$ es relacionado con el campo espacial densidad de masa $\varrho(\mathbf{x}, t)$ mediante la siguiente ecuación, llamada ecuación de estado:*

$$p(\mathbf{x}, t) = \pi(\varrho(\mathbf{x}, t)),$$

donde $\pi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada con $\pi'(s) > 0$ para todo $s > 0$.

Las Propiedades (1) y (2) implican que el campo tensión de Cauchy en un fluido elástico es enteramente determinado por la densidad de masa espacial. La Propiedad (1) también implica que el campo tensión necesariamente es simétrico. Así la ecuación de balance del momento lineal (Lema 4.4) está satisfecha automáticamente y ya no será considerada a continuación. La hipótesis acerca de π' en la relación (2) implica que bajo condiciones isotérmicas, la presión incrementa con la densidad. Esta hipótesis es físicamente razonable en muchas circunstancias. Veremos más adelante que esta hipótesis genera un concepto de una velocidad de sonido bien definida.

5.2.2. Las ecuaciones de un fluido elástico. Insertando $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$ en la ecuación de balance de momento lineal (Lema 4.3) y la ecuación de conservación de masa (Lema 4.1) obtenemos un sistema cerrado de ecuaciones para los campos espaciales de velocidad y de presión en un cuerpo de fluido elástico. En particular se tiene que

$$\varrho\dot{\mathbf{v}} = \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (-p\mathbf{I}) + \varrho\mathbf{b}, \quad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\varrho\mathbf{v}) = 0,$$

donde $p = \pi(\varrho)$ y $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es una fuerza de cuerpo por masa unitaria espacial dada.

En virtud del Lema 3.6 se tiene que

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v}.$$

Además es fácil verificar que

$$\nabla^{\mathbf{x}} \cdot (-p \mathbf{I}) = -\nabla^{\mathbf{x}} p = -\nabla^{\mathbf{x}} (\pi(\varrho)) = -\pi'(\varrho) \nabla^{\mathbf{x}} \varrho.$$

Así, los campos espaciales de velocidad y de presión en un cuerpo de fluido elástico con la configuración referencial B deben satisfacer las siguientes ecuaciones para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$:

$$\varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\pi'(\varrho) \nabla^{\mathbf{x}} \varrho + \varrho \mathbf{b}, \quad (5.19a)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.19b)$$

Estas ecuaciones son conocidas como *ecuaciones de un fluido elástico*.

Al contrario de un fluido ideal, un fluido elástico es compresible. Puede experimentar cambios de volumen y su densidad de masa espacial no necesariamente es constante. Como no hay restricción de incompresibilidad, el campo presión p en un fluido elástico *no* es una incógnita adicional, sino que queda determinado completamente por la densidad de masa ϱ .

Comentamos además que tal como para un fluido ideal, no existen tensiones de cizalla. En particular, como el campo tensión de Cauchy es esférico, la tracción \mathbf{t} sobre una superficie con vector normal \mathbf{n} es, a su vez, normal respecto de la superficie ya que $\mathbf{t} = \mathbf{S} \mathbf{n} = -p \mathbf{n}$ (ver Sección 2.5).

5.2.3. Consideraciones de indiferencia respecto del marco. Un modelo de fluido elástico es definido por la ecuación constitutiva

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -\pi(\varrho(\mathbf{x}, t)) \mathbf{I}, \quad (5.20)$$

donde π es una función dada y ϱ es la densidad de masa espacial. Para que el modelo sea consistente con el axioma de indiferencia respecto del marco (Axioma 4.5) debe proporcionar un campo tensión que a su vez es indiferente respecto del marco en el sentido de la Definición 4.3. Para verificar que esto es válido aquí, sean B_t y B_t^* dos configuraciones de un cuerpo de fluido elástico relacionadas por un movimiento rígido superpuesto

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{c}(t),$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ es un tensor de rotación arbitrario y $\mathbf{c}(t)$ es un vector arbitrario. Sea $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ el campo tensión asociado a B_t , y sea $\mathbf{S}^*(\mathbf{x}^*, t)$ el campo tensión asociado a B_t^* . Recordamos que en virtud del Axioma 4.5 se tiene que $\varrho^*(\mathbf{x}^*, t) = \varrho(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$. Utilizando (5.20) obtenemos

$$\mathbf{S}^* = -\pi(\varrho^*) \mathbf{I} = \mathbf{Q}(-\pi(\varrho) \mathbf{I}) \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{Q}^T.$$

Concluimos que el modelo material de un fluido elástico es independiente del marco.

5.2.4. Consideraciones de energía mecánica. Aquí suponemos que un modelo isotérmico de un fluido elástico es energéticamente pasivo (de acuerdo a lo discutido en la Sección 4.7), y demostramos que está satisfecha la desigualdad de energía mecánica (Lema 4.17) para cualquier relación constitutiva del tipo $p = \pi(\varrho)$.

Como $\mathbf{S} = -\pi(\varrho)\mathbf{I}$ y $\mathbf{L} = \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v})$, para cualquier movimiento de un fluido elástico se tiene que

$$\mathbf{S} : \mathbf{L} = -\pi(\varrho)\mathbf{I} : \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v}),$$

y siguiendo los mismos argumentos que en el caso de un fluido ideal (Sección 5.1.4) obtenemos que

$$\mathbf{S} : \mathbf{L} = -\pi(\varrho) \text{tr}(\nabla^x \mathbf{v}) = -\pi(\varrho) \nabla^x \cdot \mathbf{v} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

En forma material,

$$\mathbf{S}_m : \mathbf{L}_m = -\pi(\varrho_m)(\nabla^x \cdot \mathbf{v})_m \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Como en virtud del Lema 3.8 se tiene que

$$(\nabla^x \cdot \mathbf{v})_m \det \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathbf{F}),$$

y en virtud del Lema 4.9, $\varrho_m = \varrho_0 / \det \mathbf{F}$, concluimos que

$$(\det \mathbf{F})\mathbf{S}_m : \mathbf{L}_m = -\pi\left(\frac{\varrho_0}{\det \mathbf{F}}\right) \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathbf{F}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0. \quad (5.21)$$

Sea $g(\mathbf{X}, s)$, $s > 0$, cualquier función definida por

$$g'(\mathbf{X}, s) = -\pi\left(\frac{\varrho_0(\mathbf{X})}{s}\right), \quad \cdot' \equiv \frac{\partial \cdot}{\partial s}.$$

Entonces, mediante la regla de la cadena podemos escribir (5.21) como

$$(\det \mathbf{F})\mathbf{S}_m : \mathbf{L}_m = g'(\mathbf{X}, \det \mathbf{F}) \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{X}, \det \mathbf{F}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0.$$

Para cualquier intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ este resultado implica que

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) : \mathbf{L}_m(\mathbf{X}, t) dt \\ &= g(\mathbf{X}, \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t_1)) - g(\mathbf{X}, \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t_0)) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para cualquier proceso isotérmico cerrado en $[t_0, t_1]$ se tiene que $\varphi(\mathbf{X}, t_1) = \varphi(\mathbf{X}, t_0)$ para todo $\mathbf{X} \in B$, lo que implica que $\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t_1) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t_0)$ para todo $\mathbf{X} \in B$. Así, el lado derecho de (5.22) se anula. Esto demuestra que el modelo del fluido elástico es consistente con la desigualdad de energía mecánica para cualquier relación constitutiva $p = \pi(\varrho)$.

5.2.5. Problemas de valores iniciales y de frontera. Un *problema de valores iniciales y de frontera* para un cuerpo de fluido elástico es un conjunto de ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo sujeto a condiciones iniciales especificadas en B en el instante $t = 0$, y a condiciones de frontera sobre ∂B_t para $t \geq 0$. Tal como para un fluido ideal, la forma Euleriana de las leyes de balance para un fluido ideal es particularmente apta para aquellos problemas en los cuales el cuerpo ocupa una región fija D en el espacio. En este caso el campo espacial velocidad \mathbf{v} y el campo espacial densidad de masa ϱ pueden ser determinados independientemente del movimiento φ . Típicamente se supone que D es un conjunto acotado y abierto. Sin embargo, en algunas aplicaciones también es útil considerar conjuntos abiertos no acotados tales como regiones exteriores a un conjunto acotado y cerrado, o bien la totalidad del espacio Euclidiano.

Un problema de valores iniciales y de frontera estándar para un cuerpo de fluido elástico ocupando una región fija D puede ser formulado como sigue: hallar $\mathbf{v} : D \times [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ y $\varrho : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = -\pi'(\varrho) \nabla^x \varrho + \varrho \mathbf{b} \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.23a)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla^x \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.23b)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial D \times [0, T], \quad (5.23c)$$

$$\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0(\cdot) \quad \text{en } D, \quad (5.23d)$$

$$\varrho(\cdot, 0) = \varrho_0(\cdot) \quad \text{en } D. \quad (5.23e)$$

En este sistema, π es una función dada y \mathbf{b} es una fuerza de cuerpo por masa unitaria espacial dada. La ecuación (5.23a) es el balance de momento lineal y (5.23b) es la ecuación conservación de masa. La ecuación (5.23c) es una condición de borde que expresa que el fluido no puede atravesar la frontera ∂D de D , y (5.23d) y (5.23e) son condiciones iniciales para los campos espaciales velocidad \mathbf{v} y densidad de masa ϱ , respectivamente. Aquí \mathbf{v}_0 es un campo dado que corresponde a la velocidad del fluido en el instante $t = 0$. El campo especificado \mathbf{v}_0 debe ser compatible con la condición de frontera en el sentido de que $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre ∂D .

Comentamos que el sistema en (5.23) es un problema de valores iniciales y de frontera no lineal para los campos (\mathbf{v}, ϱ) . Podemos esperar que este sistema posee una solución sobre un intervalo de tiempo finito $[0, T]$ siempre que la región D sea suficientemente regular, y que \mathbf{v}_0 y ϱ_0 satisfagan ciertas condiciones leves.

En algunas aplicaciones las soluciones de (5.23) no son suaves debido a la aparición de *ondas de choque*. Estas son superficies a través de las cuales una o varias componentes de la solución posee una discontinuidad de salto. Un análisis adecuado de tales soluciones requiere la introducción de una forma débil adecuada de las leyes de balance. Sin embargo aquí se supone que las soluciones son continuamente diferenciables en todas las variables tantas veces que se necesita para realizar el cálculo.

La condición de frontera $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ es adecuada para describir la interfaz entre un fluido elástico y un sólido fijo e impermeable. Si el sólido no fuera fijo, pero sujeto a un campo de velocidad dado ϑ , entonces la condición de borde apropiada sería $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \vartheta \cdot \mathbf{n}$.

5.2.6. Movimiento irrotacional y Teorema de Bernoulli Generalizado. Aquí nos concentraremos en movimientos irrotacionales y demostraremos una versión generalizada del Teorema de Bernoulli (Teorema 5.1) para fluidos elásticos. Demostraremos que los campos espaciales velocidad y densidad en un movimiento irrotacional de un fluido elástico satisfacen un sistema de ecuaciones más simple que (5.23).

Sea ahora la función $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(s) = \int_a^s \frac{\pi'(\xi)}{\xi} d\xi,$$

donde $a > 0$ es una constante arbitraria que no importa para nuestro análisis. Esta definición significa que

$$\gamma'(s) = \frac{\pi'(s)}{s} \quad \text{para todo } s > 0, \quad (5.24)$$

y en virtud de la hipótesis $\pi'(s) > 0$ notamos que $\gamma'(s) > 0$ para todo $s > 0$, por lo tanto γ posee una inversa denotada por ζ . En particular,

$$\zeta(\gamma(s)) = s \quad \text{para todo } s > 0.$$

El siguiente resultado demuestra que tal como para un fluido ideal, cualquier movimiento de un fluido elástico que comienza a partir de una velocidad inicial apropiada, por ejemplo una velocidad uniforme, será irrotacional para todos los tiempos siempre que la fuerza de cuerpo por masa unitaria sea conservativa.

Lema 5.4 (Criterio para el movimiento irrotacional de un fluido elástico). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo de fluido elástico con los campos espaciales velocidad \mathbf{v} y densidad de masa ρ . Sea el cuerpo sujeto a una fuerza de cuerpo por masa unitaria conservativa $\mathbf{b} = -\nabla^x \beta$. Si \mathbf{v} es irrotacional en $t = 0$, entonces \mathbf{v} es irrotacional para todos los tiempos $t \geq 0$.*

Demostración. Partiendo (5.19a) por $\rho > 0$ obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{\pi'(\rho)}{\rho} \nabla^x \rho + \mathbf{b},$$

y utilizando (5.24) y la hipótesis $\mathbf{b} = -\nabla^x \beta$ obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla^x \gamma(\rho) - \nabla^x \beta. \quad (5.25)$$

Sea ahora $\mathbf{w} = \nabla^x \times \mathbf{v}$. Entonces, tomando el rotacional de (5.25) y utilizando el Lema 5.2 y el hecho de que el rotacional de un gradiente se anula, obtenemos que \mathbf{w} satisface

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla^x \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Además, por las hipótesis respecto de \mathbf{v} tenemos la condición inicial

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}.$$

Ahora, desarrollando las operaciones del rotacional en (5.26) obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\nabla^x \mathbf{w})\mathbf{v} - (\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{w} + \mathbf{w}(\nabla^x \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla^x \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{0}.$$

Como $\nabla^x \cdot \mathbf{w} = 0$ (la divergencia de un rotacional siempre se anula), se tiene que

$$\dot{\mathbf{w}} - (\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{w} + (\nabla^x \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Sea ahora el campo material $\boldsymbol{\xi}$ definido como en la demostración del Lema 5.3. Entonces $\boldsymbol{\xi}$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -(\nabla^x \cdot \mathbf{v})_m \boldsymbol{\xi}.$$

Para cada $\mathbf{X} \in B$ ésta es una ecuación diferencial ordinaria lineal y no autónoma para $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t)$. Como $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$ es la única solución con la condición inicial $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0}$ concluimos que $\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$ y $\mathbf{X} \in B$ siempre que $\mathbf{w}_m(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{X} \in B$, lo cual es el resultado deseado. ■

El siguiente resultado muestra que tal como para un fluido ideal, la ecuación de balance del momento lineal para un fluido elástico puede ser reducida a una forma particularmente simple si el movimiento es irrotacional.

Teorema 5.2 (Teorema de Bernoulli para fluidos elásticos). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un fluido elástico con el campo densidad de masa ϱ . Sea para todo $t \geq 0$ el movimiento irrotacional con la velocidad espacial $\mathbf{v} = \nabla^x \phi$, y sea el cuerpo sujeto a una fuerza de cuerpo por masa unitaria $\mathbf{b} = -\nabla^x \beta$. Entonces la ecuación de balance del momento lineal implica que*

$$\nabla^x \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \gamma(\varrho) + \beta \right) = \mathbf{0}, \quad (5.27)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \gamma(\varrho) + \beta = f \quad (5.28)$$

para alguna función $f = f(t)$ que depende del movimiento.

Demostración. En virtud del Lema 5.2 y de las hipótesis $\mathbf{v} = \nabla^x \phi$ y $\mathbf{b} = -\nabla^x \beta$, el balance de momento lineal (5.19a) puede ser escrito como

$$\varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^x \phi) + \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2) \right) = -\pi'(\varrho) \nabla^x \varrho - \varrho \nabla^x \beta.$$

Partiendo por $\varrho > 0$ y utilizando la definición de la función γ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^x \phi) + \frac{1}{2} \nabla^x (|\mathbf{v}|^2) = -\gamma'(\varrho) \nabla^x \varrho - \nabla^x \beta.$$

El resultado en (5.27) es una consecuencia de la identidad $\gamma'(\varrho) \nabla^x \varrho = \nabla^x \gamma(\varrho)$ y del hecho de que los operadores $\partial/\partial t$ y ∇^x conmutan. El resultado (5.28) es una consecuencia de la definición de ∇^x . ■

El Teorema 5.2 implica que los campos espaciales velocidad \mathbf{v} y densidad ϱ en un movimiento irrotacional de un fluido elástico pueden ser determinados a partir de un sistema que es mucho más simple que las ecuaciones (5.23). En particular, supongamos que el cuerpo

ocupa una región espacial fija D y consideremos la representación $\mathbf{v} = \nabla^{\mathbf{x}}\phi$ garantizada por el Lema 5.1. Entonces (5.23b) y (5.23c) implican que ϕ y ϱ deben satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\varrho \nabla^{\mathbf{x}} \phi) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D, t \geq 0 \quad (5.29)$$

y la condición de borde

$$\nabla^{\mathbf{x}} \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial D, t \geq 0. \quad (5.30)$$

A partir de (5.23a) encontramos que ϱ debe satisfacer (5.28) para todo $\mathbf{x} \in D$ y $t \geq 0$. En particular, utilizando la función inversa ζ , podemos despejar ϱ a partir de (5.28) para obtener

$$\varrho = \zeta(\gamma(\varrho)) = \zeta \left(f - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla^{\mathbf{x}} \phi|^2 - \beta \right). \quad (5.31)$$

Las condiciones iniciales (5.23d) y (5.23e) no pueden ser especificadas en forma arbitraria cuando se está buscando este tipo de solución. Estas condiciones deben ser compatibles con el movimiento irrotacional determinado por (5.29), (5.30) y (5.31).

Comentamos que si ϱ es eliminado utilizando (5.31), el sistema (5.29), (5.30) forma un problema de valores iniciales y de frontera para el campo escalar ϕ . Este sistema es evidentemente más complicado que el sistema correspondiente para un fluido ideal (5.17), (5.18). Los problemas de existencia y unicidad de soluciones para tales sistemas son, en general, muy difíciles.

En el caso que todos los campos son estacionarios, la ecuación para ϕ (5.29) se reduce a

$$\nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\varrho \nabla^{\mathbf{x}} \phi) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D, \quad (5.32)$$

y la ecuación para ϱ , (5.31), se reduce a

$$\varrho = \zeta \left(f - \frac{1}{2} |\nabla^{\mathbf{x}} \phi|^2 - \beta \right), \quad (5.33)$$

donde f es una constante determinada por el movimiento. En particular, si los valores de ϱ y \mathbf{v} son conocidos en un punto de referencia \mathbf{x}_* , entonces de (5.28) se desprende que

$$f = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_*|^2 + \gamma(\varrho_*) + \beta_*,$$

donde \mathbf{v}_* , ϱ_* y β_* denotan los valores en \mathbf{x}_* . Así, en el caso estacionario obtenemos un problema de valores de frontera no lineal para el campo ϕ definido por (5.32), (5.33) y (5.30).

5.2.7. Linealización. Consideremos un cuerpo de fluido elástico ocupando una región fija D . Supongamos que el fluido está inicialmente sin movimiento, que la densidad de masa es inicialmente uniforme, y que no hay fuerzas de cuerpo de manera que

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \varrho_0(\mathbf{x}) = \varrho^* > 0, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}.$$

Bajo estas hipótesis las ecuaciones (5.23) poseen la solución uniforme única

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho^* \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Tal solución se llama *estado de reposo*.

Supongamos que ahora se considera el problema de valores iniciales y de frontera (5.23) con datos iniciales cercanos a un estado de reposo en el sentido de que

$$|\mathbf{v}_0(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad |\varrho_0(\mathbf{x}) - \varrho^*| = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

donde $0 \leq \varepsilon \ll 1$ es un parámetro pequeño. Supongamos, además, que la frontera de D ahora vibra con una velocidad normal $\vartheta = \mathcal{O}(\varepsilon)$, de manera que la condición de borde en (5.23) se convierte en

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \vartheta = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

En este caso es razonable esperar que las soluciones de (5.23), a su vez, difieren sólo levemente de un estado de reposo en el sentido de que

$$|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)| = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad |\varrho(\mathbf{x}, t) - \varrho^*| = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

Ahora queremos desarrollar un conjunto de ecuaciones simplificadas que describen tales movimientos. Para tal efecto notamos primero que si las condiciones iniciales y de frontera en (5.23) dependen de un parámetro pequeño ε de acuerdo a lo discutido arriba, los campos velocidad y densidad en el interior del cuerpo, a su vez, también dependerán de ε . Esta dependencia se expresa escribiendo \mathbf{v}^ε y ϱ^ε . Expandiendo \mathbf{v}^ε y ϱ^ε en una serie de potencia respecto a ε obtenemos

$$\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{0} + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{v}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (5.34a)$$

$$\varrho^\varepsilon = \varrho^* + \varepsilon \varrho^{(1)} + \varepsilon^2 \varrho^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (5.34b)$$

donde $\mathbf{v}^{(k)}$ y $\varrho^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) son campos incógnitos. Como \mathbf{v}^ε y ϱ^ε deben satisfacer las ecuaciones de balance (5.23a) y (5.23b), se tiene que

$$\varrho^\varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} + (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}^\varepsilon) \mathbf{v}^\varepsilon \right) = -\pi'(\varrho^\varepsilon) \nabla^{\mathbf{x}} \varrho^\varepsilon, \quad (5.35a)$$

$$\frac{\partial \varrho^\varepsilon}{\partial t} + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot (\varrho^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon) = 0. \quad (5.35b)$$

Insertando (5.34) en (5.35a) obtenemos

$$\begin{aligned} & (\varrho^* + \varepsilon \varrho^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{v}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) + \left(\nabla^{\mathbf{x}} (\varepsilon \mathbf{v}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right) (\varepsilon \mathbf{v}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right] \\ & = -\pi'(\varrho^* + \mathcal{O}(\varepsilon)) \nabla^{\mathbf{x}} (\varrho^* + \varepsilon \varrho^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), \end{aligned} \quad (5.36)$$

y sustituyendo (5.34) en (5.35b) llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho^* + \varepsilon \varrho^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) + \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \left((\varrho^* + \varepsilon \varrho^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) (\varepsilon \mathbf{v}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right) = 0. \quad (5.37)$$

Expansiones similares son válidas para las condiciones iniciales y de frontera (5.23c)–(5.23e). Suponiendo que estas expansiones y (5.36), (5.37) son válidas para cada potencia de ε , y utilizando que

$$\pi'(\varrho^* + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \pi'(\varrho^*) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

podemos juntar los términos que involucran la primer potencia de ε para obtener el siguiente problema: hallar $\mathbf{v}^{(1)} : D \times [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ y $\varrho^{(1)} : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\pi'(\varrho^*)}{\varrho^*} \nabla^{\mathbf{x}} \varrho^{(1)} = \mathbf{0} \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.38a)$$

$$\frac{\partial \varrho^{(1)}}{\partial t} + \varrho^* \nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0 \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.38b)$$

$$\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \theta \quad \text{en } \partial D \times [0, T], \quad (5.38c)$$

$$\mathbf{v}^{(1)}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0^{(1)} \quad \text{en } D, \quad (5.38d)$$

$$\varrho^{(1)}(\cdot, 0) = \varrho_0^{(1)}(\cdot) \quad \text{en } D. \quad (5.38e)$$

Típicamente las ecuaciones (5.38) se llaman *ecuaciones acústicas*. Estas ecuaciones son un sistema aproximado de las ecuaciones de balance apropiado para desviaciones pequeñas del estado de reposo de un fluido elástico.

Comentamos que el sistema (5.38) es un problema de valores iniciales y de frontera lineal para los campos de perturbación $(\mathbf{v}^{(1)}, \varrho^{(1)})$. Esperamos que este sistema tenga una solución única sobre todo intervalo de tiempo dado $[0, T]$ con supuestos leves para D , \mathbf{v}_0 y ϱ_0 .

Eliminando el campo velocidad entre (5.38a) y (5.38b) obtenemos que el campo perturbación de densidad $\varrho^{(1)}$ satisface

$$\frac{\partial^2 \varrho^{(1)}}{\partial t^2} = \pi'(\varrho^*) \Delta^{\mathbf{x}} \varrho^{(1)}, \quad (5.39)$$

ecuación conocida como *ecuación de la onda*.

Finalmente mencionamos que la condición $\pi' > 0$ garantiza que las soluciones de (5.39) son de onda para cualquier $\varrho^* > 0$. Al respecto, la cantidad $\sqrt{\pi'(\varrho)}$ corresponde a la velocidad de la onda. Normalmente se llama *velocidad del sonido* del cuerpo a densidad ϱ^* .

5.3. Fluidos Newtonianos

En esta sección estudiaremos el modelo constitutivo de un fluido incompresible Newtoniano (viscoso). Demostraremos que el modelo es indiferente respecto del marco y que satisface la desigualdad de energía mecánica, luego discutiremos un problema de valores iniciales y de frontera estándar.

5.3.1. Definición.

Definición 5.4 (Fluido Newtoniano incompresible). *Se dice que un cuerpo continuo con la configuración de referencia B es un fluido Newtoniano incompresible si*

- 1.) *El campo referencial densidad de masa $\varrho_0(\mathbf{X})$ es uniforme en el sentido de que $\varrho_0(\mathbf{X}) = \varrho_0 > 0$ (constante).*
- 2.) *El material es incompresible (ver Sección 4.6), lo que significa que el campo velocidad espacial debe satisfacer*

$$\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- 3.) *El campo tensión de Cauchy es Newtoniano, lo que significa que existen un campo escalar $p(\mathbf{x}, t)$, llamado la presión, y un tensor de cuarto orden constante \mathbf{C} tales que*

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = -p\mathbf{I} + \mathbf{C}(\nabla^x \mathbf{v}),$$

donde $\nabla^x \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es el gradiente de velocidad espacial. Se supone que el tensor de cuarto orden \mathbf{C} satisface la condición de simetría menor a izquierda (ver Sección 1.1.4.5), es decir

$$(\mathbf{C}(\mathbf{A}))^T = \mathbf{C}(\mathbf{A}) \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2, \quad (5.40)$$

y la condición de traza

$$\text{tr } \mathbf{C}(\mathbf{A}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2 \text{ con } \text{tr } \mathbf{A} = 0. \quad (5.41)$$

Tal como en el caso de un fluido ideal, las propiedades (1) y (2) y la conservación de masa (Lema 4.1) implican que la densidad de masa espacial es uniforme en el espacio y constante en el tiempo, en particular $\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_0 > 0$ para todo $\mathbf{x} \in B_t$, $t \geq 0$. En virtud de la discusión de la Sección 4.6, el campo presión en la propiedad (3) puede ser identificado como el multiplicador asociado a la restricción expresada en la propiedad (2). En particular, el campo tensión en un fluido Newtoniano tiene una parte activa y una parte reactiva. La parte reactiva $-p\mathbf{I}$ es determinada por la restricción de incompresibilidad, mientras que la parte activa $\mathbf{C}(\nabla^x \mathbf{v})$ es determinada por el gradiente espacial de velocidad.

La condición (5.40) en la propiedad (3) implica, además, que el campo tensión necesariamente es simétrico. Así la ecuación de balance del momento angular (Lema 4.4) automáticamente está satisfecha y no será considerada más. La condición (5.41) implica que

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{S} \quad \text{cuando } \text{tr } \nabla^x \mathbf{v} = \nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Así el multiplicador p asociado con la restricción de incompresibilidad puede ser interpretado como la presión física. Como un resultado, $-p\mathbf{I}$ y $\mathbf{C}(\nabla^x \mathbf{v})$ corresponden a los tensores tensión esférico y desviador, respectivamente.

El axioma de indiferencia respecto del marco impone restricciones estrictas sobre la forma posible del tensor \mathbf{C} . En particular, en el Lema 5.5 más abajo demostraremos que \mathbf{C} debe tener la forma

$$\mathbf{C}(\nabla^x \mathbf{v}) = 2\mu \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v}),$$

donde μ es una constante llamada *viscosidad absoluta* del fluido. Argumentos basados en la desigualdad de energía mecánica implican que $\mu \geq 0$. El modelo del fluido Newtoniano incompresible se reduce al modelo del fluido ideal cuando $\mu = 0$.

5.3.2. Ecuaciones de Navier-Stokes. Insertando $\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_0$ y $\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v})$ en la ecuación de balance de momento lineal (Lema 4.3) y la ecuación de conservación de masa (Lema 4.1) obtenemos un sistema cerrado de ecuaciones para los campos espaciales de velocidad y de presión en un cuerpo de fluido Newtoniano. En particular se tiene que

$$\varrho_0 \dot{\mathbf{v}} = \nabla^x \cdot (-p\mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v})) + \varrho_0 \mathbf{b}, \quad \nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0,$$

donde $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ es una fuerza de cuerpo por masa unitaria espacial dada. Notar que la ecuación de conservación de masa se reduce a la restricción de incompresibilidad del campo espacial de velocidad.

En virtud del Lema 3.6 se tiene que

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Además, a partir de las respectivas definiciones de \mathbf{S} y $\text{sym}(\nabla^x \mathbf{v})$ es fácil verificar que

$$\nabla^x \cdot \mathbf{S} = -\nabla^x p + \mu \nabla^x \cdot (\nabla^x \mathbf{v}) + \mu \nabla^x \cdot (\nabla^x \mathbf{v})^T.$$

Utilizando la definición de la divergencia de un campo tensorial de segundo orden encontramos que $\nabla^x \cdot (\nabla^x \mathbf{v}) = \Delta^x \mathbf{v}$ y $\nabla^x \cdot (\nabla^x \mathbf{v})^T = \nabla^x (\nabla^x \cdot \mathbf{v})$. Estos resultados combinados con la condición $\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0$ implican que

$$\nabla^x \cdot \mathbf{S} = -\nabla^x p + \mu \Delta^x \mathbf{v}.$$

Así, los campos espaciales de velocidad y de presión en un cuerpo de fluido Newtoniano con la configuración referencial B deben satisfacer las siguientes ecuaciones para todo $\mathbf{x} \in B_t$ y $t \geq 0$:

$$\varrho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{v} \right) = \mu \Delta^x \mathbf{v} - \nabla^x p + \varrho_0 \mathbf{b}, \quad (5.42a)$$

$$\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.42b)$$

Estas ecuaciones son conocidas como *Ecuaciones de Navier-Stokes* para un fluido Newtoniano.

Comentamos que tal como para un fluido ideal, no existe una ecuación explícita que relacione la presión con la velocidad o la densidad en un fluido Newtoniano. Al contrario, la presión aparece como una incógnita fundamental que debe ser determinada simultáneamente con el campo velocidad. En particular, el campo presión es una incógnita fundamental que debe ser determinada simultáneamente con el campo velocidad.

Las ecuaciones (5.42) determinan la presión sólo hasta una función aditiva del tiempo, Esto es, si el par $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)$ satisface (5.42), entonces también lo hace $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t) + f(t)$ para cualquier función escalar $f(t)$. Esto sigue a partir de $\nabla^x(p + f(t)) = \nabla^x p$.

La diferencia principal entre un fluido Newtoniano y un fluido ideal consiste en que el fluido Newtoniano puede desarrollar tensiones de cizalla. En particular, la tracción \mathbf{t} sobre una superficie con vector normal \mathbf{n} no necesariamente es normal respecto de la superficie, considerando que

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n} = -p\mathbf{n} + 2\mu \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v})\mathbf{n}.$$

Las ecuaciones (5.42) implican que un fluido Newtoniano es reducido a un fluido ideal en el caso $\mu = 0$. Cuando μ es pequeño, un fluido Newtoniano frecuentemente puede ser aproximado por un fluido ideal en regiones alejadas de fronteras rígidas. Cerca de tales fronteras un fluido Newtoniano exhibe *capas límites* en las cuales las tensiones viscosas de cizalla llegan a ser dominantes.

Una cantidad importante en el estudio de flujos descritos por las ecuaciones (5.42) es el *número de Reynolds* Re , que es una constante adimensional definida por

$$Re = \frac{\varrho_0 \vartheta_* l_*}{\mu},$$

donde ϱ_0 es la densidad de masa, ϑ_* es una velocidad característica y l_* es una longitud característica, todas asociadas al flujo. Típicamente, flujos con un número de Reynolds pequeño son suaves o *laminares*, mientras que flujos con un número de Reynolds grande exhiben fluctuaciones o son *turbulentos*.

Finalmente comentamos que cuando el término de aceleración espacial es despreciado, las ecuaciones (5.42) asumen la forma

$$\begin{aligned} \mu \Delta^x \mathbf{v} - \nabla^x p + \varrho_0 \mathbf{b} &= 0, \\ \nabla^x \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones lineales típicamente son referidas como *ecuaciones de Stokes*. Proporcionan un sistema aproximado de leyes de balance para movimientos que son casi estacionarios y lentos, y que exhiben gradientes de velocidad muy pequeños.

5.3.3. Consideraciones de indiferencia respecto del marco. Tal como discutimos en la Sección 4.6, el campo tensión de Cauchy en un cuerpo sujeto a una restricción material puede ser descompuesto como

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}^{(r)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t),$$

donde $\mathbf{S}^{(r)}$ es una tensión reactiva determinada por la restricción y $\mathbf{S}^{(a)}$ es una tensión activa dada por una ecuación constitutiva. Para un fluido Newtoniano se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(r)}(\mathbf{x}, t) &= -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I}, \\ \mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{C}(\nabla^x \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)), \end{aligned} \tag{5.43}$$

donde p es el multiplicador asociado a la restricción de incompresibilidad $\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0$, o equivalentemente, $\det \mathbf{F} = 1$. Esta restricción puede ser escrita en la forma material estándar $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = 0$, donde $\gamma(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1$. Para que un modelo restringido sea consistente con el Axioma de Indiferencia del Marco (Axioma 4.5) basta que el campo de restricción $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ y el campo de tensión activa $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ sean indiferentes respecto del marco en el sentido de la Definición 4.3. Los argumentos previamente expuestos para el caso de un fluido ideal demuestran que $\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ es indiferente respecto del marco. Las condiciones bajo las cuales $\mathbf{S}^{(a)}$ es indiferente respecto del marco se establecen en el siguiente resultado.

Lema 5.5 (Indiferencia respecto del marco de la tensión activa Newtoniana). *El modelo constitutivo de la tensión activa en un fluido Newtoniano (5.43) es indiferente respecto del marco si y sólo si*

$$\mathbf{C}(\nabla^x \mathbf{v}) = 2\mu \operatorname{sym}(\nabla^x \mathbf{v}) = 2\mu \mathbf{L}, \tag{5.44}$$

donde $\mathbf{L} = \operatorname{sym}(\nabla^x \mathbf{v})$ es el tensor tasa de deformación y μ es una constante escalar.

Demostración. Por simplicidad demostraremos solamente que (5.44) es suficiente. Para tal efecto notamos primeramente que el tensor de cuarto orden \mathbf{C} definido en (5.44) satisface las propiedades (5.40) y (5.41). En particular, se satisface (5.40) porque

$$(\mathbf{C}(\mathbf{A}))^T = (2\mu \text{sym}(\mathbf{A}))^T = 2\mu \text{sym}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}).$$

Utilizando el hecho de que $\text{tr}(\text{sym}(\mathbf{A})) = \text{tr} \mathbf{A}$ para cada tensor de segundo orden \mathbf{A} concluimos que (5.41) está igualmente satisfecha ya que

$$\text{tr} \mathbf{C}(\mathbf{A}) = 2\mu \text{tr}(\text{sym}(\mathbf{A})) = 2\mu \text{tr} \mathbf{A} = 0 \quad \text{cuando } \text{tr} \mathbf{A} = 0.$$

Para verificar que el modelo constitutivo definido por (5.44) es consistente con el axioma de indiferencia respecto del marco, sean B_t y B_t^* dos configuraciones de un cuerpo de fluido Newtoniano relacionadas por un movimiento rígido superpuesto

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t),$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ es un tensor de rotación arbitrario y $\mathbf{c}(t)$ es un vector arbitrario. Sea $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ la tensión activa asociada a B_t , y sea $\mathbf{S}^{(a)*}(\mathbf{x}^*, t)$ la tensión activa asociada a B_t^* . Recordamos que en virtud del Lema 4.16 se tiene que $\mathbf{L}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}(t)^T$, donde $\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$. Omitiendo los argumentos \mathbf{x}^* , \mathbf{x} y t por motivos de brevedad concluimos que

$$\mathbf{S}^{(a)*} = 2\mu \mathbf{L}^* = 2\mu \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{S}^{(a)} \mathbf{Q}^T.$$

Concluimos que el modelo constitutivo definido por (5.44) es independiente del marco. ■

5.3.4. Consideraciones de energía mecánica. Aquí suponemos que un modelo isotérmico de un fluido Newtoniano es energéticamente pasivo (de acuerdo a lo discutido en la Sección 4.7), y demostramos que está satisfecha la desigualdad de energía mecánica (Lema 4.17) bajo una restricción de μ apropiada.

Como $\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{L}$, donde

$$\mathbf{L} = \text{sym}(\nabla^x \mathbf{v}), \tag{5.45}$$

para cualquier movimiento de un fluido Newtoniano se tiene que

$$\mathbf{S} : \mathbf{L} = -p\mathbf{I} : \mathbf{L} + 2\mu \mathbf{L} : \mathbf{L}.$$

Utilizando (5.45) obtenemos

$$\mathbf{I} : \mathbf{L} = \text{tr}(\text{sym}(\nabla^x \mathbf{v})) = \nabla^x \cdot \mathbf{v},$$

lo cual se anula debido a la restricción de incompresibilidad. Así,

$$\mathbf{S} : \mathbf{L} = 2\mu \mathbf{L} : \mathbf{L} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

Para cualquier intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ este resultado implica que

$$\int_{t_0}^{t_1} (\det \mathbf{F}) \mathbf{S}_m : \mathbf{L}_m dt = 2\mu \int_{t_0}^{t_1} (\det \mathbf{F}) \mathbf{L}_m : \mathbf{L}_m dt.$$

La desigualdad de energía mecánica requiere que el lado izquierdo sea no negativo para cada proceso isotérmico cerrado en $[t_0, t_1]$. Como la condición $\det \mathbf{F} > 0$ es válida para todo proceso admisible y $\mathbf{L}_m : \mathbf{L}_m \geq 0$ en virtud del producto tensorial interior, concluimos que

un modelo de fluido Newtoniano satisface la desigualdad de energía mecánica si y sólo si $\mu \geq 0$.

5.3.5. Problemas de valores iniciales y de frontera. Un *problema de valores iniciales y de frontera* para un cuerpo de fluido Newtoniano es un conjunto de ecuaciones que describe el movimiento del cuerpo sujeto a condiciones iniciales especificadas en B en el instante $t = 0$, y a condiciones de frontera sobre ∂B_t para $t \geq 0$. Tal como para fluidos ideales y elásticos, la forma Euleriana de las leyes de balance para un fluido ideal es particularmente apta para aquellos problemas en los cuales el cuerpo ocupa una región fija D en el espacio. En este caso el campo espacial velocidad \mathbf{v} y el campo espacial de presión p pueden ser determinados independientemente del movimiento φ . Típicamente se supone que D es un conjunto acotado y abierto. Sin embargo en algunas aplicaciones también es útil considerar conjuntos abiertos no acotados tales como regiones exteriores a un conjunto acotado y cerrado, o bien la totalidad del espacio Euclidiano.

Un problema de valores iniciales y de frontera estándar para un cuerpo de fluido elástico ocupando una región fija D puede ser formulado como sigue: hallar $\mathbf{v} : D \times [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ y $p : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\varrho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla^x \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = \mu \Delta^x \mathbf{v} - \nabla^x p + \varrho_0 \mathbf{b} \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.46a)$$

$$\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } D \times [0, T], \quad (5.46b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \partial D \times [0, T], \quad (5.46c)$$

$$\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0(\cdot) \quad \text{en } D. \quad (5.46d)$$

En este sistema, ϱ_0 es una densidad de masa constante dada y \mathbf{b} es una fuerza de cuerpo por masa unitaria espacial dada. La ecuación (5.46a) es el balance de momento lineal y (5.46b) es la restricción material de incompresibilidad, la cual en este caso es equivalente a la ecuación conservación de masa. La ecuación (5.46c) es la condición de borde de no deslizamiento, y (5.46d) es la condición iniciales para el campo espacial velocidad \mathbf{v} . Aquí \mathbf{v}_0 es un campo dado que corresponde a la velocidad del fluido en el instante $t = 0$. El campo especificado \mathbf{v}_0 debe ser compatible con las condiciones de incompresibilidad y de frontera en el sentido de que $\nabla^x \cdot \mathbf{v}_0 = 0$ en D y $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ sobre ∂D .

Comentamos que el sistema en (5.23) es un problema de valores iniciales y de frontera no lineal para los campos (\mathbf{v}, p) . Podemos esperar que este sistema posee una solución sobre un intervalo de tiempo finito $[0, T]$ siempre que la región D sea suficientemente regular, y que \mathbf{v}_0 y ϱ_0 satisfagan ciertas condiciones leves.

Si D es suave, el campo \mathbf{v} es único, mientras que p es único sólo hasta una función temporal aditiva. Si D no es acotado se requieren condiciones de borde adicionales en la infinidad, las cuales aseguran la unicidad tanto de \mathbf{v} que de p . Por simplicidad se supone que las soluciones son continuamente diferenciables en todas las variables tantas veces que sea necesario para llevar a cabo nuestros cálculos.

Se puede garantizar la existencia de una solución de (5.46) sobre un intervalo de tiempo acotado que depende de los datos del problema. Sin embargo la existencia global de una solución para todos los tiempos aún es un problema abierto. Además, tal como para los

casos de un fluido ideal o elástico, se requiere en general de una aproximación numérica para obtener información cuantitativa acerca de una solución.

La condición de borde estándar para un fluido Newtoniano es diferente de la condición correspondiente para un fluido ideal o elástico. En el caso Newtoniano, todas las componentes de la velocidad, normales tanto que tangenciales, deben anularse en una frontera fija. Como para los casos de un fluido ideal o elástico, la componente normal debe anularse porque el fluido no puede atravesar la frontera, pero también se debe anular la componente tangencial debido a tensiones de cizalla viscosas.

La condición de frontera $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre ∂D es adecuada para describir la interfaz entre un fluido Newtoniano y un sólido fijo e impermeable. Si el sólido no fuera fijo, pero sujeto a un campo de velocidad dado $\boldsymbol{\vartheta}$, entonces la condición de borde apropiada sería $\mathbf{v} = \boldsymbol{\vartheta}$ sobre ∂D .

5.4. Energía cinética del movimiento de fluidos

En lo siguiente derivaremos algunos resultados acerca de la disipación de la energía cinética en el movimiento de fluidos. Nos limitamos a movimientos bajo fuerzas de cuerpo conservativas en regiones con fronteras fijas, y demostraremos que un fluido ideal no posee ningún mecanismo para la disipación de energía mientras que un fluido Newtoniano si lo tiene. Comenzaremos recordando dos resultados útiles. El primero establece una identidad integral involucrando el gradiente y el Laplaciano de un campo vectorial suave.

Lema 5.6 (Integración por partes). *Sea \mathbf{v} un campo vectorial suave en una región regular y acotada $D \subset \mathbb{E}^3$, y sea $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre ∂D . Entonces*

$$\int_D (\Delta^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dV_{\mathbf{x}} = - \int_D (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) : (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \, dV_{\mathbf{x}}.$$

Demostración. A partir de la definición del Laplaciano vectorial (Definición 1.9) se tiene que

$$(\Delta^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = v_{i,jj} v_i = (v_{i,j} v_i)_{,j} - v_{i,j} v_{i,j} = \nabla^{\mathbf{x}} \cdot ((\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v})^{\mathbf{T}} \mathbf{v}) - (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) : (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}).$$

Integrando esta expresión sobre D obtenemos

$$\begin{aligned} \int_D (\Delta^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dV_{\mathbf{x}} &= \int_D \nabla^{\mathbf{x}} \cdot ((\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v})^{\mathbf{T}} \mathbf{v}) \, dV_{\mathbf{x}} - \int_D (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) : (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \, dV_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\partial D} ((\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v})^{\mathbf{T}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dA_{\mathbf{x}} - \int_D (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) : (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \, dV_{\mathbf{x}} \\ &= - \int_D (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) : (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \, dV_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

donde la última línea es una consecuencia de $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre ∂D . ■

El siguiente resultado establece una desigualdad integral entre un campo vectorial suave y su gradiente.

Lema 5.7 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $D \subset \mathbb{E}^3$ una región regular y acotada. Entonces existe una constante escalar $\lambda > 0$, que depende solamente de D , tal que*

$$\int_D |\mathbf{w}|^2 \, dV_{\mathbf{x}} \leq \lambda \int_D \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{w} \, dV_{\mathbf{x}}$$

para todo campo vectorial suave \mathbf{w} con $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sobre ∂D .

Demostración. Tarea. ■

Respecto al resultado anterior notamos que la dimensión física de λ es longitud cuadrada. Efectivamente la demostración del Lema 5.7 muestra que para un dominio de forma fija, la dilatación por un factor α causa que λ cambia a $\alpha^2\lambda$. Podemos ahora formular el resultado principal acerca de la disipación de la energía cinética.

Lema 5.8 (Energía cinética de fluidos Newtonianos e ideales). *Consideremos un cuerpo de un fluido ideal o Newtoniano, ocupando una región regular y acotada $D \subset \mathbb{E}^3$ con una frontera fija tal que $B_t = D$ para todo $t \geq 0$. Sea $\varrho_0 > 0$ la densidad de masa constante, y sea $K(t)$ la energía cinética del cuerpo al instante t definida por*

$$K(t) = \int_{B_t} \frac{1}{2} \varrho |\mathbf{v}|^2 dV_{\mathbf{x}} = \int_D \frac{1}{2} \varrho_0 |\mathbf{v}|^2 dV_{\mathbf{x}},$$

y sea $K_0 = K(0)$. Supongamos, además, que el cuerpo está sujeto a una fuerza de cuerpo por masa unitaria conservativa $\mathbf{b} = -\nabla^{\mathbf{x}}\beta$.

- 1.) Para un cuerpo de fluido Newtoniano descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes la energía cinética satisface

$$K(t) \leq \exp\left(-\frac{2\mu t}{\lambda\varrho_0}\right) K_0 \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (5.47)$$

Así, la energía cinética de un cuerpo de fluido Newtoniano disipa a cero exponencialmente para cualquier condición inicial.

- 2.) Para un cuerpo de fluido ideal descrito por las ecuaciones de Euler la energía cinética satisface

$$K(t) = K_0 \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (5.48)$$

es decir la energía cinética de un cuerpo de fluido ideal no varía en el tiempo.

Demostración. Por definición de la energía cinética se tiene que

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{B_t} \frac{1}{2} \varrho |\mathbf{v}|^2 dV_{\mathbf{x}} = \int_{B_t} \frac{1}{2} \varrho (|\mathbf{v}|^2)_{\cdot} dV_{\mathbf{x}} = \int_{B_t} \varrho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV_{\mathbf{x}},$$

donde hemos utilizado el Lema 4.2 para la diferenciación de la integral. Como $\varrho = \varrho_0 = \text{const.}$ y $B_t = D$, esta expresión se reduce a

$$\frac{dK(t)}{dt} = \int_D \varrho_0 \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dV_{\mathbf{x}}. \quad (5.49)$$

Ahora, para las ecuaciones de Navier-Stokes con una fuerza de cuerpo conservativa se tiene que

$$\varrho_0 \dot{\mathbf{v}} = \mu \Delta^{\mathbf{x}} \mathbf{v} - \nabla^{\mathbf{x}} \psi \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D, t \geq 0,$$

donde $\psi = p + \varrho_0\beta$. Para las ecuaciones de Euler tenemos la misma expresión, pero con $\mu = 0$. Sustituyendo $\varrho_0 \dot{\mathbf{v}}$ en (??) obtenemos

$$\frac{dK(t)}{dt} = \int_D (\mu(\Delta^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \nabla^{\mathbf{x}} \psi \cdot \mathbf{v}) dV_{\mathbf{x}}. \quad (5.50)$$

En lo siguiente demostraremos que el segundo término en el lado derecho se anula. En particular, como $\nabla^x \cdot \mathbf{v} = 0$ tanto para las ecuaciones de Navier-Stokes como para las ecuaciones de Euler obtenemos

$$\nabla^x \cdot (\psi \mathbf{v}) = \nabla^x \psi \cdot \mathbf{v} + (\nabla^x \cdot \mathbf{v})\psi = \nabla^x \psi \cdot \mathbf{v}.$$

Además, como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre ∂D para ambos casos, se tiene que

$$\int_D \nabla^x \psi \cdot \mathbf{v} \, dV_x = \int_D \nabla^x \cdot (\psi \mathbf{v}) \, dV_x = \int_{\partial D} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA_x = 0.$$

Para el término restante en el lado derecho de (5.50) podemos aplicar el Lema 5.6 en el caso de Navier-Stokes, o poner $\mu = 0$ en el caso de Euler. En ambos casos obtenemos

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\mu \int_D \nabla^x \mathbf{v} : \nabla^x \mathbf{v} \, dV_x \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (5.51)$$

Para el caso de Navier-Stokes podemos aplicar la desigualdad de Poincaré al lado derecho de (5.51) para obtener

$$\frac{dK(t)}{dt} \leq -\frac{\mu}{\lambda} \int_D |\mathbf{v}|^2 \, dV_x = -\frac{2\mu}{\lambda \varrho_0} K(t), \quad (5.52)$$

donde λ depende del dominio D . Multiplicando (5.52) por el factor $\exp(2\mu t/(\lambda \varrho_0))$ obtenemos

$$\frac{d}{ds} \left(\exp \left(\frac{2\mu s}{\lambda \varrho_0} \right) K(s) \right) \leq 0,$$

e integrando desde $s = 0$ a $s = t$ obtenemos (5.47). Para el caso de Euler ponemos $\mu = 0$ en (5.51), luego

$$\frac{dK(t)}{dt} = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

lo cual implica (5.48). ■

Comentamos que el modelo del fluido ideal no posee un mecanismo para la disipación de energía cinética (mecánica), mientras que un modelo Newtoniano sí lo tiene. La ausencia o presencia de disipación se debe a la presencia de tensiones de cizalla viscosas controladas por la viscosidad del fluido μ .

Comentamos, además, que este resultado muestra que la energía cinética en un cuerpo de fluido Newtoniano tiende a cero en la ausencia de movimiento de fluido en la frontera, siempre que la fuerza de cuerpo sea conservativa. La tasa de decaimiento depende de μ , ϱ_0 y λ . Para fluidos con una alta razón de viscosidad por densidad la tasa de decaimiento es muy rápida.

Finalmente enfatizamos que el parámetro λ que aparece en la cota de decaimiento depende enteramente de la geometría del dominio D . Para un fluido con propiedades fijas, la tasa de decaimiento de la energía cinética disminuye en medida que el tamaño del dominio (de forma fija) es incrementado.

5.5. Ejercicios

Problema 5.1 (Certamen 2, Curso 2012). Se considera un cuerpo de fluido elástico con la configuración de referencia B y la ecuación de estado $p = \pi(\varrho)$ entre la presión espacial y la densidad de masa espacial.

- a) Demostrar que el primer tensor tensión de Piola-Kirchhoff para este fluido puede ser escrito como

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\bar{\Sigma}(\mathbf{C}, \varrho_0),$$

donde $\bar{\Sigma}(\mathbf{C}, \varrho_0)$ es cierta función que depende de la función de estado π . Aquí \mathbf{C} es el tensor deformación de Cauchy-Green y ϱ_0 es la densidad de masa referencial.

- b) Basado en el resultado de (a) demostrar que un fluido elástico también puede ser considerado como un material elástico isotrópico, con una función respuesta de tensión que depende de la densidad de masa referencial.

Problema 5.2 (Certamen 2, Curso 2012). Demostrar que la tensión de Cauchy reactiva $\mathbf{S}^{(r)}$ en un cuerpo de fluido ideal o Newtoniano no realiza ningún trabajo en cualquier movimiento compatible con la restricción de incompresibilidad. En particular, demostrar que la contribución a la potencia de tensión desaparece, es decir

$$\mathbf{S}^{(r)} : \mathbf{L} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0.$$

Problema 5.3 (Tarea 4, Curso 2013). Se considera un fluido ideal en una región D con densidad de masa ϱ_0 sujeto a un campo fuerza de cuerpo nula constante y uniforme. Sea D la región no acotada exterior a un obstáculo Ω . Demostrar que si el movimiento del fluido es estacionario e irrotacional, entonces la fuerza resultante que el fluido ejerce sobre el obstáculo está dada por

$$\mathbf{r} = \frac{\varrho_0}{2} \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{n} \, dA_{\mathbf{x}},$$

donde \mathbf{n} es el campo normal unitario sobre $\partial\Omega$.

Problema 5.4 (Tarea 4, Curso 2013). Sea $c > 0$ una constante y considere la ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho^{(1)} = c^2 \Delta^{\mathbf{x}} \varrho^{(1)} \tag{5.53}$$

para la perturbación de la densidad en un fluido elástico. Demostrar que

$$\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct) + g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + ct)$$

es una solución de (5.53) para cualquier par de funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y cualquier vector unitario \mathbf{k} . Las soluciones de este tipo se llaman *ondas planas*.

Problema 5.5 (Tarea 4, Curso 2013). Sea \mathbf{v} un campo vectorial suave que satisface $\nabla^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$ en una región regular y acotada D . Suponiendo que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre ∂D , demostrar que

$$\int_D (\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{v} \, dV_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Problema 5.6 (Tarea 4, Curso 2013). Se consideran las ecuaciones de Navier-Stokes con fuerza de cuerpo nula, y se consideran soluciones para las cuales el campo velocidad \mathbf{v} puede ser escrito como

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_1(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_2.$$

(Tales soluciones se llaman *planas*.) Se consideran, además, campos velocidad que pueden ser representados en la forma

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\mathbf{e}_2,$$

donde $\psi = \psi(x_1, x_2, t)$ es una función escalar arbitraria, llamada *función corriente*. Aquí demostraremos que la función corriente para una solución plana de las ecuaciones de Navier-Stokes satisface una ecuación relativamente simple.

- Demostrar que la restricción de incompresibilidad (ecuación conservación de masa) está satisfecha automáticamente para cualquier función corriente ψ .
- Sea $\mathbf{w} = \nabla^{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}$ el campo vorticidad asociado a \mathbf{v} . Demostrar que $\mathbf{w} = w\mathbf{e}_3$, donde $w = -\Delta^{\mathbf{x}}\psi$.
- Utilizar la ecuación balance de momento lineal para demostrar que w debe satisfacer

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla^{\mathbf{x}} w = \nu \Delta^{\mathbf{x}} w,$$

donde $\nu = \mu/\rho_0$. Demostrar que ψ debe satisfacer la ecuación

$$(\Delta^{\mathbf{x}})^2 \psi = \frac{1}{\nu} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Delta^{\mathbf{x}} \psi) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \right) \cdot \nabla^{\mathbf{x}} (\Delta^{\mathbf{x}} \psi) \right].$$

Se comenta que si $\nu \gg 1$, una buena aproximación de esta ecuación viene dada por la *ecuación biarmónica* $(\Delta^{\mathbf{x}})^2 \psi = 0$.

Problema 5.7 (Tarea 4, Curso 2013). Se considera un campo velocidad estacionario de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \nabla^{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x})$, donde ψ es una función escalar y \mathbf{A} es un tensor de segundo orden definido en un marco dado por

$$\psi(\mathbf{x}) = \sin(x_1) \sin(x_2), \quad [\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Demostrar que $(\nabla^{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \mathbf{u} = -\nabla^{\mathbf{x}} \phi$, donde

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \cos(2x_1) + \frac{1}{4} \cos(2x_2).$$

- Demostrar que para una apropiada elección del campo presión $q(\mathbf{x})$, el par (\mathbf{u}, q) es una solución estacionaria de las ecuaciones de Euler (5.2) para un fluido ideal con fuerza de cuerpo nula.
- Sea $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \exp(-\lambda t) \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Demostrar que para una adecuada selección del campo presión $p(\mathbf{x}, t)$ y de la constante λ , el par (\mathbf{v}, p) es una solución estacionaria de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.42).

Problema 5.8 (Certamen 2, Curso 2013). Se considera un cuerpo de fluido elástico sujeto a fuerza de cuerpo cero y bajo un movimiento estacionario e irrotacional con un campo velocidad espacial $\mathbf{v} = \nabla^{\mathbf{x}}\phi$ en una región fija D . Sea la relación constitutiva dada por

$$p = \pi(\varrho) = \frac{1}{2}\varrho^2.$$

- a) Determinar las funciones asociadas $\gamma(s)$ y $\zeta(s)$ para este fluido, eligiendo la fórmula apropiada entre

$$\gamma(s) = \int_a^s \frac{\pi'(\xi)}{\xi} d\xi; \quad \gamma(s) = \frac{1}{2} \int_a^s \frac{\pi'(\xi)}{\xi^2} d\xi; \quad \gamma(s) = \int_a^s \frac{\pi(\xi)}{\xi} d\xi$$

y $\zeta(\gamma(s)) = s$ para todo $s > 0$.

- b) Demostrar que el potencial de velocidad ϕ satisface la ecuación no lineal

$$c\Delta^{\mathbf{x}}\phi = \frac{1}{2}|\nabla^{\mathbf{x}}\phi|^2\Delta^{\mathbf{x}}\phi + \nabla^{\mathbf{x}}\phi \cdot (\nabla^{\mathbf{x}}\nabla^{\mathbf{x}}\phi)\nabla^{\mathbf{x}}\phi, \quad \mathbf{x} \in D,$$

donde $\nabla^{\mathbf{x}}\nabla^{\mathbf{x}}\phi$ denota el tensor de segundo orden con los componentes

$$[\nabla^{\mathbf{x}}\nabla^{\mathbf{x}}\phi]_{ij} = \phi_{,ij}.$$

Capítulo 6

Mecánica de sólidos isotérmica

En este capítulo consideraremos diversas aplicaciones de las leyes de balance Lagrangianas introducidas en el Capítulo 4. Tal como en el capítulo anterior se despreciarán los efectos térmicos tanto por motivaciones físicas y porque se simplifica el tratamiento matemático. Considerando solamente el caso isotérmico obtendremos 15 campos incógnitos en la descripción Lagrangiana de un cuerpo continuo, a saber (comparar con Sección 4.4.7):

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{X}, t) & \quad 3 \text{ componentes del movimiento,} \\ V_i(\mathbf{X}, t) & \quad 3 \text{ componentes de velocidad,} \\ P_{ij}(\mathbf{X}, t) & \quad 9 \text{ componentes de la tensión.} \end{aligned}$$

Para determinar estas cantidades tenemos a disposición las siguientes 9 ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i & 3 \text{ ecuaciones cinemáticas,} \\ \varrho_0 \dot{V}_i &= P_{ij,j} + \varrho_0 (b_i)_m & 3 \text{ ecuaciones de momento lineal,} \\ P_{ik} F_{jk} &= F_{ik} P_{jk} & 3 \text{ ecuaciones independientes de momento angular.} \end{aligned}$$

Así necesitamos 6 ecuaciones adicionales para que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones. Estas ecuaciones adicionales serán proporcionados por ecuaciones constitutivas que relacionan las componentes independientes del primer tensor tensión de Piola-Kirchhoff a las variables $\boldsymbol{\varphi}$ y \mathbf{V} . Cualquier ecuación constitutiva de este tipo debe ser consistente con el axioma de indiferencia respecto del marco. Además, si se supone que un material es energéticamente pasivo, la ecuación constitutiva también debe satisfacer la desigualdad de energía mecánica discutida en el Capítulo 4.

En este capítulo estudiaremos modelos constitutivos que relacionan la tensión \mathbf{P} al gradiente de deformación $\mathbf{F} = \nabla^{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}$. Típicamente tales modelos se utilizan para describir el comportamiento de diversos tipos de sólidos. Como estos modelos son independientes de \mathbf{V} , esta variable puede ser eliminada sustituyendo la ecuación cinemática en la ecuación de balance del momento lineal. Así se puede generar un sistema cerrado para $\boldsymbol{\varphi}$ y \mathbf{P} a partir de las ecuaciones de balance para el momento lineal y angular conjuntamente con la relación constitutiva. Al contrario de las formulaciones del Capítulo 5, no se considera una ecuación de balance de masa porque no aparece la densidad de masa espacial. En todo nuestro desarrollo nos resultados serán expresados en términos o del primer tensor tensión de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} , o del campo tensión de Cauchy en su descripción material \mathbf{S}_m , o del segundo tensor tensión de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{\Sigma}$, de acuerdo a lo que parece más conveniente en cada situación. Cualquier resultado expresado en términos de uno de estos tensores tensión siempre puede ser expresado también en términos de los otros (ver Definición 4.1).

Los modelos constitutivos considerados en este capítulo son los modelos para

- (i) sólidos elásticos generales,
- (ii) sólidos hiperelásticos y

(iii) sólidos elásticos lineales.

Se presentará un resultado que demuestra que los modelos generales de (i) satisfacen la desigualdad de energía mecánica si y sólo si son hiperelásticos como los de (ii). Además se aplica la técnica de linealización a los modelos generales de (i) para motivar los modelos lineales de (iii). Para cada modelo se analizan las consecuencias de la indiferencia del marco material, se describen los problemas de valores iniciales y de frontera típicos, y se estudian varias propiedades cualitativas. También se introducirá el concepto de isotropía para modelos elásticos y se estudiarán sus implicaciones para ecuaciones constitutivas.

6.1. Sólidos elásticos

6.1.1. Definición.

Definición 6.1 (Sólido elástico). *Un cuerpo continuo con la configuración de referencia B se llama sólido elástico si:*

1.) *El campo tensión de Cauchy posee la forma*

$$\mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

donde $\hat{\mathbf{S}} : \mathcal{V}^2 \times B \rightarrow \mathcal{V}^2$ es una función dada, llamada función respuesta de tensión para \mathbf{S}_m .

2.) *La función $\hat{\mathbf{S}}$ tiene la siguiente propiedad:*

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})^T = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B \text{ y } \mathbf{F} \in \mathcal{V}^2 \text{ tal que } \det \mathbf{F} > 0.$$

La propiedad (1) implica que la tensión en un punto en un sólido elástico depende solamente de la medida de la deformación presente en este punto. En particular, esta tensión es independiente de la historia y de la tasa de tensión. Este tipo de relación puede ser interpretado como una generalización de la *Ley de Hooke*. A menudo es llamada *relación esfuerzo-deformación*. La propiedad (2) implica que el campo tensión de Cauchy necesariamente es simétrico. Así, la ecuación de balance del momento angular (Lema 4.11) automáticamente está satisfecha y no seguiremos considerándola. Como $\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) > 0$ para cualquier movimiento admisible, solamente consideraremos $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ para argumentos \mathbf{F} que satisfacen $\det \mathbf{F} > 0$.

Comentamos que la función $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ para un cuerpo elástico es una función intrínseca del cuerpo. Esta función depende solamente de propiedades materiales y de la configuración de referencia B , y determina la tensión de Cauchy en todos los movimientos admisibles.

Se dice que un cuerpo elástico *posee una respuesta elástica homogénea* si $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ es independiente de \mathbf{X} . En adelante, sólo consideraremos cuerpos homogéneos elásticos en este sentido. Esta restricción es impuesta sólo para simplificar la notación; todos los resultados siguientes pueden ser extendidos directamente al caso no homogéneo.

En virtud de la Definición 4.1, las funciones respuesta de \mathbf{S}_m , \mathbf{P} y Σ deben satisfacer las relaciones

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = (\det \mathbf{F}) \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}, \quad \hat{\Sigma}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}). \quad (6.1)$$

Esto significa que las funciones respuesta de los tres tensores pueden ser determinadas a partir de la función respuesta de uno de ellos.

Un ejemplo clásico de una función respuesta de tensión elástica es el *modelo de Saint Venant-Kirchhoff* dado por

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{F}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{G})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{G}, \quad (6.2)$$

donde

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

y recordamos que \mathbf{C} es el tensor deformación de Cauchy-Green a derecha, además λ y μ son constantes materiales.

Intuitivamente se supone que la función respuesta de un cuerpo elástico debe entregar tensiones extremas en la presencia de deformaciones extremas. En particular, ciertas componentes de la tensión deberían tender a infinito en valor absoluto cuando cualquier estiramiento principal tiende a infinito (extensión infinita) o tiende a cero (compresión infinita). El modelo de Saint Venant-Kirchhoff posee la primera de estas características, pero no la segunda.

6.1.2. Ecuaciones de elasticidad. Sea ahora $\varrho_0(\mathbf{X})$ la densidad de masa de un cuerpo elástico en su configuración de referencia B , y sea $\mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t)$ la descripción material de un campo de fuerza de cuerpo espacial por masa unitaria $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, es decir

$$\mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}(\varphi(\mathbf{X}, t)).$$

Entonces, poniendo $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ en la ecuación de balance de momento lineal (Lema 4.10) obtenemos un sistema cerrado para el movimiento φ de un cuerpo elástico. En particular, el movimiento debe satisfacer la siguiente ecuación para todo $\mathbf{X} \in B$ y $t \geq 0$:

$$\varrho_0 \ddot{\varphi} = \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})) + \varrho_0 \mathbf{b}_m. \quad (6.3)$$

Esta es la *ecuación de elastodinámica*.

Comentamos que en virtud de la definición de un tensor de segundo orden se tiene que $[\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{P}}]_{ij} = \hat{P}_{ij,j}$, y en virtud de la regla de la cadena y de la hipótesis de homogeneidad obtenemos

$$[\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{P}}]_i = \frac{\partial \hat{P}_{ij}}{\partial F_{kl}} \frac{\partial F_{kl}}{\partial X_j}.$$

Como $F_{kl} = \varphi_{k,l}$, podemos escribir (6.13) en componentes como

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \mathbf{A}_{ijkl} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial X_j \partial X_l} + \varrho_0 b_i, \quad \mathbf{A}_{ijkl} := \frac{\partial \hat{P}_{ij}}{\partial F_{kl}},$$

donde b_i denota las componentes de \mathbf{b}_m . Concluimos que (6.3) es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para las componentes de φ . Típicamente, la ecuación (6.3) es no lineal en φ . Las no-linealidades se deben a la forma funcional de la función respuesta de tensión $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$ y de la fuerza de cuerpo \mathbf{b}_m . Bajo condiciones apropiadas respecto de la función $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$ suponemos que (6.3) admite un rango de soluciones tipo onda.

Igualando $\ddot{\varphi}$ a cero en (6.3) obtenmos la *ecuación de elastostática*

$$\nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})) + \varrho_0 \mathbf{b}_m = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Esta es la forma Lagrangiana de la ecuación de equilibrio local introducida en la Sección 2.4, para el caso de un sólido elástico.

6.1.3. Consideraciones de indiferencia respecto del marco. Demostraremos ahora que las funciones respuesta de tensión para un sólido elástico deben satisfacer ciertas restricciones para ser compatibles con el axioma de indiferencia respecto del marco.

Lema 6.1 (Indiferencia respecto del marco de la respuesta de tensión). *El campo tensión de Cauchy es indiferente respecto del marco si y sólo si la función respuesta de tensión $\hat{\mathbf{S}}$ puede ser escrita en la forma*

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T \quad (6.5)$$

para alguna función $\bar{\mathbf{S}} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$, donde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Equivalentemente, las funciones $\hat{\mathbf{P}}$ y $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ deben satisfacer

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{C}), \quad \hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F}) = \bar{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{C})$$

para alguna función $\bar{\mathbf{\Sigma}} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$. En particular,

$$\bar{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{C}) = \sqrt{\det \mathbf{C}} \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C}).$$

Demostración. Sea $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ un movimiento arbitrario y sea $\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{X}, t)$ un segundo movimiento definido por $\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$, donde $\mathbf{Q}(t)$ es un tensor de rotación arbitrario y $\mathbf{c}(t)$ es un vector arbitrario. Además, sean $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{S}^*(\mathbf{x}^*, t)$ los campos tensión de Cauchy en B y B^* , respectivamente. Entonces de acuerdo al Axioma 4.5 (de indiferencia respecto del marco material) se debe satisfacer

$$\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{S}^*(\mathbf{x}^*, t)\mathbf{Q}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in B_t, t \geq 0,$$

donde $\mathbf{x}^* = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$. Utilizando las descripciones materiales $\mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)$ y $\mathbf{S}_m^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S}^*(\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{X}, t), t)$ podemos escribir esta condición como

$$\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{S}_m^*(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}(t) = \mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0. \quad (6.6)$$

Como la función respuesta $\hat{\mathbf{S}}$ entrega la tensión de Cauchy en cualquier movimiento admisible se tiene que $\mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$ y $\mathbf{S}_m^*(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t))$. Además, en virtud del Lema 4.16, se tiene que $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}$. Estos resultados, combinados con (6.6), implican que la función respuesta $\hat{\mathbf{S}}$ debe satisfacer

$$\mathbf{Q}^T\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{F})\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}). \quad (6.7)$$

Así, el campo tensión de Cauchy en un cuerpo elástico es indiferente respecto del marco si y sólo si (6.5) es válido. En particular, esta relación debe ser válida para todo \mathbf{F} con $\det \mathbf{F} > 0$ y toda rotación \mathbf{Q} (porque $\boldsymbol{\varphi}$ y \mathbf{g} son arbitrarios).

En lo siguiente demostraremos que (6.7) es válido para los tensores \mathbf{F} y \mathbf{Q} indicados si y sólo si (6.5) es válido. Para empezar suponemos que (6.7) es válido, y sea $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ la descomposición polar a derecha de \mathbf{F} . Entonces eligiendo $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ en (6.7) obtenemos

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T. \quad (6.8)$$

Se define $\mathbf{C}^{1/2} := \sqrt{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{C}^{-1/2} = (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1}$. Luego, como $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$, se tiene que $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{C}^{-1/2}$. Insertando ambas relaciones en (6.8) entrega el resultado en (6.5), específicamente,

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T, \quad \text{donde } \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{-1/2}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}^{1/2})\mathbf{C}^{-1/2}.$$

Recíprocamente, si suponemos que (6.5) es válido, entonces es muy directo verificar que (6.7) es válido para los tensores \mathbf{F} y \mathbf{Q} indicados. Entonces concluimos que el campo tensión de Cauchy en un cuerpo elástico es indiferente respecto del marco si y sólo si $\hat{\mathbf{S}}$ puede ser expresado en la forma (6.5). Los resultados para $\hat{\mathbf{P}}$ y $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ son consecuencias inmediatas de (6.1) y de la relación $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2$. ■

A grandes rasgos, el Lema 6.1 afirma que las funciones respuesta de tensión para un cuerpo elástico son indiferentes respecto del marco si y sólo si dependen del movimiento mediante el tensor de deformación de Cauchy-Green a derecha \mathbf{C} . Como $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$, donde $\mathbf{F} = \nabla^{\mathbf{X}}\boldsymbol{\varphi}$, vemos que las funciones de respuesta indiferentes respecto del marco serán, en general, no lineales respecto del movimiento $\boldsymbol{\varphi}$.

Comentamos además que el Lema 6.1 puede ser utilizado para demostrar que el modelo de Saint Venant-Kirchhoff introducido en (6.2) efectivamente es indiferente respecto del marco. En particular para este modelo se tiene que

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{G})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{G}, \quad \text{donde } \mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \text{ y } \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}.$$

Insertando esto para \mathbf{G} obtenemos $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F}) = \bar{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{C})$, donde

$$\bar{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{I}))\mathbf{I} + \mu(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (6.9)$$

6.1.4. Problemas de valores iniciales y de frontera. Un problema de valores iniciales y de frontera para un cuerpo elástico es un conjunto de ecuaciones para la determinación del movimiento de un cuerpo dado sujeto a condiciones iniciales especificadas en B en el instante $t = 0$ y a condiciones de frontera sobre ∂B para instantes $t \geq 0$. Típicamente se supone que B es un conjunto abierto y acotado. Sin embargo también es útil considerar conjuntos abiertos no acotados tales como el exterior de una región dada o todo el espacio Euclidiano.

El siguiente es un problema de valores iniciales y de frontera estándar para un cuerpo elástico con la configuración de referencia B : Hallar $\boldsymbol{\varphi} : B \times [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^3$ tal que

$$\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})) + \varrho_0 \mathbf{b}_m \quad \text{en } B \times [0, T], \quad (6.10a)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g} \quad \text{sobre } \Gamma_d \times [0, T], \quad (6.10b)$$

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})\mathbf{N} = \mathbf{h} \quad \text{sobre } \Gamma_\sigma \times [0, T], \quad (6.10c)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\cdot, 0) = \mathbf{X} \quad \text{en } B, \quad (6.10d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot, 0) = \mathbf{V}_0 \quad \text{en } B. \quad (6.10e)$$

En este sistema, Γ_d y Γ_σ son subconjuntos de ∂B tales que $\Gamma_d \cup \Gamma_\sigma = \partial B$ y $\Gamma_d \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, ϱ_0 es la densidad de masa referencial, \mathbf{b}_m es la descripción material de un campo de fuerza de cuerpo por masa unitaria especificado, $\hat{\mathbf{P}}$ es una función respuesta de tensión indiferente del marco (ver Lema 6.1), \mathbf{N} es el campo vectorial normal unitario sobre ∂B , y \mathbf{g} , \mathbf{h} y \mathbf{V}_0 son

campos dados. La ecuación (6.10a) es el balance de momento lineal, (6.10b) es una condición de frontera de movimiento sobre Γ_d , (6.10c) es una condición de frontera de tracción sobre Γ_σ , (6.10d) es la condición inicial para el movimiento φ , y (6.10e) es una condición inicial para la velocidad material $\dot{\varphi}$. En general las condiciones iniciales deben ser compatibles con las condiciones de borde en el instante $t = 0$.

Comentamos que (6.10) es un problema de valores iniciales y de frontera no lineal para la aplicación del movimiento φ . La existencia y la unicidad de soluciones sobre intervalos de tiempo $[0, T]$ finitos pueden ser demostradas bajo hipótesis adecuadas respecto de la función respuesta, los valores iniciales y de frontera impuestos, el dominio B y los subconjuntos Γ_d y Γ_σ . En general se requiere de métodos numéricos para obtener información cuantitativa acerca de las soluciones.

La cantidad \mathbf{h} que aparece en (6.10c) es un campo de tracción impuesto para la primera tensión de Piola-Kirchhoff. Corresponde a la fuerza externa sobre la frontera *actual* expresada por área unitaria de la frontera *referencial*. Como típicamente las fuerzas externas físicamente relevantes son expresadas por área unitaria de la frontera actual, las expresiones para \mathbf{h} típicamente dependen del movimiento φ . En particular, los elementos de área superficial en las configuraciones actuales y referenciales son relacionados mediante φ (ver Sección 3.6).

El problema (6.10) permite condiciones de frontera más generales. Por ejemplo, $\varphi_i(\mathbf{X}, t)$ puede ser especificado para todo $\mathbf{X} \in \Gamma_d^i$ ($i = 1, 2, 3$), y $P_{ij}(\mathbf{X}, t)N_j(\mathbf{X})$ puede ser especificado para todo $\mathbf{X} \in \Gamma_\sigma^i$ ($i = 1, 2, 3$), donde Γ_d^i y Γ_σ^i son subconjuntos de ∂B con las propiedades $\Gamma_d^i \cup \Gamma_\sigma^i = \partial B$ y $\Gamma_d^i \cap \Gamma_\sigma^i = \emptyset$ para $i = 1, 2, 3$. Así, varias componentes del movimiento o de la tracción pueden ser especificadas en cada punto de la frontera.

Comentamos finalmente que cualquier solución de (6.10) que es independiente del tiempo se llama una *configuración de equilibrio* o *configuración de reposo* del cuerpo. Tales configuraciones deben satisfacer el problema de valores de frontera no lineal

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})) + \varrho_0 \mathbf{b}_m &= \mathbf{0} && \text{en } B, \\ \varphi &= \mathbf{g} && \text{sobre } \Gamma_d, \\ \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})\mathbf{N} &= \mathbf{h} && \text{sobre } \Gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mientras que (6.10) típicamente posee una solución única, se espera que (6.11) posea soluciones genuinamente no únicas en varias circunstancias. Efectivamente, fenómenos como el *pandeo* pueden ser entendidos en términos de tal no unicidad.

6.1.5. Isotropía y funciones respuesta simplificadas. Aquí introduciremos el concepto de isotropía para un cuerpo elástico y estudiaremos las implicaciones para la función respuesta de tensión. En particular demostraremos que las funciones respuesta para un cuerpo isotrópico son particularmente simples.

Definición 6.2 (Cuerpo elástico isotrópico). *Un cuerpo elástico con la configuración de referencia B y la función respuesta de tensión $\hat{\mathbf{S}}$ se llama isotrópico si $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}\mathbf{Q})$ para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{V}^2$ con $\det \mathbf{F} > 0$ y todos los tensores de rotación \mathbf{Q} .*

La Definición 6.2 implica que un cuerpo elástico es isotrópico si el campo tensión de Cauchy es invariante bajo rotaciones de la configuración de referencia B . A grandes rasgos, un cuerpo elástico es isotrópico si posee la misma “rigidez” en todas las direcciones. Muchos,

pero no todos, los materiales poseen esta propiedad. Esta propiedad será expresada ahora en términos de funciones tensoriales isotrópicas.

Lema 6.2 (Respuesta de tensión isotrópica). *Si la función respuesta de tensión $\hat{\mathbf{S}}$ de un cuerpo elástico isotrópico es indiferente respecto del marco, entonces las funciones respuesta de tensión $\bar{\mathbf{S}}$ y $\bar{\Sigma}$ del Lema 6.1 satisfacen las siguientes identidades para todos los tensores de rotación \mathbf{Q} :*

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{Q}^T, \quad \bar{\Sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\bar{\Sigma}\mathbf{Q}^T.$$

Así, $\bar{\mathbf{S}}$ y $\bar{\Sigma}$ son funciones tensoriales isotrópicas en el sentido de la Sección 1.1.5. Además, a su vez, la función $\hat{\mathbf{S}}$ debe ser una función tensorial isotrópica, es decir

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T$$

para todos los tensores de rotación \mathbf{Q} .

Demostración. Como \mathbf{Q}^T es una rotación si y sólo si \mathbf{Q} lo es, la Definición 6.2 implica que $\hat{\mathbf{S}}$ debe satisfacer

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) \quad (6.12)$$

para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{V}^2$ con $\det \mathbf{F} > 0$ y todo tensor de rotación \mathbf{Q} . Además, como $\hat{\mathbf{S}}$ es indiferente respecto del marco, se tiene que

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T \quad (6.13)$$

para alguna función $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$, donde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Combinando (6.12) y (6.13) obtenemos

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}\mathbf{F}^T,$$

luego, como $\det \mathbf{F} > 0$,

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \mathbf{Q}^T\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q} \quad \text{o} \quad \mathbf{Q}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})\mathbf{Q}^T = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^T). \quad (6.14)$$

Así, $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ es una función tensorial isotrópica de acuerdo a lo definido en la Sección 1.1.5. El resultado para $\bar{\Sigma}(\mathbf{C})$ sigue del resultado anterior para $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ y de la relación

$$\bar{\Sigma}(\mathbf{C}) = \sqrt{\det \mathbf{C}}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C}).$$

En particular se tiene que

$$\mathbf{Q}\bar{\Sigma}(\mathbf{C})\mathbf{Q}^T = \sqrt{\det \mathbf{C}}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})\mathbf{Q}^T = \sqrt{\det(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T)}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) = \bar{\Sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T).$$

Concluimos que a su vez, $\bar{\Sigma}(\mathbf{C})$ es una función tensorial isotrópica. El resultado de que $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ debe ser una función tensorial isotrópica es una consecuencia directa de (6.13) y (6.14). ■

Ahora podemos utilizar este resultado para demostrar que las funciones respuesta de tensión para un cuerpo elástico isotrópico son particularmente simples.

Lema 6.3 (Funciones respuesta de tensión simplificadas). *La función respuesta de tensión $\hat{\mathbf{S}}$ para un cuerpo elástico isotrópico es indiferente respecto del marco si y sólo si esta función puede ser escrita en la forma*

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}(\beta_0(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{I} + \beta_1(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C} + \beta_2(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^{-1})\mathbf{F}^T \quad (6.15)$$

para algunas funciones $\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathcal{I}_{\mathbf{C}}$ denota el conjunto de los tres invariantes principales (ver Sección 1.1.3.9) del tensor de deformación de Cauchy-Green a derecha \mathbf{C} . Equivalentemente, las funciones respuesta $\hat{\mathbf{P}}$ y $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ pueden ser escritas en la forma

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) &= \mathbf{F}(\gamma_0(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{I} + \gamma_1(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C} + \gamma_2(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^{-1}), \\ \hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F}) &= \gamma_0(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{I} + \gamma_1(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C} + \gamma_2(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^{-1}\end{aligned}$$

para funciones $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración. Si $\hat{\mathbf{S}}$ es una función respuesta indiferente respecto del marco para un cuerpo isotrópico elástico, entonces el Lema 6.1 implica que $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T$ para alguna función $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$, donde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$, y el Lema 6.2 implica que $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ es una función tensorial isotrópica. Además, $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ debe ser simétrica porque $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ es simétrica debido a la definición de un sólido elástico. En virtud del Lema 1.12 podemos escribir $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ en la forma

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \beta_0(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{I} + \beta_1(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C} + \beta_2(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^{-1}$$

para algunas funciones $\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces necesariamente $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ debe poseer la forma (6.15). Viceversa, si $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ posee la forma indicada, se puede verificar directamente que esta forma satisface la Definición 6.2 y por lo tanto es indiferente respecto del marco. Los resultados para $\hat{\mathbf{P}}$ y $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ son consecuencias de (6.1) y de la relación $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2$. En particular, si $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ posee la forma indicada, entonces $\hat{\mathbf{P}}$ y $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ poseen las formas indicadas con $\gamma_i = \sqrt{\det \mathbf{C}}\beta_i$, $i = 0, 1, 2$. ■

Comentamos que el Lema 6.3 implica que las funciones respuesta de tensión para un cuerpo elástico isotrópico están completamente definidas por tres funciones escalares de los invariantes principales de \mathbf{C} .

Comentamos, además, que el modelo de Saint Venant-Kirchhoff dado por (6.2) efectivamente es un modelo de un sólido elástico isotrópico. En particular para este modelo tenemos, utilizando (6.9),

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{I}))\mathbf{I} + \mu(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \gamma_0(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{I} + \gamma_1(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C} + \gamma_2(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^{-1},$$

donde

$$\gamma_0 = \frac{\lambda}{2} \text{tr} \mathbf{C} - \frac{3\lambda}{2} - \mu, \quad \gamma_1 = \mu, \quad \gamma_2 = 0.$$

6.2. Sólidos hiperelásticos

En esta sección estudiaremos el modelo constitutivo de un sólido hiperelástico, el cual representa un caso especial del sólido elástico introducido en la sección anterior. Se presentará un resultado que demuestra que un sólido elástico satisface la desigualdad de energía mecánica si y sólo si es hiperelástico. También estudiaremos las implicaciones de la indiferencia respecto del marco y se establecerá un resultado respecto del balance de energía mecánica total. Terminaremos con un breve listado de algunos modelos hiperelásticos comunes en la práctica.

6.2.1. Definición.

Definición 6.3 (Sólido hiperelástico). *Un cuerpo continuo con la configuración de referencia B se llama sólido hiperelástico si:*

- 1.) *El cuerpo es elástico con las funciones respuesta de tensión $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$, $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$ y $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F})$ para los campos de tensión $\mathbf{S}_m(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ y $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{X}, t)$, respectivamente.*
- 2.) *La función $\hat{\mathbf{P}}$ posee la forma*

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = DW(\mathbf{F}) \quad (6.16)$$

donde $W : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada, llamada función densidad de energía de deformación, y $DW(\mathbf{F})$ denota la derivada de W en \mathbf{F} (ver Definición 1.10).

- 3.) *La función W tiene la siguiente propiedad:*

$$DW(\mathbf{F})\mathbf{F}^T = \mathbf{F}DW(\mathbf{F})^T \quad \text{para todo } \mathbf{F} \in \mathcal{V}^2, \det \mathbf{F} > 0.$$

La propiedad (1) implica que en cualquier movimiento, el primer campo tensión de Piola-Kirchhoff es dado por $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$. La propiedad (2) constata que la función respuesta $\hat{\mathbf{P}}$ es la derivada de una función escalar energía de deformación W . Esta propiedad tiene varias consecuencias importantes. Por ejemplo, esta propiedad garantiza que la desigualdad de energía mecánica está satisfecha, y que los sistemas en (6.10) y (6.11) poseen una estructura variacional. La propiedad (3) asegura que la ecuación de balance del momento angular (Lema 4.11) automáticamente está satisfecha, tal como lo exige la definición de la función respuesta de un cuerpo elástico.

6.2.2. Consideraciones de indiferencia respecto del marco. En lo siguiente desarrollaremos un resultado que demuestra que la función energía de deformación debe poseer una forma particular para que el axioma de indiferencia material respecto del marco esté satisfecho.

Lema 6.4 (Indiferencia respecto del marco de función respuesta de tensión de un material hiperelástico). *El campo de tensión de Cauchy en un cuerpo hiperelástico es indiferente respecto del marco si y sólo si la función energía de deformación W puede ser expresada como*

$$W(\mathbf{F}) = \bar{W}(\mathbf{C}) \quad (6.17)$$

para alguna función $\bar{W} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$. En este caso, las funciones respuesta de tensión $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$ están dadas por las respectivas expresiones

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = 2\mathbf{F}D\bar{W}(\mathbf{C}), \quad \hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F}) = 2D\bar{W}(\mathbf{C}), \quad \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \frac{2}{\sqrt{\det \mathbf{C}}}\mathbf{F}D\bar{W}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T, \quad (6.18)$$

donde $D\bar{W}(\mathbf{C})$ denota la derivada de \bar{W} en \mathbf{C} .

Demostración. Por brevedad demostramos que (6.17) es suficiente para la indiferencia del marco, omitiendo la demostración de la necesidad. Empezamos demostrando que (6.17) implica la forma funcional de $\hat{\mathbf{P}}$ indicada en (6.18). A partir de la versión de componentes de (6.16) obtenemos

$$\hat{P}_{ij}(\mathbf{F}) = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\mathbf{F}).$$

Además, como $W(\mathbf{F}) = \bar{W}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, la regla de la cadena implica que

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{ml}} \frac{\partial C_{ml}}{\partial F_{ij}},$$

donde omitimos los argumentos. Como $C_{ml} = F_{km} F_{kl}$, obtenemos

$$\frac{\partial C_{ml}}{\partial F_{ij}} = \delta_{ki} \delta_{mj} F_{kl} + F_{km} \delta_{ki} \delta_{lj} = \delta_{mj} F_{il} + \delta_{lj} F_{im},$$

lo cual implica que

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{jl}} F_{il} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{mj}} F_{im}.$$

Notando que $D\bar{W}(\mathbf{C})$ es simétrico porque \mathbf{C} lo es, podemos escribir esta identidad como

$$\hat{P}_{ij} = F_{il} \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{lj}} + F_{im} \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{mj}},$$

o en notación tensorial,

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = 2\mathbf{F}D\bar{W}(\mathbf{C}). \quad (6.19)$$

Así, (6.17) implica la forma funcional de $\hat{\mathbf{P}}$ informada en (6.18). Luego demostraremos que esta forma es suficiente para la indiferencia respecto del marco. A partir de (6.1) y la identidad $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2$ tenemos que

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = (\det \mathbf{F}) \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} = \sqrt{\det \mathbf{C}} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}.$$

Combinando esta expresión con (6.19) obtenemos

$$2\mathbf{F}D\bar{W}(\mathbf{C}) = \sqrt{\det \mathbf{C}} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T},$$

lo cual implica que

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \left(\frac{2}{\sqrt{\det \mathbf{C}}} D\bar{W}(\mathbf{C}) \right) \mathbf{F}^T.$$

Así, $\hat{\mathbf{S}}$ posee la forma indicada en (6.18), y la indiferencia respecto del marco es una consecuencia del Lema 6.1. La forma de $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ dada en (6.18) es una consecuencia de (6.1). ■

Una explicación intuitiva de la suficiencia de (6.17) para la indiferencia respecto del marco sigue del Lema 4.16, el cual demuestra que el tensor \mathbf{C} no es afectado por movimientos rígidos superpuestos. En particular, $W(\mathbf{F})$ es un campo escalar indiferente respecto del marco si posee la forma (6.17).

La propiedad (3) en la Definición 6.3 está satisfecha para cualquier función de energía almacenada de la forma (6.17). Esto es una consecuencia de la relación $DW(\mathbf{F}) = 2\mathbf{F}D\bar{W}(\mathbf{C})$ y de la simetría de $D\bar{W}(\mathbf{C})$.

El concepto de isotropía también puede ser aplicado a cuerpos hiperelásticos. En particular, un cuerpo hiperelástico es isotrópico si y sólo si la función $\bar{W}(\mathbf{C})$ en (6.17) puede ser expresada en a forma $\bar{W}(\mathbf{C}) = \hat{W}(\mathcal{I}_{\mathbf{C}})$ para alguna función $\hat{W} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathcal{I}_{\mathbf{C}}$ denota el conjunto de los invariantes principales de \mathbf{C} (Tarea).

Finalmente comentamos que el modelo de Saint Venant-Kirchhoff dado por (6.2) efectivamente es hiperelástico. En particular, a partir de (6.9) se tiene que

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{I}))\mathbf{I} + \mu(\mathbf{C} - \mathbf{I}),$$

y podemos verificar que $\hat{\Sigma}(\mathbf{F}) = 2D\bar{W}(\mathbf{C})$, donde

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{8}(\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{I}))^2 + \frac{\mu}{4}\text{tr}((\mathbf{C} - \mathbf{I})^2).$$

Además, como $\bar{W}(\mathbf{C})$ depende solamente de los invariantes principales de \mathbf{C} , el modelo es isotrópico, como ya demostramos en la Sección 6.1.

6.2.3. Consideraciones de energía mecánica. Aquí se supone que el modelo isotérmico de un sólido elástico es energéticamente pasivo (de acuerdo a lo discutido en la Sección 4.7). Demostraremos que el modelo satisface la desigualdad de energía mecánica (Lema 4.17) si y sólo si es hiperelástico. También se demostrará un resultado acerca de la ecuación de balance de la energía mecánica total.

Lema 6.5 (Desigualdad de energía mecánica para sólidos elásticos). *Un sólido elástico satisface la desigualdad de energía mecánica (Lema 4.17) si y sólo si es hiperelástico, es decir*

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = DW(\mathbf{F}) \quad (6.20)$$

para alguna función energía de deformación $W(\mathbf{F})$.

Demostración. Por brevedad demostramos que (6.20) es suficiente, omitiendo la demostración de la necesidad. Sea \mathbf{P} el primer campo tensión de Piola-Kirchhoff y supongamos que (6.20) es válido. Entonces

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = DW(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) &= \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = DW(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Integrando esta expresión sobre un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ arbitrario obtenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) dt = W(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t_1)) - W(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t_0)) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B. \quad (6.22)$$

Para todo proceso cerrado e isotérmico en $[t_0, t_1]$ se tiene que $\varphi(\mathbf{X}, t_1) = \varphi(\mathbf{X}, t_0)$ para todo $\mathbf{X} \in B$, lo que implica que $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t_1) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t_0)$ para todo $\mathbf{X} \in B$. Así el lado derecho de (6.22) se anula y la desigualdad de energía mecánica queda satisfecha para cualquier función energía de deformación $W(\mathbf{F})$. ■

Lema 6.6 (Balance de energía hiperelástica). *Sea $\varphi : B \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$ un movimiento de un cuerpo hiperelástico con la función energía de deformación $W(\mathbf{F})$, y en cualquier instante $t \geq 0$ sea B_t la configuración actual de B . Entonces*

$$\frac{d}{dt}(U(B_t) + K(B_t)) = \mathcal{P}(B_t) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

donde $U(B_t)$ es la energía total de deformación definida por

$$U(B_t) := \int_B W(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) dV_{\mathbf{X}},$$

$K(B_t)$ es la energía total cinética y $\mathcal{P}(B_t)$ es la potencia de las fuerzas externas sobre B_t (ver Capítulo 4).

Demostración. A partir del Lema 4.12 se tiene que

$$\frac{d}{dt}K(B_t) + \int_B \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} = \mathcal{P}(B_t),$$

mientras que (6.21) implica que

$$\int_B \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} = \frac{d}{dt} \int_B W(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) dV_{\mathbf{X}}.$$

Combinando ambas identidades llegamos al resultado deseado. ■

En el caso de ausencia de fuerzas externas el Lema 6.6 implica que la energía total de un cuerpo hiperelástico, definida como la suma de las energías cinética y de deformación, es conservada a lo largo de movimientos (Tarea). Efectivamente las ecuaciones de movimiento pueden ser consideradas como un sistema Hamiltoniano separable, siendo la energía de deformación la energía potencial.

6.2.4. Modelos comunes. En virtud del Lema 6.5, muchos modelos isotérmicos de sólidos elásticos utilizados prácticamente efectivamente son hiperelásticos. Efectivamente, la desigualdad de energía mecánica, derivada a partir de la desigualdad de Clausius-Duhem (Segunda Ley de Termodinámica) exige que modelos elásticos sean hiperelásticos. Terminamos la Sección 6.2 con el listado de algunos modelos hiperelásticos (indiferentes respecto del marco e isotrópicos) comunes, todos definidos a través de su función energía de deformación $\bar{W}(\mathbf{C})$: el *modelo de Saint Venant-Kirchhoff*

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \mathbf{G})^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{G}^2), \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \lambda, \mu > 0, \quad (6.23)$$

el *modelo Neo-Hookeano*

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = a \text{tr } \mathbf{C} + \Gamma(\sqrt{\det \mathbf{C}}), \quad \Gamma(s) = cs^2 - d \ln s, \quad a, c, d > 0, \quad (6.24)$$

el *modelo de Mooney-Rivlin*

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = a \text{tr } \mathbf{C} + b \text{tr } \mathbf{C}_* + \Gamma(\sqrt{\det \mathbf{C}}), \quad \mathbf{C}_* = (\det \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}, \quad a, b > 0, \quad (6.25)$$

y el *modelo de Ogden*

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^M a_i \text{tr}(\mathbf{C}^{\gamma_i/2}) + \sum_{j=1}^N \text{tr}(\mathbf{C}_*^{\delta_j/2}) + \Gamma(\sqrt{\det \mathbf{C}}), \quad (6.26)$$

$$M, N \geq 1, \quad a_i, b_j > 0, \quad \gamma_i, \delta_j \geq 1.$$

Todos estos modelos, en particular (6.24), (6.25) y (6.26), han sido utilizados para describir materiales similares a goma bajo deformaciones grandes. En particular, los modelos (6.24), (6.25) y (6.26) típicamente han sido utilizados para modelar materiales incompresibles. En

tal caso, el término $\Gamma(\sqrt{\det \mathbf{C}})$ es omitido y la restricción $\det \mathbf{F} = 1$, o equivalentemente, $\det \mathbf{C} = 1$, es considerada conjuntamente con un multiplicador (ver Sección 4.6). En el caso general compresible considerado aquí, el término $\Gamma(\sqrt{\det \mathbf{C}})$ apropiadamente genera tensiones extremas en el caso de compresión extrema cuando cualquier estiramiento principal tiende a cero, o equivalentemente, $\det \mathbf{C} \rightarrow 0$. En este sentido los modelos (6.24), (6.25) y (6.26) son más aptos para deformaciones extremas que el modelo (6.23), el cual no posee esta propiedad como ya mencionamos en la Sección 6.1. Todos los modelos (6.23)–(6.26) generan tensiones extremas apropiadas en el caso de una extensión extrema cuando cualquier de los estiramientos principales tiende a infinito.

6.3. Linealización de las ecuaciones de la elasticidad

Para casi todos los modelos constitutivos de interés las ecuaciones de movimiento de un sólido elástico son demasiado complicadas como para permitir una solución exacta, por lo tanto a veces uno trata de reemplazar estas ecuaciones por aproximaciones más simples. En esta sección se determina un conjunto de ecuaciones simplificadas para un sólido elástico bajo la hipótesis de deformaciones pequeñas.

Para motivar el tratamiento, consideremos un cuerpo elástico en reposo en una configuración de referencia B libre de tensión. Se dice que una configuración es *libre de tensión* si una (por lo tanto, todas) de las funciones respuesta de tensión se anula cuando $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, es decir

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) = \mathbf{O}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{I}) = \mathbf{O}, \quad \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) = \mathbf{O}, \quad (6.27)$$

donde recordamos que \mathbf{O} denota el tensor (de segundo orden) nulo. Supongamos que el cuerpo está sujeto a una fuerza de cuerpo, que las condiciones iniciales y de frontera son como en (6.10), y que \mathbf{b}_m , \mathbf{g} , \mathbf{h} y \mathbf{V}_0 son pequeños en el sentido de que

$$|\mathbf{b}_m(\mathbf{X}, t)|, \quad |\mathbf{g}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}|, \quad |\mathbf{h}(\mathbf{X}, t)|, \quad |\mathbf{V}_0(\mathbf{X})| = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (6.28)$$

donde $0 \leq \varepsilon \ll 1$ es un parámetro pequeño. En este caso es muy razonable suponer que el cuerpo desvía sólo ligeramente desde su configuración de referencia en el sentido de que

$$|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}| = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (6.29)$$

Efectivamente, si $\mathbf{b}_m = \mathbf{h} = \mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{g} = \mathbf{X}$, entonces las ecuaciones en (6.10) están satisfechas por $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}$ para todo $\mathbf{X} \in B$ y $t \geq 0$.

Queremos ahora deducir un conjunto de ecuaciones simplificadas para describir movimientos que satisfacen (6.29) bajo las hipótesis (6.27) y (6.28). Discutiremos problemas de valores iniciales y de frontera para estas ecuaciones y estudiaremos las implicaciones del axioma de indiferencia respecto del marco y de la hipótesis de isotropía.

6.3.1. Ecuaciones linealizadas y tensores de elasticidad. En virtud de (6.28) suponemos que \mathbf{b}_m , \mathbf{g} , \mathbf{h} y \mathbf{V}_0 pueden ser escritos en la forma

$$\mathbf{b}_m^\varepsilon = \varepsilon \mathbf{b}_m^{(1)}, \quad \mathbf{g}^\varepsilon = \mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{g}^{(1)}, \quad \mathbf{h}^\varepsilon = \varepsilon \mathbf{h}^{(1)}, \quad \mathbf{V}_0^\varepsilon = \varepsilon \mathbf{V}_0^{(1)} \quad (6.30)$$

para algunas funciones $\mathbf{b}_m^{(1)}$, $\mathbf{g}^{(1)}$, $\mathbf{h}^{(1)}$ y $\mathbf{V}_0^{(1)}$. Luego, en virtud de (6.29), buscamos una expansión en serie de potencias de $\boldsymbol{\varphi}$ en la forma

$$\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon = \mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.31)$$

donde $\mathbf{u}^{(1)}$ es un campo incógnito. Si por $\mathbf{u}^\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon - \mathbf{X}$ denotamos el campo de desplazamiento asociado con $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon$, entonces (6.31) implica que \mathbf{u}^ε posee la expansión

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.32)$$

Ahora presentamos una ecuación de derivadas parciales para la perturbación de primer orden $\mathbf{u}^{(1)}$ del desplazamiento. A partir de (6.10a) deducimos que $\mathbf{u}^\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon - \mathbf{X}$ satisface la ecuación de balance de momento lineal

$$\varrho_0 \ddot{\mathbf{u}}^\varepsilon = \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^\varepsilon)) + \varrho_0 \mathbf{b}_m^\varepsilon, \quad (6.33)$$

donde \mathbf{F}^ε es el gradiente de deformación asociado a $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon$, es decir

$$\mathbf{F}^\varepsilon = \nabla^{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon = \mathbf{I} + \varepsilon \nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

La siguiente definición será útil para simplificar (6.33).

Definición 6.4 (Tensores de elasticidad). Sean $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{F})$ y $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ las funciones respuesta de tensión de Piola-Kirchhoff y de Cauchy de un sólido elástico. Entonces se definen los tensores de elasticidad de cuarto orden \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} asociados con $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$, respectivamente, por

$$\mathbf{A}_{ijkl} = \frac{\partial \hat{P}_{ij}}{\partial F_{kl}}(\mathbf{I}), \quad \mathbf{B}_{ijkl} = \frac{\partial \hat{\Sigma}_{ij}}{\partial F_{kl}}(\mathbf{I}), \quad \mathbf{C}_{ijkl} = \frac{\partial \hat{S}_{ij}}{\partial F_{kl}}(\mathbf{I}).$$

En notación tensorial se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{H}) = \left. \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H}) \right|_{\alpha=0} = D\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I})\mathbf{H} \quad \text{para todo } \mathbf{H} \in \mathcal{V}^2,$$

con expresiones similares válidas para \mathbf{B} y \mathbf{C} (ver Definición 1.11).

Utilizando la Definición 6.4 podemos desarrollar la función respuesta de tensión $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^\varepsilon)$ en una serie de Taylor en torno a $\varepsilon = 0$ para obtener

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^\varepsilon) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^\varepsilon)|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Como $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, obtenemos

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.34)$$

Insertando (6.34), (6.32) y (6.30) en (6.33) y conservando solamente los términos de la primera potencia de ε obtenemos

$$\varrho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} = \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)})) + \varrho_0 \mathbf{b}_m^{(1)}. \quad (6.35)$$

Esta es la versión linealizada de la ecuación de balance de momento lineal (6.10a). Aplicando condiciones similares podemos obtener versiones linealizadas de las condiciones de frontera e iniciales (6.10b)–(6.10e).

6.3.2. Problemas de valores iniciales y de frontera. La linealización de (6.10) nos entrega el siguiente problema de valores iniciales y de frontera para la perturbación de primer orden del desplazamiento en un sólido elástico: Hallar $\mathbf{u}^{(1)} : B \times [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ tal que

$$\begin{aligned} \varrho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} &= \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)})) + \varrho_0 \mathbf{b}_m^{(1)} && \text{en } B \times [0, T], \\ \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{g}^{(1)} && \text{sobre } \Gamma_d \times [0, T], \\ \mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{N} &= \mathbf{h}^{(1)} && \text{sobre } \Gamma_\sigma \times [0, T], \\ \mathbf{u}^{(1)}(\cdot, 0) &= \mathbf{0} && \text{en } B, \\ \dot{\mathbf{u}}^{(1)}(\cdot, 0) &= \mathbf{V}_0^{(1)} && \text{en } B. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Típicamente, estas ecuaciones son llamadas las *ecuaciones linealizadas de elástodinámica*. Estas ecuaciones forman una aproximación del sistema (6.10) adecuada para describir desviaciones pequeñas desde una configuración libre de tensión en un sólido elástico. En el sistema (6.36), Γ_d y Γ_σ son subconjuntos de ∂B tales que $\Gamma_d \cup \Gamma_\sigma = \partial B$ y $\Gamma_d \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, ϱ_0 es la densidad de masa referencial, \mathbf{A} es el tensor de elasticidad de cuarto orden asociado a la función respuesta de tensión $\hat{\mathbf{P}}$, \mathbf{N} es el campo vectorial normal unitario sobre ∂B , y $\mathbf{b}_m^{(1)}$, $\mathbf{g}^{(1)}$, $\mathbf{h}^{(1)}$ y $\mathbf{V}_0^{(1)}$ son campos de perturbación dados. Cualquiera de las condiciones de frontera más generales discutidas en el contexto de (6.10) también puede ser considerada para (6.36).

Comentamos que el sistema (6.36) representa un problema de valores iniciales y de frontera *lineal* para el campo de perturbación $\mathbf{u}^{(1)}$. En el caso que \mathbf{A} posee simetría mayor y satisface condiciones de elipticidad fuerte (ver Sección 6.4 más adelante), entonces este sistema posee una solución única sobre cualquier intervalo de tiempo $[0, T]$ dado, bajo hipótesis leves respecto de los datos iniciales y de frontera impuestos, el dominio B y los subconjuntos Γ_d y Γ_σ .

En virtud de (6.29), la diferencia entre la configuración de referencia fija B y la configuración actual $B_t = \boldsymbol{\varphi}_t(B)$ es de primer orden en ε para todo $t \geq 0$, por lo tanto frecuentemente no se distingue entre las coordenadas materiales y espaciales al considerar sólo la respuesta lineal en modelos de elasticidad.

Cualquier solución de (6.36) que sea independiente del tiempo debe satisfacer el siguiente problema de valores de frontera:

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)})) + \varrho_0 \mathbf{b}_m^{(1)} &= \mathbf{0} && \text{en } B, \\ \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{g}^{(1)} && \text{sobre } \Gamma_d, \\ \mathbf{A}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{N} &= \mathbf{h}^{(1)} && \text{sobre } \Gamma_\sigma. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Típicamente estas ecuaciones se llaman *ecuaciones linealizadas de elastostática*. Si \mathbf{A} satisface condiciones de simetría mayor y de positividad, entonces este sistema posee una solución única bajo hipótesis leves respecto del dominio y los datos impuestos sobre Γ_d (siempre que $\Gamma_d \neq \emptyset$). Si $\Gamma_d = \emptyset$, entonces el campo dado $\mathbf{h}^{(1)}$ debe satisfacer condiciones de resolubilidad (la fuerza resultante y el momento angular deben anularse), y las soluciones son únicas sólo hasta una deformación rígida arbitrariamente infinitesimal.

6.3.3. Propiedades de los tensores de elasticidad. En lo siguiente estudiaremos los tensores de elasticidad de cuarto orden, demostrando que estos tensores son todos iguales. Estudiaremos también las implicaciones de la ley de balance del momento angular y el axioma de indiferencia respecto del marco. Demostraremos que el tensor de elasticidad de un cuerpo elástico isotrópico posee una forma particularmente simple.

Lema 6.7 (Equivalencia de los tensores de elasticidad). *Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} los tensores de elasticidad asociados a las funciones respuesta de tensión $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$, respectivamente, de un cuerpo elástico. Si la configuración de referencia del cuerpo es libre de tensión, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$.*

Demostración. Por brevedad demostramos solamente que $\mathbf{A} = \mathbf{C}$. La demostración de $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ es similar (Tarea). Empezamos notando que a partir de (6.1) tenemos que

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = (\det \mathbf{F}) \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\text{T}}.$$

Diferenciando ambos lados respecto de $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ y aplicando la Definición 6.4 para el lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{H}) &= \left. \frac{d}{d\alpha} (\det(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H}) \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H}) (\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})^{-\text{T}}) \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} (\det(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})) \right|_{\alpha=0} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) \mathbf{I}^{-\text{T}} + \det(\mathbf{I}) \left. \frac{d}{d\alpha} (\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})) \right|_{\alpha=0} \mathbf{I}^{-\text{T}} \\ &\quad + \det(\mathbf{I}) \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) \left. \frac{d}{d\alpha} ((\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})^{-\text{T}}) \right|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$. Como $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) = \mathbf{O}$ para una configuración de referencia libre de tensión y $\det \mathbf{I} = 1$ se tiene que

$$\mathbf{A}(\mathbf{H}) = \left. \frac{d}{d\alpha} (\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})) \right|_{\alpha=0} = \mathbf{C}(\mathbf{H}) \quad \text{para todo } \mathbf{H} \in \mathcal{V}^2,$$

lo que demuestra el resultado. ■

Comentamos que este resultado implica que un sólido elástico con una configuración de referencia libre de tensión posee un tensor de elasticidad único, normalmente denotado por \mathbf{C} . Este tensor puede ser determinado a partir del conocimiento de cualquier de las tres funciones respuesta de tensión $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ o $\hat{\mathbf{S}}$.

Este resultado también puede ser interpretado como una afirmación de que las funciones respuesta de tensión $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$ poseen la misma linealización en $\mathbf{F} = \mathbf{I}$; específicamente,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^\varepsilon) &= \varepsilon \mathbf{C}(\nabla^X \mathbf{u}^{(1)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \hat{\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{F}^\varepsilon) &= \varepsilon \mathbf{C}(\nabla^X \mathbf{u}^{(1)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}^\varepsilon) &= \varepsilon \mathbf{C}(\nabla^X \mathbf{u}^{(1)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Así, en la aproximación lineal, los dos campos de tensión de Piola-Kirchhoff y el campo de tensión de Cauchy son indistinguibles.

Lema 6.8 (Simetría menor a izquierda del tensor de elasticidad). *Consideremos un cuerpo elástico con una configuración de referencia libre de tensión y un tensor de elasticidad asociado \mathbf{C} . Entonces la ley de balance de momento lineal implica que $\mathbf{C}(\mathbf{H})$ es simétrico para todo $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$. Así, \mathbf{C} posee una simetría menor a izquierda en el sentido de que $C_{ijkl} = C_{jikl}$, o equivalentemente (ver Sección 1.1.4.5)*

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \text{sym}(\mathbf{A}) : \mathbf{C}(\mathbf{B}) \quad \text{para todo } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2.$$

Demostración. La ley de balance de momento angular implica que $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})^T = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})$ para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{V}^2$ con $\det \mathbf{F} > 0$. Por la definición de \mathbf{C} se tiene para todo $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$ que

$$\mathbf{C}(\mathbf{H})^T = \left(\frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H}) \Big|_{\alpha=0} \right)^T = \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H})^T \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H}) \Big|_{\alpha=0} = \mathbf{C}(\mathbf{H}),$$

donde la igualdad entre el tercer y el cuarto término se debe al hecho de que $\det(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{H}) > 0$ cuando α es suficientemente pequeño. Así, $\mathbf{C}(\mathbf{H})$ es simétrico para todo $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$. A partir del Lema 1.10 se concluye que

$$\mathbf{G} : \mathbf{C}(\mathbf{H}) = \text{sym}(\mathbf{G}) : \mathbf{C}(\mathbf{H}) \quad \text{para todo } \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{V}^2,$$

lo cual, por definición, significa que \mathbf{C} posee simetría menor a izquierda. La condición respecto de las componentes C_{ijkl} sigue del Lema 1.11. \blacksquare

Lema 6.9 (Simetría menor a derecha del tensor de elasticidad). *Sea $\hat{\mathbf{S}}$ la función respuesta de tensión de Cauchy de un cuerpo elástico con una configuración de referencia libre de tensión y el tensor de elasticidad \mathbf{C} . Si $\hat{\mathbf{S}}$ es indiferente respecto del marco, entonces $\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}$ para todo tensor $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$ antisimétrico. Entonces \mathbf{C} posee una simetría menor a derecha en el sentido de que $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, o equivalentemente (ver Sección 1.1.4.5)*

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{B}) = \mathbf{A} : \mathbf{C}(\text{sym}(\mathbf{B})) \quad \text{para todo } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2.$$

Demostración. Debido a la indiferencia respecto del marco tenemos a partir de (6.7)

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{QF}) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^T$$

para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{V}^2$ con $\det \mathbf{F} > 0$ y todas las rotaciones $\mathbf{Q} \in \mathcal{V}^2$. Poniendo $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ y utilizando la hipótesis $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) = \mathbf{O}$ obtenemos

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{O} \tag{6.38}$$

para cualquier rotación \mathbf{Q} . Sea ahora $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$ un tensor antisimétrico arbitrario. En virtud del Lema 1.7, $\exp(\alpha \mathbf{W})$ es una rotación para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, luego (6.38) implica que

$$\hat{\mathbf{S}}(\exp(\alpha \mathbf{W})) = \mathbf{O} \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6.39}$$

Por la definición de \mathbf{C} se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{W}) &= \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{W}) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}} \left(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{W} + \frac{\alpha^2}{2} \mathbf{W}^2 + \frac{\alpha^3}{6} \mathbf{W}^3 + \dots \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\exp(\alpha \mathbf{W})) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Combinando (6.40) y (6.39) obtenemos que $\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}$ para cualquier tensor antisimétrico $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$, lo cual implica que

$$\mathbf{C}(\mathbf{H}) = \mathbf{C}(\text{sym}(\mathbf{H})) \quad \text{para todo } \mathbf{H} \in \mathcal{V}^2,$$

lo cual, por definición, significa que $\mathbf{C}(\mathbf{H})$ posee simetría menor a derecha. La condición acerca de las componentes C_{ijkl} sigue del Lema 1.11. ■

El siguiente resultado demuestra que el tensor de elasticidad \mathbf{C} posee una forma particularmente simple si el cuerpo es isotrópico.

Lema 6.10 (Tensor de elasticidad para un sólido isotrópico). *Sea $\hat{\mathbf{S}}$ la función respuesta de tensión de Cauchy de un cuerpo elástico con una configuración de referencia libre de tensión y el tensor de elasticidad \mathbf{C} . Si el cuerpo es isotrópico, entonces el tensor de cuarto orden \mathbf{C} es isotrópico en el sentido de la Sección 1.1.5 y posee la forma*

$$\mathbf{C}(\mathbf{H}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\mathbf{H}) \quad \text{para todo } \mathbf{H} \in \mathcal{V}^2,$$

donde λ y μ son constantes.

Demostración. Para un cuerpo isotrópico elástico tenemos en virtud del Lema 6.2 que

$$\mathbf{Q}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)$$

para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{V}^2$ con $\det \mathbf{F} > 0$ y toda rotación $\mathbf{Q} \in \mathcal{V}^2$. Sea $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$ arbitrario. Entonces, en virtud de la definición de \mathbf{C} tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{C}(\mathbf{H})\mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q} \left. \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H}) \right|_{\alpha=0} \mathbf{Q}^T = \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{Q}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})\mathbf{Q}^T \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Q}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H})\mathbf{Q}^T) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{d\alpha} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^T) \right|_{\alpha=0} = \mathbf{C}(\mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^T), \end{aligned}$$

donde la igualdad entre el tercer y el cuarto término se debe a que $\det(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{H}) > 0$ cuando α es suficientemente pequeño. Así, \mathbf{C} es isotrópico en el sentido de la Sección 1.1.5. Además, en virtud del Lema 6.8, el tensor $\mathbf{C}(\mathbf{H})$ es simétrico para cualquier $\mathbf{H} \in \mathcal{V}^2$ simétrico, y debido al Lema 6.9 se tiene que $\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \mathbf{O}$ para cualquier $\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2$ antisimétrico. Así, \mathbf{C} satisface las presuposiciones del Lema 1.13, el cual establece el enunciado. ■

6.3.4. Ecuación de elasticidad isotrópica y linealizada. En virtud de los Lemas 6.7 y 6.10, la ecuación linealizada de balance de momento lineal (6.35) asume una forma simple si el cuerpo es isotrópico. En particular tenemos

$$\mathbf{C}(\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{(1)}) = \lambda(\text{tr } \nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{(1)})\mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{(1)}).$$

Tomando la divergencia obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{C}(\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{(1)}) &= \nabla^{\mathbf{X}} \cdot (\lambda \text{tr}(\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{(1)})\mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{(1)})) \\ &= \nabla^{\mathbf{X}} \cdot \left((\lambda u_{k,k}^{(1)} \delta_{ij} + \mu u_{i,j}^{(1)} + \mu u_{j,i}^{(1)}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) \\ &= (\lambda u_{k,k}^{(1)} \delta_{ij} + \mu u_{i,j}^{(1)} + \mu u_{j,i}^{(1)})_{,j} \mathbf{e}_i \\ &= \lambda u_{k,ki}^{(1)} \mathbf{e}_i + \mu u_{i,jj}^{(1)} \mathbf{e}_i + \mu u_{j,ji}^{(1)} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \nabla^{\mathbf{X}} (\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + \mu \Delta^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)} + \mu \nabla^{\mathbf{X}} (\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \\
&= \mu \Delta^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda + \mu) \nabla^{\mathbf{X}} (\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}).
\end{aligned}$$

Así, podemos escribir (6.35) como

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mu \Delta^{\mathbf{X}} \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda + \mu) \nabla^{\mathbf{X}} (\nabla^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + \rho_0 \mathbf{b}_m^{(1)}. \quad (6.41)$$

A veces la ecuación (6.41) es llamada *ecuación de Navier* para la perturbación del desplazamiento $\mathbf{u}^{(1)}$. Es una aproximación de la ecuación de balance del momento lineal apropiada para describir desviaciones pequeñas desde una configuración de referencia libre de tensión de un sólido elástico isotrópico.

6.4. Sólidos elásticos lineales

En la Sección 6.3 obtuvimos ecuaciones linealizadas para un sólido elástico partiendo de ecuaciones no lineales. En esta sección consideraremos una clase de modelos que da origen a ecuaciones similares. Sin embargo, aquí las ecuaciones lineales son el resultado de hipótesis constitutivas y no de una linealización.

6.4.1. Definición.

Definición 6.5 (Sólido elástico lineal). *Un cuerpo continuo con la configuración de referencia B se llama sólido elástico lineal si:*

- 1.) *El campo de la primera tensión de Piola-Kirchhoff es de la forma*

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in B, t \geq 0,$$

donde $\hat{\mathbf{P}} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ es una función respuesta dada.

- 2.) *La función respuesta $\hat{\mathbf{P}}$ es de la forma*

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \mathbf{C}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}), \quad (6.42)$$

donde $\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$ es el gradiente del desplazamiento y \mathbf{C} es un tensor de cuarto orden dado llamado tensor de elasticidad del cuerpo.

- 3.) *El tensor \mathbf{C} satisface las condiciones de simetría menor a izquierda y a derecha.*

La propiedad (1) implica que la tensión en un punto en un sólido elástico lineal depende solamente de una medida de la deformación actual en este punto. La propiedad (2) y la simetría menor a izquierda en (3) implican que la primera respuesta de tensión de Piola-Kirchhoff es simétrica. La propiedad (2) y la simetría menor a derecha en (3) implican que esta respuesta de tensión es una función lineal del tensor de deformación infinitesimal $\mathbf{E} = \text{sym}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u})$; específicamente, $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \mathbf{C}(\mathbf{E})$.

Insertando (6.42) en las ecuaciones de elasticidad (6.10) obtenemos un sistema que posee la misma forma que las ecuaciones linealizadas (6.36), con $\mathbf{u}^{(1)}$ remplazado por \mathbf{u} , etc. En particular las ecuaciones resultantes son lineales en el campo de desplazamiento \mathbf{u} . (Rigurosamente, también tenemos que suponer que la fuerza de cuerpo dada y los datos de frontera son lineales en \mathbf{u} .) Así, las ecuaciones exactas para un sólido elástico lineal poseen la misma forma que las ecuaciones linealizadas de un sólido elástico no lineal con una configuración de referencia libre de tensión.

En general la ley de balance del momento angular no está satisfecha en un sólido elástico lineal. En particular, en virtud de (6.1) la simetría del campo de la primera tensión de Piola-Kirchhoff en general no implica la simetría del campo de tensión de Cauchy. Sin embargo, a la luz de los Lemas 6.7 y 6.8, el balance del momento angular está satisfecho en un sentido aproximado, y es visible en la simetría menor a izquierda de \mathbf{C} .

En general el modelo constitutivo de un sólido elástico lineal no satisface el axioma de indiferencia respecto del marco. En particular, de acuerdo al Lema 6.1 la indiferencia respecto del marco exige que $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\bar{\Sigma}(\mathbf{C})$ para alguna función $\bar{\Sigma}(\mathbf{C})$, lo que en general es incompatible con la hipótesis de linealidad. Sin embargo, a la luz de los Lemas 6.7 y 6.9, la indiferencia respecto del marco está satisfecha aproximadamente, y se manifiesta en la simetría menor a derecha de \mathbf{C} .

Finalmente comentamos que un ejemplo clásico de un sólido elástico lineal viene dado por el *modelo isotrópico* definido por

$$\mathbf{C}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu \text{sym}(\mathbf{E}). \quad (6.43)$$

En este caso λ y μ se llaman *constantes de Lamé* del cuerpo. En virtud de los Lemas 6.7 y 6.10, este modelo es consistente con la linealización de cualquier modelo no lineal, indiferente respecto del marco, e isotrópico con una configuración de referencia libre de tensión. En particular la ecuación de balance del momento lineal asume la forma (6.41).

6.4.2. Propiedades generales. En lo siguiente estudiaremos algunas propiedades de sólidos elásticos lineales. Demostraremos que un sólido elástico lineal es hiperelástico si el tensor de elasticidad posee simetría mayor. También introduciremos condiciones respecto del tensor de elasticidad bajo las cuales se pueden demostrar resultados de existencia y unicidad para las ecuaciones de elastodinámica y elastostática lineal en (6.36) y (6.37).

Definición 6.6 (Sólido elástico lineal hiperelástico). *Un sólido elástico lineal se llama hiperelástico si la función respuesta $\hat{\mathbf{P}}$ satisface*

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \text{DW}(\mathbf{F})$$

para alguna función $W : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, llamada una densidad de energía de deformación para el cuerpo.

La Definición 6.6 es consistente con el concepto de un sólido hiperelástico general. Sin embargo, al contrario del caso general, no se impone una condición de simetría sobre $\text{DW}(\mathbf{F})\mathbf{F}^T$. El siguiente resultado proporciona una condición suficiente bajo la cual un sólido elástico lineal es hiperelástico. Efectivamente, esta condición también es necesaria (Tarea).

Lema 6.11 (Condición para sólidos lineales hiperelásticos). *Si el tensor de elasticidad \mathbf{C} posee simetría mayor, entonces un sólido lineal elástico es hiperelástico. En este caso la función*

$$W(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u} : \mathbf{C}(\nabla^{\mathbf{X}} \mathbf{u}), \quad (6.44)$$

donde $\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$, es una función densidad de energía de deformación para el cuerpo. Equivalentemente, en virtud de las simetrías menores de \mathbf{C} ,

$$W(\mathbf{F}) = \frac{1}{2}\mathbf{E} : \mathbf{C}(\mathbf{E}),$$

donde $\mathbf{E} = \text{sym}(\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u})$ es el tensor de deformación infinitesimal.

Demostración. Para un sólido lineal elástico se tiene que $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \mathbf{C}(\mathbf{F} - \mathbf{I})$. Así, suponiendo que \mathbf{C} posee simetría mayor, queremos demostrar que $\mathbf{C}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) = DW(\mathbf{F})$, donde $W(\mathbf{F})$ está dado en (6.44). En virtud de la Definición 1.10 se tiene que

$$DW(\mathbf{F}) : \mathbf{A} = \left. \frac{d}{d\alpha} W(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A}) \right|_{\alpha=0} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2,$$

y a partir de (6.44), utilizando $\nabla^{\mathbf{X}}\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\alpha} W(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A}) \right|_{\alpha=0} &= \left. \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A} - \mathbf{I}) : \mathbf{C}(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A} - \mathbf{I}) \right) \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \left(\frac{1}{2}\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A} - \mathbf{I}) : \mathbf{C}(\mathbf{A}) \right) \right|_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) + \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) : \mathbf{C}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Utilizando la simetría mayor de \mathbf{C} , y el hecho de que $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A}$ para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}^2$, obtenemos

$$DW(\mathbf{F}) : \mathbf{A} = \left. \frac{d}{d\alpha} W(\mathbf{F} + \alpha\mathbf{A}) \right|_{\alpha=0} = \mathbf{C}(\mathbf{F} - \mathbf{I}) : \mathbf{A} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \mathcal{V}^2,$$

lo que implica que $DW(\mathbf{F}) = \mathbf{C}(\mathbf{F} - \mathbf{I})$, como es requerido. ■

Comentamos que es directo verificar que el tensor de elasticidad para el modelo isotrópico posee simetría mayor, por lo tanto el modelo isotrópico es hiperelástico.

La hiperelasticidad tiene muchas consecuencias importantes. En particular, tal como para sólidos elásticos generales, la hiperelasticidad garantiza la satisfacción de la desigualdad de energía mecánica. También implica la satisfacción de un balance de energía como en el Lema 6.6. Además, la hiperelasticidad implica que las ecuaciones de elastodinámica lineal y de elastostática lineal ((6.36) y (6.37), respectivamente) poseen una estructura variacional.

Comentamos, además, que en general un tensor \mathbf{C} de cuarto orden contiene 81 parámetros independientes. Si \mathbf{C} satisface las condiciones de simetría menor a izquierda y a derecha requeridas por un sólido elástico lineal, entonces el número de parámetros independientes se reduce a 36. Además, si \mathbf{C} posee simetría mayor, el número de parámetros independientes se reduce a 21 (Tarea). Si además \mathbf{C} es isotrópico, el número de parámetros independientes es sólo 2.

Ahora introduciremos varias condiciones sobre el tensor de elasticidad que garantizan que las ecuaciones para un sólido elástico lineal estén bien puestas. Luego comunicaremos un resultado que caracteriza estas condiciones para el modelo isotrópico.

Definición 6.7 (Elípticidad fuerte). *Un tensor de cuarto orden \mathbf{C} se llama fuertemente elíptico si $\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{A}) \geq 0$ para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. El operador \mathbf{C} se llama positivo si $\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{A}) > 0$ para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$ con $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \neq \mathbf{O}$.*

Lema 6.12 (Elípticidad fuerte y positividad del modelo isotrópico). *Se considera un sólido lineal, elástico e isotrópico con las constantes de Lamé λ y μ . Entonces:*

- 1.) \mathbf{C} es fuertemente elíptico si y sólo si $\mu > 0$ y $\lambda + 2\mu > 0$.
- 2.) \mathbf{C} es positivo si y sólo si $\mu > 0$ y $3\lambda + 2\mu > 0$.

Demostración. Para demostrar (1), consideremos un tensor arbitrario \mathbf{A} de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, donde \mathbf{a} , $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Entonces, en virtud de (6.43) y utilizando las identidades $\mathbf{I} : \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A}$, $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{A}) &= \lambda(\text{tr } \mathbf{A})^2 + 2\mu \text{sym}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \\ &= (\lambda + \mu)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Introduciendo la proyección perpendicular

$$\mathbf{b}^\perp = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

y reemplazando \mathbf{b} obtenemos

$$\mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{A}) = (\lambda + 2\mu)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b}^\perp \cdot \mathbf{b}^\perp).$$

A partir de este resultado obtenemos que $\lambda + 2\mu > 0$ y $\mu > 0$ implican que \mathbf{C} es fuertemente elíptico. Viceversa, si \mathbf{C} es fuertemente elíptico, entonces eligiendo \mathbf{b} tal que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ obtenemos $\mu > 0$, y eligiendo \mathbf{b} tal que $\mathbf{b}^\perp = \mathbf{0}$ obtenemos $\lambda + 2\mu > 0$.

Para demostrar (2) se considera un tensor simétrico arbitrario \mathbf{A} , y se define el tensor simétrico $\mathbf{H} := \mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}$, donde

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}).$$

Entonces, en virtud de (6.43) y utilizando que $\text{sym}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{H} + \alpha \mathbf{I}$ e $\mathbf{I} : \mathbf{H} = \text{tr}(\mathbf{H}) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{C}(\mathbf{A}) &= \lambda(\text{tr } \mathbf{A})^2 + 2\mu \mathbf{A} : \mathbf{A} = \lambda(3\alpha)^2 + 2\mu(\mathbf{H} + \alpha \mathbf{I}) : (\mathbf{H} + \alpha \mathbf{I}) \\ &= 9\lambda\alpha^2 + 2\mu(\mathbf{H} : \mathbf{H} + 2\alpha \mathbf{I} : \mathbf{H} + \alpha^2 \mathbf{I} : \mathbf{I}) = 9\lambda\alpha^2 + 2\mu(\mathbf{H} : \mathbf{H} + 3\alpha^2) \\ &= 3\alpha^2(3\lambda + 2\mu) + 2\mu(\mathbf{H} : \mathbf{H}). \end{aligned}$$

A partir de este resultado vemos que $3\lambda + 2\mu > 0$ y $\mu > 0$ implican que \mathbf{C} es positivo. Viceversa, si \mathbf{C} es positivo, entonces eligiendo \mathbf{A} tal que $\alpha = 0$ obtenemos $\mu > 0$, y eligiendo \mathbf{A} tal que $\mathbf{H} = \mathbf{O}$ obtenemos $3\lambda + 2\mu > 0$. ■

Comentamos que la condición de elípticidad fuerte, en combinación con la simetría mayor, garantizan resultados de existencia y unicidad apropiados para las ecuaciones de elastodinámica lineal (6.36). En este caso estas ecuaciones son del tipo hiperbólico y permiten un rango completo de soluciones tipo onda. Para el modelo isotrópico estas condiciones están satisfechas si $\mu > 0$ y $\lambda + 2\mu > 0$ (Tarea).

La condición de la positividad, conjuntamente con la simetría mayor, garantizan resultados de existencia y unicidad apropiados para las ecuaciones de elastostática lineal (6.37). Para el modelo isotrópico estas condiciones están satisfechas si $\mu > 0$ y $3\lambda + 2\mu > 0$.

Finalmente es muy directo verificar que si un tensor de elasticidad \mathbf{C} es positivo, entonces es fuertemente elíptico. Esto es una consecuencia de las simetrías menores de \mathbf{C} si uno considera tensores de segundo orden simétricos de la forma $\mathbf{A} = \text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$.

6.5. Ejercicios

Problema 6.1 (Tarea 4, Curso 2013). Se considera un cuerpo elástico con la configuración de referencia B y la función respuesta elástica $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$.

- a) Demostrar que cualquier deformación independiente del tiempo y homogénea $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ satisface las ecuaciones del equilibrio (6.4).
- b) Demostrar que la fuerza de superficie externa por área unitaria deformada requerida para mantener una configuración de equilibrio homogénea es de la forma $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{n}(\mathbf{x})$, donde \mathbf{A} es un tensor constante dependiente de $\hat{\mathbf{P}}$ y $\boldsymbol{\varphi}$, y $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ es el campo normal unitario exterior sobre el cuerpo deformado.