UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN



Contribuciones a la aproximación de ecuaciones diferenciales parciales elípticas vía adaptatividad de mallas

Tesis para optar al grado de Magíster en Matemática Aplicada

CAMILA ANDREA CAMPOS MORA

Profesor Guía: Dr. Tomás Barrios Faúndez

Cotutor: Dr. Rommel Bustinza Pariona

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA APLICADAS Concepción - Chile Noviembre - 2022

AGRADECIMIENTOS

Voy a comenzar agradeciendo a la Dirección de Postgrado de la Universidad Católica de la Santisíma Concepción, por la Beca de Mantención. Y a ANID que a través del proyecto Fondecyt 1160578 contribuyó al financiamiento de este trabajo.

Gracias a cada miembro del programa de magíster que fue parte de este proceso de aprendizaje: Violeta Vivanco, Marco Uribe, Jessika Camaño, Abner Poza y Luis Gatica. A Patricia Alarcón por su infinita disposición. A mis compañeros, Elisa Martínez y Carlos Figueroa, fue un agrado compartir horas de clases con ustedes. A Marcelo Behrens por ayudarme a pensar los códigos de manera más eficiente.

Por supuesto, muchas gracias a Tomás y Rommel, por guiarme y entregarme las herramientas necesarias para el desarrollo de este trabajo, por el tiempo que dedicaron en ello y por la enorme paciencia.

Y por último, a los integrantes de la comisión evaluadora.

Resumen

En este trabajo de tesis realizamos un análisis de error a posteriori para ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Primero, mediante una descomposición de Helmholtz apropiada, obtenemos un estimador de error a posteriori de tipo residual de la formulación mixta dual conforme, para resolver el problema de Poisson con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas. Posteriormente, extendemos el análisis para el problema con condiciones de borde mixtas, utilizando una técnica de homogenización para tratar los datos de la frontera Neumann. Demostramos la confiabilidad y eficiencia de los estimadores de error a posteriori obtenidos. Además, desarrollamos un análisis de error a posteriori para el problema de Poisson con condiciones de borde mixtas, cuando el problema se aproxima utilizando una formulación LDG inusual. Probamos la confiabilidad del estimador y un tipo de eficiencia, donde el estimador es acotado superiormente por el error una norma distinta a la norma natural. Finalmente, para todos los casos incluimos ejemplos numéricos, probando que los algoritmos de refinamiento adaptativos basados en los estimadores de error a posteriori respectivos, localizan las singularidades de las soluciones exactas.

Abstract

In this thesis, we study an a posteriori analysis for elliptic partial differential equations. First, through an appropiate Helmholtz descomposition we derive a residual a posteriori error estimator for the dual mixed conforming formulation applied to Poisson problem with non homogeneous Dirichlet conditions. In addition, we extend the analysis to the problem with mixed boundary conditions, using an homogenization tecnique in order to approach the Neumann boundary data. We prove the reliability and local efficiency of this a posteriori error estimators. Furthermore, we develop an a posteriori analysis for an unusual dual mixed LDG formulation applied to Poisson problem with mixed boundary conditions. We prove that this residual estimator is reliable and we prove a type of local efficiency, the estimator is locally upper bounded by an error measured in another norm. Finally, in all cases, we include numerical examples showing that the adaptive algorithms, based on this a posteriori error estimators, are capable of localize the singularities of the exact solutions.

Contenidos

Resumen			VII	
\mathbf{A} l	bstra	.ct		IX
In	${ m trod}_1$	ucción		1
1.	Mét	odo d	e elementos finitos mixtos	5
	1.1.	Motiva	ación	5
	1.2.	Discus	sión bibliográfica	6
	1.3.	Result	tados preliminares	8
		1.3.1.	Notación vectorial y definiciones	8
		1.3.2.	Espacios de Sobolev	8
		1.3.3.	Teorema de trazas e identidades de Green	10
		1.3.4.	Triangulaciones	12
		1.3.5.	Algunos resultados y desigualdades útiles	14
	1.4.	Condi	ciones de borde Dirichlet	16
		1.4.1.	Problema continuo y esquema de Galerkin	16
		1.4.2.	Análisis de error a posteriori	22
	1.5.	Condi	ciones de borde mixtas	37
		1.5.1.	Problema continuo y esquema de Galerkin	38
		1.5.2.	Análisis de error a posteriori	39
	1.6.	Ejemp	olos numéricos	48
		1.6.1.	Ejemplo 1	50
		1.6.2.	Eiemplo 2	50

2.	Análisis de error a posteriori: método de Galerkin discontinuo local			55	
	2.1.	Motiva	ación	55	
	2.2. Discusión bibliográfica				
	2.3.	Métod	o de Galerkin discontinuo local	57	
		2.3.1.	Problema modelo	57	
		2.3.2.	Resultados preliminares	58	
		2.3.3.	Formulación LDG modificada	59	
		2.3.4.	Existencia, unicidad y estabilidad de la solución	61	
	2.4.	Anális	is del error a posteriori	67	
		2.4.1.	Confiabilidad del estimador	68	
		2.4.2.	Pseudo eficiencia del estimador	76	
	2.5.	Ejemp	los numéricos	82	
		2.5.1.	Ejemplo 1	83	
		2.5.2.	Ejemplo 2	84	
Co	onclu	siones		89	
Bi	Bibliografía				

Introducción

La aplicación de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) abarca una gran variedad de áreas, entre ellas la ingeniería, la biología, las ciencias físicas, la economía y la medicina, lo cual hace sumamente relevante su estudio. Sin embargo, debido a la complejidad de estos problemas, muchas veces no es posible encontrar soluciones analíticas y para esos casos el análisis numérico juega un rol esencial. Entre los métodos numéricos más comunes y conocidos para resolver EDP encontramos los métodos de elementos finitos, de volúmenes finitos, métodos espectrales y métodos de diferencias finitas. La popularidad que hace prevalecer el método de elementos finitos por sobre los demás, radica principalmente en el gran desarrollo que alcanzó su teoría en lo que respecta al análisis de error del mismo. Todo esto gracias a la introducción y posterior desarrollo de la teoría de las distribuciones y los espacios de Sobolev. Esto permite hoy en día tener una amplia bibliografía del método (por ejemplo, [32, 43, 56]).

En 1973, Reed y Hill [63], basándose en las ideas de los métodos de elementos finitos y de volúmenes finitos, introdujeron el método de Galerkin discontinuo (DG, por sus siglas en inglés), con el fin de resolver la ecuación de transporte de neutrones, (ecuación hiperbólica). Simultáneamente, se propusieron y estudiaron distintas versiones de métodos de Galerkin utilizando elementos finitos discontinuos para resolver ecuaciones elípticas y parabólicas de segundo orden [6, 7, 10, 51, 71]. Estos métodos de Galerkin discontinuos usualmente son llamados métodos de penalización interior (IP), cuyo desarrollo se considera independiente de los métodos DG propuestos para resolver ecuaciones hiperbólicas.

Los métodos de Galerkin discontinuos están basados en aproximaciones polinomiales discontinuas, lo cual permite diseñar esquemas numéricos robustos y obtener aproximaciones con precisión de alto orden. Estos métodos no requieren imponer

continuidad inter-elemento. Para ello se introducen términos de estabilización relacionados con los operadores salto y promedio de la solución aproximada, por lo cual es posible utilizar aproximaciones polinomiales de grado arbitrario, no necesariamente uniformes en todos los elementos de la malla, haciendo que estos métodos sean aptos para refinamientos hp. Además, los métodos de Galerkin discontinuos son convenientes para aplicarse en geometrías complejas y permiten mayor flexibilidad en la elección de la malla. Se pueden considerar, por ejemplo, mallas que contengan nodos colgantes.

En este trabajo estamos interesados en el método de Galerkin discontinuo local (LDG). Este método fue introducido por Cockburn y Shu [49] en 1998, para resolver sistemas hiperbólicos no lineales. El método LDG ha sido aplicado con buenos resultados a problemas completamente elípticos. Por ejemplo, en el año 2000, en [42] los autores probaron la convergencia del método LDG aplicado a la ecuación de Poisson con condiciones de borde mixtas, en [46] se probó la superconvergencia del método LDG para problemas elípticos en mallas cartesianas, mientras que el problema de Stokes fue tratado en 2002 por Cockburn et al. [48].

Recientemente, en el trabajo desarrollado en [19], se mostró que los operadores salto y promedio, usados para definir los flujos numéricos en el esquema LDG, son suficientes para aproximar H(div); lo cual permite reemplazar, por ejemplo, un espacio local de Raviart-Thomas por un espacio de Lagrange discontinuo. Además, los autores probaron que la tasa de convergencia del método, al utilizar un operador de interpolación de Lagrange no conforme, es optimal, como también lo es la tasa de convergencia del método de elementos finitos mixto clásico.

Altamente motivados por esta alternativa de aproximar H(div), en esta tesis se busca equipar al esquema con el correspondiente análisis de error a posteriori, cuyo objetivo principal es dar información cuantitativa del error y son la base para los métodos de refinamiento adaptativo. Como modelo consideramos el problema de Poisson en 2D, con condiciones de borde de tipo mixtas, aproximada mediante una formulación mixta dual no conforme utilizando elementos finitos de Lagrange. Se busca construir un estimador confiable y eficiente, y realizar la correspondiente validación numérica del mismo, considerando refinamiento uniforme y adaptativo.

Por otro lado, con el fin de utilizar de manera eficiente los recursos computacionales y mejorar la calidad de las soluciones aproximadas, que se pueden ver

Introducción 3

deterioradas producto de singularidades locales de la solución real, se utilizan las técnicas de adaptación de mallas. Los métodos de refinamiento adaptativos, o simplemente adaptatividad, consisten en refinar principalmente las regiones de la malla en las que el error es mayor. Es decir, estos algoritmos son capaces de detectar las zonas en las que la solución es menos regular, permitiendo generar mallas con un buen balance entre las regiones refinadas y no refinadas, de modo que la precisión global sea óptima.

La base para la adaptatividad consiste en definir una expresión η adecuada del error llamado estimador de error a posteriori, que solamente depende de la solución aproximada y de los datos del problema, ello debido a que en muchos casos la solución exacta no se conoce. Los estimadores de error a posteriori se calculan localmente, es decir, si \mathcal{T}_h es una triangulación del dominio, para cada T elemento de \mathcal{T}_h , se escribe

$$\eta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2},$$

donde, η_T es el estimador de error a posteriori en el elemento T.

Supongamos que u corresponde a la incógnita del problema, u_h es la solución aproximada y $\|\cdot\|$ denota la norma en la cual se desea calcular el error. Con el fin de garantizar que el estimador η represente una medida adecuada del error es deseable que existan constantes $C_1, C_2 > 0$, independientes del tamaño de la malla h, tales que

$$||u - u_h|| \leqslant C_1 \, \eta,\tag{1}$$

У

$$C_2 \eta_T \leqslant \|(u - u_h)|_T\|. \tag{2}$$

La cota superior (1) se conoce como confiabilidad, y es necesaria para garantizar la proximidad entre la solución discreta y la solución exacta, en otras palabras, asegurar que se conoce una medida fiable del error. Y la cota inferior (2) se conoce como eficiencia, y nos asegura que el estimador es eficiente en el sentido de que los elementos marcados por el estimador dado que tienen error grande, efectivamente lo tienen. Cabe mencionar que no siempre se puede obtener una cota inferior del tipo (2), sin embargo la cota superior (1) es necesaria.

En estos últimos años, se han desarrollado diferentes tipos de análisis de error a posteriori para métodos de Galerkin discontinuos (ver, por ejemplo, [30, 38, 59,

61, 64]). En particular, mediante una descomposición de Helmholtz adecuada, se han desarrollado análisis de error a posteriori para problemas lineales [17], para la ecuación de Darcy [18] y la ecuación de Helmholtz [23].

El presente trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera. Usando como modelo el problema de Poisson 2D con condiciones de borde del tipo Dirichlet y mixtas, en el Capítulo 1 se introduce el método de elementos finitos mixtos clásico conforme (ver [52]). A fin de contextualizar, utilizamos el caso con condición de borde Dirichlet no nula, con el cual damos una revisión de los resultados existentes sobre estimaciones del error a posteriori utilizando esquemas conformes. Además, puesto que los esquemas LDG tienen la ventaja de poder tratar de forma sencilla las condiciones de borde ya sean Dirichlet o mixtas, para el caso conforme presentamos una extensión del análisis del error a posteriori para métodos conformes con condiciones de borde mixtas, para lo cual, sorprendentemente no hemos encontrado un desarrollo en la literatura. En lo concreto, presentamos una técnica para obtener un estimador confiable y localmente eficiente, para ambas condiciones de borde, además desarrollamos el método adaptativo, incluyendo las validaciones numéricas. Los contenidos de este capítulo dieron origen a la siguiente publicación:

[20] T. P. Barrios, R. Bustinza, C. Campos, An a posteriori error estimator for a non homogeneous Dirichlet problem considering a dual mixed formulation. Trends in Computational and Applied Mathematics, vol. 23, pp. 549 – 568, (2022).

En el Capítulo 2, describimos y aplicamos el método LDG, desarrollamos el método adaptativo y su validación numérica. En este caso, puesto que una ventaja del método LDG es la simplicidad para imponer las condiciones de borde (Dirichlet o mixtas), se decidió comenzar inmediatamente con condiciones de borde mixtas.

Capítulo 1

Método de elementos finitos mixtos

1.1. Motivación

Singularidades locales provenientes, por ejemplo, de esquinas reentrantes, capas límites, ondas de choque o fenómenos de turbulencia, pueden deteriorar las aproximaciones obtenidas al utilizar un método de elementos finitos. Un remedio a esto, es refinar la malla completa. Sin embargo, esto puede traer consigo costos computacionales muy altos.

Los métodos de refinamiento adaptativos basados en estimadores de error a posteriori, ayudan a mejorar la calidad de la solución aproximada y utilizar de manera más eficiente los recursos computacionales, dado que permiten identificar las regiones en las cuales la solución es menos regular, lo cual permite generar mallas con un buen balance entre las regiones refinadas y no refinadas tales que la precisión global sea óptima.

Este capítulo surge con el fin de introducir y comparar un método de refinamiento adaptativo basado en un esquema conforme clásico, con el desarrollado al utilizar un método de Galerkin discontinuo. Cabe mencionar que los resultados son originales, en el caso de condiciones de borde mixtas, ya que no se encontró literatura con la técnica utilizada para obtener un estimador de error a posteriori en dicho caso.

1.2. Discusión bibliográfica

En la actualidad, los métodos de refinamiento adaptativos basados en estimadores de error a posteriori, son herramientas indispensables para implementar de manera eficiente un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales elípticas. Existen distintos tipos de estimadores de error a posteriori para diferentes ecuaciones y discretizaciones. En [70] se presenta una revisión de los más comunes.

Nuestro objetivo es desarrollar e implementar un método de refinamiento adaptativo para un método mixto. En estos métodos de elementos finitos se utilizan distintos espacios para aproximar las variables de interés. En algunos problemas las nuevas incógnitas deben ser introducidas en la formulación, como es el caso estudiado en este trabajo, mientras que otros problemas poseen de manera natural variables independientes, por lo cual la formulación mixta surge de manera natural. De esta manera, utilizar métodos de elementos finitos mixtos evita cualquier postprocesamiento numérico de las variables de interés que podría conducir a fuentes de error adicionales.

Las primeras aplicaciones de los métodos mixtos aparecen en la década de los setenta. En 1973, se introdujeron ideas fundamentales para el desarrollo de estos métodos en [9] y [50]. Y al año siguiente, Brezzi [34] presentó por primera vez un análisis general para este tipo de métodos. Una revisión completa de los fundamentos matemáticos de los métodos de elementos finitos mixtos se proporciona, por ejemplo, en [35, 56, 66].

Existe mucha literatura sobre análisis de error a posteriori para métodos mixtos (ver por ejemplo, [3, 4, 60, 68, 69]). En particular, debido a nuestro interés en los métodos de elementos finitos basados en una formulación mixta dual conforme, mencionamos [5] donde mediante una descomposición de Helmholtz se deducen estimadores de error a posteriori para elementos finitos de Raviart-Thomas (RT) y Brezzi-Douglas-Marini (BDM). Simultáneamente, en [31] utilizando elementos finitos de RT para aproximar la variable vectorial, se dedujo un estimador confiable y eficiente utilizando una norma dependiente de la malla y un estimador confiable utilizando la llamada norma natural, es decir, la norma H(div) para el fujo y la norma L^2 para la variable escalar; ambos estimadores asumiendo una hipótesis de saturación. En [39], se desarrolló un estimador confiable y eficiente evitando la hi-

pótesis de saturación. Años más tarde, en [54], se introdujo un estimador de error a posteriori para un método mixto utilizando elementos finitos de Lagrange.

Por otro lado, en el contexto de formulaciones mixtas aumentadas, en [13] se desarrolló un estimador de error a posteriori alternativo al introducido en [29], para resolver un problema de elasticidad lineal. Mediante una proyección de Ritz del error, en el caso de condiciones de borde Dirichlet homogéneas, se obtuvo un estimador confiable y localmente eficiente, que a diferencia del estimador desarrollado en [29] para el mismo caso, sólo requiere el cálculo de cuatro términos por elemento. Similarmente, en [14] se estudió un problema de elasticidad lineal con condiciones de borde mixtas. Como resultado, se dedujo un estimador de error a posteriori con siete términos por elemento, reduciendo los trece términos del estimador desarrollado previamente en [12] para los mismos espacios de elementos finitos. Este tipo de estimador de error a posteriori ha sido desarrollado con buenos resultados en otras direcciones, por ejemplo, el problema de Poisson [28], el sistema de Stokes [11, 22], el problema de Darcy [25, 26] y las ecuaciones de Oseen [27].

Siguiendo estas ideas, el objetivo de este Capítulo es desarrollar un estimador de error a posteriori confiable y eficiente, basado en una proyección de Ritz del error, evitando la hipótesis de saturación y utilizando la norma natural, incluyendo condiciones de borde Dirichlet no homogéneas y mixtas. En particular, para las condiciones de borde mixtas utilizamos una técnica de homogenización y seguimos las ideas descritas en [26] para tratar los datos de la frontera Neumann. Así, nuestro enfoque es diferente al presentado en [54], donde las condiciones de borde Neumann se impusieron de manera débil mediante la introducción de un multiplicador de Lagrange.

El Capítulo se divide en cuatro grandes secciones. Primero introducimos resultados y conceptos necesarios para el estudio de los métodos de elementos finitos. Posteriormente, presentamos el análisis de error a posteriori para el problema con condiciones de tipo Dirichlet no homogéneas y para el problema con condiciones de borde mixtas. Finalmente, incluimos una sección de ejemplos numéricos, con el fin de confirmar los resultados teóricos obtenidos.

1.3. Resultados preliminares

En esta sección introducimos brevemente algunos conceptos básicos necesarios para el desarrollo teórico de los métodos de elementos finitos y de Galerkin discontinuos.

1.3.1. Notación vectorial y definiciones

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. El operador gradiente de una función escalar $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y el operador divergencia de una función vectorial $\boldsymbol{\tau} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se definen, respectivamente, como

$$\nabla v := \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \text{div } \boldsymbol{\tau} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}.$$

Se define la *n*-upla $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$ como un multi-índice, de longitud

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Denotamos por $D^{\alpha}v$ la derivada multidimensional de v de orden $|\alpha|$, como

$$D^{\alpha} v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}}$$

En lo que sigue, denotamos por Ω a un abierto acotado no vacío de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ (en la práctica n = 1, 2, 3), de frontera regular.

Definición 1.3.1 El soporte de una función continua v definida en \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$, es la clausura del conjunto de puntos en los cuales la función es distinta de cero. Si es acotado y está contenido en el interior del dominio Ω , entonces se dice que v tiene soporte compacto en Ω .

Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio de funciones C^{∞} con soporte compacto en Ω . El espacio dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ es llamado espacio de distribuciones.

1.3.2. Espacios de Sobolev

En esta subsección trataremos de manera general algunos resultados sobre espacios de Sobolev que utilizaremos durante el desarrollo de todo este trabajo. Para

más detalles consultar, por ejemplo, [1, 33, 53]. Comenzaremos con la definición del espacio de Lebesgue L^2 .

Definición 1.3.2 Dado un conjunto medible Lebesgue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos el espacio de Lebesgue $L^2(\Omega)$ como el espacio de las funciones medibles $u:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que

$$\int_{\Omega} |u|^2 < \infty.$$

El espacio de Lebesgue $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior $\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}:=(u,v)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega u\,v\quad\forall\,u,v\in L^2(\Omega).$ La norma inducida viene dada por

$$||u||_{L^2(\Omega)} := \langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right)^{1/2} \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

En particular, el producto interior y la norma satisfacen la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir

$$|\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}| \leqslant ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Definición 1.3.3 (Espacio de Sobolev de orden m) Para cada $m \in \mathbb{Z}_0^+$, definimos el espacio de Sobolev de orden m, denotado por $H^m(\Omega)$, como

$$H^{m}(\Omega) := \{ u \in L^{2}(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^{2}(\Omega), \ \forall \alpha \in (\mathbb{Z}_{0}^{+})^{n}, \ |\alpha| \leqslant m \},$$

donde, la pertenencia de $D^{\alpha}u$ a $L^{2}(\Omega)$ es en el sentido distribucional. Es decir, existe $z \in L^{2}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} v \, D^{\alpha} \phi = (-1)^{\alpha} \int_{\Omega} z \, \phi \qquad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

El espacio $H^m(\Omega)$ está equipado con la norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le m} ||D^{\alpha}u||_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \quad \forall u \in H^m(\Omega), \tag{1.3.1}$$

y la seminorma

$$|u|_{H^{m}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right)^{1/2} \quad \forall u \in H^{m}(\Omega). \tag{1.3.2}$$

Si m=0 se identifica $H^0(\Omega):=L^2(\Omega)$. Y además, para una función vectorial $\boldsymbol{\tau}:=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)\in [H^m(\Omega)]^n$, definimos

$$\|oldsymbol{ au}\|_{[H^m(\Omega)]^n} := \left(\sum_{i=1}^n \| au_i\|_{H^m(\Omega)}^2
ight)^{1/2}.$$

El espacio $H^m(\Omega)$ es completo respecto a la norma definida en (1.3.1), y puesto que ésta proviene del producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

entonces, el espacio $H^m(\Omega)$ resulta ser un espacio de Hilbert.

Por último, introducimos el espacio $H(\text{div}; \Omega)$.

Definición 1.3.4 Se define el espacio $H(\text{div}; \Omega)$ por

$$H(\operatorname{div}; \Omega) := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \},$$

donde, div $\tau \in L^2(\Omega)$ en el sentido distribucional. Es decir, existe $z \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \tau_{i} \frac{\partial \phi}{\partial x_{i}} = -\int_{\Omega} z \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

El espacio $H(\text{div}; \Omega)$, dotado con el producto interior

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \rangle_{H(\operatorname{div};\Omega)} := (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma})_{H(\operatorname{div};\Omega)} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \quad \forall \, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div};\Omega),$$

y norma inducida

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} := \{\|\boldsymbol{\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2\}^{1/2} \quad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega),$$

es un espacio de Hilbert.

1.3.3. Teorema de trazas e identidades de Green

A continuación presentaremos algunos resultados sobre trazas, fórmulas de integración por partes e identidades de Green en espacios de Sobolev, y en particular para el espacio $H(\text{div}; \Omega)$.

11

Trazas en $H^1(\Omega)$

Dado un abierto acotado Ω de \mathbb{R}^n con frontera poligonal Γ , de acuerdo a la Definición 1.3.3, el espacio de Sobolev de orden 1 se define como

$$H^{1}(\Omega) := \left\{ v \in L^{2}(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_{i}} \in L^{2}(\Omega) \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \right\},\,$$

donde, la pertenencia de $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ se entiende en el sentido distribucional.

En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ al espacio de funciones de clase C_0^{∞} sobre algún abierto que contiene a $\bar{\Omega}$. El clásico Teorema de trazas en $H^1(\Omega)$ requiere del siguiente resultado previo.

Teorema 1.3.1 (Designaldad de Trazas) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera poligonal Γ y sea $\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ la aplicación definida por

$$\gamma_0(\varphi) := \varphi|_{\Gamma} \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Entonces, existe C > 0, tal que

$$\|\gamma_0(\varphi)\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Al operador γ_0 se le llama operador traza.

Teorema 1.3.2 (Teorema de Trazas en $H^1(\Omega)$) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera poligonal Γ . Entonces, la aplicación $\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ se extiende por continuidad y densidad a una aplicación $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ lineal y acotada, tal que

$$\gamma_0(\varphi) := \varphi|_{\Gamma} \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

La función $\gamma_0(\varphi) \in L^2(\Gamma)$ se llama la traza de $\varphi \in H^1(\Omega)$ sobre la frontera de Ω . Cuando no exista confusión, se denotará por $\varphi|_{\Gamma}$ o simplemente por φ .

El espacio $H^{1/2}(\Gamma)$

Denotamos por $H^{1/2}(\Gamma)$, y lo llamamos espacio de trazas sobre la frontera, al rango de γ_0 , es decir, $H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^1(\Omega)) \subset L^2(\Gamma)$, el cual es provisto de la norma

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \inf\{\|v\|_{H^1(\Omega)} : v \in H^1(\Omega) \text{ tal que } \gamma_0(v) = \varphi\} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma).$$

De la definición anterior, se sigue que

$$\|\gamma_0(w)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Trazas normales en $H(\text{div}; \Omega)$

Denotamos por $H^{-1/2}(\Gamma)$ al dual de $H^{1/2}(\Gamma)$. Dado un funcional $F \in H^{-1/2}(\Gamma)$, usualmente su evaluación en un elemento $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ se escribe como $\langle F, \varphi \rangle$, esto es

$$\langle F, \varphi \rangle := F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma),$$

razón por la cual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se denomina paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$. Desde ahora en adelante, denotamos por ν al vector unitario normal exterior a la frontera Γ .

Teorema 1.3.3 (Traza normal de $H(\text{div}; \Omega)$) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera poligonal Γ . Entonces, existe un operador lineal, acotado y sobreyectivo $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}: H(\text{div}; \Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que para cada $\boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega)]^n$, $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau})$ se identifica con $\gamma_0(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\nu}$ mediante el producto escalar de $L^2(\Gamma)$.

Integración por partes e identidad de Green

De la densidad de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ y el Teorema de trazas obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.4 (Fórmula de integración por partes) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera poligonal Γ . Entonces, para todo $v, w \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} w \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_0(w) \nu_i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\},$$

donde, ν_i es la componente i-ésima del vector normal $\boldsymbol{\nu}$.

De los resultados anteriores se deduce la identidad de Green en $H(\text{div}; \Omega)$.

Lema 1.3.1 (Identidad de Green en $H(\text{div}; \Omega)$) Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera poligonal Γ . Entonces, se tiene

$$\langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\tau}), \gamma_0(v) \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla v + \int_{\Omega} v \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \, \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega).$$
 (1.3.3)

1.3.4. Triangulaciones

En esta sección abordaremos aspectos básicos concernientes a mallas de elementos finitos e introduciremos notaciones que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Para más detalles se recomienda consultar, por ejemplo, [43].

Definición 1.3.5 (n-simplex) Sea $\{a_0, ..., a_n\}$ una familia de (n+1) puntos en \mathbb{R}^n , tales que los vectores $\{a_1 - a_0, ..., a_n - a_0\}$ son linealmente independientes. Entonces, la cápsula convexa generada por $\{a_0, ..., a_n\}$, se llama un n-simplex no degenerado de \mathbb{R}^n . Los puntos $\{a_0, ..., a_n\}$ son llamados vértices.

En particular, un simplex en \mathbb{R}^2 es un triángulo y en \mathbb{R}^3 es un tetraedro. Debido a ello denotaremos un simplex por T. En lo que resta de la sección, supondremos que $\Omega \in \mathbb{R}^n$ es el interior de un polígono o poliedro, según sea n=2 o n=3, respectivamente.

Definición 1.3.6 Se llama triangulación (o malla) de $\bar{\Omega}$ a un conjunto finito de n-simplex $\mathcal{T}_h := \{T_1, ..., T_N\}$, tal que

- T_j es un poliedro de $\mathbb{R}^n \ \forall j \in \{1,...,N\}$, con interior no vacío.
- $\bullet \bar{\Omega} = \bigcup \{T : T \in \mathcal{T}_h\}.$
- Para cada $T_i, T_i \in \mathcal{T}_h$, con $i \neq j$, $\mathring{T}_i \cap \mathring{T}_j = \emptyset$.
- Toda cara de T_j es una cara de otro poliedro T_i o bien es una parte de la frontera de Ω . En el primer caso, se dice que T_i y T_j son adyacentes.

Decimos que una triangulación es conforme si la intersección de dos elementos en \mathcal{T}_h es vacía, o un vértice en común o un lado en común. Esto no es necesario para el método de Galerkin discontinuo, en el que incluso se admiten mallas que posean nodos colgantes.

Denotamos por h_T el diámetro del elemento $T \in \mathcal{T}_h$ y así, el tamaño de la malla es dado por $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$. Notamos que h denota simultáneamente un índice de la triangulación \mathcal{T}_h y el tamaño de la malla. Se dice que una familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, es regular (o shape-regular) si los elementos de cualquier \mathcal{T}_h no se denegeran, es decir, que no se estiran ni se aplastan indefinidamente, esto es, existe una constante independiente de h, tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leqslant C \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

donde, ρ_T es el diámetro de la mayor bola *n*-dimensional inscrita en T.

Dada una triangulación \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$, se define lado interior de \mathcal{T}_h como $\partial T \cap \partial T'$, con $T, T' \in \mathcal{T}_h$ elementos adyacentes. Y lado de frontera como $\partial T \cap \partial \Omega$. Denotamos por:

- \mathcal{E}_I : Lista de todos los lados interiores de \mathcal{T}_h .
- \mathcal{E}_{Γ} : Lista de todos los lados de frontera de \mathcal{T}_h .
- \mathcal{E}_D : Lista de todos los lados sobre la frontera Dirichlet.
- \mathcal{E}_N : Lista de todos los lados sobre la frontera Neumann.
- $\mathcal{E} := \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_{\Gamma}$: Lista de todos los lados, o esqueleto, de los elementos en \mathcal{T}_h .

Ahora, para cada vértice x_i de la triangulación, se define

$$\omega_i := \bigcup \{ T \in \mathcal{T}_h : x_i \in T \},$$

para cada $T \in \mathcal{T}_h$, se define

$$\omega(T) := \bigcup \{ \omega_i : x_i \in T \},\$$

y para cada lado $e \in \mathcal{E}$, se define

$$\omega(e) := \cup \{\omega_j : x_j \in e\}.$$

1.3.5. Algunos resultados y desigualdades útiles

Ahora, introduciremos algunos resultados conocidos que serán de gran utilidad. Por simplicidad y por tratarse de resultados clásicos, no se incluyen demostraciones.

Funciones Burbuja

Dado un entero $l \geqslant 0$ y un subconjunto S de \mathbb{R}^2 , denotamos por $\mathcal{P}_l(S)$ al espacio de polinomios de grado menor o igual a l en dos variables, definido en S. Luego, dado un elemento $T \in \mathcal{T}_h$ y $e \in E(T)$, con E(T) el conjunto de todos los lados de T, se definen las funciones burbuja de elemento $\psi_T \in \mathcal{P}_3(T)$ y de lado $\psi_e \in \mathcal{P}_2(T)$, como

$$\psi_T(x,y) = 27 \lambda_1(x,y) \lambda_2(x,y) \lambda_3(x,y)$$
 y $\psi_e(x,y) = 4 \lambda_i(x,y) \lambda_j(x,y)$,

donde, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son las coordenadas baricéntricas de T y $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ son los vértices que definen e. Las funciones burbujas ψ_T y ψ_e satisfacen las siguientes propiedades:

- $0 \leqslant \psi_T \leqslant 1 \text{ en } T$, $\psi_T = 0 \text{ en } \partial T$ y sop $\psi_T \subseteq T$.
- $0 \leqslant \psi_e \leqslant 1$ en $\omega_e := \bigcup \{T' \in \mathcal{T}_h : e \in E(T')\}, \ \psi_e = 0$ en $\partial \omega_e$ y sop $\psi_e \subseteq \omega_e$.

Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $T \in \mathcal{T}_h$ y e lado de T, existe un operador de extensión $L: C(e) \to C(T)$, tal que para cada $p \in \mathcal{P}_k(e)$,

$$L(p) \in \mathcal{P}_k(T)$$
 y $L(p)|_e = p$.

En el siguiente Lema se entregan propiedades adicionales para ψ_T , ψ_e y L.

Lema 1.3.2 Para cada triángulo T existen constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, que dependen de k y de la forma de T, tal que $\forall q \in \mathcal{P}_k(T)$ y $p \in \mathcal{P}_k(e)$, se tiene

$$\|\psi_T q\|_{L^2(T)}^2 \le \|q\|_{L^2(T)}^2 \le c_1 \|\psi_T^{1/2} q\|_{L^2(T)}^2$$
(1.3.4)

$$\|\psi_e p\|_{L^2(e)}^2 \le \|p\|_{L^2(e)}^2 \le c_2 \|\psi_e^{1/2} p\|_{L^2(e)}^2$$
(1.3.5)

$$c_4 h_e \|p\|_{L^2(e)}^2 \le \|\psi_e^{1/2} L(p)\|_{L^2(T)}^2 \le c_3 h_e \|p\|_{L^2(e)}^2$$
 (1.3.6)

 $donde, h_e$ es la longitud del lado e.

Demostración. Ver el Lema 4.1 de [69].

Las siguientes desigualdades también serán de gran ayuda.

Lema 1.3.3 (Designaldad de Cauchy-Schwarz) Sean $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_i\}_{i=1}^n$, dos sucesiones de números reales. Entonces,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right\}^{1/2}.$$

Lema 1.3.4 (Designaldad inversa) Sea $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $l \leq m$. Entonces, para cada triángulo T, existe $C_I > 0$, que depende solamente de k, l, m y de la forma de T, tal que

$$|q|_{H^m(T)} \le C_I h_T^{l-m} |q|_{H^l(T)} \quad \forall q \in \mathcal{P}_k(T).$$
 (1.3.7)

Demostración. Ver el Teorema 3.2.6 de [43].

Lema 1.3.5 (Designaldad de trazas discretas) Existe $C_D > 0$, que depende solamente de la regularidad de la familia de triangulaciones, tal que para cada $T \in \mathcal{T}_h$ y para cada $e \in E(T)$, se tiene

$$||v||_{L^{2}(e)}^{2} \leqslant C_{D} \{h_{e}^{-1} ||v||_{L^{2}(T)}^{2} + h_{e} ||\nabla v||_{[L^{2}(T)]^{2}}^{2}\} \quad \forall v \in H^{1}(T).$$
(1.3.8)

Demostración. Los detalles se encuentran en el Teorema 3.10 en [2]. □

1.4. Condiciones de borde Dirichlet

En esta sección abordamos el problema de Poisson con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas. Comenzamos describiendo el problema continuo y deduciendo el esquema de Galerkin.

1.4.1. Problema continuo y esquema de Galerkin

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y simplemente conexo con frontera poligonal Γ . Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consideremos el problema: Hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases}
-\Delta u = f & \text{en } \Omega \\
u = g & \text{sobre } \Gamma.
\end{cases}$$
(1.4.1)

Introduciendo una variable auxiliar $\sigma := \nabla u$ en Ω , el problema (1.4.1) se reescribe como el sistema de primer orden:

$$\begin{cases}
\boldsymbol{\sigma} = \nabla u & \text{en } \Omega, \\
\text{div } \boldsymbol{\sigma} = -f & \text{en } \Omega, \\
u = g & \text{sobre } \Gamma.
\end{cases}$$
(1.4.2)

Para obtener la formulación variacional mixta dual del problema (1.4.1), procedemos de la manera habitual: multiplicamos la primera ecuación del problema por un elemento $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$ y aplicamos la identidad de Green (1.3.3), considerando que u = g sobre la frontera, así

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle. \tag{1.4.3}$$

donde, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$ con respecto al producto interior de $L^2(\Gamma)$ y $\boldsymbol{\nu}$ representa el vector unitario normal exterior a Γ .

Por otro lado, multiplicando por $v \in L^2(\Omega)$ e integrando, la ecuación de equilibrio div $\sigma = -f$ en Ω se escribe como:

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\int_{\Omega} f v \qquad \forall v \in L^{2}(\Omega).$$
(1.4.4)

Así, de las ecuaciones (1.4.3) y (1.4.4) deducimos que el problema consiste en: Hallar $(\boldsymbol{\sigma},u)\in \boldsymbol{\Sigma}:=H({\rm div};\,\Omega)\times L^2(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, u) = F(\boldsymbol{\tau}) & \forall \, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \, \Omega), \\ b(\boldsymbol{\sigma}, v) = G(v) & \forall \, v \in L^2(\Omega), \end{cases}$$
(1.4.5)

donde, $a: H(\text{div}; \Omega) \times H(\text{div}; \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b: H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, son formas bilineales definidas por

$$a(oldsymbol{
ho}, oldsymbol{ au}) := \int_{\Omega} oldsymbol{
ho} \cdot oldsymbol{ au}, \ b(oldsymbol{ au}, v) := \int_{\Omega} v \operatorname{div} oldsymbol{ au},$$

y los funcionales lineales $F: H(\mathrm{div};\,\Omega) \to \mathbb{R}$ y $G: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ quedan dados por

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle$$
$$G(v) := -\int_{\Omega} f \, v.$$

Usando la teoría de Babuška-Brezzi se puede probar que (1.4.5) es un problema bien propuesto. Lo cual presentamos en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.1 El problema (1.4.5) tiene única solución $(\sigma, u) \in \Sigma$. Más aún, existe una constante C > 0, independiente de la solución, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}.$$

Demostración. Primero notamos que las formas bilineales a y b son acotadas. Sea $\mathbf{B}: H(\operatorname{div};\Omega) \to L^2(\Omega)$ el operador lineal y acotado inducido por la forma bilineal b, entonces

$$V := N(\mathbf{B}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega) : b(\boldsymbol{\tau}, v) = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega) \}.$$

De la definición de b tenemos que $\int_{\Omega} v \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega)$. Por lo cual, dado que $\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ se concluye que $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)$. En partícular, escogiendo $v := \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$, obtenemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} = 0,$$

lo cual, implica que div $\tau = 0$, y así

$$V = \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ en } \Omega \}.$$

Ahora, para todo $\tau \in V$

$$a(oldsymbol{ au},oldsymbol{ au}) = \int_{\Omega} oldsymbol{ au} \cdot oldsymbol{ au} = \|oldsymbol{ au}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|oldsymbol{ au}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}^2,$$

por lo cual, a es V- elíptica, con constante de elípticidad $\alpha = 1$. Resta probar que b satisface la condición inf-sup, es decir, existe $\beta > 0$, tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega)} \frac{b(\boldsymbol{\tau},v)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}} \geqslant \beta \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para ello, definimos el espacio $H_0^1(\Omega) := \{ w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ sobre } \Gamma \} \subset H^1(\Omega)$ y dado $v \in L^2(\Omega)$ se introduce un problema auxiliar: Hallar $z \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases}
-\Delta z = v & \text{en } \Omega, \\
z = 0 & \text{sobre } \partial \Omega,
\end{cases}$$

cuya formulación variacional se reduce a: Hallar $z \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla w = \int_{\Omega} v \, w \qquad \forall \, w \in H_0^1(\Omega).$$

Por el Lema de Lax-Milgram, sabemos que este problema tiene única solución, la cual satisface

$$||z||_{H^1(\Omega)} \leqslant c ||v||_{L^2(\Omega)}, \quad \text{para algún} \quad c > 0.$$

Ahora, definiendo $\hat{\tau} := -\nabla z$, del problema auxiliar se obtiene que div $\hat{\tau} = v$ en Ω y dado que $v \in L^2(\Omega)$ se sigue que div $\hat{\tau} \in L^2(\Omega)$, por lo tanto $\hat{\tau} \in H(\text{div}; \Omega)$, entonces

$$\|\widehat{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} = \{\|\widehat{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|\operatorname{div}\widehat{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\}^{1/2}$$

$$= \{\|\nabla z\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|v\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\}^{1/2}$$

$$\leq \{\|z\|_{H^{1}(\Omega)}^{2} + \|v\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\}^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{(c^{2}+1)} \|v\|_{L^{2}(\Omega)}.$$

Luego,

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega)} \frac{b(\boldsymbol{\tau},v)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}} \geqslant \frac{b(\widehat{\boldsymbol{\tau}},v)}{\|\widehat{\boldsymbol{\tau}}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}}$$
$$\geqslant \beta \frac{b(\widehat{\boldsymbol{\tau}},v)}{\|v\|_{L^{2}(\Omega)}}$$
$$= \beta \frac{\int_{\Omega} v \operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{\tau}}}{\|v\|_{L^{2}(\Omega)}}$$
$$= \beta \|v\|_{L^{2}(\Omega)},$$

con $\beta := 1/\sqrt{(c^2+1)}$. Así, se verifican las condiciones de la Teoría de Babuška-Brezzi, por lo cual el problema (1.4.5) tiene única solución.

Con el fin de definir la aproximación por elementos finitos de la solución $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ de (1.4.5), necesitamos introducir subespacios de dimensión finita de $H(\text{div}; \Omega)$ y $L^2(\Omega)$. En lo que resta de la sección, se asume que Ω es una región poligonal y $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones conformes de $\bar{\Omega}$, hecha de triángulos. Así, para cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$, definimos el espacio local de Raviart-Thomas de orden $r \geqslant 0$

$$\mathcal{RT}_r(T) := [\mathcal{P}_r(T)]^2 \oplus \boldsymbol{x}\mathcal{P}_r(T) \subseteq [\mathcal{P}_{r+1}(T)]^2 \quad \forall \, \boldsymbol{x} \in T.$$

Además, definimos los espacios de aproximación

$$H_h^u := \{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_r(T), \ \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \tag{1.4.6}$$

У

$$H_h^{\sigma} := \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega) : \boldsymbol{\tau}|_T \in \mathcal{RT}_r(T), \ \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$
 (1.4.7)

Así, el problema discreto consiste en: Hallar $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h := H_h^{\sigma} \times H_h^u$, tal que

$$\begin{cases}
a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, u_h) = F(\boldsymbol{\tau}_h) & \forall \boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}, \\
b(\boldsymbol{\sigma}_h, v_h) = G(v_h) & \forall v_h \in H_h^{u}.
\end{cases}$$
(1.4.8)

De acuerdo a lo anterior, se puede probar que el problema (1.4.8) está bien planteado. Para ello, es necesario introducir el siguiente operador. Sea $\Pi_h^r: [H^1(\Omega)]^2 \to H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ el operador de interpolación de Raviart-Thomas (ver [35, 66]), donde para todo $\boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega)]^2$, $\Pi_h^r(\boldsymbol{\tau}) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ está definido por

$$\int_{e} \Pi_{h}^{r}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, v = \int_{e} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \, v, \quad \forall \, e \in \mathcal{E}, \quad \forall \, v \in \mathcal{P}_{r}(e) \quad \text{con } r \geqslant 0, \tag{1.4.9}$$

У

$$\int_{T} \Pi_{h}^{r}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\rho} = \int_{T} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h}, \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in [\mathcal{P}_{r-1}(T)]^{2} \quad \text{con } r \geqslant 1.$$
 (1.4.10)

El operador Π_h^r satisface las siguientes propiedades de aproximación.

Lema 1.4.1 Existen constantes $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3 > 0$, independientes de h, tales que para cada $T \in \mathcal{T}_h$, se tiene

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^r(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(T)]^2} \leqslant \hat{c}_1 h_T^m |\boldsymbol{\tau}|_{[H^m(T)]^2} \quad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in [H^m(\Omega)]^2, \quad 1 \leqslant m \leqslant r+1, \quad (1.4.11)$$

para cada $\boldsymbol{\tau} \in [H^{m+1}(\Omega)]^2$, con div $\boldsymbol{\tau} \in H^m(\Omega)$,

$$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^r(\boldsymbol{\tau}))\|_{L^2(T)} \leqslant \hat{c}_2 h_T^m |\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}|_{H^m(T)} \quad 0 \leqslant m \leqslant r+1,$$
 (1.4.12)

y para todo $e \in \mathcal{E}$,

$$\|\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} - \Pi_h^r(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(e)} \le \hat{c}_3 h_e^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(T_e)]^2} \quad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega)]^2,$$
 (1.4.13)

donde $T_e \in \mathcal{T}_h$ contiene el lado e en su frontera.

Demostración. Los detalles de la prueba se encuentran en [35] o [66]. □

El operador de interpolación Π_h^r puede ser definido como un operador lineal y acotado desde el espacio $H(\text{div}; \Omega) \cap [H^s(\Omega)]^2$ a H_h^{σ} , para todo $s \in (1/2, 1]$, y además, del Teorema 3.16 en [58] para cada $T \in \mathcal{T}_h$, se cumple que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h^r(\boldsymbol{\tau})\|_{[L^2(T)]^2} \leqslant C h_T^s \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^s(\Omega)]^2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{L^2(T)} \right\} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Usando (1.4.9) y (1.4.10), se deduce

$$\operatorname{div}(\Pi_h^r(\boldsymbol{\tau})) = P_h^r(\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau})), \tag{1.4.14}$$

donde, $P_h^r: L^2(\Omega) \to H_h^u$ denota la proyección ortogonal de $L^2(\Omega)$ en H_h^u . Un resultado conocido (ver, por ejemplo, [43]), es que para cada $v \in H^m(\Omega)$, con $0 \le m \le r+1$, se cumple

$$||v - P_h^r(v)||_{L^2(T)} \leqslant C h_T^m |v|_{H^m(T)} \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

En el siguiente Teorema probamos la existencia y unicidad de solución del problema discreto (1.4.8).

Teorema 1.4.2 El problema (1.4.8) tiene única solución $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h$. Más aún, existe una constante C > 0, independiente de h, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} + \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}.$$

Demostración. Sea $B_h: H_h^{\sigma} \to H_h^u$ el operador lineal y acotado inducido por la forma bilineal b para el problema discreto y

$$V_h := N(\boldsymbol{B}_h) = \{ \boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} : b(\boldsymbol{\tau}_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in H_h^u \}.$$

Como div $\mathcal{RT}_r = \mathcal{P}_r$ se puede escoger $v_h := \text{div } \boldsymbol{\tau}_h$ y luego, de la definición de b, de la misma forma que en el caso continuo, se obtiene que

$$V_h = \{ \boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}} : \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h = 0 \quad \operatorname{en} \Omega \}.$$

Ahora, para cada $\tau_h \in V_h$, se sigue

$$a(oldsymbol{ au}_h, oldsymbol{ au}_h) = \int_{\Omega} oldsymbol{ au}_h \cdot oldsymbol{ au}_h = \|oldsymbol{ au}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|oldsymbol{ au}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}^2,$$

y por lo tanto, a es V_h -elíptica. Resta probar que b satisface la condición inf-sup discreta, es decir, existe $\beta > 0$, tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, v_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}} \geqslant \beta \|v_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para ello, dado $v_h \in H_h^u$ se introduce el problema: Hallar $z \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta z = v_h & \text{en } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases}$$

Por el Lema de Lax-Milgram, sabemos que este problema tiene única solución. Se define $\hat{\tau}_h := -\nabla z$. Así, del problema auxiliar se obtiene que div $\hat{\tau}_h = v_h$ en Ω y dado que $v_h \in L^2(\Omega)$ se sigue que div $\hat{\tau}_h \in L^2(\Omega)$, por lo tanto $\hat{\tau}_h \in H(\text{div}; \Omega)$. Para asegurar que el operador interpolante de Raviart-Thomas está bien definido, se utiliza un resultado de regularidad adicional asociado a la EDP (ver [57]). Así, $z \in H^{1+s}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, para algún $s \in (1/2, 1]$ y se cumple que

$$||z||_{H^{1+s}(\Omega)} \leqslant c ||v_h||_{L^2(\Omega)}$$

Luego, notando que como $z \in H^{1+s}(\Omega)$, se sigue que $\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h \in [H^s(\Omega)]^2$ y

$$\|\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{[H^s(\Omega)]^2} \leqslant c \|v_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Entonces, $\Pi_h^r(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h) \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ y de (1.4.14), se deduce que

$$\operatorname{div}(\Pi_h^r(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h)) = P_h^r(\operatorname{div}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h)) = P_h^r(v_h) = v_h \qquad \forall v_h \in H_h^u.$$

Por otro lado, del Lema 1.4.1 se sigue que

$$\|\Pi_{h}^{r}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{h})\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}^{2} = \|\Pi_{h}^{r}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{h})\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|\operatorname{div}(\Pi_{h}^{r}(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{h}))\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}$$

$$\leq C \|\widehat{\boldsymbol{\tau}}_{h}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|v_{h}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}$$

$$\leq (C+1)\|v_{h}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}.$$

Así,

$$\|\Pi_h^r(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h)\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} \leqslant \mathcal{C} \|v_h\|_{L^2(\Omega)},$$

con $\mathcal{C} := (C+1)^{1/2}$. Luego, para cada $v_h \in H_h^u$, se tiene

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, v_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}} \geqslant \frac{b(\Pi_h^r(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h), v_h)}{\|\Pi_h^r(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h)\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}}$$
$$\geqslant \beta \frac{\int_{\Omega} v_h \operatorname{div}(\Pi_h^r(\widehat{\boldsymbol{\tau}}_h))}{\|v_h\|_{L^2(\Omega)}}$$
$$= \beta \|v_h\|_{L^2(\Omega)},$$

con $\beta := \mathcal{C}^{-1}$. Así, se verifican las condiciones de la Teoría de Babuška-Brezzi versión discreta, por lo cual el problema (1.4.8) tiene única solución.

1.4.2. Análisis de error a posteriori

En esta sección desarrollamos un análisis del error a posteriori del problema discreto (1.4.8), siguiendo el análisis de [13] (ver también [22]), basado en una proyección de Ritz del error y en una cuasi descomposición de Helmholtz. Comenzamos introduciendo algunas notaciones y resultados preliminares.

Primero, fijamos el vector unitario normal exterior a $T \nu_T := (\nu_1, \nu_2)^t$, y denotamos por $t_T := (-\nu_2, \nu_1)^t$ su correspondiente vector unitario tangencial. Para simplicar la notación, cuando no de pie a confusión, se utilizará ν y t en vez de ν_T y t, respectivamente.

Por otro lado, sean T y T' dos elementos adyacentes de \mathcal{T}_h y \boldsymbol{x} un punto arbitrario sobre un lado interior $e = \partial T \cap \partial T' \in \mathcal{E}_I$. Sean w y $\boldsymbol{\tau}$ funciones escalares y vectoriales, respectivamente, suaves en cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$. Denotamos por $(w_{T,e}, \boldsymbol{\tau}_{T,e})$ la restricción de $(w_T, \boldsymbol{\tau}_T)$ a e. Así, dado $e \in \mathcal{E}_I$ se define el salto de w y $\boldsymbol{\tau}$ en $\boldsymbol{x} \in e$, por

$$[\![w]\!] := w_{T,e} - w_{T',e} \quad \text{y} \quad [\![\boldsymbol{\tau}]\!] := \boldsymbol{\tau}_{T,e} \cdot \boldsymbol{t}_T + \boldsymbol{\tau}_{T',e} \cdot \boldsymbol{t}_{T'}.$$

En los lados de frontera $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$, se define $\llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket := \boldsymbol{\tau}_{T,e} \cdot \mathbf{t}_{T}$, donde $T \in \mathcal{T}_{h}$ tal que $\partial T \cap e \neq \emptyset$. Dado un campo escalar suave v y un vector $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{1}, \tau_{2})^{t}$, se definen

$$\mathbf{curl}\,v := \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x}\right)^t,$$

У

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} := \frac{\partial \tau_2}{\partial x} - \frac{\partial \tau_1}{\partial y}.$$

Ahora, sea $I_h: H^1(\Omega) \to X_h$ el operador interpolante de Clément introducido en [44], donde $X_h:=\{v\in H^1(\Omega): v|_T\in \mathcal{P}_1(T)\ \forall\, T\in \mathcal{T}_h\}$. En el siguiente Lema se presentan las principales propiedades de aproximación del operador I_h .

Lema 1.4.2 Existen constantes $\hat{c}_4, \hat{c}_5 > 0$, independientes de h, tales que para cada $v \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$||v - I_h(v)||_{H^m(T)} \le \hat{c}_4 h_T^{1-m} |v|_{H^1(\omega(T))} \quad \forall m \in \{0, 1\}, \ \forall T \in \mathcal{T}_h,$$
 (1.4.15)

y

$$||v - I_h(v)||_{L^2(e)} \le \hat{c}_5 h_e^{1/2} |v|_{H^1(\omega(e))} \quad \forall e \in \mathcal{E},$$
 (1.4.16)

donde, h_e denota el tamaño del lado $e \in \mathcal{E}$.

Demostración. Para ver los detalles de la prueba nos referimos a [44]. □

Confiabilidad del estimador

Sea $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \Sigma$ la única solución del problema (1.4.5) y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \Sigma_h$ la única solución del esquema de Galerkin (1.4.8). Definimos el producto interior de Σ de la manera usual, es decir

$$\langle (\boldsymbol{\rho}, w), (\boldsymbol{\tau}, v) \rangle_{\Sigma} := (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau})_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + (w, v)_{L^{2}(\Omega)} \quad \forall (\boldsymbol{\rho}, w), (\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma,$$

cuya norma inducida es dada por

$$\|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{\Sigma} := \{\|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2\}^{1/2} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma.$$

Definimos la proyección de Ritz del error con respecto al producto interior de Σ , como el único elemento $(\bar{\sigma}, \bar{u}) \in \Sigma$, tal que

$$\langle (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{u}), (\boldsymbol{\tau}, v) \rangle_{\Sigma} = A((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}, v)) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma,$$

donde, la forma bilineal global $A: \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ es la inducida al sumar las ecuaciones del problema (1.4.5), esto es

$$A((\boldsymbol{\zeta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v)) := a(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, w) + b(\boldsymbol{\zeta}, v) \quad \forall (\boldsymbol{\zeta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{\Sigma}.$$

La existencia y unicidad del par $(\bar{\sigma}, \bar{u}) \in \Sigma$ está garantizada por el Lema de Lax-Milgram. Además, las propiedades de las formas bilineales a y b implican que A satisface la condición inf-sup global, es decir, existe $\alpha > 0$, tal que

$$\alpha \|(\boldsymbol{\zeta}, w)\|_{\Sigma} \leqslant \sup_{\theta \neq (\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma} \frac{A((\boldsymbol{\zeta}, w), (\boldsymbol{\tau}, v))}{\|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{\Sigma}} \quad \forall (\boldsymbol{\zeta}, w) \in \Sigma.$$

Lo cual permite acotar el error en términos de la proyección de Ritz, es decir

$$\alpha \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{\boldsymbol{\Sigma}} \leqslant \sup_{\theta \neq (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{\Sigma}} \frac{A((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}, v))}{\|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}} = \|(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{u})\|_{\boldsymbol{\Sigma}}. \quad (1.4.17)$$

Con el objetivo de hallar un estimador de error a posteriori confiable, de acuerdo a la desigualdad anterior, se debe hallar una cota superior de la proyección de Ritz del error. Para ello, cada $\tau \in H(\text{div}; \Omega)$ se descompone como

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0 + d,$$

donde, $\boldsymbol{\tau}_0 \in M := \{ \boldsymbol{\zeta} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} = 0 \}$ y $d := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$. Notamos que $\|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + d^2 |\Omega|$. Ahora, dado que $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0 \in L_0^2(\Omega)$, por el Corolario I.2.4 en [56], existe $\boldsymbol{\Phi} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ y c > 0, tales que

$$\operatorname{div} \mathbf{\Phi} = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0 \quad \text{en } \Omega \quad \mathbf{y} \quad \|\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c \, \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{L^2(\Omega)},$$

lo cual implica que

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\Phi}-\frac{d}{2}\binom{x-a}{y-b}\right)=0\quad\text{en }\Omega\quad\text{y}\quad\left\langle\left(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\Phi}-\frac{d}{2}\binom{x-a}{y-b}\right)\cdot\boldsymbol{\nu},1\right\rangle=0,$$

con $(a,b)^t \in \Omega$ fijo.

Invocando el Teorema I.3.1 de [56], existe una función de corriente $\chi \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\tau - \Phi - \frac{d}{2} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = \operatorname{\mathbf{curl}} \chi \quad \text{en} \quad \Omega.$$
(1.4.18)

Además, existe una constante C > 0, tal que

$$|\chi|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leqslant \mathcal{C} \|\tau\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

Así, de (1.4.18) obtenemos la cuasi descomposición de Helmholtz de τ , es decir,

$$au = \operatorname{curl} \chi + \Phi + \frac{d}{2} {x-a \choose y-b}.$$

Sea $\chi_h := I_h(\chi)$, definimos la cuasi descomposición de Helmholtz discreta de τ_h , como

$$\boldsymbol{\tau}_h := \operatorname{\mathbf{curl}} \chi_h + \Pi_h^r(\boldsymbol{\Phi}) + \frac{d}{2} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \in H_h^{\boldsymbol{\sigma}}.$$
(1.4.19)

Luego, se sigue que

$$\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{curl}(\chi - \chi_h) + \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi}), \tag{1.4.20}$$

y notando que div $(\mathbf{curl}(\chi - \chi_h)) = 0$, obtenemos

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi})). \tag{1.4.21}$$

Por otro lado, dado que Σ_h es subespacio de Σ , testeamos el problema continuo (1.4.5) con funciones (τ_h, v_h) $\in \Sigma_h$, le restamos el problema discreto (1.4.8), sumamos las ecuaciones del sistema y así deducimos la relación de ortogonalidad siguiente

$$A((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\zeta}_h, w_h)) = 0 \qquad \forall (\boldsymbol{\zeta}_h, w_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h.$$
 (1.4.22)

Desde ahora en adelante para cada par $(\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma$, se denota por $(\boldsymbol{\tau}_h, 0) \in \Sigma_h$ a su par discreto inducido, con $\boldsymbol{\tau}_h$ definido por (1.4.19). Considerando que $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)$ son soluciones de los problemas (1.4.5) y (1.4.8), respectivamente, y teniendo

en cuenta la relación de ortogonalidad (1.4.22) con $(\zeta_h, w_h) := (\tau_h, 0)$, obtenemos

$$\langle (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{u}), (\boldsymbol{\tau}, v) \rangle_{\Sigma} = A((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}, v)) - A((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}_h, 0))$$

$$= A((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h, v))$$

$$= A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h, v)) - A((\boldsymbol{\sigma}_h, u_h), (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h, v))$$

$$= \langle (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle - \int_{\Omega} f \, v - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) - \int_{\Omega} u_h \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h)$$

$$- \int_{\Omega} v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h$$

$$= F_1(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) + F_2(v),$$

donde $F_1: H(\text{div}; \Omega) \to \mathbb{R}$ y $F_2: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ son funcionales lineales y acotados definidos por

$$F_1(\boldsymbol{\rho}) := \langle \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\rho} - \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} \qquad \forall \, \boldsymbol{\rho} \in H(\operatorname{div}; \, \Omega),$$

У

$$F_2(w) := -\int_{\Omega} (f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h) w \qquad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Gracias a (1.4.20) y (1.4.21), $F_1(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}_h)$ se reescribe como

$$F_{1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{h}) = \langle \mathbf{curl}(\chi - \chi_{h}) \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle + \langle (\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi}_{h}^{r}(\boldsymbol{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot (\mathbf{curl}(\chi - \chi_{h})) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot (\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi}_{h}^{r}(\boldsymbol{\Phi})) - \int_{\Omega} u_{h} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi}_{h}^{r}(\boldsymbol{\Phi})).$$

Integrando por partes el último término, se sigue que

$$\int_{\Omega} u_h \operatorname{div}(\mathbf{\Phi} - \Pi_h^r(\mathbf{\Phi})) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{T} u_h \operatorname{div}(\mathbf{\Phi} - \Pi_h^r(\mathbf{\Phi}))$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ -\int_{T} \nabla u_h \cdot (\mathbf{\Phi} - \Pi_h^r(\mathbf{\Phi})) + \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_I} u_h (\mathbf{\Phi} - \Pi_h^r(\mathbf{\Phi})) \cdot \mathbf{\nu} + \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_\Gamma} u_h (\mathbf{\Phi} - \Pi_h^r(\mathbf{\Phi})) \cdot \mathbf{\nu} \right\}.$$

Finalmente, reordenando los términos, obtenemos

$$F_1(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) = R_1(\boldsymbol{\Phi}) + R_2(\chi),$$

siendo,

$$R_{1}(\mathbf{\Phi}) := \langle (\mathbf{\Phi} - \Pi_{h}^{r}(\mathbf{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu}, g - u_{h} \rangle - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{h} - \nabla u_{h}) \cdot (\mathbf{\Phi} - \Pi_{h}^{r}(\mathbf{\Phi}))$$
$$- \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_{I}} u_{h} (\mathbf{\Phi} - \Pi_{h}^{r}(\mathbf{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu},$$

У

$$R_2(\chi) := \langle \mathbf{curl}(\chi - \chi_h) \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{curl}(\chi - \chi_h).$$

Ahora, el objetivo es acotar superiormente $F_2(v)$, $R_1(\Phi)$ y $R_2(\chi)$. Esto conduce a los siguientes Lemas.

Lema 1.4.3 Para cada $v \in L^2(\Omega)$, se cumple

$$|F_2(v)| \leqslant \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(T)} \right\}^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Sea $v \in L^2(\Omega)$. De la definición de F_2 y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce fácilmente que

$$|F_{2}(v)| \leqslant \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \left| \int_{T} (f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{h}) v \right|$$

$$\leqslant \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{L^{2}(T)} \|v\|_{L^{2}(T)}$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{L^{2}(T)}^{2} \right\}^{1/2} \|v\|_{L^{2}(\Omega)},$$

con lo cual se obtiene el resultado.

Lema 1.4.4 Existe $C_1 > 0$, independiente de h, tal que

$$|R_{1}(\boldsymbol{\Phi})| \leqslant C_{1} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_{e} \|g - u_{h}\|_{L^{2}(e)}^{2} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} h_{e} \| [u_{h}] \|_{L^{2}(e)}^{2} + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T}^{2} \|\boldsymbol{\sigma}_{h} - \nabla u_{h}\|_{[L^{2}(T)]^{2}}^{2} \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

Demostración. Puesto que $\Phi \in [H_0^1(\Omega)]^2$, aplicando la desigualdad de Cauchy-

Schwarz e invocando (1.4.13) se tiene

$$\begin{aligned} |\langle (\mathbf{\Phi} - \Pi_{h}^{r}(\mathbf{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu}, g - u_{h} \rangle| &= \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_{e} (g - u_{h}) (\mathbf{\Phi} - \Pi_{h}^{r}(\mathbf{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu} \right| \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \|g - u_{h}\|_{L^{2}(e)} \|(\mathbf{\Phi} - \Pi_{h}^{r}(\mathbf{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^{2}(e)} \\ &\leq \hat{c}_{3} \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_{e}^{1/2} \|g - u_{h}\|_{L^{2}(e)} \|\mathbf{\Phi}\|_{[H^{1}(T_{e})]^{2}} \\ &\leq \hat{c}_{3} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_{e} \|g - u_{h}\|_{L^{2}(e)}^{2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \|\mathbf{\Phi}\|_{[H^{1}(T_{e})]^{2}}^{2} \right\}^{1/2} \\ &\leq \hat{c}_{3} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_{e} \|g - u_{h}\|_{L^{2}(e)}^{2} \right\}^{1/2} \|\mathbf{\Phi}\|_{[H^{1}(\Omega)]^{2}}. \end{aligned}$$

En vista que $\|\Phi\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leqslant \mathcal{C}\|\tau\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}$, se obtiene

$$|\langle (\boldsymbol{\Phi} - \Pi_h^r(\boldsymbol{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu}, g - u_h \rangle| \leqslant \mathcal{C} \, \hat{c}_3 \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_e \, \|g - u_h\|_{L^2(e)}^2 \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}. \quad (1.4.23)$$

De manera análoga, aplicando (1.4.11) y (1.4.13), respectivamente, se obtiene,

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{T} (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h) \cdot (\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi})) \right| \leqslant \mathcal{C} \, \hat{c}_1 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \, \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}, \tag{1.4.24}$$

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_I} u_h(\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu} \right| \leqslant \mathcal{C} \, \hat{c}_3 \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_I} h_e \, \| \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{u}_h^2 \boldsymbol{u}_{L^2(e)} \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}. \tag{1.4.25}$$
La prueba se concluye de (1.4.23), (1.4.24) y (1.4.25).

Lema 1.4.5 Existe una constante $C_2 > 0$, independiente de h, tal que

$$|R_2(\chi)| \leqslant C_2 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} h_e \| [\![\boldsymbol{\sigma}_h]\!]\|_{L^2(e)}^2 \right.$$
$$+ \sum_{e \in \mathcal{E}_\Gamma} h_e \| \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}} g \|_{L^2(e)}^2 \right\}^{1/2} \| \boldsymbol{\tau} \|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

Demostración. Integrando por partes, se establece que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{curl}(\chi - \chi_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{T} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{curl}(\chi - \chi_h)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{T} (\chi - \chi_h) \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h - \langle \chi - \chi_h, \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{t} \rangle_{\partial T} \right\}.$$

Por otro lado, considerando que $\operatorname{\mathbf{curl}}(\chi - \chi_h) \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{d}{dt}(\chi - \chi_h)$ sobre la frontera Γ , se sigue que

$$\langle \mathbf{curl}(\chi - \chi_h) \cdot \boldsymbol{\nu}, g \rangle = \left\langle \frac{d}{d\mathbf{t}} (\chi - \chi_h), g \right\rangle = -\left\langle \chi - \chi_h, \frac{d}{d\mathbf{t}} g \right\rangle.$$

Reordenando los términos, obtenemos

$$R_{2}(\chi) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \left\{ -\int_{T} (\chi - \chi_{h}) \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_{h} + \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_{I}} (\chi - \chi_{h}) \left[\boldsymbol{\sigma}_{h} \right] \right.$$
$$+ \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_{\Gamma}} (\chi - \chi_{h}) \left(\boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}} g \right) \right\}.$$

Luego, invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y tomando en cuenta (1.4.15), obtenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \left(\chi - \chi_h \right) \right| \leqslant \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)} \| \chi - \chi_h \|_{L^2(T)}$$

$$\leqslant \hat{c}_4 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)} | \chi |_{H^1(\omega(T))}$$

$$\leqslant \hat{c}_4 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} | \chi |_{H^1(\omega(T))}^2 \right\}^{1/2}$$

$$\leqslant \tilde{c}_4 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} | \chi |_{H^1(\Omega)}.$$

Así, usando que $|\chi|_{H^1(\Omega)} \leqslant \mathcal{C} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$, deducimos que

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \left(\chi - \chi_h \right) \right| \leqslant \mathcal{C} \, \tilde{c}_4 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \right\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \| \boldsymbol{\tau} \|_{H(\operatorname{div};\Omega)}. \quad (1.4.26)$$

Análogamente, usando (1.4.16), obtenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_I} (\chi - \chi_h) \left[\boldsymbol{\sigma}_h \right] \right| \leqslant C \, \tilde{c}_5 \, \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_I} h_e \, \| \left[\boldsymbol{\sigma}_h \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right\}^{1/2} \| \boldsymbol{\tau} \|_{H(\operatorname{div};\Omega)}, \quad (1.4.27)$$

у

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_{\Gamma}} (\chi - \chi_h) \left(\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}} g \right) \right| \leqslant C \, \tilde{c}_5 \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_e \, \left\| \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}} g \right\|_{L^2(e)}^2 \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

$$(1.4.28)$$

Luego, gracias a (1.4.26), (1.4.27) y (1.4.28) se concluye la prueba.

En virtud de los resultados anteriores, se define el estimador

$$\eta := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}, \tag{1.4.29}$$

donde, para todo $T \in \mathcal{T}_h$

$$\eta_{T}^{2} := \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T}^{2} \|\boldsymbol{\sigma}_{h} - \nabla u_{h}\|_{[L^{2}(T)]^{2}}^{2} + h_{T}^{2} \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{L^{2}(T)}^{2}
+ \sum_{e \in E(T)} h_{e} \left\{ \|[u_{h}]\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} + \|[\boldsymbol{\sigma}_{h}]\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} + \|g - u_{h}\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{\Gamma})}^{2}
+ \|\boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}}g\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{\Gamma})}^{2} \right\}.$$

En el siguiente Teorema presentamos el resultado principal de esta sección, la confiabilidad y eficiencia del estimador η .

Teorema 1.4.3 Existe una constante $C_{\text{rel}} > 0$, independiente de h, tal que

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{\Sigma} \leqslant C_{\text{rel}} \eta.$$

Además, existe una constante $C_{\text{eff}} > 0$, independiente de h, tal que

$$\eta_T^2 \leqslant C_{\text{eff}} \| (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h) \|_T^2,$$

donde, para todo $T \in \mathcal{T}_h$: $\|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_T^2 := \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div}; T)}^2 + \|v\|_{L^2(T)}^2$.

Demostración. Invocando los Lemas 1.4.4 y 1.4.5, obtenemos

$$|F_{1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{h})| \leq C \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}(T)} h_{e} \left\{ \| [\![\boldsymbol{\sigma}_{h}]\!] \|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} + \| \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}} g \|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{\Gamma})}^{2} \right. \\ + \| g - u_{h} \|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{\Gamma})}^{2} + \| [\![u_{h}]\!] \|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} \right\} \\ + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T}^{2} \left\{ \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + \| \boldsymbol{\sigma}_{h} - \nabla u_{h} \|_{[L^{2}(T)]^{2}}^{2} \right\} \right\}^{1/2} \| \boldsymbol{\tau} \|_{H(\operatorname{div}; \Omega)},$$

donde $C := \max\{C_1, C_2\}$. De la desigualdad anterior, el Lema 1.4.3 e invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\|(\bar{\sigma}, \bar{u})\|_{\Sigma} \leqslant c \, \eta$$

con $c := \max\{1, C\}$. Así, reemplazando en la condición inf-sup global (1.4.17), se deduce la confiabilidad de estimador η , esto es,

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{\Sigma} \leqslant C_{\text{rel}} \eta,$$

 $con C_{rel} = c/\alpha.$

La segunda parte de la demostración, la eficiencia de η , se probará en la siguiente subsección.

Eficiencia local del estimador

Ahora, con el fin de probar la segunda parte del Teorema 1.4.3 y puesto que $f = -\text{div } \boldsymbol{\sigma}$ en Ω , se tiene

$$||f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h||_{L^2(T)}^2 = ||\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)||_{L^2(T)}^2.$$
 (1.4.30)

Lema 1.4.6 Existe una constante $C_1 > 0$, independiente de h, tal que para cada $T \in \mathcal{T}_h$

$$h_T^2 \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \leqslant C_1 \{ \|u - u_h\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \}.$$
 (1.4.31)

Demostración. Definimos $\rho_h := \sigma_h - \nabla u_h$ en T. De (1.3.4), deducimos que

$$\|\boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \leqslant c_1 \|\psi_T^{1/2}\boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2$$

$$= c_1 \int_T (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h) \cdot (\psi_T \boldsymbol{\rho}_h)$$

$$= c_1 \int_T (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u + \nabla u - \nabla u_h) \cdot (\psi_T \boldsymbol{\rho}_h).$$

Considerando que $\sigma := \nabla u$ en Ω , integrando por partes y usando que $\psi_T = 0$ en ∂T , obtenemos

$$\|\boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \leqslant c_1 \left\{ \int_T (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\psi_T \boldsymbol{\rho}_h) - \int_T \nabla (u_h - u) \cdot (\psi_T \boldsymbol{\rho}_h) \right\}$$
$$= c_1 \left\{ \int_T (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\psi_T \boldsymbol{\rho}_h) + \int_T (u_h - u) \operatorname{div} (\psi_T \boldsymbol{\rho}_h) \right\}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\|\boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \leqslant c_1 \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2} \|\psi_T \boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2} + \|u - u_h\|_{L^2(T)} \|\operatorname{div}(\psi_T \boldsymbol{\rho}_h)\|_{L^2(T)} \right\}.$$

Ahora, gracias a la desigualdad inversa (1.3.7), se sigue que

$$\|\operatorname{div}(\psi_{T}\boldsymbol{\rho}_{h})\|_{L^{2}(T)} \leq \sqrt{2} \|\nabla(\psi_{T}\boldsymbol{\rho}_{h})\|_{[L^{2}(T)]^{2x^{2}}}$$
$$\leq \sqrt{2} C_{I} h_{T}^{-1} \|\psi_{T}\boldsymbol{\rho}_{h}\|_{[L^{2}(T)]^{2}}.$$

Luego, reordenando los términos y recordando que $0 \leqslant \psi_T \leqslant 1$ en T, obtenemos

$$\|\boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \leqslant c_1 \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2} + \sqrt{2} C_I h_T^{-1} \|u - u_h\|_{L^2(T)} \right\} \|\psi_T \boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2}$$

$$\leqslant \widehat{C} \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2} + h_T^{-1} \|u - u_h\|_{L^2(T)} \right\} \|\boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2},$$

con $\widehat{C} = \max\{c_1, c_1 \sqrt{2} C_I\}$. Simplificando $\|\boldsymbol{\rho}_h\|_{[L^2(T)]^2}$, multiplicando por h_T y elevando al cuadrado, obtenemos

$$h_T^2 \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 \leqslant \widehat{C}^2 \{ \|u - u_h\|_{L^2(T)} + h_T \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2} \}^2.$$

Finalmente, invocando la desigualdad

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}, \tag{1.4.32}$$

concluimos que

$$h_T^2 \| \boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h \|_{[L^2(T)]^2}^2 \leqslant C_1 \{ \| u - u_h \|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \|_{[L^2(T)]^2}^2 \},$$
 siendo $C_1 := 2\widehat{C}^2$.

Lema 1.4.7 Existe una constante $C_2 > 0$, independiente de h, tal que para cada $T \in \mathcal{T}_h$

$$h_T^2 \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2 \le C_2 \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \|_{[L^2(T)]^2}^2.$$
 (1.4.33)

Demostración. Definimos $\rho_h := \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h$ en T. Aplicando (1.3.4), considerando que $\operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{rot}(\nabla u) = 0$ en T e integrando por partes considerando que $\psi_T = 0$ en ∂T , deducimos

$$\|\rho_h\|_{L^2(T)}^2 \leqslant c_1 \|\psi_T^{1/2}\rho_h\|_{L^2(T)}^2 = c_1 \int_T \operatorname{rot}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \, \psi_T \rho_h = c_1 \int_T (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \operatorname{curl}(\psi_T \rho_h).$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad inversa (1.3.7) y en vista que $0 \le \psi_T \le 1$ en T, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\rho_h\|_{L^2(T)}^2 &\leqslant c_1 \|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(T)]^2} \|\mathbf{curl}(\psi_T \rho_h)\|_{[L^2(T)]^2} \\ &= c_1 \|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{[L^2(T)]^2} \|\nabla(\psi_T \rho_h)\|_{[L^2(T)]^2} \\ &\leqslant c_1 C_I h_T^{-1} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2} \|\psi_T \rho_h\|_{L^2(T)} \\ &\leqslant c_1 C_I h_T^{-1} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2} \|\rho_h\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Así, simplificando, multiplicando por h_T y elevando al cuadrado, se sigue que

$$h_T^2 \|\rho_h\|_{L^2(T)}^2 \leqslant C_2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2,$$

$$con C_2 = (c_1 C_I)^2.$$

Lema 1.4.8 Existe una constante $C_3 > 0$, independiente de h, tal que para cada $e \in \mathcal{E}_I$

$$h_e \| [\![u_h]\!] \|_{L^2(e)}^2 \leqslant C_3 \{ \|u - u_h\|_{L^2(\omega_e)}^2 + h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\omega_e)]^2}^2 \}.$$
 (1.4.34)

Demostración. Dado $e \in \mathcal{E}_I$, sean $T, T' \in \mathcal{T}_h$ tales que $\omega_e := T \cup T'$ y $\bar{T} \cap \bar{T}' = e$. Definimos $w_h := \llbracket u_h \rrbracket$ sobre e y $\boldsymbol{\rho}_e := \psi_e L(w_h) \boldsymbol{\nu}_{T,e}$ en ω_e . Notamos que $\boldsymbol{\rho}_e \in H(\text{div}; \omega_e)$. Así, aplicando (1.3.5), considerando que $\llbracket u \rrbracket = 0$ en \mathcal{E}_I , e integrando por partes, deducimos que

$$||w_h||_{L^2(e)}^2 \leqslant c_2 ||\psi_e^{1/2} w_h||_{L^2(e)}^2$$

$$= c_2 \int_e [\![u_h]\!] \psi_e L(w_h)$$

$$= c_2 \int_e [\![u_h - u]\!] \psi_e L(w_h)$$

$$= c_2 \int_e [\![u_h - u]\!] \boldsymbol{\rho}_e \cdot \boldsymbol{\nu}_T$$

$$= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} (u_h - u) \operatorname{div} \boldsymbol{\rho}_e + \int_{\omega_e} \nabla_h (u_h - u) \cdot \boldsymbol{\rho}_e \right\}$$

$$= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} (u_h - u) \operatorname{div} \boldsymbol{\rho}_e + \int_{\omega_e} (\nabla_h u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{\rho}_e + \int_{\omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\rho}_e \right\}.$$

Recordando que $\int_{\omega_e} = \int_T + \int_{T'}$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$||w_h||_{L^2(e)}^2 \leqslant c_2 \{ ||u - u_h||_{L^2(T)} ||\operatorname{div} \boldsymbol{\rho}_e||_{L^2(T)} + ||u - u_h||_{L^2(T')} ||\operatorname{div} \boldsymbol{\rho}_e||_{L^2(T')} + ||\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h||_{[L^2(T')]^2} ||\boldsymbol{\rho}_e||_{[L^2(T')]^2} + ||\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h||_{[L^2(T')]^2} ||\boldsymbol{\rho}_e||_{[L^2(T')]^2} + ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T')]^2} ||\boldsymbol{\rho}_e||_{[L^2(T')]^2} \}.$$

Por otro lado, de la desigualdad inversa (1.3.7), se sigue que

$$\|\operatorname{div} \boldsymbol{\rho}_e\|_{L^2(T)} \leqslant \sqrt{2} \, C_I \, h_T^{-1} \|\boldsymbol{\rho}_e\|_{[L^2(T)]^2}.$$

Además, dado que $0 \leqslant \psi_e \leqslant 1$ en T y de (1.3.6), obtenemos

$$\|\boldsymbol{\rho}_e\|_{[L^2(T)]^2} \leqslant \|\psi_e^{1/2} L(w_h)\|_{L^2(T)} \leqslant c_3^{1/2} h_e^{1/2} \|w_h\|_{L^2(e)}.$$

Puesto que la triangulación es regular, se cumple que $\tilde{c}_2 h_e \leqslant h_T \leqslant \tilde{c}_1 h_e$, por lo cual

$$\|\boldsymbol{\rho}_e\|_{[L^2(T)]^2} \leqslant \hat{c} \, h_T^{1/2} \|w_h\|_{L^2(e)},$$
 (1.4.35)

con, $\hat{c} := (c_3/\tilde{c}_2)^{1/2}$. De esta manera, para cada $T \in \mathcal{T}_h$, se tiene

$$\|\operatorname{div} \boldsymbol{\rho}_e\|_{L^2(T)} \leqslant \hat{C} h_T^{-1/2} \|w_h\|_{L^2(e)},$$
 (1.4.36)

donde, $\hat{C} := \sqrt{2} C_I \hat{c}$. Así, de (1.4.35) y (1.4.36), resulta

$$||w_h||_{L^2(e)}^2 \leqslant c_2 \left\{ \hat{C} h_T^{-1/2} ||u - u_h||_{L^2(T)} + \hat{C} h_{T'}^{-1/2} ||u - u_h||_{L^2(T')} + \hat{c} h_T^{1/2} ||\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h||_{[L^2(T)]^2} + \hat{c} h_{T'}^{1/2} ||\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h||_{[L^2(T')]^2} + \hat{c} h_T^{1/2} ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T')]^2} \right\} ||w_h||_{L^2(e)}.$$

Invocando el Lema 1.4.6, y dado que la triangulación es regular, deducimos que

$$||w_h||_{L^2(e)} \le \tilde{C} \left\{ h_e^{-1/2} ||u - u_h||_{L^2(\omega_e)} + h_e^{1/2} ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(\omega_e)]^2} \right\},$$

siendo $\tilde{C} := \max\{(\hat{C} + C_1 \hat{c}) \tilde{c}_1 c_2, (\hat{c} + C_1 \hat{c}) \tilde{c}_1 c_2\}$. Finalmente, elevando al cuadrado y multiplicando por h_e , se obtiene

$$h_e \|w_h\|_{L^2(e)}^2 \leqslant C_3 \left\{ \|u - u_h\|_{L^2(\omega_e)}^2 + h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\omega_e)]^2}^2 \right\},$$

$$\operatorname{con} C_3 := 2 \tilde{C}^2.$$

Lema 1.4.9 Existe una constante $C_4 > 0$, independiente de h, tal que para cada $e \in \mathcal{E}_I$

$$h_e \| \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \|_{L^2(e)}^2 \le C_4 \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \|_{[L^2(\omega_e)]^2}^2.$$
 (1.4.37)

Demostración. Dado $e \in \mathcal{E}_I$, sean $T, T' \in \mathcal{T}_h$ tales que $\omega_e := T \cup T'$ y $\bar{T} \cap \bar{T}' = e$. Definimos $w_h := \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket$ sobre e. Aplicando (1.3.5), puesto que $\llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket = 0$, e integrando por partes, deducimos

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{L^2(e)}^2 &\leqslant c_2 \|\psi_e^{1/2} w_h\|_{L^2(e)}^2 \\ &= c_2 \int_e \psi_e L(w_h) \left[\!\left[\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\right]\!\right] \\ &= c_2 \left\{ \int_e \psi_e L(w_h) (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_T + \int_e \psi_e L(w_h) (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{t}_{T'} \right\} \\ &= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} \mathbf{curl}(\psi_e L(w_h)) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) + \int_{\omega_e} \psi_e L(w_h) \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \right\}. \end{aligned}$$

Considerando que $\int_{\omega_e} = \int_T + \int_{T'}$ y gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$||w_h||_{L^2(e)}^2 \leqslant c_2 \{ ||\mathbf{curl}(\psi_e L(w_h))||_{[L^2(T)]^2} ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T)]^2} + ||\psi_e L(w_h)||_{L^2(T)} ||\mathbf{rot} \, \boldsymbol{\sigma}_h||_{L^2(T)} + ||\mathbf{curl}(\psi_e L(w_h))||_{[L^2(T')]^2} ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T')]^2} + ||\psi_e L(w_h)||_{L^2(T')} ||\mathbf{rot} \, \boldsymbol{\sigma}_h||_{L^2(T')} \}.$$

Ahora, dado que $0 \leqslant \psi_e^{1/2} \leqslant 1$, y usando (1.3.6), obtenemos que

$$\|\psi_e L(w_h)\|_{L^2(T)} \leqslant c_3^{1/2} h_e^{1/2} \|w_h\|_{L^2(e)}.$$
 (1.4.38)

Aplicando la desigualdad inversa y (1.4.38), se sigue que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{curl}(\psi_e L(w_h))\|_{[L^2(T)]^2} &= \|\nabla(\psi_e L(w_h))\|_{[L^2(T)]^2} \\ &\leqslant C_I h_T^{-1} \|\psi_e L(w_h)\|_{L^2(T)} \\ &\leqslant c_3^{1/2} h_e^{1/2} C_I h_T^{-1} \|w_h\|_{L^2(e)}. \end{aligned}$$

Puesto que la triangulación es regular, se cumple $\tilde{c}_2 h_e \leqslant h_T \leqslant \tilde{c}_1 h_e$. Por lo tanto, para cada $T \in \mathcal{T}_h$, se cumple

$$\|\operatorname{curl}(\psi_e L(w_h))\|_{[L^2(T)]^2} \leqslant \hat{C} h_e^{-1/2} \|w_h\|_{L^2(e)},$$
 (1.4.39)

donde, $\hat{C}:=c_3^{1/2}\,C_I/\tilde{c}_2$. Del Lema 1.4.7, sabemos que para cada $T\in\mathcal{T}_h$, se cumple

$$\|\operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(T)} \leqslant C_2 \, \tilde{c}_2^{-1} \, h_e^{-1} \, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2}.$$

Combinando los resultados anteriores, elevando al cuadrado y multiplicando por h_e , obtenemos

$$h_e \|w_h\|_{L^2(e)}^2 \leqslant C_4 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\omega_e)]^2}^2,$$
 donde, $C_4 := (c_2 \,\hat{C} + c_2 \,c_3^{1/2} \,C_2 \,\tilde{c}_2^{-1})^2.$

Lema 1.4.10 Existe una constante $C_5 > 0$, independiente de h, tal que para cada $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$

$$h_e \|g - u_h\|_{L^2(e)}^2 \le C_5 \left\{ \|u - u_h\|_{L^2(T_e)}^2 + h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T_e)]^2}^2 \right\},$$
 (1.4.40)

donde T_e es un elemento que contiene un lado de frontera $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$.

Demostración. Sea $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$ y $T_e \in \mathcal{T}_h$ tal que $e \in E(T_e)$. Dado que u = g sobre Γ y usando la desigualdad de trazas discretas (1.3.8), obtenemos

$$h_{e} \|g - u_{h}\|_{L^{2}(e)}^{2} = h_{e} \|u - u_{h}\|_{L^{2}(e)}^{2}$$

$$\leq C_{D} \left\{ \|u - u_{h}\|_{L^{2}(T_{e})}^{2} + h_{e}^{2} \|\nabla(u - u_{h})\|_{[L^{2}(T_{e})]^{2}}^{2} \right\}$$

$$= C_{D} \left\{ \|u - u_{h}\|_{L^{2}(T_{e})}^{2} + h_{e}^{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{h} - \nabla u_{h}\|_{[L^{2}(T_{e})]^{2}}^{2} \right\}.$$

De la desigualdad triangular y aplicando (1.4.32), se sigue que

$$h_e \|g - u_h\|_{L^2(e)}^2 \leqslant C_D \left\{ \|u - u_h\|_{L^2(T_e)}^2 + 2h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T_e)]^2}^2 + 2h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h\|_{[L^2(T_e)]^2}^2 \right\}.$$

Puesto que la triangulación es regular y el Lema 1.4.6, obtenemos

$$2 h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h\|_{[L^2(T_e)]^2}^2 \leqslant 4 C_1^2 \tilde{c}_2^{-2} \|u - u_h\|_{L^2(T_e)}^2 + 4 C_1^2 \tilde{c}_2^{-2} h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T_e)]^2}^2.$$

Finalmente, reordenando los términos, se sigue que

$$h_e \|g - u_h\|_{L^2(e)}^2 \leqslant C_5 \left\{ \|u - u_h\|_{L^2(T_e)}^2 + h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T_e)]^2}^2 \right\},$$

$$\operatorname{con} C_5 := \max \{ (1 + 4 C_1^2 \, \tilde{c}_2^{-2}) \, C_D, (2 + 4 C_1^2 \, \tilde{c}_2^{-2} \, \tilde{c}_1^2) \, C_D \}.$$

Lema 1.4.11 Asumiendo que $g \in H^1(\Gamma)$ es polinomial a trozos, entonces existe una constante $C_6 > 0$, independiente de h, tal que para cada $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$

$$h_e \left\| \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}} g \right\|_{L^2(e)}^2 \le C_6 \left\| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \right\|_{[L^2(T_e)]^2}^2.$$
 (1.4.41)

Demostración. Sea $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$ y $T_e \in \mathcal{T}_h$ tal que $e \in E(T_e)$. Definimos $w_h := \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{t} - \frac{d}{d\mathbf{t}}g$ sobre e. Invocando (1.3.5) considerando que $\frac{d}{d\mathbf{t}}g = \nabla u \cdot \mathbf{t}$ e integrando por partes, se sigue que

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{L^2(e)}^2 &\leqslant c_2 \, \|\psi_e^{1/2} \, w_h\|_{L^2(e)}^2 \\ &= c_2 \, \int_e \psi_e \, w_h \, (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u) \cdot \mathbf{t} \\ &= c_2 \, \int_{\partial T_e} \psi_e \, L(w_h) (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u) \cdot \mathbf{t} \\ &= c_2 \, \left\{ \int_{T_e} \mathbf{curl}(\psi_e \, L(w_h)) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) + \int_{T_e} \psi_e \, L(w_h) \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad inversa (1.3.7), el Lema 1.4.7 y (1.3.6), obtenemos

$$||w_h||_{L^2(e)}^2 \leqslant c_2 \left\{ C_I h_{T_e}^{-1} ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T_e)]^2} + ||\operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h||_{L^2(T_e)} \right\} ||\psi_e L(w_h)||_{L^2(T_e)}$$

$$\leqslant c_2 c_3^{1/2} h_e^{1/2} h_{T_e}^{-1} (C_I + C_2^{1/2}) ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T_e)]^2} ||w_h||_{L^2(e)}.$$

De la regularidad de la malla, simplificando por $||w_h||_{L^2(e)}$, elevando al cuadrado y multiplicando por el factor h_e , se deduce

$$h_e \|w_h\|_{L^2(e)}^2 \leqslant C_6 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T_e)]^2}^2,$$
 donde, $C_6 := \tilde{c}_2^{-2} c_2^2 c_3 (C_I + C_2^{1/2})^2.$

De este modo, podemos concuir que prueba de la segunda parte del Teorema 1.4.3 es consecuencia de (1.4.30), (1.4.31), (1.4.33), (1.4.34), (1.4.37), (1.4.40) y (1.4.41).

1.5. Condiciones de borde mixtas

En esta sección abordamos el problema de Poisson con condiciones de borde mixtas. Comenzamos describiendo el problema continuo y deduciendo el esquema de Galerkin. Para el tratamiento de las condiciones de borde utilizamos una técnica de homogenización y seguimos las ideas dadas en [26] para tratar el dato en la frontera Neumann.

1.5.1. Problema continuo y esquema de Galerkin

Consideramos una partición de $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, con $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma_N = \Gamma \backslash \Gamma_D$. Además, introducimos los espacios

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \},$$

$$H^1_{\Gamma_N}(\Omega) := \{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_N \}$$

У

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_N) := \{v|_{\Gamma_N} : v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)\}.$$

Así, dado $f \in L^2(\Omega)$ y $g_N \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)$, el problema de primer orden consiste en: Hallar $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, u)$ tal que

$$\begin{cases}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \nabla u & \text{en } \Omega, \\
\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -f & \text{en } \Omega, \\
u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu} = g_N & \text{sobre } \Gamma_N,
\end{cases}$$
(1.5.1)

donde $\boldsymbol{\nu}$ denota el vector unitario normal exterior a Γ_N . Sea $\boldsymbol{\sigma}_{g_N} \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que $\boldsymbol{\sigma}_{g_N} \cdot \boldsymbol{\nu} = g_N$ sobre Γ_N . Luego, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}$, con $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; \Omega)$ tal que $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ sobre Γ_N . Así, el problema (1.5.1) es equivalente a

$$\begin{cases}
\boldsymbol{\sigma} = \nabla u - \boldsymbol{\sigma}_{g_N} & \text{en } \Omega, \\
\text{div } \boldsymbol{\sigma} = -\tilde{f} & \text{en } \Omega, \\
u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N,
\end{cases}$$
(1.5.2)

con $\tilde{f} = f + \text{div } \boldsymbol{\sigma}_{g_N}$. Ahora, con el fin de deducir la formulación variacional del sistema (1.5.2) introducimos el siguiente espacio

$$H_0 := \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}; \Omega) : \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N \}.$$

Luego, la formulación variacional mixta dual del problema (1.5.2) corresponde a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{\Sigma}_0 := H_0 \times L^2(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases}
\tilde{a}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + \tilde{b}(\boldsymbol{\tau}, u) = m(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0, \\
\tilde{b}(\boldsymbol{\sigma}, v) = l(v) & \forall v \in L^2(\Omega),
\end{cases}$$
(1.5.3)

donde las formas bilineales $\tilde{a}: H_0 \times H_0 \to \mathbb{R}$ y $\tilde{b}: H_0 \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$ilde{a}(oldsymbol{
ho},oldsymbol{ au}):=\int_{\Omega}oldsymbol{
ho}\cdotoldsymbol{ au} \qquad orall \left(oldsymbol{
ho},oldsymbol{ au}
ight)\in H_0 imes H_0,$$

У

$$\tilde{b}(\boldsymbol{\tau}, v) := \int_{\Omega} v \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in H_0 \times L^2(\Omega),$$

y los funcionales lineales $m: H_0 \to \mathbb{R}$ y $l: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidos por

$$m(oldsymbol{ au}) := -\int_{\Omega} oldsymbol{\sigma}_{g_N} \cdot oldsymbol{ au} \qquad orall \, oldsymbol{ au} \in H_0,$$

У

$$l(v) := -\int_{\Omega} \tilde{f} v \qquad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Gracias a la Teoría de Babuška-Brezzi podemos asegurar que el problema (1.5.3) está bien planteado.

Antes de definir el esquema de Galerkin, introducimos el siguiente subespacio de dimensión finita,

$$H_{h,0}^{\sigma} := \{ \boldsymbol{\tau} \in H_h^{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N \}$$

donde, H_h^{σ} es el espacio definido en (1.4.7). De acuerdo a lo anterior, y aplicando la versión discreta de la Teoría de Babuška-Brezzi, podemos asegurar que existe un único par $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_{h,0} := H_{h,0}^{\sigma} \times H_h^u$, tal que

$$\begin{cases}
\tilde{a}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + \tilde{b}(\boldsymbol{\tau}, u_h) = m(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in H_{h,0}^{\boldsymbol{\sigma}}, \\
\tilde{b}(\boldsymbol{\sigma}_h, v) = l(v) & \forall v \in H_h^u.
\end{cases}$$
(1.5.4)

1.5.2. Análisis de error a posteriori

Sea $\mathcal{SZ}_h: H^1(\Omega) \to V_h$ el operador de interpolación de Scott-Zhang introducido en [67], donde $V_h:=\{v\in H^1(\Omega): v|_T\in \mathcal{P}_1(T)\ \forall\, T\in \mathcal{T}_h\}$, construido de tal modo que preserva la condición de borde Dirichlet homogéneas y satisface las siguientes propiedades de aproximación.

Lema 1.5.1 Existe una constante $\hat{c}_6 > 0$, independiente de h, tal que para cada $v \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$||v - \mathcal{S}\mathcal{Z}_h(v)||_{H^m(\Omega)} \le \hat{c}_6 h_T^{1-m} |v|_{H^1(\omega(T))} \qquad \forall m \in \{0, 1\}, \ \forall T \in \mathcal{T}_h$$
 (1.5.5)

Demostración. Ver [67].

Del Lema 1.5.1 y de la desigualdad de traza discreta (1.3.8), se deduce que existe una constante $\hat{c}_7 > 0$, independiente de h, tal que

$$||v - \mathcal{S}\mathcal{Z}_h||_{L^2(e)} \le \hat{c}_7 h_e^{1/2} |v|_{H^1(\omega(T))} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$
 (1.5.6)

Confiabilidad del estimador

Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)$ las únicas soluciones de los problemas (1.5.3) y (1.5.4), respectivamente. Definimos la proyección de Ritz del error, como el único elemento $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{u}) \in \Sigma_0$, tal que $\forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma_0$, se tiene

$$\langle (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{u}), (\boldsymbol{\tau}, v) \rangle_{\boldsymbol{\Sigma}} = \tilde{A}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}, v)),$$

donde, la forma bilineal global $\tilde{A}: \Sigma_0 \times \Sigma_0 \to \mathbb{R}$ se obtiene de sumar las ecuaciones de la formulación variacional del problema (1.5.3), es decir,

$$\tilde{A}((\zeta, w), (\tau, v)) := \tilde{a}(\zeta, \tau) + \tilde{b}(\tau, w) + \tilde{b}(\zeta, v) \qquad \forall (\zeta, w), (\tau, v) \in \Sigma_0.$$

La existencia y unicidad del par $(\bar{\sigma}, \bar{u}) \in \Sigma_0$ está garantizada por el Lema de Lax-Milgram. Además, las propiedades de las formas bilineales $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ y $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$ implican que $\tilde{A}(\cdot, \cdot)$ satisface la condición inf-sup global, es decir, existe $\tilde{a} > 0$, tal que

$$\tilde{\alpha} \|(\boldsymbol{\rho}, w)\|_{\Sigma} \leqslant \sup_{\theta \neq (\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma_0} \frac{\tilde{A}((\boldsymbol{\rho}, w), (\boldsymbol{\tau}, v))}{\|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{\Sigma}} \quad \forall (\boldsymbol{\rho}, w) \in \Sigma_0.$$

Esto permite acotar el error en términos de la proyección de Ritz, es decir

$$\tilde{\alpha} \| (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h) \|_{\boldsymbol{\Sigma}} \leqslant \sup_{\theta \neq (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{\Sigma}_0} \frac{\tilde{A}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}, v))}{\|(\boldsymbol{\tau}, v)\|_{\boldsymbol{\Sigma}}} = \|(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{u})\|_{\boldsymbol{\Sigma}}. \quad (1.5.7)$$

El objetivo ahora es hallar una cota superior de la proyección de Ritz del error. Así, para cada $\tau \in H_0$, definimos la cuasi descomposición de Helmholtz (ver Lema 5.1 en [40])

$$\tau = \operatorname{curl} \chi + \Phi, \tag{1.5.8}$$

donde $\chi \in H^1(\Omega)$ y
 $\Phi \in [H^1_{\Gamma_N}(\Omega)]^2,$ satisfacen

$$\operatorname{div} \mathbf{\Phi} = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \operatorname{\mathbf{curl}} \chi \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N.$$

Además, existe una constante C > 0, tal que

$$\|\chi\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leqslant \mathcal{C} \|\tau\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

Puesto que $\frac{d\chi}{dt} = \operatorname{\mathbf{curl}} \chi \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ sobre Γ_N , se deduce que χ es constante sobre Γ_N . Ahora, con el objetivo de conservar el valor de χ sobre Γ_N , procedemos como lo descrito en el Lema 5.2 en [40], y definimos $\chi_h := \mathcal{SZ}_h(\chi)$, la interpolante de Scott-Zhang de χ . Notamos que $\chi_h = \chi = c$ sobre Γ_N . Esto implica

$$\operatorname{\mathbf{curl}} \chi_h \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{d\chi_h}{d\boldsymbol{t}} = \frac{dc}{d\mathbf{t}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N,$$

por lo cual **curl** $\chi_h \in H_{h,0}^{\sigma}$. Ahora, definimos

$$\boldsymbol{\tau}_h := \operatorname{\mathbf{curl}} \chi_h + \tilde{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi}) \in H_{h,0}^{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{1.5.9}$$

donde $\tilde{\Pi}_h^r: [H^1(\Omega)]^2 \to H_{h,0}^{\sigma}$ denota el operador de interpolación de Raviart-Thomas. Así, de (1.5.8) y (1.5.9), se tiene

$$\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{curl}(\chi - \chi_h) + \boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi}), \tag{1.5.10}$$

y notando que div $(\mathbf{curl}(\chi - \chi_h)) = 0$, se llega a

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi})). \tag{1.5.11}$$

Por otro lado, no es difícil probar la condición de ortogonalidad,

$$\tilde{A}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\zeta}_h, w_h)) = 0 \qquad \forall (\boldsymbol{\zeta}_h, w_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h.0}.$$
 (1.5.12)

Desde ahora en adelante, para cada par $(\boldsymbol{\tau}, v) \in \Sigma_0$, se denota por $(\boldsymbol{\tau}_h, 0) \in \Sigma_{h,0}$ a su par discreto inducido, con $\boldsymbol{\tau}_h$ definido por (1.5.9). Considerando que $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ es la única solución del problema (1.5.3), invocando la condición de ortogonalidad con $(\boldsymbol{\zeta}_h, w_h) := (\boldsymbol{\tau}_h, 0)$ y de la linealidad y definición de \tilde{A} , obtenemos

$$\langle (\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{u}), (\boldsymbol{\tau}, v) \rangle_{\boldsymbol{\Sigma}} = \tilde{A}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}, v)) - \tilde{A}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau}_h, 0))$$

$$= \tilde{A}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h), (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h, v))$$

$$= \tilde{A}((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h, v)) - \tilde{A}((\boldsymbol{\sigma}_h, u_h), (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h, v))$$

$$= -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{g_N} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) - \int_{\Omega} \tilde{f} v - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h)$$

$$-\int_{\Omega} u_h \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) - \int_{\Omega} v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h$$

$$= \tilde{F}_1(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) + \tilde{F}_2(v),$$

donde $\tilde{F}_1: H_0 \to \mathbb{R}$ y $\tilde{F}_2: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ son funcionales lineales y acotados, definidos por

$$\tilde{F}_1(\boldsymbol{\rho}) := -\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \cdot \boldsymbol{\rho} - \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} \qquad \forall \, \boldsymbol{\rho} \in H_0,$$

$$\tilde{F}_2(w) := -\int_{\Omega} (\tilde{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h) \, w \qquad \forall \, w \in L^2(\Omega).$$

Gracias a (1.5.10) y (1.5.11), $\tilde{F}_1(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}_h)$ se reescribe como

$$\tilde{F}_{1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{h}) = -\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \cdot \operatorname{curl}(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_{h}) - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \cdot (\boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_{h}^{r}(\boldsymbol{\Phi})) \\
- \int_{\Omega} u_{h} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_{h}^{r}(\boldsymbol{\Phi})).$$

Integrando por partes el último término y puesto que $u_h \in H^u_{h,\Gamma_D}$ y $\Phi \in [H^1_{\Gamma_N}(\Omega)]^2$, obtenemos

$$\int_{\Omega} u_h \operatorname{div}(\mathbf{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\mathbf{\Phi})) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{T} u_h \operatorname{div}(\mathbf{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\mathbf{\Phi}))$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ - \int_{T} \nabla u_h \cdot (\mathbf{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\mathbf{\Phi})) + \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_I} u_h \left(\mathbf{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\mathbf{\Phi})\right) \cdot \boldsymbol{\nu} \right\}.$$

Así, reordenando los términos, se sigue que

$$\tilde{F}_1(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) = \tilde{R}_1(\boldsymbol{\Phi}) + \tilde{R}_2(\chi),$$

siendo

$$ilde{R}_1(\mathbf{\Phi}) := -\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \cdot (\mathbf{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\mathbf{\Phi})) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_I} u_h (\mathbf{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\mathbf{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu},$$

у

$$\tilde{R}_2(\chi) := -\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \cdot \mathbf{curl}(\chi - \chi_h).$$

En los siguientes Lemas se establecen las cotas superiores para $\tilde{F}_2(v)$, $\tilde{R}_1(\Phi)$ y $\tilde{R}_2(\chi)$.

Lema 1.5.2 Para cada $v \in L^2(\Omega)$, se cumple

$$|\tilde{F}_2(v)| \leqslant \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N})\|_{L^2(T)} \right\}^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Sea $v \in L^2(\Omega)$. De la definición de $\tilde{F}_2(\cdot)$, usando que $\tilde{f} = f + \text{div } \boldsymbol{\sigma}_{g_N}$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$|\tilde{F}_{2}(v)| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \left| \int_{T} (f + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}})) v \right|$$

$$\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \|f + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}})\|_{L^{2}(T)} \|v\|_{L^{2}(\Omega)}$$

$$\leq \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \|f + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}})\|_{L^{2}(T)}^{2} \right\}^{1/2} \|v\|_{L^{2}(\Omega)},$$

con lo cual se obtiene el resultado.

Lema 1.5.3 Existe C > 0, independiente de h, tal que

$$|\tilde{R}_1(\mathbf{\Phi})| \leqslant C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| \boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N} \|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_I} h_e \| [\![u_h]\!] \|_{L^2(e)}^2 \right\}^{1/2} \| \boldsymbol{\tau} \|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

Demostración. Sea $\Psi := \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \cdot (\boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi}))$. Invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (1.4.11), obtenemos

$$\begin{aligned} |\Psi| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \cdot (\boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi})) \right| \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}\|_{[L^2(T)]^2} \|\boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi})\|_{[L^2(T)]^2} \\ &\leq \hat{c}_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}\|_{[L^2(T)]^2} |\boldsymbol{\Phi}|_{[H^1(T)]^2} \\ &\leq \hat{c}_1 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}\|_{[L^2(T)]^2}^2 \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{[H^1(\Omega)]^2}. \end{aligned}$$

En vista que $\|\Phi\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leqslant \mathcal{C} \|\tau\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}$, deducimos que

$$|\Psi| \leqslant C \,\hat{c}_1 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \, \|\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}\|_{[L^2(T)]^2}^2 \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$
 (1.5.13)

De manera análoga, aplicando (1.4.13), se llega a

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_I} u_h(\boldsymbol{\Phi} - \tilde{\Pi}_h^r(\boldsymbol{\Phi})) \cdot \boldsymbol{\nu} \right| \leqslant \mathcal{C} \, \hat{c}_3 \, \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_I} h_e \, \| \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{u}_{L^2(e)} \right\}^{1/2} \, \| \boldsymbol{\tau} \|_{H(\operatorname{div};\Omega)}. \tag{1.5.14}$$

La prueba se concluye de (1.5.13) y (1.5.14).

Lema 1.5.4 Existe C > 0, independiente de h, tal que

$$|\tilde{R}_{2}(\chi)| \leqslant C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T}^{2} \| \operatorname{rot}(\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \|_{L^{2}(T)}^{2} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} h_{e} \| [\![\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}]\!] \|_{L^{2}(e)}^{2} \right\}$$

$$+ \sum_{e \in \mathcal{E}_{D}} h_{e} \| (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \cdot \boldsymbol{t} \|_{L^{2}(e)}^{2} \right\}^{1/2} \| \boldsymbol{\tau} \|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

Demostración. Integrando por partes, obtenemos

$$\tilde{R}_{2} = -\sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{T} (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \cdot \operatorname{curl}(\chi - \chi_{h})$$

$$= -\sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \left\{ \int_{T} \operatorname{rot} (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) (\chi - \chi_{h}) - \langle \chi - \chi_{h}, (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \cdot \boldsymbol{t} \rangle_{\partial T} \right\}$$

$$= -\sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \left\{ \int_{T} \operatorname{rot}(\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) (\chi - \chi_{h}) - \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_{I}} (\chi - \chi_{h}) \left[\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} \right] \right\}$$

$$- \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_{D}} (\chi - \chi_{h}) (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \cdot \boldsymbol{t} \right\}.$$

Luego, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (1.5.5), se sigue que

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{rot} \left(\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N} \right) \left(\chi - \chi_h \right) \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \operatorname{rot} (\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \right\|_{L^2(T)} \left\| \chi - \chi_h \right\|_{L^2(T)}$$

$$\leq \hat{c}_6 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \left\| \operatorname{rot} (\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \right\|_{L^2(T)} \left| \chi \right|_{H^1(\omega(T))}$$

$$\leq \hat{c}_6 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{rot} (\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \right\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \left| \chi \right|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \hat{c}_6 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{rot} (\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \right\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \left\| \chi \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Notando que $\|\chi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}\|\tau\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}$, tenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{rot}(\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N})(\chi - \chi_h) \right| \leqslant \mathcal{C} \, \hat{c}_6 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{rot}(\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}) \right\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)}.$$

$$(1.5.15)$$

Por otro lado, invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (1.5.6), obtenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_{I}} (\chi - \chi_{h}) \left[\left[\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} \right] \right] \right| \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} \left\| \left[\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} \right] \right\|_{L^{2}(e)} \left\| \chi - \chi_{h} \right\|_{L^{2}(e)}$$

$$\leq \hat{c}_{7} \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} h_{e}^{1/2} \left\| \left[\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} \right] \right\|_{L^{2}(e)} \left\| \chi \right|_{H^{1}(\omega(T))}$$

$$\leq \hat{c}_{7} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} h_{e} \left\| \left[\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} \right] \right]_{L^{2}(e)}^{2} \right\}^{1/2} \left\| \chi \right\|_{H^{1}(\Omega)}$$

$$\leq \hat{c}_{7} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} h_{e} \left\| \left[\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} \right] \right]_{L^{2}(e)}^{2} \right\}^{1/2} \left\| \chi \right\|_{H^{1}(\Omega)}$$

$$\leq \mathcal{C} \, \hat{c}_{7} \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} h_{e} \left\| \left[\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} \right] \right]_{L^{2}(e)}^{2} \right\}^{1/2} \left\| \boldsymbol{\tau} \right\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}.$$

$$(1.5.16)$$

Además, de forma análoga se deduce que

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \cap \mathcal{E}_D} (\chi - \chi_h) \left(\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N} \right) \cdot \mathbf{t} \right| \leqslant \mathcal{C} \, \hat{c}_7 \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_D} h_e \, \left\| \left(\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_{g_N} \right) \cdot \mathbf{t} \right\|_{L^2(e)}^2 \right\}^{1/2} \, \left\| \boldsymbol{\tau} \right\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}.$$
(1.5.17)
Luego, gracias a (1.5.15), (1.5.16) y (1.5.17) se concluye la prueba.

Así, en virtud de los resultados anteriores, se define el siguiente estimador

$$\bar{\eta} := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_b} \bar{\eta}_T \right\}^{1/2},$$
(1.5.18)

donde, para todo $T \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{split} \bar{\eta}_{T}^{2} := & \| f + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T}^{2} \| \boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}} - \nabla u_{h} \|_{[L^{2}(T)]^{2}}^{2} \\ & + h_{T}^{2} \| \operatorname{rot}(\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \|_{L^{2}(T)}^{2} + \sum_{e \in E(T)} h_{e} \left\{ \| [\![u_{h}]\!] \|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} \right. \\ & + \| [\![\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}]\!] \|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} + \| (\boldsymbol{\sigma}_{h} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}) \cdot \boldsymbol{t} \|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{D})}^{2} \right\}. \end{split}$$

En el siguiente Teorema presentamos propiedades del estimador $\bar{\eta}$.

Teorema 1.5.1 Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u)$ las únicas soluciones de los problemas (1.5.3) y (1.5.4), respectivamente. Existe una constante $\bar{C}_{rel} > 0$, independiente de h, tal

que

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{\boldsymbol{\Sigma}} \leqslant \bar{C}_{rel} \,\bar{\eta}.$$

Además, existe una constante $\bar{C}_{eff} > 0$, independiente de h, tal que

$$\bar{\eta}_T^2 \leqslant \bar{C}_{eff} \| (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h) \|_T^2 \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Demostración. La confiabilidad de $\bar{\eta}$ se obtiene gracias a la desigualdad (1.5.7) y a los Lemas 1.5.2, 1.5.3 y 1.5.4. La prueba de la eficiencia local de $\bar{\eta}$ es similar a lo desarrollado en la sección 1.4.2, para el problema de Poisson con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas.

Estimador de error a posteriori del problema principal

Con el fin de deducir un estimador de error a posteriori para el problema principal (1.5.1) procedemos como en [26]. Así, dado un entero $l \ge 0$, definimos

$$P_l(\Gamma_{N,h}) := \{ p \in L^2(\Gamma_N) : p|_e \in \mathcal{P}_l(e) \mid \forall e \in \mathcal{E}_N \},$$

donde $\mathcal{P}_l(e)$ denota el espacio de polinomios de grado menor o igual a l sobre e. Además, definimos la proyección ortogonal de $L^2(\Gamma_N)$, $\pi_l: L^2(\Gamma_N) \to P_l(\Gamma_{N,h})$, como

$$\int_{\Gamma_N} \pi_l(\xi) \, q = \int_{\Gamma_N} \xi \, q \qquad \forall \, q \in P_l(\Gamma_{N,h}).$$

Desde ahora en adelante, supondremos que $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ e introducimos $\sigma_{g_N}^* \in H_h^{\sigma}$ tal que $\sigma_{g_N}^* \cdot \boldsymbol{\nu} = \pi_l(g_N)$ sobre Γ_N y $\sigma_{g_N}^* \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ sobre $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_N$. Denotando por $(\sigma^*, u^*) \in \Sigma_0$ la única solución del problema (1.5.2), considerando $\sigma_{g_N}^*$ en lugar de σ_{g_N} , deducimos

$$\begin{cases}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{g_N}^* = \nabla(u - u^*) & \text{en } \Omega, \\
\operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{g_N}^*) = 0 & \text{en } \Omega, \\
u - u^* = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \\
(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{g_N}^*) \cdot \boldsymbol{\nu} = g_N - \pi_l(g_N) & \text{sobre } \Gamma_N.
\end{cases}$$

De la dependencia continua del dato, tenemos

$$\|(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}^*), u - u^*)\|_{\Sigma} \leqslant C \|g_N - \pi_l(g_N)\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)}.$$
 (1.5.19)

Siguiendo a [26] y utilizando el argumento de dualidad, deducimos que

$$\|g_N - \pi_l(g_N)\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)} \leqslant C \left\{ \sum_{e \in \mathcal{E}_N} h_e \|g_N - \boldsymbol{\sigma}_{g_N}^* \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(e)}^2 \right\}^{1/2}.$$
 (1.5.20)

En el siguiente Teorema se exponen las propiedades del estimador de error a posteriori para el problema (1.5.1).

Teorema 1.5.2 Asumiendo que $g_N \in L^2(\Gamma_N)$, sea $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, u)$ la única solución del problema (1.5.1) y sea $(\boldsymbol{\sigma}_h^*, u_h^*) \in \boldsymbol{\Sigma}_{h,0}$ la única solución del problema discreto (1.5.4) y considerando $\boldsymbol{\sigma}_{g_N}^*$ en lugar de $\boldsymbol{\sigma}_{g_N}$, de modo que $(\boldsymbol{\sigma}_h^* + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}^*) \cdot \boldsymbol{\nu} = \pi_l(g_N)$ sobre Γ_N . Entonces, existe una constante $\tilde{C}_{rel} > 0$, independiente de h, tal que

$$\|(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{\sigma}_h^* + \boldsymbol{\sigma}_{g_N}^*), u - u_h^*)\|_{\boldsymbol{\Sigma}} \leqslant \tilde{C}_{rel}\,\tilde{\eta}_h$$

Además, existe una constante $\tilde{C}_{eff} > 0$, independiente de h, tal que para cada $T \in \mathcal{T}_h$ con $\partial T \cap \Gamma_N = \emptyset$, tenemos

$$\tilde{\eta}_T^2 \leqslant \tilde{C}_{eff} \| (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{\sigma}_h^* + \boldsymbol{\sigma}_{q_N}^*), u - u_h^*) \|_T^2,$$

con

$$\tilde{\eta} := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{\eta}_T^2 \right\}^{1/2} \tag{1.5.21}$$

donde, para todo $T \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{split} \tilde{\eta}_{T}^{2} &:= \|f - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{h}^{*} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*})\|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T}^{2} \|\boldsymbol{\sigma}_{h}^{*} - \nabla u_{h}^{*} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*}\|_{[L^{2}(T)]^{2}}^{2} \\ &+ h_{T}^{2} \|\operatorname{rot}(\boldsymbol{\sigma}_{h}^{*} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*})\|_{L^{2}(T)}^{2} + \sum_{e \in E(T)} h_{e} \left\{ \|[u_{h}^{*}]\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} + \|[\boldsymbol{\sigma}_{h}^{*} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*}]\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} \\ &+ \|(\boldsymbol{\sigma}_{h}^{*} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*}) \cdot \boldsymbol{t}\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{D})}^{2} + \|g_{N} - \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^{2}(e \cap \mathcal{E}_{N})}^{2} \right\}. \end{split}$$

Demostración. Sea $(\sigma^*, u^*) \in \Sigma_0$ la única solución del problema (1.5.2) con $\sigma_{g_N}^*$ en lugar de σ_{g_N} . Aplicando la desigualdad triangular, se obtiene

$$\|(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{\sigma}_{h}^{*} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*}), u - u_{h}^{*})\|_{\Sigma} \leq \|(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{\sigma}^{*} + \boldsymbol{\sigma}_{g_{N}}^{*}), u - u^{*})\|_{\Sigma} + \|(\boldsymbol{\sigma}^{*} - \boldsymbol{\sigma}_{h}^{*}, u - u_{h}^{*})\|_{\Sigma}.$$
(1.5.22)

La confiabilidad de $\tilde{\eta}$ se obtiene acotando el primer término del lado derecho de 1.5.22 gracias a las desigualdades (1.5.19) y (1.5.20), y el segundo término de manera análoga a la prueba del Teorema 1.5.1. La prueba de la eficiencia de $\tilde{\eta}$ es similar

a lo desarrollado en la sección 1.4.2 con algunas modificaciones. Ver [21] para más detalles. $\hfill\Box$

Comentario 1.5.1 Suponiendo que g_N es polinomial a trozos, adaptando la demostración del Lema 3.13 en [47], para cada $e \in \mathcal{E}_N$ se sigue que

$$h_e \|g_N - \sigma_{g_N}^* \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(e)}^2 \leqslant C \left\{ \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (\sigma_h^* + \sigma_{g_N}^*)\|_{L^2(\omega_e)}^2 + h^2 \|\operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - (\sigma_h^* + \sigma_{g_N}^*))\|_{L^2(\omega_e)}^2 \right\}.$$

Lo cual implica la eficiencia local del estimador $\tilde{\eta}$, para cada $T \in \mathcal{T}_h$.

Comentario 1.5.2 Suponiendo que g_N es más regular, por ejemplo $g_N \in H^1(e)$, para cada $e \in \mathcal{E}_N$, deducimos que

$$h_e \|g_N - \sigma_{q_N}^* \cdot \nu\|_{L^2(e)}^2 = h_e \|g_N - \pi_l(g_N)\|_{L^2(e)}^2 \leqslant c h_e^3 \|g_N\|_{H^1(e)}^2.$$

Ello nos permite considerar este término residual como un término de orden superior, lo que también implica la eficiencia local del estimador $\tilde{\eta}_T$, para cada $T \in \mathcal{T}_h$.

1.6. Ejemplos numéricos

A continuación se exponen los resultados numéricos obtenidos utilizando la formulación mixta dual del problema de Poisson con condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas, expuestos en las secciones anteriores, y su correspondiente método adaptativo. Todos los códigos fueron escritos en MATLAB.

Sea N el número de grados de libertad (incógnitas). Consideramos espacios de aproximación del orden más bajo: $\mathcal{RT}_0(T) - \mathcal{P}_0(T)$, por lo tanto

N = número total de lados + número total de elementos.

A continuación, definimos los errores totales e individuales como

$$e_0(u) := \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}, \ e_0(\sigma) := \|\sigma - \sigma_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}, \ e_{\mathrm{div}}(\sigma) := \|\mathrm{div}(\sigma - \sigma_h)\|_{L^2(\Omega)}$$

у

$$e := \{e_0(u)^2 + e_0(\boldsymbol{\sigma})^2 + e_{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma})^2\}^{1/2},$$

donde $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{\Sigma}$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ son las únicas soluciones de los problemas (1.4.5) y (1.4.8), respectivamente, para el caso de condiciones de borde Dirichlet.

Además, si e y e' corresponden al error de dos triangulaciones consecutivas, con grados de libertad N y N', respectivamente, y considerando que en 2D, h se comporta como $N^{-1/2}$, entonces la tasa de convergencia experimental del error total, se define como:

$$r := -2 \frac{\log(e/e')}{\log(N/N')}.$$

De forma análoga se definen las tasas de convergencia experimentales para los errores individuales: $r_0(u)$, $r_0(\sigma)$ y $r_{\text{div}}(\sigma)$.

Presentamos dos ejemplos. El primero de ellos tiene solución exacta, con el objetivo de mostrar el comportamiento optimal en estos casos. Por otro lado, con el fin de implementar un método de refinamiento adaptativo consideramos un segundo ejemplo, cuya solución viene dada en coordenadas polares. En este caso, la solución exacta pertenece al espacio $H^{1+2/3}(\Omega)$, puesto que el gradiente tiene una singularidad en el origen.

Dado el estimador $\theta := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \theta_T^2$, utilizamos el siguiente algoritmo para el refinamiento adaptativo:

- a) Comenzar con una malla gruesa \mathcal{T}_h .
- b) Resolver el esquema de Galerkin en la malla actual \mathcal{T}_h .
- c) Calcular el estimador θ_T en cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$.
- d) Considerar un criterio de detención y decidir si detener el proceso o continuar al paso siguiente.
- e) Usando el método blue-green, refinar los elementos $T' \in \mathcal{T}_h$, tal que

$$\theta_{T'} \geqslant \frac{1}{2} \max\{\theta_T : T \in \mathcal{T}_h\}.$$

f) Definir la malla resultante como la nueva malla \mathcal{T}_h e ir al paso b).

1.6.1. Ejemplo 1

Consideramos un ejemplo suave, donde $\Omega := (0,1)^2$ (ver Figura 1.1) y los datos f y g, se calculan de modo que la solución exacta es $u(x,y) = (1-x)(1-y)\,e^{-10\,(x^2+y^2)}$.

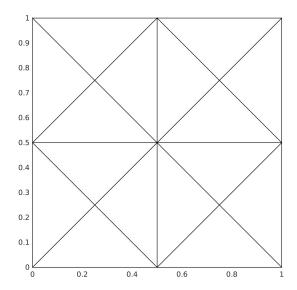


Figura 1.1: Malla inicial de 16 elementos y 44 grados de libertad. (Ejemplo 1).

Condiciones de borde Dirichlet

En la Tabla 1.6.1 presentamos los errores individuales y total, las tasas de convergencia respectivas, para el refinamiento uniforme. El error $e_0(u)$ se comporta como $\mathcal{O}(h^2)$, mientras que las tasas de convergencia experimentales de los errores individuales $e_0(\boldsymbol{\sigma})$, $e_{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma})$ y el error total son optimales, es decir, se comportan como $\mathcal{O}(h)$, lo cual concuerda con la estimación de error esperados para el método. Y además, el índice de efectividad e/η se mantiene acotado.

1.6.2. Ejemplo 2

Sean $\Omega := (-1,1)^2 \setminus [0,1] \times [-1,0]$ un dominio en forma de L (ver Figura 1.2), f := 0 y g se escoge de modo que la solución exacta, en coordenadas polares, es dada por $u(r,\theta) := r^{2/3} \sin(2\theta/3)$.

1.6 Ejemplo 2 51

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$oldsymbol{e}_0(oldsymbol{\sigma})$	$r(\sigma)$	$e_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	$m{r}_{ ext{div}}(m{\sigma})$	e	r	η	e/η
44	3.6771e-02	_	5.3588e-01	_	2.5831e-01	_	5.9602e-01	_	1.8827	0.3166
168	1.0858e-02	1.8209	2.1580e-01	1.3578	1.6985e-01	0.6260	2.7484e-01	1.1556	1.3081	0.2101
656	2.8510e-03	1.9633	9.8595e-02	1.1501	8.7652e-02	0.9713	1.3195e-01	1.0773	0.6978	0.1891
2592	7.2231e-04	1.9985	4.8216e-02	1.0412	4.4158e-02	0.9980	6.5385e-02	1.0221	0.3241	0.2017
10304	1.8120e-04	2.0040	2.3972e-02	1.0127	2.2121e-02	1.0017	3.2619e-02	1.0077	0.1537	0.2122
41088	4.5338e-05	2.0033	1.1969e-02	1.0043	1.1066e-02	1.0016	1.6300e-02	1.0031	0.0741	0.2199
164096	1.1337e-05	2.0020	5.9822e-03	1.0016	5.5335e-03	1.0010	8.1491e-03	1.0013	0.0363	0.2244

Tabla 1.6.1: Errores y tasas de convergencia del Ejemplo 1, con condiciones de borde Dirichlet en una sucesión de mallas uniformes.

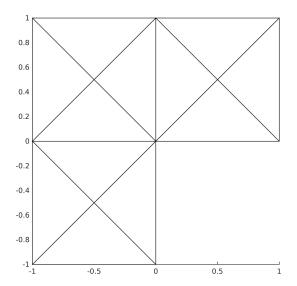


Figura 1.2: Malla inicial de 12 elementos y 34 grados de libertad. (Ejemplo 2).

Condiciones de borde Dirichlet

En la Tabla 1.6.2 presentamos los errores individuales y total, y sus respectivas tasas de convergencia experimentales, para un refinamiento uniforme y adaptativo. Según lo esperado, observamos que la tasa de convergencia experimental de $e_0(\sigma)$ es del orden de $\mathcal{O}(h^{2/3})$ para el refinamiento uniforme, y mejora a $\mathcal{O}(h)$ al utilizar un refinamiento adaptativo, ello debido a que la función considerada presenta una singularidad en el punto (0,0). Así mismo, en la Figura 1.3 presentamos refinamientos de la malla inicial (Figura 1.2) obtenidos al implementar el método adaptivo, vemos que el estimador localiza la singularidad de la función. Además, el índice de efectividad e/η se mantiene acotado.

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$oldsymbol{e}_0(oldsymbol{\sigma})$	$r(\sigma)$	$e_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	$m{r}_{ ext{div}}(m{\sigma})$	e	r	η	e/η
34	1.0743e-01	_	4.9457e-01	-	1.0497e+00	-	1.1653e+00	_	2.9594	0.3938
128	7.0151e-02	0.6430	2.6916e-01	0.9179	6.0918e-01	0.8209	6.6968e-01	0.8358	1.9136	0.3500
496	3.5523e-02	1.0047	1.6780e-01	0.6977	3.2766e-01	0.9157	3.6983e-01	0.8767	1.2959	0.2854
1952	6.1766e-02	1.1483	1.0576e-01	0.6739	1.6775e-01	0.9773	1.9896e-01	0.9050	0.8213	0.2423
7744	6.9776e-03	1.2204	6.6775e-02	0.6673	8.4485e-02	0.9955	1.0791e-01	0.8879	0.5142	0.2099
30848	2.9195e-03	1.2607	4.2160e-02	0.6654	4.2329e-02	1.0001	5.9814e-02	0.8539	0.3214	0.1861
123136	1.1993e-03	1.2854	2.6605e-02	0.6652	2.1174e-02	1.0008	3.4024e-02	0.8152	0.2011	0.1692
N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$oldsymbol{e}_0(oldsymbol{\sigma})$	$r(\sigma)$	$e_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	$m{r}_{ ext{div}}(m{\sigma})$	e	r	η	e/η
34	1.0743e-01	-	4.9457e-01	-	1.0497e + 00	-	1.1653e+00	_	2.9594	0.3938
128	7.0151e-02	0.6430	2.6916e-01	0.9179	6.0918e-01	0.8209	6.6968e-01	0.8358	1.9136	0.3500
483	3.5654e-02	1.0193	1.6774e-01	0.7121	3.3721e-01	0.8907	3.7831e-01	0.8601	1.3100	0.2888
759	1.5978e-02	3.5516	1.0858e-01	1.9244	2.8475e-01	0.7483	3.0517e-01	0.9507	1.1086	0.2753
1292	7.5962e-03	2.7957	7.2589e-02	1.5142	2.5097e-01	0.4747	2.6137e-01	0.5822	0.9256	0.2824
2583	2.9006e-03	2.7794	4.8280e-02	1.1773	1.5798e-01	1.3364	1.6522e-01	1.3242	0.6530	0.2530
3538	1.3228e-03	4.9916	3.4240e-02	2.1844	1.4420e-01	0.5799	1.4822e-01	0.6901	0.5663	0.2617
6020	7.6128e-04	2.0788	2.4688e-02	1.2308	1.1916e-01	0.7177	1.2170e-01	0.7418	0.4531	0.2686
10177	3.2119e-04	3.2873	1.8079e-02	1.1868	8.1910e-02	1.4280	8.3882e-02	1.4175	0.3407	0.2462
14064	1.9770e-04	3.0003	1.3995e-02	1.5831	7.3066e-02	0.7064	7.4394e-02	0.7421	0.2920	0.2548
23836	1.4432e-04	1.1931	1.0535e-02	1.0765	5.9739e-02	0.7634	6.0660e-02	0.7737	0.2324	0.2610
41025	6.7479e-05	2.8002	8.0433e-03	0.9941	4.0977e-02	1.3885	4.1759e-02	1.3753	0.1731	0.2412
57727	4.6468e-05	2.1845	6.4289e-03	1.3119	3.6286e-02	0.7120	3.6851e-02	0.7322	0.1468	0.2511
94517	3.4920e-05	1.1589	5.0237e-03	1.0004	3.0108e-02	0.7571	3.0524e-02	0.7640	0.1183	0.2581
164467	1.7439e-05	2.5069	3.8731e-03	0.9392	2.0587e-02	1.3724	2.0949e-02	1.3592	0.0875	0.2395

Tabla 1.6.2: Errores y tasas de convergencia Ejemplo 2, con condiciones de borde Dirichlet. Refinamiento uniforme y adaptativo.

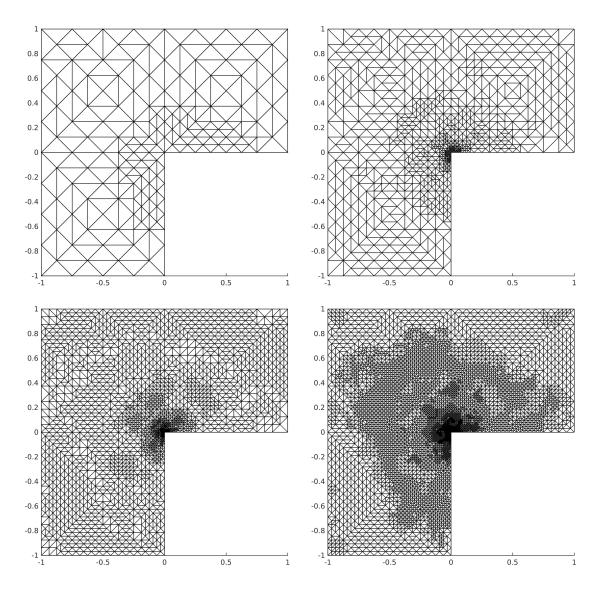


Figura 1.3: Mallas intermedias correspondientes a 759, 3538, 10177 y 23836 grados de libertad, del refinamiento adaptativo basado en η . Condiciones de borde Dirichlet. (Ejemplo 2).

Capítulo 2

Análisis de error a posteriori: método de Galerkin discontinuo local

2.1. Motivación

A pesar de que el método de Galerkin discontinuo local (LDG) se utilizó originalmente para resolver sistemas hiperbólicos no lineales [49], ha sido aplicado con buenos resultados a problemas elípticos. Referimos por ejemplo, a problemas lineales del tipo Poisson [42] y al problema de Stokes [48].

Recientemente, en el trabajo desarrollado en [19], se mostró que los operadores salto y promedio, usados para definir los flujos numéricos en el esquema LDG, son suficientes para aproximar H(div); lo cual permite reemplazar, por ejemplo, un espacio local de Raviart-Thomas por un espacio de Lagrange discontinuo. Además, se probó que la tasa de convergencia del método, al utilizar un operador de interpolación de Lagrange no conforme, es optimal, como en el caso del método mixto dual conforme clásico, en el que se requiere un operador de Raviart-Thomas o BDM para aproximar H(div).

Este capítulo surge con el objetivo de realizar un análisis del error a posteriori de [19] y desarrollar un esquema de refinamiento adaptativo para el problema de Poisson con condiciones de borde Dirichlet y mixtas, utilizando elementos finitos de Lagrange discontinuos y una formulación mixta dual no conforme. Esto es, construir un estimador confiable y eficiente, y realizar la correspondiente validación numérica del mismo, incluyendo los esquemas de aproximación adaptativos.

2.2. Discusión bibliográfica

El método de Galerkin discontinuo local fue introducido en 1998 por Cockburn y Shu [49], para resolver sistemas hiperbólicos no lineales. Sin embargo, se ha aplicado, obteniendo buenos resultados, a problemas completamente elípticos. Por ejemplo, el problema de Stokes [45, 48], las ecuaciones de Navier-Stokes [47] y problemas elípticos no lineales [37]. Una revisión del método LDG aplicado a problemas elípticos es presentado en [41].

Por otro lado, en el contexto de formulaciones de Galerkin discontinuas estabilizadas, un análisis que permite aproximar la incógnita vectorial σ en un subespacio discreto de $H(\text{div}; \mathcal{T}_h)$ ha sido implementado en [15, 16, 17, 18]. Es así que, utilizando las definiciones estándar de flujos numéricos para el esquema LDG, los parámetros α y β , escogidos de modo que aseguran la estabilidad del método y una tasa de convergencia optimal del mismo, se comportan como $\mathcal{O}(1/h)$ y $\mathcal{O}(1)$, respectivamente.

Posteriormente, en [24] se propuso e implementó un esquema de Galerkin discontinuo inusual, el cual requiere tres parámetros para definir los flujos numéricos: un parámetro vectorial β (cuyo comportamiento es el estándar $\mathcal{O}(1)$) y de dos parámetros escalares α y γ , donde, el primero se comporta como $\mathcal{O}(h)$ y el segundo como $\mathcal{O}(1/h)$. El buen planteamiento del esquema que proponen los autores es establecido utilizando elementos finitos de Raviart-Thomas discontinuos y polinomios discontinuos, es decir, gracias a las propiedades del esquema commutativo. En [19], los autores testean el esquema desarrollado en [24] utilizando otro par de espacios de elementos finitos, evitando el uso de las propiedades del esquema commutativo. Se mostró que los operadores salto y promedio, usados para definir los flujos numéricos en el esquema LDG, son suficientes para aproximar H(div); lo cual permite reemplazar, por ejemplo, un espacio local de Raviart-Thomas por un espacio de Lagrange discontinuo. Además, se probó que la tasa de convergencia del método, al utilizar un operador de interpolación de Lagrange no conforme, es optimal, al igual que la tasa de convergencia del método mixto dual conforme, en el que se utiliza, por ejemplo, Raviart-Thomas para aproximar H(div).

El objetivo de este Capítulo es equipar al esquema LDG presentado en [19] con el análisis de error a posteriori correspondiente. Se busca construir un estimador confiable y eficiente, y realizar la validación numérica del mismo, considerando refi-

namiento uniforme y adaptativo. Como modelo trabajamos en la ecuación de Poisson en 2D, con condiciones de borde de tipo mixtas, puesto que una ventaja del método LDG es la simplicidad para imponer las condiciones de borde. La solución es aproximada mediante una formulación mixta dual no conforme utilizando elementos finitos de Lagrange.

En estos últimos años, se han desarrollado diferentes tipos de análisis de error a posteriori para métodos de Galerkin discontinuos (ver, por ejemplo, [30, 38, 59, 61, 64]). En particular, mediante una descomposición de Helmholtz adecuada, se han desarrollado análisis de error a posteriori para problemas lineales [17], para la ecuación de Darcy [18] y la ecuación de Helmholtz [23].

El capítulo se organiza de la siguiente manera. Primero introducimos los elementos necesarios para obtener el esquema de Galerkin discontinuo local modificado y su buen planteamiento. En la siguiente sección presentamos el análisis de error a posteriori para el problema. Finalmente, incluimos una sección de ejemplos numéricos, con el fin de confirmar los resultados teóricos obtenidos.

2.3. Método de Galerkin discontinuo local

En esta sección se deriva la formulación discreta para el problema de Poisson con condiciones de borde mixtas, aplicando un método de Galerkin discontinuo. Comenzamos describiendo el problema e introduciendo definiciones y notaciones necesarias.

2.3.1. Problema modelo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y simplemente conexo con frontera poligonal $\Gamma := \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ y $|\Gamma_D| > 0$. Dada $f \in L^2(\Omega)$ y condiciones de frontera $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $g_N \in L^2(\Gamma_N)$, consideremos el problema de Poisson con condiciones de borde mixtas:

$$\begin{cases}
-\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\
u = g_D & \text{sobre } \Gamma_D, \\
\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g_N & \text{sobre } \Gamma_N,
\end{cases}$$
(2.3.1)

donde ν representa al vector unitario normal exterior a Γ . Para obtener la formulación mixta dual procedemos de la misma forma que en el Capítulo 1, e introducimos el gradiente $\sigma := \nabla u$ como una incógnita adicional. Así, el problema (2.3.1) consiste en: Hallar (σ, u) en los espacios apropiados, tal que:

$$\begin{cases}
\boldsymbol{\sigma} = \nabla u & \text{en } \Omega, \\
\text{div } \boldsymbol{\sigma} = -f & \text{en } \Omega, \\
u = g_D & \text{sobre } \Gamma_D, \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = g_N & \text{sobre } \Gamma_N.
\end{cases}$$
(2.3.2)

2.3.2. Resultados preliminares

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$ (con posibles nodos colgantes), conformada por triángulos. Utilizamos la misma notación del Capítulo 1, por lo que h denota simultáneamente un índice de la triangulación \mathcal{T}_h y el tamaño de la malla. Suponemos que la triangulación \mathcal{T}_h es de variación acotada, es decir, existe una constante l > 1, independiente del tamaño de la malla h, tal que:

$$l^{-1} \leqslant \frac{h_T}{h_{T'}} \leqslant l, \tag{2.3.3}$$

para cada par de elementos $T, T' \in \mathcal{T}_h$ que comparten un lado interior.

Por otro lado, el método de Galerkin discontinuo se basa en el uso de aproximaciones discontinuas. Por ello, sobre una triangulación \mathcal{T}_h definimos los llamados espacios de Sobolev quebrados, como

$$H^{\epsilon}(\mathcal{T}_h) := \{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in H^{\epsilon}(T) \quad \forall \ T \in \mathcal{T}_h \},$$

con $\epsilon > 1/2$. De forma similar definimos el espacio $H(\text{div}; \Omega)$ por tramos, como

$$H(\operatorname{div}; \mathcal{T}_h) := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \boldsymbol{\tau}|_T \in H(\operatorname{div}; T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

También requeriremos del operador gradiente por tramos $\nabla_h : H^1(\mathcal{T}_h) \longrightarrow [L^2(\Omega)]^2$, tal que para cada $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$, se cumple que

$$(\nabla_h v)|_T := \nabla (v|_T) \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

y del operador divergencia por tramos $\operatorname{div}_h: H(\operatorname{div}; \mathcal{T}_h) \longrightarrow L^2(\Omega)$, tal que para cada $\tau \in H(\operatorname{div}; \mathcal{T}_h)$, se tiene que

$$(\operatorname{div}_h \boldsymbol{\tau})|_T := \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}|_T) \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Además, $\mathcal{E}, \mathcal{E}_I, \mathcal{E}_\Gamma, \mathcal{E}_D$ y \mathcal{E}_N se definen de la misma forma que el Capítulo 1. Ahora, sean T y T' dos elementos adyacentes de \mathcal{T}_h y \boldsymbol{x} un punto arbitrario sobre un lado interior $e = \partial T \cap \partial T' \in \mathcal{E}_I$. Sean w y $\boldsymbol{\tau}$ funciones escalares y vectoriales, respectivamente, suaves en cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$. Denotamos por $(w_{T,e}, \boldsymbol{\tau}_{T,e})$ la restricción de $(w_T, \boldsymbol{\tau}_T)$ a e. Así, dado $e \in \mathcal{E}_I$ definimos los promedios y saltos de w y $\boldsymbol{\tau}$ en $\boldsymbol{x} \in e$ por

$$\{w\} := \frac{1}{2}(w_{T,e} + w_{T',e}) \quad \text{y} \quad \llbracket w \rrbracket := w_{T,e} \, \boldsymbol{\nu}_T + w_{T',e} \, \boldsymbol{\nu}_{T'},$$

 $\{\boldsymbol{\tau}\} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}_{T,e} + \boldsymbol{\tau}_{T',e}) \quad \text{y} \quad \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket := \boldsymbol{\tau}_{T,e} \cdot \boldsymbol{\nu}_T + \boldsymbol{\tau}_{T',e} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T'},$

y para todo $e \in \mathcal{E}_{\Gamma}$, definimos

$$\begin{aligned} \{w\} &:= w \quad \mathbf{y} \quad \llbracket w \rrbracket := w \ \boldsymbol{\nu}, \\ \{\boldsymbol{\tau}\} &:= \boldsymbol{\tau} \quad \mathbf{y} \quad \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket := \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

2.3.3. Formulación LDG modificada

El objetivo es aproximar la solución $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ del problema (2.3.2) por funciones discretas $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)$ en los espacios de dimensión finita $\boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$, definidos de la siguiente manera

$$\Sigma_h := \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \boldsymbol{\tau}|_T \in [\mathcal{P}_r(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \},$$

$$V_h := \{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

$$(2.3.4)$$

con $k \ge 0$ y $r \ge 1$.

Ahora, obtenemos la formulación variacional en cada $T \in \mathcal{T}_h$ y posteriomente sumamos sobre toda la triangulación \mathcal{T}_h . De esta forma, el problema DG consiste en: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$, tal que

$$\int_{T} \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{T} u_{h} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \int_{\partial T} \widehat{u} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} = 0 \qquad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_{h},
\int_{T} \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \nabla v - \int_{\partial T} v \, \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} = \int_{T} f \, v \qquad \forall \, v \in V_{h},$$
(2.3.5)

donde, las funciones \hat{u} y $\hat{\sigma}$, llamadas flujos numéricos, son aproximaciones de u y σ , respectivamente, sobre la frontera de $T \in \mathcal{T}_h$, y usualmente dependen de u_h , σ_h y de las condiciones de borde. Se dice que los flujos numéricos son consistentes si para cada v suficientemente suave en $\bar{\Omega}$:

$$\widehat{u}_T(v) = v|_{\partial T}$$
 y $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(v, \nabla v) = \nabla v|_{\partial T}$ $\forall T \in \mathcal{T}_h$

y se dice que son conservativos si para $(v, \tau) \in H^{\epsilon}(\mathcal{T}_h) \times \Sigma := H(\text{div}; \mathcal{T}_h) \cap [H^{\epsilon}(\mathcal{T}_h)]^2$ y para $e \in \mathcal{E}_I$:

$$\widehat{u}_T(v) = \widehat{u}_{T'}(v)$$
 y $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_T(v, \boldsymbol{\tau}) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{T'}(v, \boldsymbol{\tau})$ en $e = \partial T \cap \partial T'$.

Ahora, para completar la formulación Galerkin discontinua, consideramos el planteamiento de [19], que a su vez está basado en [62] y [42], y definimos los flujos numéricos $\widehat{u} := \widehat{u}(u_h, \boldsymbol{\sigma}_h, g_D, g_N)$ y $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} := \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(u_h, \boldsymbol{\sigma}_h, g_D, g_N)$ para cada $T \in \mathcal{T}_h$, como

$$\widehat{u}_{T,e} := \begin{cases} \{u_h\} - \llbracket u_h \rrbracket \cdot \boldsymbol{\beta} - \gamma \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ g_D & \text{si } e \in \mathcal{E}_D, \\ u_h - \gamma \left(\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu} - g_N\right) & \text{si } e \in \mathcal{E}_N, \end{cases}$$

$$(2.3.6)$$

У

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{T,e} := \begin{cases} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_h \right\} + \left[\left[\boldsymbol{\sigma}_h \right] \right] \boldsymbol{\beta} - \alpha \left[\left[u_h \right] \right] & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ \boldsymbol{\sigma}_h - \alpha \left(u_h - g_D \right) \boldsymbol{\nu} & \text{si } e \in \mathcal{E}_D, \\ g_N \boldsymbol{\nu} & \text{si } e \in \mathcal{E}_N, \end{cases}$$

$$(2.3.7)$$

donde las funciones escalares α , γ y la función vectorial $\boldsymbol{\beta}$, a escoger de manera apropiada, son univaluadas en cada $e \in \mathcal{E}$ y permiten asegurar la estabilidad del método y deducir tasas de convergencia optimales para la aproximación. Así, definimos $\alpha := \widehat{\alpha}$ h, $\gamma := \widehat{\gamma}/h$ y $\boldsymbol{\beta}$ un vector arbitrario en \mathbb{R}^2 . Consideramos que $\widehat{\alpha}, \widehat{\gamma} > 0$ son arbitrarios y definimos h como

$$h := \begin{cases} m x \{h_T, h_{T'}\} & \text{si } e \in \mathcal{E}_I, \\ h_T & \text{si } e \in \mathcal{E}_\Gamma. \end{cases}$$

De las definiciones (2.3.6) y (2.3.7), es claro que

$$\{\widehat{u}\} = \widehat{u}, \quad \llbracket \widehat{u} \rrbracket = 0, \quad \{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \llbracket \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket = 0 \quad \text{en } \mathcal{E}_I,$$

lo cual implica que los flujos numéricos definidos son consistentes y conservativos.

Por otro lado, sean $w \in V_h$ y $\zeta \in \Sigma_h$. Entonces, se cumple la siguiente identidad algebraica (ver [8, 36])

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_{L}} \int_{\partial T} w \, \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\mathcal{E}} \{\boldsymbol{\zeta}\} \cdot [\![w]\!] + \int_{\mathcal{E}_{I}} \{w\} [\![\boldsymbol{\zeta}]\!], \tag{2.3.8}$$

donde, para simplificar la notación, se introducen las siguientes notaciones

$$\int_{\mathcal{E}_I} := \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \int_e, \quad \int_{\mathcal{E}} := \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e, \quad \int_{\mathcal{E}_D} := \sum_{e \in \mathcal{E}_D} \int_e \quad \text{y} \quad \int_{\mathcal{E}_N} := \sum_{e \in \mathcal{E}_N} \int_e.$$

Así, sumando sobre todo $T \in \mathcal{T}_h$, integrando por partes la segunda ecuación de (2.3.5) y aplicando la identidad (2.3.8), se llega a

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div}_h \boldsymbol{\tau} - \int_{\mathcal{E}_I} \widehat{u} \, [\![\boldsymbol{\tau}]\!] - \int_{\mathcal{E}_{\Gamma}} \widehat{u} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,$$

$$- \int_{\Omega} v \operatorname{div}_h \boldsymbol{\sigma}_h - \int_{\mathcal{E}_I} [\![v]\!] \cdot (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \{\boldsymbol{\sigma}_h\}) + \int_{\mathcal{E}_I} \{v\} \, [\![\boldsymbol{\sigma}_h]\!] - \int_{\mathcal{E}_{\Gamma}} v \, (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\Omega} f \, v.$$

Finalmente, reemplazando las definiciones (2.3.6) y (2.3.7) de los flujos numéricos y reordenando los términos, se obtiene la formulación mixta dual discreta del método de Galerkin discontinuo: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$, tales que

$$\begin{cases}
 a_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, u_h) = G_{DG}(\boldsymbol{\tau}) & \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h, \\
 -b_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + c_{DG}(u_h, v) = F_{DG}(v) & \forall v \in V_h,
\end{cases}$$
(2.3.9)

donde las formas bilineales $a_{DG}: \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}, b_{DG}: \Sigma \times H^{\epsilon}(\mathcal{T}_h) \to \mathbb{R}$ y $c_{DG}: H^{\epsilon}(\mathcal{T}_h) \times H^{\epsilon}(\mathcal{T}_h) \to \mathbb{R}$, se definen como

$$\begin{split} a_{DG}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\tau}) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\mathcal{E}_I} \gamma \, \llbracket \boldsymbol{\rho} \rrbracket \, \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket + \int_{\mathcal{E}_N} \gamma \, \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, v) &:= \int_{\Omega} v \operatorname{div}_h \boldsymbol{\tau} - \int_{\mathcal{E}_I} (\{v\} - \boldsymbol{\beta} \cdot \llbracket v \rrbracket) \, \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket - \int_{\mathcal{E}_N} v \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \\ c_{DG}(v, w) &:= \int_{\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_D} \alpha \, \llbracket v \rrbracket \cdot \llbracket w \rrbracket, \end{split}$$

y los funcionales lineales $G_{DG}: \Sigma \to \mathbb{R}$ y $F_{DG}: H^{\epsilon}(\mathcal{T}_h) \to \mathbb{R}$, se definen por

$$G_{DG}(\boldsymbol{\tau}) := \int_{\mathcal{E}_D} g_D \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} + \int_{\mathcal{E}_N} \gamma \, g_N \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu},$$

$$F_{DG}(v) := \int_{\Omega} f \, v + \int_{\mathcal{E}_D} \alpha \, g_D \, v + \int_{\mathcal{E}_N} g_N \, v.$$

2.3.4. Existencia, unicidad y estabilidad de la solución

Con el fin de probar que (2.3.9) es un problema bien planteado, dotamos al espacio V_h con la norma L^2 estándar y sobre Σ_h consideramos la norma dada por

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}} := \left\{\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\operatorname{div}_h\boldsymbol{\tau}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\gamma}^{1/2}\left[\boldsymbol{\tau}\right]\|_{L^2(\mathcal{E}_I\cup\mathcal{E}_N)}^2\right\}^{1/2} \qquad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}.$$

Así, definimos la norma $\|\cdot\|_{DG}: \Sigma \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, por

$$\|(\boldsymbol{\tau},v)\|_{DG} := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau},v) \in \boldsymbol{\Sigma} \times L^2(\Omega).$$

Además, introducimos la aplicación $\|\cdot\|_{\Sigma,0}:\Sigma\to\mathbb{R},$ dada por

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma},0} := \left\{\|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\boldsymbol{\gamma}^{1/2} \, \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \|_{L^2(\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_N)}^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma},$$

la cual se utilizará en lo que resta de la sección. En el siguiente Lema exponemos algunas herramientas de gran utilidad para probar existencia y unicidad de la solución del esquema (2.3.9).

Lema 2.3.1 Existen $c_1, c_2 > 0$, independientes de h, tales que

a)
$$\|\mathbf{h}^{1/2} \{v\}\|_{L^2(\mathcal{E})}^2 \le c_1 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V_h$$
.

b)
$$\|\mathbf{h}^{1/2} [v]\|_{[L^2(\mathcal{E})]^2}^2 \le c_2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V_h.$$

c)
$$\|\mathbf{h}^{1/2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(\mathcal{E}_D)}^2 \leqslant c_3 \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$$
.

Demostración. De la definición de promedio, h y utilizando que \mathcal{T}_h es de variación acotada, se sigue

$$\|\mathbf{h}^{1/2} \{v\}\|_{L^{2}(\mathcal{E})}^{2} = \frac{1}{4} \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} \int_{e} \mathbf{h} |v_{T,e} + v_{T',e}|^{2} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_{e} \mathbf{h} |v_{T,e}|^{2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} \int_{e} \mathbf{h} (|v_{T,e}|^{2} + |v_{T',e}|^{2}) + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_{e} \mathbf{h} |v_{T,e}|^{2}$$

$$\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{\partial T} \mathbf{h} |v|^{2}$$

$$\leq \bar{c} \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T} \|v\|_{L^{2}(\partial T)}^{2},$$

donde \bar{c} depende de la constante l de (2.3.3). Por otro lado, de la desigualdad de traza discreta (1.3.8) y de la desigualdad inversa (1.3.7) definidas en el Capítulo 1, obtenemos

$$||v||_{L^2(\partial T)}^2 \le C_{inv} h_T^{-1} ||v||_{L^2(T)}^2 \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h,$$
 (2.3.10)

donde, $C_{inv} := C_D (1 + C_I^2)$. Así,

$$\|\mathbf{h}^{1/2} \{v\}\|_{L^2(\mathcal{E})}^2 \leqslant c_1 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

con $c_1 := \bar{c} \, C_{inv}$. Ahora, de la definición de salto y dado que $\boldsymbol{\nu}$ es unitario, se sigue

$$\|\mathbf{h}^{1/2} [v]\|_{[L^{2}(\mathcal{E})]^{2}}^{2} = \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} \int_{e} \mathbf{h} |v_{T,e} \, \boldsymbol{\nu}_{T} + v_{T',e} \, \boldsymbol{\nu}_{T'}|^{2} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_{e} \mathbf{h} |v_{T,e} \, \boldsymbol{\nu}_{T}|^{2}$$

$$\leq 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_{I}} \int_{e} \mathbf{h} (|v_{T,e}|^{2} + |v_{T',e}|^{2}) + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \int_{e} \mathbf{h} |v_{T,e}|^{2}$$

$$\leq \bar{c} \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T} \|v\|_{L^{2}(\partial T)}^{2},$$

el item b) se concluye aplicando (2.3.10). Por otro lado, dado que ν es unitario, de la definición de h y usando (2.3.10), se deduce

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}^{1/2} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^2(\mathcal{E}_D)}^2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_D} \int_e \mathbf{h} \, |\boldsymbol{\tau}|^2 \\ &\leqslant \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \, \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\partial T)]^2}^2 \\ &\leqslant C_{inv} \, \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2, \end{aligned}$$

con lo cual se concluye la demostración.

En el siguiente Lema exponemos algunas propiedades de las fomas bilineales y de los funcionales del problema (2.3.9).

Lema 2.3.2 Existe una contante C > 0, independiente de h, tal que

$$|a_{DG}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\rho})| \leqslant C \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma},0} \|\boldsymbol{\rho}\|_{\boldsymbol{\Sigma},0} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\rho}) \in \boldsymbol{\Sigma} \times \boldsymbol{\Sigma},$$
 (2.3.11)

$$|b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, v)| \leqslant C \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}} \|v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall (\boldsymbol{\tau}, v) \in \boldsymbol{\Sigma} \times V_h,$$
 (2.3.12)

$$|c_{DG}(v,w)| \le C \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall (v,w) \in V_h \times V_h,$$
 (2.3.13)

$$|G_{DG}(\tau)| \leq C \left\{ \|\gamma^{1/2} g_D\|_{L^2(\mathcal{E}_D)} + \|\gamma^{1/2} g_N\|_{L^2(\mathcal{E}_N)} \right\} \|\tau\|_{\Sigma} \quad \forall \tau \in \Sigma_h, \quad (2.3.14)$$

$$|F_{DG}(v)| \leq C \left\{ \|f\|_{L^{2}(\Omega)} + \|\alpha^{1/2} g_{D}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})} + \|\gamma^{1/2} g_{N}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} \right\} \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \quad \forall v \in V_{h}.$$
(2.3.15)

Demostración. Sean $\tau, \rho \in \Sigma$. De la definición de a_{DG} y aplicando la desigualdad

de Cauchy-Schwarz, se sigue

$$|a_{DG}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\rho})| = \left| \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho} + \int_{\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N}} \gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\rho} \right] \right|$$

$$\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)} \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^{2}(\Omega)} + \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})} \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\rho} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})}$$

$$\leq \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})}^{2/2} \right\}^{1/2} \left\{ \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\rho} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})}^{2/2} \right\}^{1/2}$$

$$\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma},0} \|\boldsymbol{\rho}\|_{\boldsymbol{\Sigma},0}.$$

Por otro lado, sean $\tau \in \Sigma$ y $v \in V_h$. De la definición de b_{DG} , puesto que $\gamma := \hat{\gamma}/h$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$|b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, v)| = \left| \int_{\Omega} v \operatorname{div}_{h} \boldsymbol{\tau} - \int_{\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N}} \gamma^{-1/2} \left\{ v \right\} \gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] + \int_{\mathcal{E}_{I}} \gamma^{-1/2} \boldsymbol{\beta} \cdot \left[v \right] \gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \right|$$

$$\leq \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \|\operatorname{div}_{h} \boldsymbol{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)} + \|\gamma^{-1/2} \left\{ v \right\}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})} \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})}$$

$$+ \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^{\infty}(\mathcal{E}_{I})]^{2}} \|\gamma^{-1/2} \left[v \right] \|_{[L^{2}(\mathcal{E}_{I})]^{2}} \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I})}$$

$$\leq \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \|\operatorname{div}_{h} \boldsymbol{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)} + \widehat{\gamma}^{-1/2} \|h^{1/2} \left\{ v \right\}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})} \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{N})}$$

$$+ \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^{\infty}(\mathcal{E}_{I})]^{2}} \widehat{\gamma}^{-1/2} \|h^{1/2} \left[v \right] \|_{[L^{2}(\mathcal{E}_{I})]^{2}} \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau} \right] \|_{L^{2}(\mathcal{E}_{I})}.$$

Invocando el Lema 2.3.1 y reordenando los términos, se deduce

$$|b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, v)| \leq ||v||_{L^{2}(\Omega)} ||\operatorname{div}_{h} \boldsymbol{\tau}||_{L^{2}(\Omega)} + \widehat{\gamma}^{-1/2} c_{1}^{1/2} ||v||_{L^{2}(\Omega)} ||\gamma^{1/2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}||_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} + \widehat{\gamma}^{-1/2} (c_{2}^{1/2} ||\boldsymbol{\beta}||_{[L^{\infty}(\mathcal{E}_{I})]^{2}} + c_{1}^{1/2}) ||v||_{L^{2}(\Omega)} ||\gamma^{1/2} [[\boldsymbol{\tau}]]||_{L^{2}(\mathcal{E}_{I})} \leq C ||v||_{L^{2}(\Omega)} ||\boldsymbol{\tau}||_{\boldsymbol{\Sigma}},$$

$$\text{con } C := \max\{1, \widehat{\gamma}^{-1/2} \, c_1^{1/2}, \widehat{\gamma}^{-1/2} \, (c_2^{1/2} \, \|\boldsymbol{\beta}\|_{[L^{\infty}(\mathcal{E}_I)]^2} + c_1^{1/2})\}.$$

Ahora, sean $v, w \in V_h$. De la definición de c_{DG} , dado que $\alpha := \widehat{\alpha}$ h y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema 2.3.1, se sigue

$$|c_{DG}(v, w)| = \left| \int_{\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{D}} \alpha^{1/2} \left[v \right] \alpha^{1/2} \left[w \right] \right|$$

$$\leq \|\alpha^{1/2} \left[v \right] \|_{[L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{D})]^{2}} \|\alpha^{1/2} \left[w \right] \|_{[L^{2}(\mathcal{E}_{I} \cup \mathcal{E}_{D})]^{2}}$$

$$\leq \widehat{\alpha} \|\mathbf{h}^{1/2} \left[v \right] \|_{[L^{2}(\mathcal{E})]^{2}} \|\mathbf{h}^{1/2} \left[w \right] \|_{[L^{2}(\mathcal{E})]^{2}}$$

$$\leq C \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \|w\|_{L^{2}(\Omega)},$$

donde $C := \widehat{\alpha} c_2$. Por otro lado, sea $\tau \in \Sigma_h$. De la definición de G_{DG} , de γ e

invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema 2.3.1, se tiene

$$\begin{aligned} |G_{DG}(\boldsymbol{\tau})| &= \left| \int_{\mathcal{E}_{D}} \gamma^{-1/2} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \gamma^{1/2} \, g_{D} + \int_{\mathcal{E}_{N}} \gamma^{1/2} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \gamma^{1/2} \, g_{N} \right| \\ &\leqslant \widehat{\gamma}^{-1/2} \, \|\mathbf{h}^{1/2} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})} \, \|\gamma^{1/2} \, g_{D}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})} + \|\gamma^{1/2} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} \, \|\gamma^{1/2} \, g_{N}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} \\ &\leqslant \widehat{\gamma}^{-1/2} \, c_{3}^{1/2} \, \|\boldsymbol{\tau}\|_{L^{2}(\Omega)} \, \|\gamma^{1/2} \, g_{D}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})} + \|\gamma^{1/2} \, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} \, \|\gamma^{1/2} \, g_{N}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} \\ &\leqslant C \, \{\|\gamma^{1/2} \, g_{D}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})} + \|\gamma^{1/2} \, g_{N}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})}\} \, \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{\Sigma}}, \end{aligned}$$

donde $C := \max\{1, \widehat{\gamma}^{-1/2} c_3^{1/2}\}.$

Finalmente, sea $v \in V_h$. De las definiciones de F_{DG} , de α y γ , y aplicando el Lema 2.3.1 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue

$$|F_{DG}(v)| = \left| \int_{\Omega} f \, v + \int_{\mathcal{E}_{D}} \alpha^{1/2} \, g_{D} \, \alpha^{1/2} \, v + \int_{\mathcal{E}_{N}} \gamma^{1/2} \, g_{N} \, \gamma^{-1/2} \, v \right|$$

$$\leq \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \|f\|_{L^{2}(\Omega)} + \widehat{\alpha}^{1/2} \|h^{1/2} \, v\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})} \|\alpha^{1/2} \, g_{D}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})}$$

$$+ \widehat{\gamma}^{-1/2} \|h^{1/2} \, v\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} \|\gamma^{1/2} \, g_{N}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})}$$

$$\leq \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \|f\|_{L^{2}(\Omega)} + \widehat{\alpha}^{1/2} \, c_{1}^{1/2} \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \|\alpha^{1/2} \, g_{D}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})}$$

$$+ \widehat{\gamma}^{-1/2} \, c_{1}^{1/2} \|v\|_{L^{2}(\Omega)} \|\gamma^{1/2} \, g_{N}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})}$$

$$\leq C \, \left\{ \|f\|_{L^{2}(\Omega)} + \|\alpha^{1/2} \, g_{D}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{D})} + \|\gamma^{1/2} \, g_{N}\|_{L^{2}(\mathcal{E}_{N})} \right\} \|v\|_{L^{2}(\Omega)},$$

 $\operatorname{con} C := \max\{1, \widehat{\alpha}^{1/2} c_1^{1/2}, \widehat{\gamma}^{-1/2} c_1^{1/2}\}.$

En el siguiente resultados probamos el buen planteamiento del problema (2.3.9).

Teorema 2.3.1 Asumiendo que $\nabla_h V_h$ es un subespacio de Σ_h , el problema (2.3.9) tiene única solución $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$.

Demostración. Dado que el problema discreto (2.3.9) es lineal y de dimensión finita, será suficiente probar que si $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$ es solución del problema homogéneo

$$a_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + b_{DG}(\boldsymbol{\tau}, u_h) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h,$$

$$-b_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, v) + c_{DG}(u_h, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h,$$
 (2.3.16)

entonces, esta debe ser la solución trivial. Eligiendo $v := u_h \in V_h$ y $\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\sigma}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h$ en el problema homogéneo anterior, y sumando las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$a_{DG}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) + c_{DG}(u_h, u_h) = 0,$$

es decir,

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\gamma^{1/2} [\![\boldsymbol{\sigma}_h]\!]\|_{L^2(\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_N)}^2 + \|\alpha^{1/2} [\![u_h]\!]\|_{[L^2(\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_D)]^2}^2 = 0.$$

Esto implica que $\llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket = 0$ en $\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_N$, $\boldsymbol{\sigma}_h = 0$ en Ω , $\llbracket u_h \rrbracket = 0$ en \mathcal{E}_I y $u_h = 0$ en \mathcal{E}_D . Como consecuencia, $\boldsymbol{\sigma}_h \in H(\text{div}; \Omega)$ y $u_h \in C(\bar{\Omega})$. Ahora, reemplazando estos resultados en la primera ecuación de (2.3.16) e integrando por partes, se concluye

$$\int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \qquad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h,$$

y puesto que $\nabla_h V_h$ es subespacio de Σ_h , entonces es posible escoger $\boldsymbol{\tau} := \nabla_h u_h$. Lo cual implica que $\nabla_h u_h = 0$ en \mathcal{T}_h , es decir, u_h es constante en \mathcal{T}_h . Esto, junto al hecho que $[\![u_h]\!] = 0$ en \mathcal{E}_I y $u_h = 0$ en Γ_D , garantiza que $u_h = 0$ en Ω . Es decir, el problema homogéneo (2.3.16) solo admite la solución trivial. Finalmente, la existencia de solución del problema (2.3.9) es consecuencia de la Alternativa de Fredholm en dimensión finita.

Ahora, el objetivo es presentar el análisis de error a priori del esquema (2.3.9) aproximado por $\Sigma_h \times V_h$. Introducimos la norma en la cual se realizará el análisis,

$$|||(\boldsymbol{\tau},v)|||_{DG} := \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\tau}\right]\|_{L^2(\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_N)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \, \forall \, (\boldsymbol{\tau},v) \in \boldsymbol{\Sigma} \times L^2(\Omega).$$

La tasa de convergencia optimal se muestra en el siguiente Teorema.

Teorema 2.3.2 Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)$ las únicas soluciones de los problemas (2.3.2) y (2.3.9), respectivamente. Asumiendo que $\boldsymbol{\sigma}|_T \in [H^t(T)]^2$ y $u|_T \in H^{1+t}(T)$ con t > 1/2, para cada $T \in \mathcal{T}_h$. Entonces, existe $C_{err} > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que

$$|||(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)|||_{DG}^2 \leqslant C_{err} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2 \min\{t, k+1\}} \left\{ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^t(T)]^2}^2 + \|u\|_{H^{t+1}(T)}^2 \right\}.$$

Demostración. Ver Teorema 2.7 en [19].

A continuación presentamos la estimación del error $\|\operatorname{div}_h(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(\Omega)}$.

Teorema 2.3.3 Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u)$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)$ las únicas soluciones de los problemas (2.3.2) y (2.3.9), respectivamente. Asumiendo que $\boldsymbol{\sigma}|_T \in [H^t(T)]^2$, div $\boldsymbol{\sigma} \in H^t(T)$ y $u|_T \in$

 $H^{t+1}(T)$ con t > 1/2, para cada $T \in \mathcal{T}_h$. Entonces, existe $C_2 > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\|\operatorname{div}_h(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant C_2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2 \min\{t, k+1\}} \left\{ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^t(T)]^2}^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\|_{H^t(T)}^2 + \|u\|_{H^{t+1}(T)}^2 \right\}.$$

Demostración. Ver Teorema 2.8 en [19].

Comentario 2.3.1 La prueba de los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3 requiere que $\operatorname{div}_h \Sigma_h$ sea subespacio de V_h . Esto se cumple al considerar que $r \leq k+1$ en (2.3.4). Lo cual, sumado a que $\nabla_h V_h$ es subespacio de Σ_h (condición utilizada para probar el buen planteamiento del problema), lleva a concluir que r = k+1. Es decir, el esquema planteado permite utilizar $[\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h)]^2 \times \mathcal{P}_k(\mathcal{T}_h)$, con $k \geq 0$.

2.4. Análisis del error a posteriori

En esta sección desarrollamos un estimador de error a posteriori para el esquema de Galerkin discontinuo local (2.3.9). Siguiendo el análisis de [23], primero utilizamos un problema auxiliar para acotar $||u - u_h||_{L^2(\Omega)}$ y luego, aplicamos una descomposición de Helmholtz para obtener un estimador confiable.

El resultado principal de esta sección es presentado en el siguiente Teorema.

Teorema 2.4.1 Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ la única solución de los problemas (2.3.2) y (2.3.9), respectivamente. Entonces, existe una constante $C_{rel} > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{DG}^2 \leqslant C_{rel}^2 \eta^2 := C_{rel}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \eta_T^2.$$

Además, existe una constante $C_{eff} > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\eta_T^2 \leqslant C_{eff}^2 \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h\|_{DG,T}^2 + h.o.t.,$$

donde

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{DG,T}^2 = \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 + \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(T)^2}^2 + \|\nabla(u - u_h)\|_{[L^2(T)]^2}^2 + \|\gamma^{1/2}[\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h]\|_{L^2(\partial T \cap \mathcal{E}_I)}^2 + \|\gamma^{1/2}[u - u_h]\|_{[L^2(\partial T \cap (\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_N))]^2}^2,$$

h.o.t. corresponde a términos de orden superior, y para cada $T \in \mathcal{T}_h$

$$\eta_{T}^{2} := h_{T}^{2} \| f + \Delta u_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T} \| \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} \|_{L^{2}(\partial T \setminus \Gamma_{D})}^{2} + \| \gamma^{1/2} [u_{h}] \|_{[L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})]^{2}}^{2}
+ \| \gamma^{1/2} (g_{D} - u_{h}) \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{D})}^{2} + \| f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T} \| \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} \|_{L^{2}(\partial T \setminus \Gamma_{D})}^{2}
+ h_{T}^{2} \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + \| \gamma^{1/2} [\boldsymbol{\sigma}_{h}] \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} + h_{T} \| (\nabla u_{h} - \boldsymbol{\sigma}_{h}) \cdot \mathbf{t} \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})}^{2}.$$
(2.4.1)

La demostración se divide en las siguiente dos subsecciones.

2.4.1. Confiabilidad del estimador

Comenzaremos encontrando una estimación para $||e_u||_{L^2(\Omega)}$, donde $e_u := u - u_h$ en Ω . Por ello, siguiendo las ideas descritas en [23] introducimos el siguiente problema dual

$$-\Delta \phi = e_u \quad \text{en } \Omega,$$

$$\phi|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}} \phi|_{\Gamma_N} = 0.$$
(2.4.2)

Puesto que $e_u \in L^2(\Omega)$ sabemos que existe C > 0 y $\delta > 0$, tales que (ver [57])

$$\|\phi\|_{H^{3/2+\delta}(\Omega)} \le C \|e_u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{y} \quad \|\nabla\phi\|_{[H^{1/2+\delta}(\Omega)]^2} \le C \|e_u\|_{L^2(\Omega)}.$$
 (2.4.3)

Ahora, sea $\Pi_0: H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ la proyección constante a trozos, definida como

$$(\Pi_0 z)|_T := \begin{cases} \frac{1}{|T|} \int_T z & \text{si } \partial T \cap \Gamma_D = \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
 (2.4.4)

En el siguiente Lema presentamos propiedades de aproximación del operador Π_0 .

Lema 2.4.1 Sea $\psi \in H^1(\Omega)$, entonces existe c > 0, independiente de h, tal que para cada $T \in \mathcal{T}_h$ se tiene

$$\|\psi - \Pi_0 \psi\|_{L^2(T)} \leqslant c h_T \|\nabla \psi\|_{[L^2(T)]^2},$$

y

$$\|\psi - \Pi_0 \psi\|_{L^2(\partial T)} \leqslant c h_T^{1/2} \|\nabla \psi\|_{[L^2(T)]^2}.$$

Demostración. Ver el Lema 5.1 en [37] para más detalles. \square Los siguientes Lemas se utilizarán para deducir un estimador de error a posteriori para $||u-u_h||_{L^2(\Omega)}$.

Lema 2.4.2 Sea $z \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ y Π_0 la proyección definida en (2.4.4), entonces se tiene

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} \nabla e_u \cdot \boldsymbol{\nu}_T (z - \Pi_0 z) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T) (z - \Pi_0 z). \quad (2.4.5)$$

Demostración. Dado que $\nabla u \in H(\text{div}; \Omega), z \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \text{ y } [\![\widehat{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = 0 \text{ en } \mathcal{E}_I, \text{ se sigue}$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} z \, \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_T = \sum_{e \in \mathcal{E}_N} \int_e z \, g_N$$

$$= \sum_{e \in \mathcal{E}_N} \int_e z \, \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} z \, \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T. \tag{2.4.6}$$

Tomando v = 1 en la segunda ecuación de (2.3.5), obtenemos la identidad

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial T} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T = 0. \tag{2.4.7}$$

Ahora, integrando por partes, se sigue que

$$\int_{\partial T} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_T \, \Pi_0 \, z = \int_T \nabla (\Pi_0 \, z) \cdot \nabla u + \int_T \Pi_0 \, z \, \mathrm{div}(\nabla u).$$

Considerando que $(\Pi_0 z)_T$ es constante en cada $T \in \mathcal{T}_h$ y la identidad (2.4.7), deducimos

$$\int_{\partial T} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} \,\Pi_{0} \, z = \Pi_{0} \, z \int_{T} \operatorname{div}(\nabla u)$$

$$= -\Pi_{0} \, z \int_{T} f$$

$$= \int_{\partial T} (\Pi_{0} \, z) \,\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}.$$
(2.4.8)

Finalmente, usando que $\Pi_0\,z|_{\Gamma_D}=0$ y de (2.4.6) y (2.4.8), obtenemos

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_T \left(z - \Pi_0 \, z \right) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T \left(z - \Pi_0 \, z \right),$$

lo cual completa la prueba.

Lema 2.4.3 Sea $\phi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ la función del problema 2.4.2 y Π_0 la proyección definida en (2.4.4). Entonces se cumple

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T e_u \left(-\Delta \phi \right) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left(f + \Delta u_h \right) \left(\phi - \Pi_0 \phi \right)$$

$$+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} \left(\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right) \left(\phi - \Pi_0 \phi \right) + \int_{\mathcal{E}_I} \left\{ \nabla \phi \right\} \cdot \llbracket u_h \rrbracket - \int_{\mathcal{E}_D} \nabla \phi \cdot \llbracket g_D - u_h \rrbracket.$$

$$(2.4.9)$$

Demostración. Como $\phi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, integrando por partes y puesto que $(\Pi_0 \phi)|_T$ es constante en cada $T \in \mathcal{T}_h$ obtenemos

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T e_u \left(-\Delta \phi \right) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T \nabla (u - u_h) \cdot \nabla \phi - \int_{\partial T \setminus \Gamma_N} (u - u_h) \nabla \phi \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right\}
= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T \nabla (u - u_h) \cdot \nabla (\phi - \Pi_0 \phi) - \int_{\partial T \setminus \Gamma_N} (u - u_h) \nabla \phi \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right\}
= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ -\int_T \Delta (u - u_h) \left(\phi - \Pi_0 \phi \right) + \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} (\phi - \Pi_0 \phi) \nabla (u - u_h) \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right\}
- \int_{\partial T \setminus \Gamma_N} (u - u_h) \nabla \phi \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right\}.$$

Tomando $z = \phi$ en el Lema 2.4.2 anterior y usando que $-\Delta u = f$ en Ω , se sigue

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T e_u \left(-\Delta \phi \right) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T (f + \Delta u_h) \left(\phi - \Pi_0 \phi \right) + \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T) (\phi - \Pi_0 \phi) - \int_{\partial T \setminus \Gamma_N} (u - u_h) \nabla \phi \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right\}.$$
(2.4.10)

Finalmente, aplicando la identidad algebraica (2.3.8), puesto que $\nabla \phi \in H(\text{div}; \Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ y usando que $u = g_D$ en Γ_D , deducimos que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_N} (u - u_h) \, \nabla \phi \cdot \boldsymbol{\nu}_T = -\int_{\mathcal{E}_I} \{ \nabla \phi \} \cdot [\![u_h]\!] + \int_{\mathcal{E}_D} \nabla \phi \cdot [\![g_D - u_h]\!]$$

La prueba se concluye reemplazando la expresión anterior en (2.4.10).

Teorema 2.4.2 Existe una constante $\hat{C} > 0$, independiente de h, tal que

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \hat{C}^2 \,\hat{\eta}^2 := \hat{C}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \hat{\eta}_T^2,$$

donde, para cada $T \in \mathcal{T}_h$, se define

$$\hat{\eta}_T^2 := h_T^2 \| f + \Delta u_h \|_{L^2(T)}^2 + h_T \| \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T \|_{L^2(\partial T \setminus \Gamma_D)}^2 + \| [u_h] \|_{[L^2(\partial T \cap \mathcal{E}_I)]^2}^2 + \| g_D - u_h \|_{L^2(\partial T \cap \mathcal{E}_D)}^2.$$

Demostración. Siguiendo las ideas descritas en [23] (ver también el Teorema 1 en [65]), es decir, aplicando el problema dual (2.4.2) y el Lema 2.4.3, obtenemos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (u - u_h)(-\Delta \phi)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T (f + \Delta u_h) (\phi - \Pi_0 \phi) + \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T)(\phi - \Pi_0 \phi) \right\}$$

$$+ \int_{\mathcal{E}_I} \{ \nabla \phi \} \cdot [\![u_h]\!] - \int_{\mathcal{E}_D} \nabla \phi \cdot [\![g_D - u_h]\!].$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema 2.4.1, deducimos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{T} (f + \Delta u_{h}) (\phi - \Pi_{0} \phi) \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \|f + \Delta u_{h}\|_{L^{2}(T)} \|\phi - \Pi_{0} \phi\|_{L^{2}(T)}$$

$$\leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T} \|f + \Delta u_{h}\|_{L^{2}(T)} \|\nabla \phi\|_{L^{2}(T)}$$

$$\leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T}^{2} \|f + \Delta u_{h}\|_{L^{2}(T)}^{2} \right\}^{1/2} \|\nabla \phi\|_{L^{2}(\Omega)}.$$

$$(2.4.11)$$

Además, de manera análoga obtenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{\partial T \setminus \Gamma_{D}} (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}) (\phi - \Pi_{0} \phi) \right|$$

$$\leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T}^{1/2} \left\| (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}) \right\|_{L^{2}(\partial T \setminus \Gamma_{D})} \left\| \nabla \phi \right\|_{L^{2}(T)}$$

$$\leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T} \left\| (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}) \right\|_{L^{2}(\partial T \setminus \Gamma_{D})}^{2} \right\}^{1/2} \left\| \nabla \phi \right\|_{L^{2}(\Omega)}. \tag{2.4.12}$$

Por otro lado, notar que (ver [55])

$$||w||_{L^2(\partial T)} \leqslant C_s h_T^{s-1/2} ||w||_{H^s(T)} \quad \forall w \in H^s(T),$$
 (2.4.13)

donde $C_s > 0$ depende solo de s > 1/2. Luego, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.4.13) con $s = 1/2 + \delta$, deducimos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{\partial T \setminus \Gamma} \{ \nabla \phi \} \cdot [\![u_{h}]\!] \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \| [\![u_{h}]\!] \|_{[L^{2}(\partial T \setminus \Gamma)]^{2}} \| \nabla \phi \|_{[L^{2}(\partial T \setminus \Gamma)]^{2}}$$

$$\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \| [\![u_{h}]\!] \|_{[L^{2}(\partial T \setminus \Gamma)]^{2}} \| \nabla \phi \|_{[L^{2}(\partial T)]^{2}}$$

$$\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T}^{\delta} \| [\![u_{h}]\!] \|_{[L^{2}(\partial T \setminus \Gamma)]^{2}} \| \nabla \phi \|_{[H^{1/2 + \delta}(T)]^{2}}$$

$$\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \| [\![u_{h}]\!] \|_{[L^{2}(\partial T \setminus \Gamma)]^{2}} \| \phi \|_{H^{1 + \epsilon}(T)}$$

$$\leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \| [\![u_{h}]\!] \|_{[L^{2}(\partial T \setminus \Gamma)]^{2}}^{2} \right\}^{1/2} \| \phi \|_{H^{1 + \epsilon}(\Omega)}, \qquad (2.4.14)$$

con $\epsilon = 1/2 + \delta$. De manera análoga, obtenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \int_{\partial T \cap \Gamma_{D}} \{ \nabla \phi \} \cdot \llbracket g_{D} - u_{h} \rrbracket \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \| \llbracket g_{D} - u_{h} \rrbracket \|_{[L^{2}(\partial T \cap \Gamma_{D})]^{2}} \| \nabla \phi \|_{[L^{2}(\partial T)]^{2}}$$

$$\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} h_{T}^{\delta} \| \llbracket g_{D} - u_{h} \rrbracket \|_{[L^{2}(\partial T \cap \Gamma_{D})]^{2}} \| \nabla \phi \|_{[H^{1/2 + \delta}(T)]^{2}}$$

$$\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \| \llbracket g_{D} - u_{h} \rrbracket \|_{[L^{2}(\partial T \cap \Gamma_{D})]^{2}} \| \phi \|_{H^{1 + \epsilon}(T)}$$

$$\leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \| \llbracket g_{D} - u_{h} \rrbracket \|_{[L^{2}(\partial T \cap \Gamma_{D})]^{2}} \right\}^{1/2} \| \phi \|_{H^{1 + \epsilon}(\Omega)}.$$

$$(2.4.15)$$

Finalmente, la prueba se concluye de (2.4.11), (2.4.12), (2.4.14) y (2.4.15) e invocando 2.4.3.

Con el objetivo es encontrar un estimador de error a posteriori para $\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(\Omega)}$, presentamos el siguiente resultado.

Lema 2.4.4 Existe
$$\psi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$$
 $y \chi \in H^1(\Omega)$ con $\operatorname{\mathbf{curl}} \chi \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ en Γ_N , tal que $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h = \nabla \psi + \operatorname{\mathbf{curl}} \chi$.

Además, existe una constante C > 0, independiente de h, tal que

$$\|\nabla\psi\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\mathbf{curl}\,\chi\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leqslant \mathcal{C}\,\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}.$$

Demostración. Procedemos como en el Lema 3.1 de [38]. Así, sea $\psi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ la única solución débil del problema

$$-\operatorname{div}(\nabla \psi) = -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \quad \text{en } \Omega,$$

$$\psi = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D, \quad \nabla \psi \cdot \boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{sobre } \Gamma_N.$$

Puesto que div $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h - \nabla \psi) = 0$ en Ω , en el sentido de las distribuciones, y se asume que Ω es un dominio acotado y simplemente conexo la prueba se concluye invocando al Teorema I.3.1 y sus consecuencias en [56].

Lema 2.4.5 Sea $\psi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ la función del Lema 2.4.4, y sea Π_0 la proyección definida en (2.4.4). Entonces, existe una constante C > 0, independiente de h, tal que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla \psi \leqslant C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \| f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \| \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T \|_{L^2(\partial T \setminus \Gamma_D)}^2 \right\}^{1/2} \| \nabla \psi \|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Procedemos como en el Lema 3.2 en [38] (ver también [17] y [18]). Dado que $(\Pi_0 \psi)|_T$ es constante en cada $T \in \mathcal{T}_h$, $\psi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ e integrando por partes, obtenemos

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla \psi = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla (\psi - \Pi_0 \psi)
= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ -\int_T \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)(\psi - \Pi_0 \psi) + \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} (\psi - \Pi_0 \psi)(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right\}.$$

Ahora, dado que div $\sigma = -f$ en Ω y siguiendo el procedimiento del Lema 2.4.2 con $z = \psi$, deducimos que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla \psi = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T (f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h) (\psi - \Pi_0 \psi) + \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} (\psi - \Pi_0 \psi) (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T) \right\}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema 2.4.1, obtenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h) (\psi - \Pi_0 \psi) \right| \leqslant \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(T)} \|\psi - \Pi_0 \psi\|_{L^2(T)}$$

$$\leqslant c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(T)} \|\nabla \psi\|_{[L^2(T)]^2}$$

$$\leqslant c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \|\nabla \psi\|_{[L^2(\Omega)]^2}.$$

De manera análoga, deducimos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T \setminus \Gamma_D} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T) (\psi - \Pi_0 \, \psi) \right|$$

$$\leqslant c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \, \| \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T \|_{L^2(\partial T \setminus \Gamma_D)}^2 \right\}^{1/2} \| \nabla \psi \|_{[L^2(\Omega)]^2}.$$

De ahora en adelante, y mientras no de pie a confusión, denotamos la proyección constante a trozos $\Pi_0: H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, tal que para cada $z \in H^1(\Omega)$

$$(\Pi_0 z)|_T := \begin{cases} \frac{1}{|T|} \int_T z & \text{si } \partial T \cap \Gamma = \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
 (2.4.16)

Hacemos notar que para esta proyección se cumplen propiedades análogas a las presentadas en el Lema 2.4.1.

Lema 2.4.6 Sea $\chi \in H^1(\Omega)$ la función del Lema 2.4.4. Entonces, existe una constante c > 0, independiente de h, tal que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{T} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{curl} \, \chi \leqslant c \, \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^2 \| \mathbf{rot} \, \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2 + h_T \| (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{t} \|_{L^2(\partial T)}^2 \right. \right. \\ \left. + \| \gamma^{1/2} \, [\![u_h]\!] \|_{L^2(\partial T \cap \mathcal{E}_I)}^2 + \| \gamma^{1/2} \, (g_D - u_h) \|_{L^2(\partial T \cap \mathcal{E}_D)}^2 \right) \right\}^{1/2} \| \mathbf{curl} \, \chi \|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Usando que $\sigma = \nabla u$ en Ω y sumando y restando $\nabla_h u_h$, tenemos

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \operatorname{curl} \chi = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla (u - u_h) \cdot \operatorname{curl} \chi + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \operatorname{curl} \chi.$$

Gracias al Lema 4.4 en [17] sabemos que existe una constante C > 0, independiente de h, tal que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla (u - u_h) \cdot \mathbf{curl} \, \chi \leqslant C \left\{ \| \gamma^{1/2} \llbracket u_h \rrbracket \|_{[L^2(\mathcal{E}_I)]^2} + \| \gamma^{1/2} (g_D - u_h) \|_{L^2(\mathcal{E}_D)} \right\} \| \mathbf{curl} \, \chi \|_{L^2(\Omega)}.$$

Para el segundo término, considerando que $\Pi_0 \chi$ es constante en cada elemento e integrando por partes, obtenemos

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{curl} \, \chi = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{curl} \, (\chi - \Pi_0 \, \chi)$$
$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_T \cot \boldsymbol{\sigma}_h \, (\chi - \Pi_0 \, \chi) - \int_{\partial T} (\chi - \Pi_0 \, \chi) (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{t} \right\}.$$

Invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y las propiedades de $\Pi_0 \chi$, se sigue que

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \left(\chi - \Pi_0 \chi \right) \right| \leqslant \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \right\|_{L^2(T)} \left\| \chi - \Pi_0 \chi \right\|_{L^2(T)}$$

$$\leqslant c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \left\| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \right\|_{L^2(T)} \left\| \nabla \chi \right\|_{[L^2(T)]^2}$$

$$\leqslant c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \right\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \left\| \nabla \chi \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}.$$

De manera análoga, obtenemos

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\chi - \Pi_0 \chi) (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{t} \right|$$

$$\leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \| (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{t} \|_{L^2(\partial T)} \right\}^{1/2} \| \nabla \chi \|_{[L^2(\Omega)]^2}.$$

La prueba se concluye uniendo todo y notando que $\|\nabla\chi\|_{[L^2(\Omega)]^2} = \|\mathbf{curl}\,\chi\|_{L^2(\Omega)}$ en 2D.

Teorema 2.4.3 Existe una constante $\tilde{C} > 0$, independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2 \leqslant \tilde{C}^2 \, \tilde{\eta}^2 := \tilde{C}^2 \, \sum_{T \in \mathcal{T}_L} \tilde{\eta}_T^2,$$

donde, para cada $T \in \mathcal{T}_h$, se define

$$\tilde{\eta}_{T}^{2} := \| f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T} \| \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} \|_{L^{2}(\partial T \setminus \Gamma_{D})}^{2}
+ h_{T}^{2} \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T} \| (\nabla u_{h} - \boldsymbol{\sigma}_{h}) \cdot \boldsymbol{t} \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} + \| \gamma^{1/2} [u_{h}] \|_{[L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})]^{2}}^{2}
+ \| \gamma^{1/2} (g_{D} - u_{h}) \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{D})}^{2} + \| \gamma^{1/2} [\boldsymbol{\sigma}_{h}] \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})}^{2}.$$

Demostración. Notando que,

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\nabla \psi + \mathbf{curl} \chi).$$

Aplicando los Lemas 2.4.5 y 2.4.6 anteriores, obtenemos

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{[L^{2}(\Omega)]^{2}} \leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h}} \left(h_{T}^{2} \| f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T} \| \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} \|_{L^{2}(\partial T \setminus \Gamma_{D})}^{2} \right. \\ + \left. h_{T}^{2} \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_{h} \|_{L^{2}(T)}^{2} + h_{T} \| (\nabla u_{h} - \boldsymbol{\sigma}_{h}) \cdot \boldsymbol{t} \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})}^{2} \right. \\ + \| \gamma^{1/2} \| u_{h} \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{I})]^{2}}^{2} + \| \gamma^{1/2} (g_{D} - u_{h}) \|_{L^{2}(\partial T \cap \mathcal{E}_{D})}^{2} \right) \right\}^{1/2}.$$

$$(2.4.17)$$

Dado que div $\sigma = -f$ en Ω y $\llbracket \sigma \rrbracket = 0$ en \mathcal{E}_I , deducimos

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\Sigma}^2 = \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma^{1/2} [\boldsymbol{\sigma}_h]\|_{L^2(\mathcal{E}_I)}^2.$$

La demostración se concluye reemplazando (2.4.17) en la ecuación anterior. \Box

La confiabilidad del estimador η se deduce de los Teoremas 2.4.2 y 2.4.3. La segunda parte de la demostración del Teorema 2.4.1 se probará en la siguiente subsección.

2.4.2. Pseudo eficiencia del estimador

En esta subsección probamos la pseudo eficiencia del estimador η . Para ello se utilizan las propiedades de las funciones burbujas ψ_T , ψ_e y del operador de extensión L descritos la sección 1.3.5 del Capítulo 1.

Puesto que div $\sigma = -f$ en Ω , $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$ para algún $\delta \in (1/2, 1)$, $u = g_D$ sobre Γ_D , los siguientes términos se acotan de manera directa

$$||f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h||_{L^2(T)} = ||\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)||_{L^2(T)} \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$
(2.4.18)

$$\|\gamma^{1/2} [u_h]\|_{[L^2(e)]^2} = \|\gamma^{1/2} [u - u_h]\|_{[L^2(e)]^2} \qquad \forall e \subseteq \mathcal{E}_I, \tag{2.4.19}$$

$$\|\gamma^{1/2} (g_D - u_h)\|_{L^2(e)} = \|\gamma^{1/2} (u - u_h)\|_{L^2(e)} \quad \forall e \subseteq \mathcal{E}_D,$$
 (2.4.20)

$$\|\gamma^{1/2} [\![\boldsymbol{\sigma}_h]\!]\|_{L^2(e)} = \|\gamma^{1/2} [\![\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h]\!]\|_{L^2(e)} \quad \forall e \subseteq \mathcal{E}_I.$$
 (2.4.21)

De ahora en adelante, introducimos f_h como una aproximación de f tal que $||f - f_h||_{L^2(T)}$ tiende a cero, al menos, a la misma tasa que $||u - u_h||_{L^2(T)}$ a medida que se refina la malla.

Lema 2.4.7 Existe una constante $C_1 > 0$, independiente de h, tal que para cada $T \in \mathcal{T}_h$

$$h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(T)}^2 \le C_1 \left\{ \|\nabla (u - u_h)\|_{[L^2(T)]^2}^2 + h_T^2 \|f - f_h\|_{L^2(T)}^2 \right\}.$$
 (2.4.22)

Demostración. Aplicando la desigualdad triangular, deducimos que

$$||f + \Delta u_h||_{L^2(T)} = ||f - f_h + f_h + \Delta u_h||_{L^2(T)} \le ||f - f_h||_{L^2(T)} + ||f_h + \operatorname{div}(\nabla u_h)||_{L^2(T)}.$$
(2.4.23)

Definiendo $z_h := f_h + \operatorname{div}(\nabla u_h)$ y $w_b := \psi_T z_h$ en T. Invocando (1.3.4) e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \|z_h\|_{L^2(T)}^2 &\leqslant c_1 \|\psi_T^{1/2} z_h\|_{L^2(T)}^2 \\ &= c_1 \int_T (f_h + \operatorname{div}(\nabla u_h)) w_b \\ &= c_1 \int_T (f_h + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{div}(\nabla u_h)) w_b \\ &= c_1 \left\{ \int_T (f_h - f) w_b + \int_T (\nabla (u - u_h)) \cdot \nabla w_b - \int_{\partial T} w_b \nabla (u - u_h) \cdot \boldsymbol{\nu}_T \right\}. \end{aligned}$$

De las propiedades de ψ_T , sabemos que $w_b=0$ sobre ∂T , e invocando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$||z_h||_{L^2(T)}^2 \leqslant c_1 \left\{ ||f - f_h||_{L^2(T)} ||w_b||_{L^2(T)} + ||\nabla (u - u_h)||_{[L^2(T)]^2} ||\nabla w_b||_{[L^2(T)]^2} \right\}.$$
(2.4.24)

Por otro lado, aplicando la desigualdad inversa (1.3.7) y las propiedades de ψ_T , deducimos

$$\|\nabla w_b\|_{[L^2(T)]^2} \leqslant C_I h_T^{-1} \|w_b\|_{L^2(T)} \leqslant C_I h_T^{-1} \|z_h\|_{L^2(T)}.$$

Así, reordenando los términos de (2.4.24) y simplificando, concluimos que

$$||f_h + \operatorname{div}(\nabla u_h)||_{L^2(T)} \le \widehat{c} \{ ||f - f_h||_{L^2(T)} + h_T^{-1} ||\nabla (u - u_h)||_{[L^2(T)]^2} \},$$

donde $\hat{c} := \max\{c_1 C_I, c_1\}$. La prueba se concluye reemplazando lo anterior en (2.4.23), elevando al cuadrado y multiplicando por h_T^2 .

Lema 2.4.8 Dado $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$, sean $T, T' \in \mathcal{T}_h$ tales que $\omega_e := T \cup T'$ y $\bar{T} \cap \bar{T}' = e$ si $e \in \mathcal{E}_I$ o bien, $\omega_e := T$ y e lado de T si $e \in \mathcal{E}_N$. Asumiendo que $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ es polinonial a trozos, entonces existe una constante $C_2 > 0$, independiente de h, tal que para cada $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$

$$h_{e} \|\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}\|_{L^{2}(e)}^{2} \leqslant C_{2} \left\{ \|\nabla_{h}(u - u_{h})\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}}^{2} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}}^{2} + h_{e}^{4} \|\gamma^{1/2} [u - u_{h}]\|_{[L^{2}(e)]^{2}}^{2} + h_{e}^{2} \|f - f_{h}\|_{L^{2}(\omega_{e})}^{2} + h_{e}^{2} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h})\|_{L^{2}(\omega_{e})}^{2} \right\}.$$

$$(2.4.25)$$

Demostración. Sea $e \in \mathcal{E}_I$. De la definición del flujo numérico $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$, deducimos

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{h,T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \boldsymbol{\sigma}_{h,T'} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T'}) + [\![\boldsymbol{\sigma}_{h}]\!] \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \alpha [\![u_{h}]\!] \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}$$

$$= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{h,T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} + \boldsymbol{\sigma}_{h,T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \boldsymbol{\sigma}_{h,T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \boldsymbol{\sigma}_{h,T'} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T'}) + [\![\boldsymbol{\sigma}_{h}]\!] \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \alpha [\![u_{h}]\!] \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}\right) [\![\boldsymbol{\sigma}_{h}]\!] + \boldsymbol{\sigma}_{h,T} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \alpha [\![u_{h}]\!] \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}.$$

De aquí,

$$\|\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}\|_{L^{2}(e)} \leq C \left\{ \|[\![\boldsymbol{\sigma}_{h}]\!]\|_{L^{2}(e)} + \|(\boldsymbol{\sigma}_{h,T} - \nabla u_{h}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}\|_{L^{2}(e)} + \|\alpha[\![u_{h}]\!]\|_{[L^{2}(e)]^{2}} \right\}.$$
(2.4.26)

Definimos $w_h := \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket$ sobre e, invocando (1.3.5) e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{L^2(e)}^2 &\leqslant c_2 \|\psi_e^{1/2} w_h\|_{L^2(e)}^2 \\ &= c_2 \int_e [\![\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}]\!] \psi_e L(w_h) \\ &= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \psi_e L(w_h) + \int_{\omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla(\psi_e L(w_h)) \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y dado que $\int_{\omega_e} = \int_T + \int_{T'}$, tenemos

$$||w_h||_{L^2(e)}^2 \leqslant c_2 \left\{ ||\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)||_{L^2(T)} ||\psi_e L(w_h)||_{L^2(T)} + ||\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)||_{L^2(T')} ||\psi_e L(w_h)||_{L^2(T')} + ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T)]^2} ||\nabla(\psi_e L(w_h))||_{[L^2(T')]^2} + ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T')]^2} ||\nabla(\psi_e L(w_h))||_{[L^2(T')]^2} \right\}.$$

Invocando la desigualdad inversa (1.3.7), aplicando (1.4.38) y dado que la triangulación es regular, para cada $T \in \mathcal{T}_h$ deducimos

$$\|\nabla(\psi_e L(w_h))\|_{[L^2(T)]^2} \leqslant C_I h_T^{-1} \|\psi_e L(w_h)\|_{L^2(T)} \leqslant \hat{c}_1 h_e^{-1/2} \|w_h\|_{L^2(e)}, \qquad (2.4.27)$$

con $\hat{c}_1 := C_I c_3^{1/2} \tilde{c}_2^{-1}$. Así, aplicando (1.4.38), (2.4.27), simplificando y sumando las estimaciones correspondientes para T y T', obtenemos

$$\|[\![\boldsymbol{\sigma}_h]\!]\|_{L^2(e)} \leqslant \hat{c}_2 \left\{ h_e^{1/2} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(\omega_e)} + h_e^{-1/2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\omega_e)]^2} \right\}, \qquad (2.4.28)$$

donde $\hat{c}_2 := \max\{c_2 c_3^{1/2}, \hat{c}_1 c_2\}$. Ahora, para acotar el segundo término de (2.4.26), definimos $\rho_h := \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T$ sobre e. Aplicando la desigualdad (1.3.5), integrando por partes y dado que div $\boldsymbol{\sigma} = -f$ en $T \in \mathcal{T}_h$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\rho_h\|_{L^2(e)}^2 &\leqslant c_2 \|\psi_e^{1/2} \rho_h\|_{L^2(e)}^2 \\ &= c_2 \int_e (\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu} - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}) \, \psi_e \, L(\rho_h) \\ &= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla_h u_h) \, \psi_e \, L(\rho_h) + \int_{\omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla_h u_h) \cdot \nabla(\psi_e \, L(\rho_h)) \right\} \\ &= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} - \nabla u_h) \, \psi_e \, L(\rho_h) \right. \\ &+ \int_{\omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u + \nabla u - \nabla_h u_h) \cdot \nabla(\psi_e \, L(\rho_h)) \right\} \\ &= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \, \psi_e \, L(\rho_h) + \int_{\omega_e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \nabla_h u_h) \, \psi_e \, L(\rho_h) \right. \\ &+ \int_{\omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_h - \nabla u) \cdot \nabla(\psi_e \, L(\rho_h)) + \int_{\omega_e} \nabla_h (u - u_h) \cdot \nabla(\psi_e \, L(\rho_h)) \right\} \\ &= c_2 \left\{ \int_{\omega_e} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \, \psi_e \, L(\rho_h) + \int_{\omega_e} (-f - \Delta_h u_h) \, \psi_e \, L(\rho_h) \right. \\ &+ \int_{\omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla(\psi_e \, L(\rho_h)) + \int_{\omega_e} \nabla_h (u - u_h) \cdot \nabla(\psi_e \, L(\rho_h)) \right\}. \end{aligned}$$

Invocando Cauchy-Schwarz, las desigualdades (1.4.38) y (2.4.27), el Lema 2.4.7 y reordenando los términos, se sigue que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}\|_{L^{2}(e)} \leq \hat{c}_{3} \left\{ h_{e}^{1/2} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h})\|_{L^{2}(\omega_{e})} + h_{e}^{1/2} \|f - f_{h}\|_{L^{2}(\omega_{e})} + h_{e}^{-1/2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}} + h_{e}^{-1/2} \|\nabla_{h}(u - u_{h})\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}} \right\},$$

$$(2.4.29)$$

con $\hat{c}_3 := \max\{c_2\,c_3^{1/2},c_3^{1/2}\,(1+\hat{c}),\hat{c}_1,(c_3^{1/2}\,\hat{c}\,c_2^{-1}+\hat{c}_1)\}$. Por otro lado, de las definiciones de γ y α , y dado que $[\![u]\!]=0$, tenemos

$$\|\alpha [u_h]\|_{L^2(e)} = \alpha \gamma^{-1/2} \|\gamma^{1/2} [u - u_h]\|_{L^2(e)} \leqslant \hat{c}_4 h_e^{3/2} \|\gamma^{1/2} [u - u_h]\|_{L^2(e)}. \quad (2.4.30)$$

Luego, reemplazando (2.4.28), (2.4.29) y (2.4.30) en (2.4.26), obtenemos

$$\|\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}\|_{L^{2}(e)} \leqslant \hat{c}_{5} \left\{ h_{e}^{-1/2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}} + h_{e}^{-1/2} \|\nabla_{h}(u - u_{h})\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}} + h_{e}^{1/2} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h})\|_{L^{2}(\omega_{e})} + h_{e}^{1/2} \|f - f_{h}\|_{L^{2}(\omega_{e})} + h_{e}^{3/2} \|\gamma^{1/2} \|u - u_{h}\|_{L^{2}(e)} \right\},$$

$$(2.4.31)$$

 $\operatorname{con} \hat{c}_5 := \max\{C(\hat{c}_2 + \hat{c}_3), C(\hat{c}_3), C(\hat{c}_4)\}.$

Por otro lado, sea $e \in \mathcal{E}_N$, definimos $w_h := g_N - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T$ sobre e. Considerando que $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ es polinomial a trozos, invocando (1.3.5) e integrando por partes, se sigue que

$$||w_{h}||_{L^{2}(e)}^{2} \leq c_{2} ||\psi^{1/2} w_{h}||_{L^{2}(e)}^{2}$$

$$= c_{2} \int_{e} (g_{N} - \nabla u_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}) \psi_{e} L(w_{h})$$

$$= c_{2} \int_{e} (\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}) \psi_{e} L(w_{h})$$

$$= c_{2} \left\{ \int_{T} \operatorname{div}(\nabla u - \nabla u_{h}) \psi_{e} L(w_{h}) + \int_{T} \nabla (u - u_{h}) \cdot \nabla (\psi_{e} L(w_{h})) \right\}$$

$$= c_{2} \left\{ \int_{T} (-f - \operatorname{div}(\nabla u_{h})) \psi_{e} L(w_{h}) + \int_{T} \nabla (u - u_{h}) \cdot \nabla (\psi_{e} L(w_{h})) \right\}.$$

Aplicando Cauchy-Schwarz, las desigualdades (1.4.38) y (2.4.27) y el Lema 2.4.7, y reordenando los términos, obtenemos

$$||g_N - \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_T||_{L^2(e)} \leqslant \hat{c}_6 \left\{ h_e^{1/2} ||f - f_h||_{L^2(T)} + h_e^{-1/2} ||\nabla (u - u_h)||_{[L^2(T)]^2} \right\},$$
(2.4.32)

con $\hat{c}_6 := \max\{(1+\hat{c}) c_2 c_3^{1/2}, (\hat{c} c_3^{1/2} \tilde{c}_2^{-1} + \hat{c}_1)\}$. Finalmente, la prueba se concluye combinando las desigualdades (2.4.31) y (2.4.32), elevando al cuadrado y multiplicando por h_e .

Lema 2.4.9 Asumiendo que $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ es polinomial a trozos, entonces existe una constante $C_3 > 0$, independiente de h, tal que para cada $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_D$

$$h_{e} \|\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T} - \boldsymbol{\sigma}_{h} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T}\|_{L^{2}(e)}^{2} \leqslant C_{3} \left\{ \|\nabla_{h}(u - u_{h})\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}}^{2} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{h}\|_{[L^{2}(\omega_{e})]^{2}}^{2} + h_{e}^{4} \|\gamma^{1/2} [u - u_{h}]\|_{[L^{2}(e)]^{2}}^{2} + h_{e}^{2} \|f - f_{h}\|_{L^{2}(\omega_{e})}^{2} + h_{e}^{2} \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{h} - \boldsymbol{\sigma})\|_{L^{2}(\omega_{e})}^{2} \right\}.$$

$$(2.4.33)$$

Demostración. Aplicando la desigualdad triangular, deducimos

$$\|\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\sigma}_h\cdot\boldsymbol{\nu}\|_{L^2(e)}\leqslant \|\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\nu}-\nabla u_h\cdot\boldsymbol{\nu}\|_{L^2(e)}+\|\nabla u_h\cdot\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\sigma}_h\cdot\boldsymbol{\nu}\|_{L^2(e)}.$$

La demostración se concluye elevando al cuadrado, multiplicando por h_e , de la desigualdad (2.4.29) y del Lema 2.4.8 anterior.

Lema 2.4.10 Existe una constante $C_4 > 0$, independiente de h, tal que para cada $T \in \mathcal{T}_h$

$$h_T^2 \| \operatorname{rot} \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2 \le C_4 \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \|_{L^2(T)}^2.$$
 (2.4.34)

Demostración. La prueba es análoga a la demostración del Lema 1.4.7. Se omiten más detalles.

Lema 2.4.11 Existe una constante $C_5 > 0$, independiente de h, tal que para cada $e \in \mathcal{E}_I$

$$h_e \| (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{t} \|_{[L^2(e)]^2}^2 \le C_5 \left\{ \| \nabla (u - u_h) \|_{[L^2(T)]^2}^2 + \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \|_{[L^2(T)]^2}^2 \right\}.$$
 (2.4.35)

Demostración. Dado $e \in \mathcal{E}_I$, sea $T \in \mathcal{T}_h$ tal que $\partial T \cap e \neq \emptyset$. Definimos $w_h := (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{t}$ sobre e. Invocando (1.3.5) e integrando por partes, se deduce

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{L^2(e)}^2 &\leqslant c_2 \, \|\psi_e^{1/2} \, w_h\|_{L^2(e)}^2 \\ &= c_2 \, \int_e \psi_e \, L(w_h) (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{t} \\ &= c_2 \, \left\{ - \int_T \mathbf{curl} (\psi_e \, L(w_h)) \cdot (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma}_h) - \int_T \psi_e \, L(w_h) \, \text{rot} \, \boldsymbol{\sigma}_h) \right\} \\ &= c_2 \, \left\{ - \int_T \mathbf{curl} (\psi_e \, L(w_h)) \cdot (\nabla u_h - \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) - \int_T \psi_e \, L(w_h) \, \text{rot} \, \boldsymbol{\sigma}_h) \right\}. \end{aligned}$$

Dado que $\sigma = \nabla u$ en T y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$||w_h||_{L^2(e)}^2 \leqslant c_2 \left\{ \left(||\nabla (u - u_h)||_{[L^2(T)]^2} + ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T)]^2} \right) ||\operatorname{\mathbf{curl}}(\psi_e L(w_h))||_{[L^2(T)]^2} + ||\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{\sigma}_h||_{L^2(T)} ||\psi_e L(w_h)||_{L^2(T)} \right\}.$$

Invocando las desigualdades (1.4.38) y (1.4.39), el Lema 2.4.10, deducimos

$$||w_h||_{L^2(e)} \le C \left\{ h_e^{-1/2} ||\nabla(u - u_h)||_{[L^2(T)]^2} + h_e^{-1/2} ||\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h||_{[L^2(T)]^2} \right\},$$

con $C := \max\{c_2 \, \hat{C}, c_2 \, (C + c_3^{1/2} \, C_4^{1/2} \, \hat{c}_2^{-1})\}$. La demostración se concluye elevando al cuadrado y multiplicando por h_e .

Finalmente, la eficiencia del estimador de error a posteriori es consecuencia de (2.4.18), (2.4.19), (2.4.20), (2.4.21), (2.4.22), (2.4.25), (2.4.33), (2.4.34) y (2.4.35).

2.5. Ejemplos numéricos

A continuación se exponen los resultados numéricos obtenidos utilizando la formulación de Galerkin discontinua local del problema de Poisson con condiciones de contorno mixtas, expuestos en las secciones anteriores, y su correspondiente método adaptativo. Todos los códigos fueron escritos en MATLAB.

Sea N el número de grados de libertad. Consideramos espacios de aproximación del orden más bajo: $[\mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h)]^2 - \mathcal{P}_0(\mathcal{T}_h)$, por lo tanto

$$N = 7 \times$$
 número total de elementos.

Con respecto a los parámetros que definen los flujos numéricos, fijamos $\beta := (1,1)^t$, $\gamma := 1/h$ y $\alpha := h$. A continuación, definimos los errores totales e individuales como

$$e_0(u) := \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}, \ e_0(\boldsymbol{\sigma}) := \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\gamma^{1/2} \left[\!\left[\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\right]\!\right]\|_{L^2(\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_N)}^2 \right\}^{1/2},$$

$$e_{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) := \|\text{div}_h(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(\Omega)}, \quad e := \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, u - u_h)\|_{DG},$$

donde $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ es la única solución del problema continuo (2.3.2) y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{\Sigma}_h \times V_h$ es la única solución del problema discreto (2.3.9).

Además, si e y e' corresponden al error de dos triangulaciones consecutivas, con grados de libertad N y N', respectivamente, y considerando que en 2D, h se comporta como $N^{-1/2}$, entonces la tasa de convergencia experimental del error total, se define como:

$$r := -2 \frac{\log(e/e')}{\log(N/N')}.$$

De forma análoga se definen las tasas de convergencia experimentales para los errores individuales: $r_0(u)$, $r_0(\sigma)$ y $r_{\text{div}}(\sigma)$.

Presentamos dos ejemplos. El primero de ellos tiene solución exacta, con el objetivo de mostrar el comportamiento optimal en estos casos. Por otro lado, con el fin de implementar un método de refinamiento adaptativo consideramos un segundo ejemplo, cuya solución viene dada en coordenadas polares. En este caso, la solución exacta pertenece al espacio $H^{1+2/3}(\Omega)$, puesto que el gradiente tiene una singularidad en el origen.

2.5 Ejemplo 1 83

Dado el estimador $\theta := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \theta_T^2$, utilizamos el siguiente algoritmo para el refinamiento adaptativo:

- a) Comenzar con una malla gruesa \mathcal{T}_h .
- b) Resolver el esquema de Galerkin en la malla actual \mathcal{T}_h .
- c) Calcular el estimador θ_T en cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$.
- d) Considerar un criterio de detención y decidir si detener el proceso o continuar al paso siguiente.
- e) Usando el método blue-green, refinar los elementos $T' \in \mathcal{T}_h$, tal que

$$\theta_{T'} \geqslant \frac{1}{2} \max\{\theta_T : T \in \mathcal{T}_h\}.$$

f) Definir la malla resultante como la nueva malla \mathcal{T}_h e ir al paso b).

2.5.1. Ejemplo 1

Consideramos un ejemplo suave, donde $\Omega := (0,1)^2$ y los datos f, g_D y g_N , se calculan de modo que la solución exacta es $u(x,y) = (1-x)(1-y) e^{-10(x^2+y^2)}$.

En la Tabla 2.5.1 presentamos los errores individuales y total, y las tasas de convergencia respectivas, considerando condiciones de borde Dirichlet, lo cual se consigue al tomar $|\Gamma_N| = 0$ en el esquema discreto (2.3.9). En la Tabla 2.5.2 presentamos los resultados para el problema con condiciones de borde mixtas donde descomponemos Γ , la frontera de Ω , en dos partes disjuntas definidas como $\Gamma_N := [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1]$ y $\Gamma_D := \Gamma \setminus \Gamma_N$.

Los resultados del Ejemplo 1 ilustran el buen planteamiento y funcionamiento del esquema. De acuerdo a lo esperado, dado que consideramos espacios de aproximación del orden más bajo, el error total e individuales se comportan como $\mathcal{O}(h)$. Además, el índice de efectividad e/η se mantiene acotado.

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$oldsymbol{e}_0(oldsymbol{\sigma})$	$r(\sigma)$	$e_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	$m{r}_{ ext{div}}(m{\sigma})$	e	r	η	e/η
28	1.3779e-01	_	3.4701e-01	_	1.4773e+00	-	1.5237e+00	_	2.8313	0.5382
112	8.8188e-02	0.6437	5.1248e-01	-	1.5112e+00	-	1.5982e+00	_	3.4834	0.4588
448	4.1781e-02	1.0777	2.5089e-01	1.0305	1.1275e+00	0.4226	$1.1558e{+00}$	0.4675	2.3884	0.4839
1792	2.0923e-02	0.9977	1.1728e-01	1.0970	5.3856e-01	1.0659	5.5158e-01	1.0673	1.5199	0.3629
7168	1.0537e-02	0.9896	5.7678e-02	1.0239	2.6505e-01	1.0229	2.7145e-01	1.0229	1.0059	0.2699
28672	5.3015e-03	0.9910	2.8808e-02	1.0016	1.3258e-01	0.9994	1.3577e-01	0.9995	0.6860	0.1979
114688	2.6618e-03	0.9940	1.4420e-02	0.9984	6.6513e-02	0.9951	6.8110e-02	0.9953	0.4760	0.1431

Tabla 2.5.1: Errores y tasas de convergencia Ejemplo 1, con condiciones de borde Dirichlet. Refinamiento uniforme.

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$oldsymbol{e}_0(oldsymbol{\sigma})$	$r(\sigma)$	$oldsymbol{e}_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	$oldsymbol{r_{ ext{div}}}(oldsymbol{\sigma})$	e	r	η	e/η
28	1.0337e-01	_	3.2876e-01	-	1.5014e+00	-	1.5405 e+00	_	2.8570	0.5392
112	4.6782e-02	1.1437	5.1226e-01	_	$1.5133e{+00}$	_	1.5983e+00	_	3.4793	0.4594
448	1.9761e-02	1.2433	2.5078e-01	1.0305	$1.1271e{+00}$	0.4250	1.1549e+00	0.4688	2.3874	0.4837
1792	9.2035e-03	1.1024	1.1727e-01	1.0966	5.3851e-01	1.0656	5.5121e-01	1.0671	1.5198	0.3627
7168	4.6519e-03	0.9844	5.7675e-02	1.0237	2.6504e-01	1.0228	2.7128e-01	1.0228	1.0059	0.2697
28672	2.3840e-03	0.9644	8.8074e-02	1.0015	1.3258e-01	0.9994	1.3569e-01	0.9995	0.6860	0.1978
114688	1.2143e-03	0.9733	1.4420e-02	0.9984	6.6513e-02	0.9951	6.8070e-02	0.9952	0.4760	0.1430

Tabla 2.5.2: Errores y tasas de convergencia Ejemplo 1, con condiciones de borde mixtas. Refinamiento uniforme.

2.5.2. Ejemplo 2

Sean $\Omega := (-1,1)^2 \setminus [0,1] \times [-1,0]$ un dominio en forma de L, f := 0, g_D y g_N se escogen de modo que la solución exacta, en coordenadas polares, es dada por $u(r,\theta) := r^{2/3} \sin(2\theta/3)$. Descomponemos Γ , la frontera de Ω , en dos partes disjuntas definidas como $\Gamma_D := [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,-1]$ y $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$.

En la Tabla 2.5.3 presentamos los errores individuales y total, y sus respectivas tasas de convergencia experimentales, para un refinamiento uniforme y adaptativo del problema con condiciones de borde mixtas. En la Figura 2.1 presentamos refinamientos intermedios de la malla obtenidos al implementar el método adaptativo basado en η . Vemos que el estimador localiza la singularidad de la función exacta. Además, en la Figura 2.2 presentamos los resultados del error global en norma L^2 , $e_0(\boldsymbol{\sigma},u) := \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|\gamma^{1/2} \left[\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\right]\|_{L^2(\mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_N)}^2 + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$ para los refinamientos uniforme y adaptativo versus el número de grados de libertad, en escala logarítmica en ambos ejes. Hacemos notar que la divergencia de $\boldsymbol{\sigma}$ de la fun-

2.5 Ejemplo 2 85

ción exacta es cero en Ω . Razón por la cual utilizamos el error $e_0(\boldsymbol{\sigma}, u)$ en lugar del error global. Así, en la Figura 2.2 observamos que al utilizar un refinamiento adaptativo, se obtienen errores menores con menos grados de libertad que al utilizar refinamiento uniforme.

Por otro lado, el estimador de error a posteriori η definido en el Teorema 2.4.1, está compuesto por nueve términos por elemento, entre ellos uno para los elementos que poseen lados en la frontera Dirichlet. Mientras que el estimador de la formulación mixta dual conforme para aproximar el problema con condiciones de borde mixtas desarrollado en el Capítulo 1, está compuesto por siete términos por elemento. Al igual que el estimador de la formulación LDG inusual, contiene un término para los elementos que tienen lados en la frontera Dirichlet. Además, posee un término para los elementos que tienen lados en la frontera Neumann. Cuatro términos se repiten en ambos estimadores: la norma de $(f - \text{div} \sigma_h)$, rot σ_h y los términos del salto de σ_h y de u_h . Sin embargo, en el estimador de la formulación LDG estos dos últimos términos están multiplicados por un factor 1/h. Este factor es consecuencia de los parámetros que se utilizan para definir los flujos numéricos.

N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$oldsymbol{e}_0(oldsymbol{\sigma})$	$r(\sigma)$	$e_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	$r_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	e	r	η	e/η
42	6.6619e-01	_	9.1033e-01	_	6.9839e-01	-	1.3267e + 00	_	3.9410	0.3366
168	3.6865e-01	0.8537	6.4355e-01	0.5003	4.4746e-01	0.6423	8.6619e-01	0.6151	3.6488	0.2374
672	1.4787e-01	1.3180	3.8815e-01	0.7294	1.7297e-01	1.3712	4.4994e-01	0.9450	2.7830	0.1617
2688	5.4580e-02	1.4379	2.1507e-01	0.8518	6.8277e-02	1.3410	2.3215e-01	0.9547	2.0812	0.1115
10752	2.4724e-02	1.1425	1.2349e-01	0.8004	3.0831e-02	1.1470	1.2966e-01	0.8404	1.5548	0.0834
43008	1.3404e-02	0.8832	7.8377e-02	0.6558	1.3285e-02	1.2146	8.0617e-02	0.6855	1.2049	0.0669
172032	7.9586e-03	0.7521	5.5502e-02	0.4979	6.1409e-03	1.1133	5.6405e-02	0.5153	1.0063	0.0561
N	$e_0(u)$	$r_0(u)$	$oldsymbol{e}_0(oldsymbol{\sigma})$	$r(oldsymbol{\sigma})$	$e_{ ext{div}}(oldsymbol{\sigma})$	$m{r}_{ ext{div}}(m{\sigma})$	e	r	η	$m{e}/\eta$
42	6.6619e-01	_	9.1033e-01	_	6.9839e-01	_	$1.3267\mathrm{e}{+00}$	_	3.9410	0.3366
168	3.6865e-01	0.8537	6.4355e-01	0.5003	4.4746e-01	0.6423	8.6619e-01	0.6151	3.6488	0.2374
672	1.4787e-01	1.3180	3.8815e-01	0.7294	1.7297e-01	1.3712	4.4994e-01	0.9450	2.7830	0.1617
2646	5.5405e-02	1.4325	2.1573e-01	0.8571	7.1362e-02	1.2920	2.3389e-01	0.9548	2.0994	0.1114
5068	4.5767e-02	0.5881	1.7880e-01	0.5779	6.4010e-02	0.3346	1.9535e-01	0.5541	1.8624	0.1049
7007	3.7201e-02	1.2793	1.5052e-01	1.0627	7.6225e-02	_	1.7278e-01	0.7580	1.7886	0.0966
10255	3.0755e-02	0.9994	1.2528e-01	0.9638	7.5186e-02	0.0721	1.4932e-01	0.7664	1.6913	0.0883
11137	3.0980e-02	_	1.2169e-01	0.7053	8.7306e-02	_	1.5294e-01	_	1.6627	0.0920
13923	2.6041e-02	1.5559	1.0021e-01	1.7396	1.0444e-01	-	1.4707e-01	0.3507	1.6306	0.0902
15085	2.6183e-02	_	9.7462e-02	0.6944	1.4219e-01	_	1.7437e-01	_	1.4481	0.1204
43302	1.3127e-02	1.3095	5.2653e-02	1.1678	5.0579e-02	1.9605	7.4181e-02	1.6209	1.0894	0.0681
47628	1.2727e-02	0.6504	5.0833e-02	0.7386	7.6994e-02	_	9.3135e-02	_	1.0456	0.0891
121352	7.9424e-03	1.0082	3.2226e-02	0.9746	5.5750e-02	0.6904	6.4882e-02	0.7730	0.8367	0.0775
159712	6.8435e-03	1.0843	2.7049e-02	1.2753	2.7070e-02	5.2604	3.8875e-02	3.7297	0.7607	0.0511

Tabla 2.5.3: Errores y tasas de convergencia Ejemplo 2, con condiciones de borde mixtas. Refinamiento uniforme y adaptativo.

2.5 Ejemplo 2 87

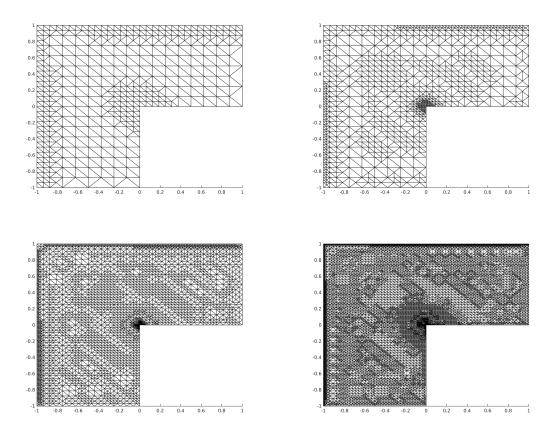


Figura 2.1: Mallas intermedias correspondientes a 5068, 10255, 43302 y 121352 grados de libertad, del refinamiento adaptativo basado en η . Condiciones de borde mixtas. (Ejemplo 2).

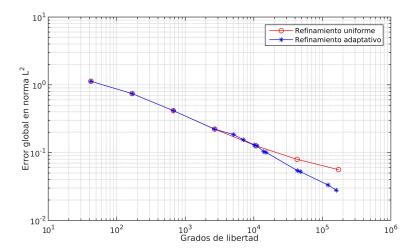


Figura 2.2: Error $e_0(\boldsymbol{\sigma}, u)$ para refinamientos uniforme y adaptativo (Ejemplo 2).

Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos desarrollado e implementado métodos de refinamiento adaptativos basados en estimadores de error a posteriori, para ecuaciones diferenciales parciales elípticas. En particular, usando como modelo el problema de Poisson en 2D con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas y mixtas.

En el Capítulo 1, con el fin de contextualizar, damos una revisión de los resultados existentes sobre estimaciones de error a posteriori utilizando esquemas conformes y formulaciones mixtas. Mediante una proyección de Ritz del error desarrollamos un estimador de error a posteriori compuesto por siete términos por elemento, confiable y localmente eficiente, evitando la hipótesis de saturación y utilizando la norma natural para el problema con condiciones de borde Dirichlet no homogéneas y mixtas. En particular, para las condiciones de borde mixtas utilizamos una técnica de homogenización y seguimos las ideas descritas en [26] para tratar los datos de la frontera Neumann. Así, nuestro enfoque es diferente al presentado en [54], donde las condiciones de borde Neumann se impusieron de manera débil mediante la introducción de un multiplicador de Lagrange. Desarrollamos los métodos adaptativos respectivos, incluyendo validaciones numéricas. Vemos que el estimador de error a posteriori es capaz de identificar la singularidad numérica de la solución exacta y contribuye a mejorar la calidad de la aproximación. Cabe mencionar que en el caso de condiciones de borde mixtas, los resultados son originales, puesto que no hemos encontrado en la literatura un desarrollo sobre análisis de error a posteriori para métodos conformes con condiciones de borde mixtas.

En el Capítulo 2 describimos y aplicamos el método LDG inusual desarrollado en [19]. Aquí se mostró que los operadores salto y promedio, usados para definir los

flujos numéricos en el esquema LDG, son suficientes para aproximar H(div). Desarrollamos un análisis de error a posteriori para el problema de Poisson aproximado mediante una formulación mixta dual no conforme utilizando elementos finitos de Lagrange. Puesto que una ventaja del método LDG es la simplicidad para imponer las condiciones de borde realizamos el análisis inmediatamente con condiciones de borde mixtas. Siguiendo las ideas descritas en [23] primero obtuvimos una cota para $||u-u_h||_{L^2(\Omega)}$ gracias a un problema auxiliar y posteriormente aplicamos una descomposición de Helmholtz para obtener un estimador confiable, compuesto por nueve términos por elemento. Probamos la eficiencia del estimador en una norma distinta a la norma natural. Esto se produce puesto que para deducir el estimador de error a posteriori, utilizamos un resultado de [30] al momento de acotar el término de la función de corriente χ , que proviene de la descomposición de Helmholtz del Lema 2.4.4. En este trabajo, los autores definen los flujos numéricos con parámetros del orden tradicional, es decir, $\mathcal{O}(1/h)$, mientras que en el trabajo de [19], se utiliza un parámetro adicional con comportamiento $\mathcal{O}(h)$, que no ha sido estudiado antes. A pesar de esto, desde un punto de vista práctico, el estimador es confiable y además, los resultados numéricos incluídos para testear el algoritmo de refinamiento adaptativo, muestran que es capaz de detectar la singularidad satisfactoriamente.

Por otro lado, al comparar el estimador desarrollado para el problema con condiciones de borde mixtas utilizando una formulación mixta dual conforme del Capítulo 1, con el estimador de la formulación LDG del Capítulo 2, notamos que cuatro términos por elemento componen ambos estimadores. Particularmente, los términos de los saltos de u_h y σ_h , para el caso del estimador de la formulación LDG están multiplicados por un factor 1/h como consecuencia del parámetro γ introducido para definir los flujos numéricos.

Bibliografía

- [1] R. A. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, New York San Francisco London, 1975.
- [2] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1965.
- [3] M. AINSWORTH, A posteriori error estimation for lowest order Raviart-Thomas mixed finite elements. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 30, 1, pp. 189 204, (2007).
- [4] M. Ainsworth and J. T. Oden, A posteriori error estimation in finite element analysis. Wiley Interscience, New york, 2000.
- [5] A. Alonso, Error estimators for a mixed method. Numerische Mathematik, vol. 74, pp 385 395, (1996).
- [6] D. N. Arnold, An interior penalty finite element method with discontinuous elemets. Ph.D. thesis, The University of Chicago, Chicago, IL, 1979.
- [7] D. N. Arnold, An interior penalty finite element method with discontinuous elements. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 19, 4, pp. 742 760, (1982).
- [8] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L. D. Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 39, 5, pp. 1749 1779, (2002).
- [9] I. Babuška, The finite element method with lagrangian multipliers. Numerische Mathematik, vol. 20, pp. 179 192, (1973).

- [10] G. A. Baker, Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. Mathematics of Computation, vol. 31, pp 45 59, (1977).
- [11] T. P. Barrios, E. M. Behrens and R. Bustinza, A stabilized mixed method applied to Stokes system with non homogeneous source terms: The stationary case. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 92, pp. 509 527, (2020).
- [12] T. P. Barrios, E. M. Behrens and M. González, A posteriori error analysis of an augmented mixed formulation in linear elasticity with mixed and Dirichlet boundary conditions. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, pp. 101 113, (2011).
- [13] T. P. Barrios, E. M. Behrens and M. González, Low cost a posteriori error estimators for an augmented mixed FEM in linear elasticity. Applied Numerical Mathematics, vol. 84, pp. 46 – 65, (2014).
- [14] T. P. BARRIOS, E. M. BEHRENS AND M. GONZÁLEZ, A posteriori error analysis of an augmented dual-mixed method in linear elasticity with mixed boundary conditions. International Journal of Numerical Analysis and Modelling, vol. 16, 5, pp. 804 – 824, (2019).
- [15] T. P. Barrios and R. Bustinza, An augmented discontinuous Galerkin method for elliptic problems. Comptes Rendus de l'Academie des Sciencies, Series I, vol. 344, pp. 53 58, (2007).
- [16] T. P. BARRIOS AND R. BUSTINZA, An augmented DG scheme for porous media equations. In book: Numerical Mathematics and Advanced Applications, Proceedings ENUMATH-2007, edited by K. Kunish, G. Of and O. Steinbach, pp. 315 – 322, Springer Verlag, Heidelberg, 2008.
- [17] T. P. Barrios and R. Bustinza, A priori and a posteriori error analysis of an augmented discontinuous Galerkin formulation. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 30, pp. 987 1008, (2010).
- [18] T. P. Barrios and R. Bustinza, An a posteriori error analysis of an augmented discontinuous Galerkin formulation for Darcy flow. Numerische Mathematik, vol. 120, pp. 231 269, (2012).

BIBLIOGRAFÍA 93

[19] T. P. Barrios and R. Bustinza, An a-priori error analysis for discontinuous lagrangian finite elements applied to nonconforming dual-mixed formulations: Poisson and Stokes problems. Electronic Transactions on Numerical Analysis, vol. 52, pp. 455 – 479, (2020).

- [20] T. P. Barrios, R. Bustinza, C. Campos, An a posteriori error estimator for a non homogeneous Dirichlet problem considering a dual mixed formulation. Trends in Computational and Applied Mathematics, vol. 23, pp. 549 568, (2022).
- [21] T. P. BARRIOS, R. BUSTINZA, C. CAMPOS, A note on a posteriori error estimates for dual mixed methods. Preprint 2020-08, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile, 2020.
- [22] T. P. BARRIOS, R. BUSTINZA, G. C. GARCÍA AND M. GONZÁLEZ, An a posteriori error analysis of a velocity pseudostress formulation of the generalized Stokes problem. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 357, pp. 349 365, (2019).
- [23] T. P. Barrios, R. Bustinza and V. Domínguez, Adaptative numerical solution of a discontinuous Galerkin method for a Helmholtz problem in low-frequency regime. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 300, pp. 312 340, (2016).
- [24] T. P. Barrios, R. Bustinza and F. Sánchez, Analysis of DG approximations for Stokes problems based on velocity-pseudostress formulation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 33, pp. 1540 1564 (2017).
- [25] T. P. BARRIOS, J. M. CASCÓN AND M. GONZÁLEZ, A posteriori error analysis of a stabilized mixed finite element method for Darcy flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 283, pp. 909 922, (2015).
- [26] T. P. BARRIOS, J. M. CASCÓN AND M. GONZÁLEZ, A posteriori error estimation of a stabilized mixed finite element method for Darcy flow. In Book: Boundary and Interior Layers Computational and Asymptotic Methods, BAIL 2014, edited by Petr Knobloch. Springer series Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 108, pp 13-23, (2015).

- [27] T. P. Barrios, J. M. Cascón and M. González, Augmented mixed finite element method for the Oseen problem: A priori and a posteriori error analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 313, pp. 216 238, (2017).
- [28] T. P. Barrios and G. N. Gatica, An augmented mixed finite element method with Lagrange multipliers: A priori and a posteriori error analyses. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 200, pp. 653 676, (2007).
- [29] T. P. Barrios, G. N. Gatica, M. González and N. Heuer, A residual based a posteriori error estimator for an augmented mixed finite element method in linear elasticity. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 40, 5, pp. 843 869, (2006).
- [30] R. Becker, P. Hansbo and M. G. Larson, Energy norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol. 192, pp. 723 733 (2003).
- [31] D. Braess and R. Verfüth, A posteriori error estimators for the Raviart-Thomas element. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 33, 6, pp. 2431 – 2444, (1996).
- [32] S.C. Brenner and L. R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer, 3rd edition, 2008.
- [33] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 2010.
- [34] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 8, pp. 129 151, (1974).
- [35] F. Brezzi and M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, 1991.

BIBLIOGRAFÍA 95

[36] F. Brezzi, G. Manzini, D. Marini, P. Pietra and A. Russo, *Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 16, 4, pp. 365 – 378, (2000).

- [37] R. Bustinza and G. N. Gatica, A local discontinuous Galerkin method for nonlinear diffusion problems with mixed boundary conditions. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 26, 1, pp. 152 – 177, (2004).
- [38] R. Bustinza, G. N. Gatica and B. Cockburn, An a-posteriori error estimate for the local discontinuous Galerkin method applied to linear and nonlinear diffusion problems. Journal of Scientific Computing, vol. 22, pp. 147 185 (2005).
- [39] C. CARSTENSEN, A posteriori error estimate for the mixed finite element method. Mathematics of Computation, vol. 66, 218, pp. 465 476, (1997).
- [40] J. M. CASCÓN, R.H. NOCHETTO AND K. G. SIEBERT, Design and Convergence of AFEM in H(DIV). Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 17 (11), pp. 1849 1881, (2007).
- [41] P. CASTILLO, A review of the local discontinuous Galerkin (LDG) method applied to elliptic problems. Applied Numerical Mathematics, vol 56, pp. 1307 1313, (2006).
- [42] P. Castillo, B. Cockburn, I. Perugia and D. Schötzau, An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 38, 5, pp. 1676 1706, (2000).
- [43] P. G. CIARLET, The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, 1978.
- [44] P. CLÉMENT, Approximation by finite element functions using local regularisation. RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 9, pp. 77 – 84, (1975).
- [45] B. COCKBURN AND J. GOPALAKRISHNAN, Incompressible finite elements via hybridization. Part I: The Stokes problem system in two dimensions. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 43, pp. 1627 1650, (2005).

- [46] B. Cockburn, G. Kanschat, I. Perugia and D. Schötzau, Superconvergence of the Local Discontinuous Galerkin method for elliptic problems on Cartesian grids. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 39, 1, pp. 264 285, (2001).
- [47] B. COCKBURN, G. KANSCHAT AND D. SCHÖTZAU, A locally conservative LDG method for the incompressible Navier-Stokes equations. Mathematics of Computation, vol. 74, pp. 1061 1095, (2005).
- [48] B. COCKBURN, G. KANSCHAT, D. SCHÖTZAU AND C. SCHWAB, Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 40, pp. 319 343, (2002).
- [49] B. Cockburn and C. W. Shu, The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 35, 6, pp. 2440 2463, (1998).
- [50] M. CROUZEIX AND P. A. RAVIART, Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 7, pp. 33 75, (1973).
- [51] J. DOUGLAS, JR. AND T. DUPONT, Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. Computing Methods in Applied Sciences (Second International Symposium, Versailles, 1975). Lecture Notes in Physics, vol. 58, pp. 207 – 216, (1976).
- [52] R. Durán, Mixed Finite Element Method. In book: Mixed finite Elements, Compatibility Conditions and Applications, edited by D. Boffi and L. Gastaldi, Serie Lectures Notes in Mathematics, Springer, Berlin - Heidelberg, (2008).
- [53] L. C. Evans, Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [54] G. N. GATICA AND M. MAISCHAK, A-posteriori error estimates for the mixed finite element method with Lagangre multipliers. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 21, 3, pp. 421 450, (2005).

BIBLIOGRAFÍA 97

[55] G. N. GATICA AND F. J. SAYAS, A note on the local approximation properties of piecewise polynomials with applications to LDG methods. Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 51, 2, pp. 109 – 117, (2006).

- [56] V. GIRAULT AND P. A. RAVIART, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer Verlag, 1986.
- [57] P. Grisvard, Elliptic Problems in Non-smooth Domains. Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, 1985.
- [58] R. HIPTMAIR, Finite elements in computational electromagnetism. Acta Numerica, vol. 11, pp. 237 339, (2002).
- [59] P. HOUSTON, D. SCHÖTZAU AND T. P. WIHLER. An hp-adaptive mixed discontinuous Galerkin FEM for nearly incompressible linear elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pp. 3224 3246 (2006).
- [60] R. Kirby, Residual a posteriori error estimates for the mixed finite element method. Computational Geosciences, vol. 7, pp. 197 214, (2003).
- [61] C. LOVADINA AND L. D. MARINI, A-posteriori error estimates for discontinuous Galerkin approximations of second order elliptic problems. Journal of Scientific Computing, vol. 40, pp. 340 359, (2009).
- [62] I. Perugia and D. Schötzau, An hp-analysis of the local discontinuous Galerkin method for difffusion problems. Journal of Scientific Computing, vol. 17, pp. 561 571, (2002).
- [63] W. H. REED AND T. R. HILL, Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, (1973).
- [64] B. RIVIÈRE AND M. F. WHEELER, A posteriori error estimates and mesh adaptation strategy for discontinuous Galerkin methods applied to diffusion problems. Computers and Mathematics with Applications, vol. 46, pp. 141 163 (2003).

- [65] B. RIVIÈRE AND M. F. WHEELER, A posteriori error estimates for discontinuous Galerkin methods applied to elliptic problems. Computers and Mathematics with Aplications, vol. 46, pp. 141 164, (2003).
- [66] J. E. ROBERTS AND J.-M. THOMAS, Mixed and hybrid methods. In: Handbook of Numerical Analysis, edited by P. G. Ciarlet and J. L. Lions, vol. II, Finite Element Methods (Part 1), North-Holland, Amsterdan, 1991.
- [67] L. R. Scott and S. Zhang, Finite Element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. Mathematics of Computation, vol. 54, pp. 483 493, (1990).
- [68] R. Verfüth, A posteriori estimators for the Stokes equations. Numerische Mathematik, vol. 55, pp. 309 325, (1989).
- [69] R. VERFÜTH, A posteriori error estimation and adaptative mesh-refinement techniques. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 50, pp. 67-83, (1994).
- [70] R. Verfüth, A review of a posteriori error estimation and adaptative meshrefinement tecniques. Wiley-Teubner (Chichester), 1996.
- [71] M. F. Wheeler, An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 15, pp. 152 161, (1978).