



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO



Magister en Matemática

## Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística

### Método de Elementos Virtuales para Problemas de Fluidos

*Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío-Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.*

**Alberth Antonio Silgado Ballesta**

**Profesor Director: David Mora Herrera**  
**Profesor Co-director: Carlos Reales Martínez**

Concepción-Chile, 2019.

# Método de Elementos Virtuales para Problemas de Fluidos

por:

**Alberth Antonio Silgado Ballesta**

Aprobada por:

---

**David Mora Herrera**

**Profesor Guía**

**Departamento de Matemática - Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile**

---

**Carlos Reales Martínez**

**Profesor Co-Guía**

**Departamento de Matemáticas y Estadísticas - Universidad de Córdoba, Montería,  
Colombia**

---

**Verónica Anaya Domínguez**

**Profesora Informante**

**Departamento de Matemática - Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile**

---

**Abner Poza Díaz**

**Profesor Informante**

**Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas - Universidad Católica de la  
Santísima Concepción, Concepción, Chile**

---

**Gonzalo Rivera Acuña**

**Profesor Informante**

**Departamento de Ciencias Exactas - Universidad de Los Lagos, Chile**

*A mi madre:*

*Lady,*

*y a mis Abuelos:*

*José y Benilda.*

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a mi amada madre Lady por su dulce e incomparable amor, por sus sabios consejos y por su apoyo incondicional en momentos cruciales, que sin estos sin duda no estuviese aquí. Agradezco a mis queridos hermanos: Eberto Carlos, “Beni” y “Abrahamcho” por la confianza y el cariño que me tienen, agradezco también a mi padre Eberto por sus buenos consejos. De manera muy especial a mis amados abuelos José y Benilda por siempre inspirarme a ser buena persona. También mis tíos, tías y primos por su gran cariño y por estar siempre atentos a mi.

A mi director, el Profesor David Mora por aceptarme para realizar esta tesis de maestría, por su incondicional apoyo, por sus consejos académicos y “no-académicos”, por su paciencia y disponibilidad para guiar mis ideas y responder mis dudas. Gracias profe, por ser súper chévere conmigo.

A mi co-director, el Profesor Carlos Reales por su aporte a esta tesis, pese a la distancia. Por su tiempo y disposición para trabajar mientras estuvo aquí en Chile. Gracias por haberme motivado y recomendado para seguir mis estudios.

A los Profesores del Programa de Magíster. En especial, a la Profesora Verónica Anaya por estar siempre atenta a mi. También a los Profesores: Juan Bobenrieth, Dante Carrasco, Ricardo Oyarzúa, Pablo Venegas y Luis Villada, por compartir sus conocimientos y su buena vibra. Agradezco en Colombia al Profesor Hugo Aduén por sus buenos consejos, motivaciones y recomendación para continuar mis estudios de maestría.

A mis estimados compañeros de Magíster y Doctorado, por los buenos y malos momentos vividos durante estos años. En especial, a mis amigos: Edxon “José”, Horacio “José” y Rubén “José” que gracias a su compañerismo y carisma hicieron que no me sintiera tan lejos de mi hogar.

Quiero expresar mis agradecimientos a cada uno de los habitantes de “La casa del pueblo”: Andrés, Astrid, Diana, Juan, Luis, Mauricio, Pedro, Rafa, Wilber, por su gran carisma y por los “momentos colombianos” vividos durante estos años. De manera especial agradezco a mi amigo Iván Velásquez, por su bacanería, su tiempo y buena disposición para compartir conmigo sus conocimientos “virtuales”.

Quisiera agradecer al Departamento de Matemática de la UBB el cual me facilitó sus instalaciones y recursos para trabajar adecuadamente durante mis estudios de maestría y al personal del departamento, por la hospitalidad y el trato cordial y afectuoso.

Agradezco el financiamiento recibido del proyecto FONDECYT 1180913 para desarrollar

mi tesis, el cual ha sido gestionado por el Profesor David Mora y al financiamiento del proyecto CONICYT-PIA AFB17001: Concurso Apoyo a Centros Científicos y Tecnológicos de Excelencia con Financiamiento Basal. También a las becas: Arancel de Matrícula de Magíster y Extranjero Supernumerario de la Dirección de Postgrado de la Universidad del Bío-Bío.

## RESUMEN

En este trabajo desarrollamos una discretización mediante elementos virtuales para el problema de Brinkman formulado en términos de la función de corriente (también llamada función de flujo) del campo de velocidad. Escribimos una formulación variacional y proponemos una discretización usando elementos virtuales de clase  $C^1$  de orden arbitrario  $k \geq 2$ . La velocidad se obtiene a través de un post-proceso de la función de corriente. Bajo suposiciones estándar del dominio computacional, probamos estimaciones de error para la función de corriente. También establecemos estimaciones de error en las normas  $L^2$  y  $H^1$  a través de argumentos de dualidad clásicos. Para  $k = 3$ , proponemos una estrategia para aproximar la presión del fluido, a través de un problema de Poisson generalizado con dato proveniente de la función de corriente, el cual se basa en una formulación discreta con elementos virtuales de clase  $C^0$ . Además, bajo la hipótesis de quasi-uniformidad de las mallas se establece estimaciones de error en norma  $H^1$  para la presión. Finalmente, se reportan algunos resultados numéricos usando diferentes familias de mallas poligonales, los cuales ilustran el buen comportamiento del esquema discreto y corroboran nuestros resultados teóricos.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones y notaciones . . . . .	6
<b>2. Problema Continuo</b>	<b>12</b>
2.1. Problema de Brinkman en términos de la velocidad y presión . . . . .	12
2.2. Problema de Brinkman en términos de la función de corriente . . . . .	13
<b>3. Discretización por VEM</b>	<b>18</b>
3.1. Mallas poligonales . . . . .	18
3.2. Espacios virtuales locales y globales . . . . .	19
3.3. Construcción de las formas bilineales y del lado derecho . . . . .	26
3.4. Problema discreto . . . . .	31
<b>4. Estimaciones de Error</b>	<b>33</b>
4.1. Convergencia . . . . .	33
4.2. Estimación en normas $H^1$ y $L^2$ . . . . .	40
4.3. Recuperación de la velocidad del fluido . . . . .	50
4.4. Recuperación de la presión del fluido . . . . .	50

<b>5. Resultados Numéricos</b>	<b>63</b>
5.1. Ejemplo 1: Tensor constante . . . . .	65
5.2. Ejemplo 2: Tensor variable . . . . .	72
5.3. Ejemplo 3: Solución dependiendo de $\nu$ . . . . .	75
5.4. Ejemplo 4: Lado derecho alternativo . . . . .	82
5.5. Ejemplo 5: El problema de la cavidad . . . . .	86
<b>6. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>89</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	89
6.2. Trabajo futuro . . . . .	90
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los métodos de elementos virtuales (VEM) fueron introducidos recientemente en [5] como una generalización del método de elementos finitos que pueden usar polígonos y poliedros generales en el caso 2D y 3D, respectivamente, para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

En [5] el método VEM se introduce para la ecuación de Laplace en 2D y en dicho trabajo se presentan las ideas principales del método. Una de ellas es que los espacios locales se construyen de tal manera que incluyan polinomios de hasta cierto grado, por ejemplo, a los polinomios de grado menor o igual a  $k$ , (el cual se denomina *orden* del método). Sin embargo, los espacios locales también contienen otras funciones más generales, no polinómicas (que generalmente son definidas mediante un operador diferencial) cuyos valores puntuales en la práctica no necesitan calcularse o evaluarse, lo cual les otorga el título “Virtual”. Otra idea del método es que para generar esquemas calculables en mallas poligonales generales, los grados de libertad se eligen de manera cuidadosa de tal modo que las correspondientes proyecciones de las funciones test locales en el subespacio de los polinomios de grado menor o igual a  $k$ , resulten calculables.

Una característica importante del enfoque del método VEM es que la solución calculada no está disponible en forma de una función (ya que será una función virtual). Esta solución entregada por el método es representada a través de los valores de sus grados de libertad, a los que se pueden acceder, por ejemplo, mediante la proyección polinomial de la función virtual en el polígono.

El método VEM se pudo extender a otro tipo de problemas, por ejemplo se aplicó a algunos

problemas de elasticidad en dos dimensiones (ver [6, 11]) y a problemas de placas delgadas (ver [24, 33]). Desde entonces se observaron varias ventajas en comparación con los métodos de elementos finitos (FEM), como por ejemplo, su habilidad para construir esquemas discretos sobre mallas poligonales y poliédricas generales, lo que resulta muy conveniente en la generación de mallas para problemas con geometrías complejas, además para esquemas adaptativos resultan ser eficientes, pues se considera automáticamente la inclusión de nodos colgantes. En estos primeros trabajos también se observó otra ventaja significativa del método VEM, y es que este resultó apropiado para hacer frente a los requisitos de continuidad para ordenes superiores, por ejemplo, permiten diseñar subespacios discretos de  $H^2(\Omega)$  de manera sencilla, en comparación a los métodos FEM clásicos.

Para problemas de cuarto orden los métodos de elementos finitos conformes estándar requieren que los subespacios de funciones sean subespacios de  $H^2(\Omega)$  (en la práctica  $C^1$ ), dichos elementos requieren polinomios de alto grado que incluso en dos dimensiones no son fáciles de construir, por ejemplo, en [34] se muestra que para uno de estos espacios el grado polinomial asociado es 5 y los grados de libertad asociados son 21 por triángulo. En este trabajo evidenciaremos la habilidad del método VEM para construir subespacios de dimensión finita de  $H^2(\Omega)$  de manera fácil y utilizando polinomios de bajo orden en el grado más bajo ( $k = 2$ ). En [24], se presenta una familia de elementos virtuales para el problema de flexión de placas delgadas usando las ecuaciones de Kirchhoff-Love, en este trabajo se muestra la construcción de aproximaciones  $C^1$  de manera sencilla, sobre elementos poligonales generales. Para el orden más bajo ( $k = 2$ ) hacen uso de un simple conjunto de grados de libertad, a saber, 3 grados de libertad por vértice del polígono (9 grados de libertad por triángulo).

En [33], se analiza la familia de elementos introducida en [24] para problemas de cuarto orden, mostrando ahora estimaciones óptimas de error en norma  $L^2$  y  $H^1$ , usando argumentos clásicos de dualidad. En [3], se desarrolla una discretización de clase  $C^1$  con elementos virtuales de bajo orden para la aproximación de la ecuación de Cahn-Hilliard, más fácil de implementar que el estándar FEM y considerando un número reducido de grados de libertad en comparación a los FEM mixtos. Desde ese entonces el método VEM se ha extendido a varios problemas con regularidad de clase  $C^1$  para problemas de placas, por ejemplo, en [44] se estudia una discretización para el problema vibración de las placas de Kirchhoff y en [45] se presenta un esquema discreto usando elementos virtuales para el problema de pandeo de las placas de Kirchhoff.

En los últimos años VEM se ha extendido para problemas con regularidad arbitraria (ver [14]), problemas elípticos generales (ver [7, 8]), parabólicos ([49, 51]), hiperbólicos ([47]), mixtos (ver [22, 10]), en particular en problemas de fluidos, podemos mencionar los problemas de Stokes, Brinkman, Darcy (ver [2, 12, 26, 25, 48]), Navier-Stokes (ver [13, 18]), también a problemas de elasticidad lineal y no lineal (ver [6, 37, 11, 42]), estimaciones de error y técnicas adaptativas (ver [15, 28]).

Durante las últimas décadas el estudio de la mecánica de fluidos ha adquirido gran interés por la variedad de aplicaciones en diferentes ciencias, tales como: ingeniería, oceanografía, biomedicina, entre otras. Dependiendo el tipo de fenómeno que se produce en el fluido y del medio en cual se encuentre, diferentes modelos matemáticos, tales como Stokes, Brinkman, Darcy, Oseen y Navier-Stokes pueden utilizarse para obtener resultados adecuados para estudiar la dinámica del fluido en términos de las variables: velocidad, presión, vorticidad y otras variables de interés, por ejemplo, la función de corriente.

En particular, en este trabajo nos enfocaremos en un análisis numérico de las ecuaciones de Brinkman de un fluido viscoso incompresible formulado en términos de la función de corriente de la velocidad. Las ecuaciones de Brinkman se pueden considerar como una extensión de la ley de Darcy para describir el comportamiento del flujo de un fluido viscoso dentro de un medio poroso con permeabilidad posiblemente heterogénea, de modo que el flujo puede estar dominado por el régimen de Stokes en algunas regiones y por Darcy en otras partes del dominio. La aproximación eficiente del flujo de un fluido viscoso gobernado por las ecuaciones de Brinkman es de gran importancia práctica, ya que este sistema es utilizado para modelar flujos en muchos materiales industriales y medios naturales, tales como filtros industriales, vidrio o lana mineral, espumas abiertas (ver Figuras 1.1 y 1.2) la filtración de capas porosas, depósitos de petróleo (ver Figura 1.3) y/o acuíferos.

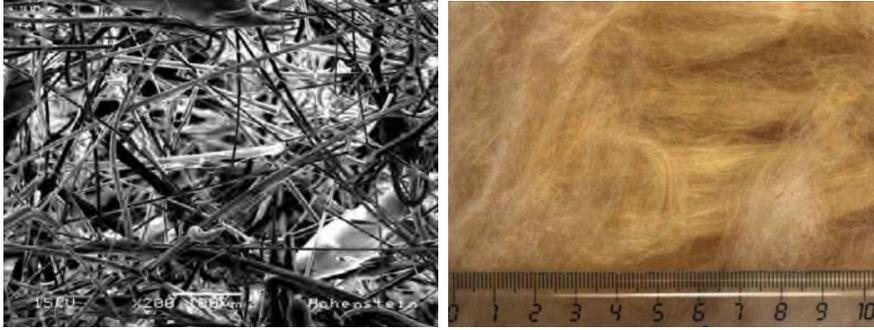


Figura 1.1: Microestructura y macroestructura de lana mineral.

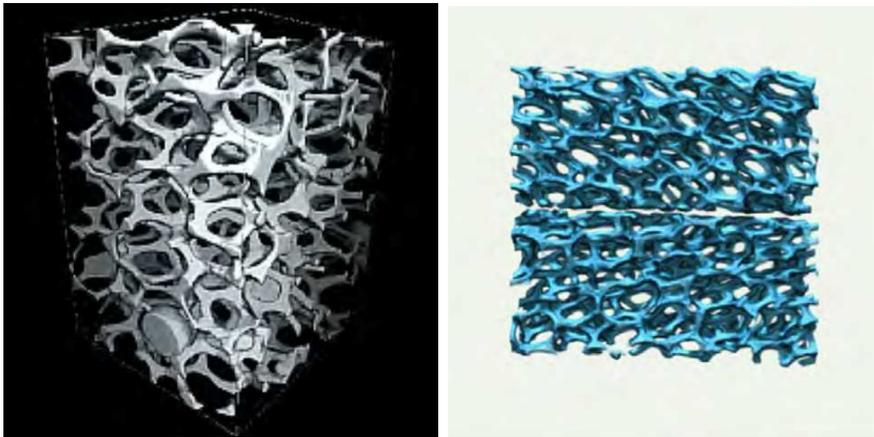


Figura 1.2: Microestructuras de espumas industriales.

En particular, las ecuaciones de Stokes, Brinkman y Navier-Stokes formuladas en términos de la función de corriente resultan atractivas, pues la restricción de incompresibilidad se satisface automáticamente, la presión no está presente en la formulación débil y por tanto solo hay una variable escalar por determinar. Sin embargo, la formulación natural es un problema de cuarto orden, de modo que para aproximar la solución se debe construir un subespacio finito dimensional de  $H^2(\Omega)$ . Por este motivo e inspirados en [24] y en [33], presentaremos un esquema discreto usando elementos virtuales de clase  $C^1$  para la aproximación de la función de corriente del Problema de Brinkman.

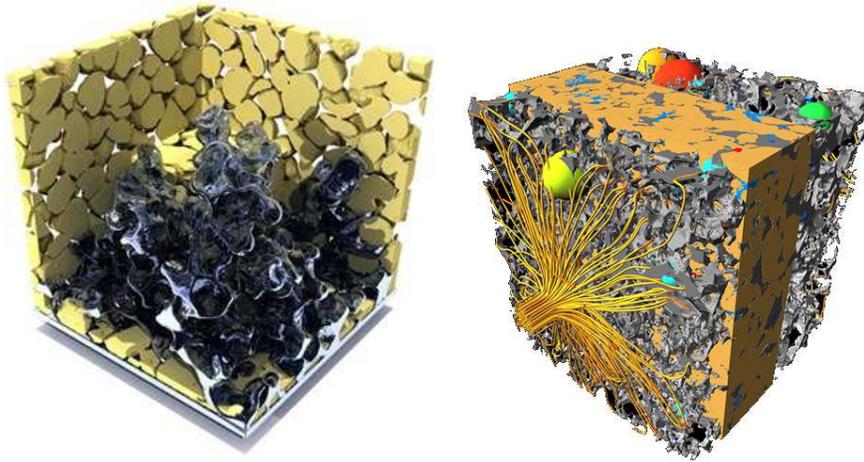


Figura 1.3: Depósito de petróleo y capas porosas.

En el año 1979 en [36] se presenta por primera vez la formulación débil estándar en términos de la función de corriente para la ecuación de Navier-Stokes, en esta dirección en [29, 30, 31], se presentan métodos de elementos finitos para su aproximación y se realiza un análisis de convergencia para dichas formulaciones. En particular, en [31] una vez que se tiene la aproximación de la función de corriente, las ecuaciones de momento pueden usarse para aproximar la presión mediante un post-proceso de la función de corriente. A través de equivalencia de problemas los autores proponen resolver un problema mixto. Sin embargo, esto no es ventajoso a nivel práctico, pues para dicho esquema mixto la construcción de espacios discretos que cumplan las condiciones de la teoría de Babuška-Brezzi no es sencilla.

En [2], se propone y analiza una discretización usando elementos virtuales de bajo orden para el Problema de Stokes en términos de la función de corriente. En este trabajo se observaron ventajas a nivel computacional, por ejemplo, el número de grados de libertad, al estar relacionado con una sola variable escalar (la función de corriente) en lugar de una variable vectorial (la velocidad) más una escalar (la presión), resulta ser menor que el número de grados de libertad para el esquema estándar en términos de velocidad-presión. Por otro lado, la matriz asociada al sistema lineal resulta ser definida positiva. Sin embargo, en este trabajo la presión del fluido no es aproximada.

En [48], se desarrolla una discretización conforme  $H^1$  usando elementos virtuales de orden  $k \geq 2$  para las ecuaciones de Brinkman y Darcy formuladas en términos de la velocidad y presión. En particular, para el Problema de Brinkman la velocidad es aproximada usando

una ligera modificación del espacio virtual presentado en [12]. Este nuevo espacio presenta dos propiedades fundamentales: la proyección  $L^2$  sobre el espacio de polinomios  $\mathbb{P}_k$  es explícitamente calculable usando los grados de libertad propuestos y el kernel discreto asociado es de divergencia nula. La presión del fluido es aproximada con polinomios a trozos de grado menor o igual a  $k - 1$ . Finalmente, se realiza un análisis de error del método y se presentan varios ejemplos numéricos.

En [26] se presenta y analiza un método de elementos virtuales mixtos para las ecuaciones de Brinkman en dos dimensiones con condiciones de contorno de Dirichlet no homogéneas. Se emplea una formulación mixta, en la cual la incógnita es el tensor de pseudoefuerzo, mientras que la velocidad y la presión del fluido se calculan mediante un post-proceso. Para definir una forma bilineal discreta y calculable, cuya versión continua contiene tensores desviadores se proponen dos alternativas conocidas para el proyector local sobre un subespacio polinomial adecuado, las cuales permiten calcular de manera explícita los términos que contienen tensores desviadores. A continuación, se muestra que la forma bilineal discreta global satisface las hipótesis requeridas por el Lema de Lax-Milgram. De esta manera, se demuestra existencia y unicidad de solución del esquema virtual mixto y se obtienen estimaciones de error a priori asociadas a la solución virtual. Finalmente, se ilustran varios resultados numéricos, confirmando la base teórica.

El objetivo principal del presente trabajo es desarrollar una discretización mediante elementos virtuales para el Problema de Brinkman formulado en términos de la función de corriente, proponiendo una discretización conforme  $C^1$  de orden arbitrario  $k \geq 2$ , sobre mallas poligonales generales.

A continuación presentaremos algunas definiciones y notaciones que serán usadas a lo largo de nuestro trabajo.

## 1.1. Definiciones y notaciones

Para un campo vectorial  $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1,2}$  y para un campo escalar  $q$  se definen los siguientes operadores diferenciales:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} := \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1, \quad \nabla \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\nabla q &:= \begin{pmatrix} \partial_1 q \\ \partial_2 q \end{pmatrix}, & \mathbf{curl} q &:= \begin{pmatrix} \partial_2 q \\ -\partial_1 q \end{pmatrix}, & \Delta q &:= \partial_{11} q + \partial_{22} q, \\ \Delta^2 q &:= \Delta(\Delta q), & \mathbf{\Delta} \mathbf{v} &:= \begin{pmatrix} \partial_{11} v_1 + \partial_{22} v_1 \\ \partial_{11} v_2 + \partial_{22} v_2 \end{pmatrix}, & D^2 q &:= \begin{pmatrix} \partial_{11} q & \partial_{12} q \\ \partial_{21} q & \partial_{22} q \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Para algunos de los operadores definidos anteriormente tenemos las siguientes identidades:

$$\mathbf{curl}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = -\mathbf{\Delta} \mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{curl} q) = -\Delta q. \quad (1.2)$$

Además, dadas las matrices  $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  y  $\boldsymbol{\zeta} := (\zeta_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  consideramos el siguiente producto escalar de matrices  $2 \times 2$ :

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\zeta} := \sum_{i, j=1}^2 \tau_{ij} \zeta_{ij}. \quad (1.3)$$

A continuación presentaremos algunas definiciones sobre la teoría de espacios funcionales, en particular espacios de funciones continuas, integrables y espacios de Sobolev.

Un multi-índice es una  $n$ -tupla  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , con  $\beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , con longitud  $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$ . Se introduce el siguiente operador diferencial definido por:

$$\partial^\beta := \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\beta_n} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial^{\beta_1} x_1 \cdots \partial^{\beta_n} x_n}.$$

Sea  $\mathcal{O}$  un subconjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Denotamos por  $C^k(\mathcal{O})$  el conjunto de todas las funciones  $u$  continuas a valores reales definidas sobre  $\mathcal{O}$  tales que  $\partial^\beta u$  es continua sobre  $\mathcal{O}$  para todo  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , con  $|\beta| \leq k$ .

El soporte de una función continua  $u$  definida sobre un conjunto abierto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  se define como la clausura en  $\mathcal{O}$  del conjunto  $\{x \in \mathcal{O} : u(x) \neq 0\}$ . Denotamos por  $C_0^k(\mathcal{O})$  al conjunto de todas las funciones  $u$  que pertenecen a  $C^k(\mathcal{O})$  tal que su soporte es un conjunto acotado de  $\mathcal{O}$ , además se denota el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto como:  $C_0^\infty(\mathcal{O})$ .

Ahora nos restringimos a los espacios de funciones Lebesgue integrables. Para  $1 \leq p < \infty$ ; denotamos por  $L^p(\mathcal{O})$  el conjunto de todas las funciones a valores reales definidas sobre un subconjunto abierto  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p < \infty,$$

$L^p(\mathcal{O})$  es dotado con la norma

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{O})} = \left( \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

También consideramos el espacio  $L^\infty(\mathcal{O})$  que consiste en las funciones  $u$  definidas sobre  $\mathcal{O}$  tal que  $|u|$  tiene supremo esencial finito sobre  $\mathcal{O}$  (es decir, existe una constante positiva  $M$  tal que  $|u(x)| \leq M$ , casi todo punto).  $L^\infty(\mathcal{O})$  es dotado con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\mathcal{O})} = \operatorname{ess.\,sup}_{x \in \mathcal{O}} |u(x)|.$$

Un caso de particular importancia es cuando tomamos  $p = 2$ ; entonces

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{O})} = \left( \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

el espacio  $L^2(\mathcal{O})$  está dotado con el producto interior

$$(u, v)_{L^2(\mathcal{O})} := \int_{\mathcal{O}} u(x)v(x) dx.$$

A continuación introducimos algunos espacios de Sobolev, los cuales juegan un rol importante en la teoría moderna de ecuaciones diferenciales, seguiremos las notaciones estándar para estos espacios (ver [1, 21]). Antes daremos el concepto de derivada débil. Para  $v \in L^2(\mathcal{O})$ , se dice que  $\partial^\beta v \in L^2(\mathcal{O})$  en el sentido distribucional, si existe una función  $v_\beta \in L^2(\mathcal{O})$ , tal que

$$\int_{\mathcal{O}} v(x) \partial^\beta \varphi(x) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathcal{O}} v_\beta(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O}).$$

A continuación se dará la definición de los espacios  $H^1(\mathcal{O})$ ,  $H^2(\mathcal{O})$  y  $H^m(\mathcal{O})$  con  $\mathcal{O}$  un dominio abierto y acotado de  $\mathbb{R}^2$ . Se define el espacio de Sobolev:

$$H^1(\mathcal{O}) := \left\{ v \in L^2(\mathcal{O}) : \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\mathcal{O}), \quad \text{para } j = 1, 2 \right\},$$

$H^1$  es un espacio de Hilbert con el siguiente producto escalar:

$$(v, z)_{H^1(\mathcal{O})} := (v, z)_{L^2(\mathcal{O})} + \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial z}{\partial x_j} \right)_{L^2(\mathcal{O})}, \quad \text{para todo } v, z \in H^1(\mathcal{O}).$$

La norma inducida por este producto interior está dada por:

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{O})} = \left( \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para todo } v \in H^1(\mathcal{O}).$$

En este espacio, la seminorma está dada por:

$$|v|_{H^1(\mathcal{O})} = \left( \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2}.$$

También se define el espacio de Sobolev de orden 2:

$$H^2(\mathcal{O}) = \left\{ v \in L^2(\mathcal{O}) : \frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathcal{O}) \text{ para } i, j = 1, 2 \right\}$$

la norma está dada por

$$\|v\|_{H^2(\mathcal{O})} = \left( \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^2(\mathcal{O}).$$

Mientras que la seminorma está dada por:

$$|v|_{H^2(\mathcal{O})} = \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2}.$$

En general, se puede definir el espacio de Sobolev de orden  $m$ :

$$H^m(\mathcal{O}) := \{v \in L^2(\mathcal{O}) : \partial^\beta v \in L^2(\mathcal{O}), \text{ para todo } \beta, |\beta| \leq m\}.$$

Sobre  $H^m(\mathcal{O})$  se define el siguiente producto interior:

$$(v, z)_{H^m(\mathcal{O})} := (v, z)_{L^2(\mathcal{O})} + \sum_{|\beta| \leq m} (\partial^\beta v, \partial^\beta z)_{L^2(\mathcal{O})} \text{ para todo } v, z \in H^m(\mathcal{O}).$$

Por tanto, su norma inducida está dada por

$$\|v\|_{H^m(\mathcal{O})} = (v, v)_{H^m(\mathcal{O})}^{1/2} = \left( \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2},$$

y a su vez se define la seminorma

$$|v|_{H^m(\mathcal{O})} := \left( \sum_{|\beta|=m} \|\partial^\beta v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2}.$$

En esta tesis utilizaremos el notación  $|\cdot|_{m, \mathcal{O}}$  y  $\|\cdot\|_{m, \mathcal{O}}$  para la seminorma y norma en  $H^m(\mathcal{O})$ , respectivamente. Tendremos la convención  $H^0(\mathcal{O}) = L^2(\mathcal{O})$ .

Sean  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  el vector tangente y normal unitario exterior a  $\partial\mathcal{O}$ , respectivamente. Entonces, para cada  $v \in H^1(\mathcal{O})$  definimos la derivada normal de  $v$  como  $\partial_n v := \nabla v \cdot \mathbf{n} = \mathbf{curl} v \cdot \mathbf{t}$  y por  $\partial_t v$  la derivada tangencial de  $v$  como:  $\nabla v \cdot \mathbf{t} = \mathbf{curl} v \cdot \mathbf{n}$ .

Consideramos los espacios

$$\begin{aligned} H_0^1(\mathcal{O}) &:= \{v \in H^1(\mathcal{O}) : v = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{O}\}, \\ H_0^2(\mathcal{O}) &:= \{v \in H^2(\mathcal{O}) : v = \partial_n v = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{O}\}. \end{aligned}$$

También se definen los siguientes espacios:

$$L_0^2(\mathcal{O}) := \left\{ v \in L^2(\mathcal{O}) : \int_{\mathcal{O}} v = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \tilde{H}^1(\mathcal{O}) := \left\{ v \in H^1(\mathcal{O}) : \int_{\mathcal{O}} v = 0 \right\}.$$

En lo que sigue, dado un entero  $\ell \geq 0$  se denotará por  $\mathbb{P}_\ell(\mathcal{O})$  al espacio de funciones polinomiales definidos sobre  $\mathcal{O}$  de grado menor o igual a  $\ell$ , es decir,  $p \in \mathbb{P}_\ell(\mathcal{O})$  si y solo si existen escalares  $C_\beta$  ( $\beta$  denota un multi-índice), tales que

$$p(x) = \sum_{|\beta| \leq \ell} C_\beta x^\beta, \quad \text{donde} \quad x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}.$$

Por otro lado, gracias al Teorema de Green, tenemos que si  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$  abierto y acotado con frontera Lipschitz-continua  $\partial\mathcal{O}$ . Entonces, para todo  $q \in H^1(\mathcal{O})$ ,  $u \in H^2(\mathcal{O})$  y para cada  $\mathbf{v} \in [H^1(\mathcal{O})]^2$  tenemos las siguientes identidades:

$$\int_{\mathcal{O}} q \Delta u = - \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla q + \int_{\partial\mathcal{O}} q \partial_n u, \quad (1.4)$$

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla q \cdot \mathbf{v} = - \int_{\mathcal{O}} q \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{O}} q (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \quad (1.5)$$

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{curl} q \cdot \mathbf{v} = \int_{\mathcal{O}} q \operatorname{rot} \mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{O}} q (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}). \quad (1.6)$$

Sea  $V$  un espacio vectorial normado. El espacio  $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$  será llamado espacio dual de  $V$  y denotado por  $V'$ . Un elemento  $F \in V'$  es llamado funcional lineal y acotado. En particular para  $m \geq 1$ , el espacio de dual de  $H^m(\mathcal{O})$  será denotado por  $H^{-m}(\mathcal{O})$  y la norma de  $F \in H^{-m}(\mathcal{O})$ , está dada por:

$$\|F\|_{-m, \mathcal{O}} = \sup_{\substack{v \in H^m \\ v \neq 0}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_{m, \mathcal{O}}}.$$

Finalmente, el contenido de este trabajo se ha estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 2, se considera el problema modelo de Brinkman bidimensional en términos de las variables de la velocidad y presión, luego introducimos una formulación variacional para este problema, pero ahora en términos de la función de corriente y usando el Lema de Lax-Milgram se demuestra existencia y unicidad de solución para dicha formulación.

En el Capítulo 3, proponemos y analizamos una discretización de clase  $C^1$  de orden  $k \geq 2$ , utilizando elementos virtuales. Se definen los espacios virtuales locales y globales, se construyen las formas bilineales discretas y el lado derecho garantizando consistencia y la estabilidad típica del método VEM. Finalmente, se presenta el problema discreto y usando el Lema de Lax-Milgram se muestra existencia y unicidad de solución de dicho esquema.

En el Capítulo 4, se establecen estimaciones de error; se muestra la convergencia del método y orden de convergencia en norma  $H^2$  para la función de corriente, además usando argumentos de dualidad se establece una estimación de error en normas  $H^1$  y  $L^2$  para la función de corriente. Se recupera el campo de velocidad del fluido a través de un post-proceso de la función de corriente. En la Sección 4.4, para  $k = 3$  se propone una estrategia para aproximar la presión del fluido, a través de un problema de Poisson generalizado cuyo dato proviene de la función de corriente aproximada, dicha estrategia está basada en una formulación discreta usando elementos virtuales de clase  $C^0$ . Asumiendo quasi-uniformidad de las mallas mostramos existencia y unicidad de dicho problema y bajo la misma hipótesis mostramos también una estimación de error en norma  $H^1$  para la presión.

En el Capítulo 5, se presentan varios ejemplos numéricos que corroboran nuestros resultados teóricos e ilustran el buen desempeño del método propuesto.

Finalmente, en el Capítulo 6, daremos conclusiones de esta tesis y posibles trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Problema Continuo

En este capítulo presentaremos y estudiaremos el Problema de Brinkman. En particular, proponemos una formulación variacional en términos de la *función de corriente* del campo de velocidad del fluido. Usando el Lema de Lax-Milgram mostramos que dicha formulación tiene única solución, la cual depende continuamente de los datos.

Para comenzar consideremos el problema estándar de Brinkman en términos de las variables velocidad y presión.

### 2.1. Problema de Brinkman en términos de la velocidad y presión

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio simplemente conexo con frontera poligonal  $\Gamma$ . Consideremos el Problema de Brinkman formulado en términos de las variables velocidad y presión (ver, por ejemplo, [36] y [41]):

**Problema 2.1.1** Dada  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ , hallar  $\mathbf{u}$  y  $p$ , tal que

$$\mathbb{K}^{-1}\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma,$$

$$\int_{\Omega} p = 0,$$

donde  $\nu > 0$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $\mathbb{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{2 \times 2}$  es el tensor de permeabilidad del medio poroso. Asumimos que  $\mathbb{K}^{-1}$  es un tensor simétrico y uniformemente definido positivo, es decir, existen constantes  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  (uniformes) tales que

$$\lambda_1 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}^T \mathbb{K}^{-1} \boldsymbol{\xi} \leq \lambda_2 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Considerando los espacios  $H := [H_0^1(\Omega)]^2$  y  $Q := L_0^2(\Omega)$ , el Problema 2.1.1 es equivalente a la siguiente formulación variacional:

**Problema 2.1.2** Dada  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ , hallar  $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \forall q \in Q. \end{aligned}$$

Usando la teoría de Babuška-Brezzi se puede mostrar que este problema admite una única solución (ver, por ejemplo, [36, 23, 41]).

## 2.2. Problema de Brinkman en términos de la función de corriente

Consideremos el espacio de las funciones de divergencia nula

$$\mathbf{Z} := \{\mathbf{v} \in H : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\},$$

y notemos que la solución  $\mathbf{u} \in H$  del Problema 2.1.2 es determinada por la solución del siguiente problema:

**Problema 2.2.1** Dada  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ , hallar  $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$  tal que

$$\int_{\Omega} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}.$$

Bajo la suposición de que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio simplemente conexo se tiene que  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$  si y solo si existe una única función potencial llamada *función de corriente*  $\varphi \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$  (ver, por ejemplo, [36, pag. 37]) tal que

$$\mathbf{v} = \mathbf{curl} \varphi \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

Notamos que la función  $\varphi$  es única salvo constante. Así, para fijar dicha constante consideramos  $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ .

Dado que la solución  $\mathbf{u}$  del Problema 2.2.1 pertenece a  $\mathbf{Z}$ , se tiene que existe un único  $\psi \in H_0^2(\Omega)$  tal que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl} \psi. \quad (2.2)$$

De este modo el Problema 2.2.1 puede ser formulado como sigue:

**Problema 2.2.2 (Formulación variacional en términos de la función de corriente)** *Dada  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ , hallar  $\psi \in H_0^2(\Omega)$  tal que*

$$A(\psi, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega), \quad (2.3)$$

donde

$$A(\psi, \varphi) := A_{\mathbf{curl}}(\psi, \varphi) + \nu A_{\Delta}(\psi, \varphi), \quad (2.4)$$

$$F(\varphi) := (\mathbf{f}, \mathbf{curl} \varphi)_{0,\Omega} \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega), \quad (2.5)$$

y

$$A_{\mathbf{curl}}(\psi, \varphi) := \int_{\Omega} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi \cdot \mathbf{curl} \varphi \quad \forall \psi, \varphi \in H_0^2(\Omega), \quad (2.6)$$

$$A_{\Delta}(\psi, \varphi) := \int_{\Omega} D^2 \psi : D^2 \varphi \quad \forall \psi, \varphi \in H_0^2(\Omega), \quad (2.7)$$

donde  $D^2 \varphi$  denota la matriz Hessiana de  $\varphi$  (ver Sección 1.1).

Ahora haremos dos observaciones las cuales nos entrega las ecuaciones fuerte de la formulación del Problema 2.2.2.

**Observación 2.2.1** *Para cada  $\varphi, \phi \in H_0^2(\Omega)$  tenemos que*

$$\int_{\Omega} D^2 \varphi : D^2 \phi = \int_{\Omega} \Delta \varphi \Delta \phi.$$

*En efecto, sean  $\varphi, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Entonces utilizando integración por partes se tiene que*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_{11} \varphi \partial_{22} \phi + \partial_{22} \varphi \partial_{11} \phi) &= \int_{\Omega} \partial_{11} \varphi \partial_{22} \phi + \int_{\Omega} \partial_{22} \varphi \partial_{11} \phi \\ &= \int_{\Omega} \partial_1 \varphi \partial_{221} \phi + \int_{\Omega} \partial_2 \varphi \partial_{112} \phi \\ &= \int_{\Omega} \partial_{12} \varphi \partial_{21} \phi + \int_{\Omega} \partial_{21} \varphi \partial_{12} \phi \\ &= \int_{\Omega} \partial_{12} \varphi \partial_{12} \phi + \int_{\Omega} \partial_{21} \varphi \partial_{21} \phi, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{\Omega} (\partial_{11} \varphi \partial_{22} \phi + \partial_{22} \varphi \partial_{11} \phi) = \int_{\Omega} (\partial_{12} \varphi \partial_{12} \phi + \partial_{21} \varphi \partial_{21} \phi) \quad \forall \varphi, \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.8)$$

Usando la definición del operador Laplaciano, (2.8) y la definición del producto interior para matrices (ver (1.3)), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Delta\varphi\Delta\phi &= \int_{\Omega} (\partial_{11}\varphi + \partial_{22}\varphi)(\partial_{11}\phi + \partial_{22}\phi) \\
&= \int_{\Omega} (\partial_{11}\varphi\partial_{11}\phi + \partial_{11}\varphi\partial_{22}\phi + \partial_{22}\varphi\partial_{11}\phi + \partial_{22}\varphi\partial_{22}\phi) \\
&= \int_{\Omega} (\partial_{11}\varphi\partial_{11}\phi + \partial_{22}\varphi\partial_{22}\phi) + \int_{\Omega} (\partial_{11}\varphi\partial_{22}\phi + \partial_{22}\varphi\partial_{11}\phi) \\
&= \int_{\Omega} (\partial_{11}\varphi\partial_{11}\phi + \partial_{22}\varphi\partial_{22}\phi) + \int_{\Omega} (\partial_{12}\varphi\partial_{12}\phi + \partial_{21}\varphi\partial_{21}\phi) \\
&= \int_{\Omega} (\partial_{11}\varphi\partial_{11}\phi + \partial_{12}\varphi\partial_{12}\phi + \partial_{21}\varphi\partial_{21}\phi + \partial_{22}\varphi\partial_{22}\phi) \\
&= \int_{\Omega} D^2\varphi : D^2\phi.
\end{aligned}$$

La igualdad se tiene para funciones  $\varphi, \phi \in H_0^2(\Omega)$  dado que  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $H_0^2(\Omega)$ .

**Observación 2.2.2** El Problema 2.2.2 es equivalente al problema: hallar  $\psi$  tal que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi) + \nu\Delta^2\psi &= \operatorname{rot}\mathbf{f} && \text{en } \Omega, \\
\psi = \partial_n\psi &= 0 && \text{sobre } \Gamma.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En efecto, usando la Observación 2.2.1 el Problema 2.2.2 es equivalente a: hallar  $\psi \in H_0^2(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi \cdot \mathbf{curl}\phi + \nu \int_{\Omega} \Delta\psi\Delta\phi = (\mathbf{f}, \mathbf{curl}\phi)_{0,\Omega} \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega). \tag{2.10}$$

Ahora bien, sea  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , entonces integrando por partes en (2.10) se tiene que

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi)\phi + \int_{\partial\Omega} (\nabla(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi) \cdot \mathbf{t})\phi + \nu \int_{\Omega} \Delta\psi\Delta\phi = \int_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{f}\phi + \int_{\partial\Omega} (\nabla\mathbf{f} \cdot \mathbf{t})\phi,$$

dado que  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi)\phi + \nu \int_{\Omega} \Delta\psi\Delta\phi = \int_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{f}\phi. \tag{2.11}$$

Integrando dos veces por partes en el segundo término del lado izquierdo de la igualdad anterior

tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Delta\psi \Delta\phi &= - \int_{\Omega} \nabla(\Delta\psi) \cdot \nabla\phi + \int_{\partial\Omega} (\nabla\phi \cdot \mathbf{n}) \Delta\psi \\
&= - \int_{\Omega} \nabla(\Delta\psi) \cdot \nabla\phi \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla(\Delta\psi))\phi - \int_{\partial\Omega} (\nabla(\Delta\psi) \cdot \mathbf{n}) \phi \\
&= \int_{\Omega} \Delta(\Delta\psi) \phi \\
&= \int_{\Omega} (\Delta^2\psi)\phi,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

reemplazando (2.12) en (2.11) se obtiene

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi)\phi + \nu \int_{\Omega} \Delta^2\psi\phi = \int_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{f}\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o bien

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi) + \nu\Delta^2\psi - \operatorname{rot}\mathbf{f})\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.13}$$

dado que  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$ , entonces de (2.13) se sigue que

$$\operatorname{rot}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi) + \nu\Delta^2\psi = \operatorname{rot}\mathbf{f} \quad \text{en } \Omega.$$

Las condiciones de frontera se tienen dado que  $\psi \in H_0^2(\Omega)$ .

El siguiente lema establece que la forma bilineal  $A(\cdot, \cdot)$  definida en (2.3) es elíptica, este lema será útil para mostrar que el Problema 2.2.2 admite una única solución.

**Lema 2.2.1** *Existe una constante  $\alpha_0 > 0$  tal que*

$$A(\phi, \phi) \geq \alpha_0 \|\phi\|_{2,\Omega}^2 \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega).$$

**Demostración.** El resultado se sigue inmediatamente del hecho que  $\|D^2\phi\|_{0,\Omega}$  es una norma sobre  $H_0^2(\Omega)$ , equivalente a la norma usual de  $\phi$  en  $H_0^2(\Omega)$ . ■

Ahora estamos en condiciones de establecer existencia y unicidad de solución del Problema 2.2.2, lo cual se encuentra en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1** *Existe una única solución  $\psi \in H_0^2(\Omega)$  del Problema 2.2.2 satisfaciendo la siguiente dependencia continua del dato*

$$\|\psi\|_{2,\Omega} \leq C\|F\|_{-2,\Omega},$$

donde  $C$  es una constante positiva.

**Demostración.** Tenemos que las formas bilineales  $A_{\text{curl}}(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\Delta}(\cdot, \cdot)$  definidas en (2.6) y (2.7) son acotadas. Además, el funcional  $F(\cdot)$  definido en (2.5) es un funcional lineal y acotado de  $H_0^2(\Omega)$ , por lo tanto el resultado se sigue aplicando el Lema 2.2.1 y el Lema de Lax-Milgram. ■

Consideremos el siguiente resultado de regularidad adicional para solución del Problema 2.2.2:

**Teorema 2.2.2** *Sea  $m \geq -1$ . Supongamos que  $\mathbf{f} \in [H^m(\Omega)]^2$ , entonces existen  $s > 1/2$  y una constante  $C > 0$ , tal que la solución  $\psi$  del Problema 2.2.2 satisface  $\psi \in H^{2+s}(\Omega)$  y*

$$\|\psi\|_{2+s, \Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{m, \Omega}.$$

**Demostración.** La prueba del teorema se sigue a partir la regularidad adicional clásica del problema biarmónico (ver [38, 46, 4, 20]). ■

**Observación 2.2.3** *La constante  $s$  del Teorema 2.2.2 es llamada índice de regularidad elíptica del problema biarmónico con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas. Si  $\Omega$  es convexo, entonces  $s \geq 1$ . En este caso  $s$  dependerá de la regularidad del dato  $\mathbf{f}$ , la relación entre  $s$  y  $m$  está dada por la igualdad  $m = s - 2$ . Si  $\Omega$  no es convexo, para cualquier  $\mathbf{f}$  el teorema es cierto pero ahora para cada  $s < s_0$ , donde  $s_0 \in (1/2, 1)$  el cual depende del ángulo máximo reentrante de  $\Omega$  (ver [38] para la ecuación precisa que determina a  $s_0$ ).*

# Capítulo 3

## Discretización por VEM

En este capítulo proponemos una discretización usando elementos virtuales para la aproximación numérica de la función de corriente del Problema de Brinkman (ver Problema 2.2.2). Se propone una discretización conforme  $C^1$  de orden arbitrario  $k \geq 2$  sobre mallas poligonales generales. Finalmente mostramos existencia y unicidad de solución del problema discreto, usando el Lema de Lax-Milgram.

Iniciamos con la construcción de las mallas y las suposiciones sobre ellas para introducir los espacios de elementos virtuales.

### 3.1. Mallas poligonales

Sea  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una descomposición de  $\Omega$  en elementos poligonales generales  $K$ . Denotaremos por  $h_K$  al diámetro del elemento  $K$  y por  $h$  al máximo de todos los diámetros de los elementos de la malla, esto es,  $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ . En lo que sigue, denotamos por  $N^K$  el número de vértices de  $K$ ,  $e$  un lado genérico de  $\mathcal{T}_h$  y para cada  $e \subset \partial K$ , denotamos por  $\mathbf{n}_K^e$  al vector normal unitario exterior a  $K$  y por  $\mathbf{t}_K^e$  al vector tangente unitario de  $K$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, N^K\}$  el lado que conecta los vértices  $V_i$  y  $V_{i+1}$  es denotado por  $e_i$ .

Para el análisis, haremos las siguientes suposiciones como en [5, 17]: para todo  $h > 0$  y para cada  $K \in \mathcal{T}_h$  existe  $C_\tau > 0$  tal que:

- A1:** La razón entre el lado más corto y el diámetro  $h_K$  de  $K$  es mayor que  $C_\tau$ ;
- A2:**  $K$  es estrellado con respecto a una bola de radio mayor o igual a  $C_\tau h_K$ .

Para continuar con la formulación del esquema discreto, necesitamos algunas definiciones previas.

Primero, escribimos las formas bilineales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{curl}}(\varphi, \phi) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} A_{\mathbf{curl}}^K(\varphi, \phi) \quad \forall \varphi, \phi \in H_0^2(\Omega), \\ A_{\Delta}(\varphi, \phi) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} A_{\Delta}^K(\varphi, \phi) \quad \forall \varphi, \phi \in H_0^2(\Omega), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{curl}}^K(\varphi, \phi) &= \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \varphi \cdot \mathbf{curl} \phi \quad \forall \varphi, \phi \in H^2(K), \\ A_{\Delta}^K(\varphi, \phi) &= \int_K D^2 \varphi : D^2 \phi \quad \forall \varphi, \phi \in H^2(K). \end{aligned}$$

También podemos escribir

$$A(\varphi, \phi) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} A^K(\varphi, \phi) \quad \forall \varphi, \phi \in H_0^2(\Omega),$$

donde

$$A^K(\varphi, \phi) := A_{\mathbf{curl}}^K(\varphi, \phi) + \nu A_{\Delta}^K(\varphi, \phi) \quad \forall \varphi, \phi \in H^2(K).$$

## 3.2. Espacios virtuales locales y globales

Con el fin de introducir la discretización, para cada entero  $k \geq 2$  y para cada polígono simple  $K \in \mathcal{T}_h$  definimos el siguiente espacio finito dimensional:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_h^k(K) := \{v_h \in H^2(K) : \Delta^2 v_h \in \mathbb{P}_{k-2}(K), v_h|_{\partial K} \in C^0(\partial K), v_h|_e \in \mathbb{P}_r(e) \quad \forall e \in \partial K, \\ \nabla v_h|_{\partial K} \in [C^0(\partial K)]^2, \partial_{\mathbf{n}_K^e} v_h|_e \in \mathbb{P}_\alpha(e) \quad \forall e \in \partial K\}, \end{aligned}$$

donde  $r := \max\{3, k\}$  y  $\alpha := k - 1$ .

Este espacio ha sido considerado recientemente en [33] para obtener estimaciones de óptimas de error para ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden y puede ser visto como una extensión del espacio virtual  $C^1$  introducido en [24] para problemas de placas delgadas.

Observamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cualquier  $v_h \in \tilde{V}_h^k(K)$ , la traza de  $v_h$  y la traza del gradiente de  $v_h$  sobre la frontera de  $K$  son continuas,
2.  $\mathbb{P}_k(K) \subseteq \tilde{V}_h^k(K)$ .

Se introducen cinco conjuntos de operadores lineales definidos de  $\tilde{V}_h^k(K)$  en  $\mathbb{R}$ . Para todo  $v_h \in \tilde{V}_h^k(K)$  estos son definidos como sigue:

- **D<sub>1</sub>** : Los valores de  $v_h$  en los  $N^K$  vértices de  $K$ ;
- **D<sub>2</sub>** : Los valores de  $\nabla v_h$  en los  $N^K$  vértices de  $K$ ;
- **D<sub>3</sub>** : Para  $r > 3$ , los momentos  $\int_e q v_h \quad \forall q \in \mathbb{P}_{r-4}(e), \quad \forall \text{lado } e$ ;
- **D<sub>4</sub>** : Para  $\alpha > 1$ , los momentos  $\int_e q \partial_{\mathbf{n}_K^e} v_h \quad \forall q \in \mathbb{P}_{\alpha-2}(e), \quad \forall \text{lado } e$ ;
- **D<sub>5</sub>** : Para  $k \geq 4$ , los momentos  $\int_K q v_h \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-4}(K), \quad \forall \text{polígono } K$ .

Para cada  $v_h \in \tilde{V}_h^k(K)$ , definimos el proyector  $\Pi_K^{k,\Delta} : \tilde{V}_h^k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K) \subseteq \tilde{V}_h^k(K)$ , como la solución del problema (en cada elemento  $K$ ):

$$A_\Delta^K(\Pi_K^{k,\Delta} v_h, q) = A_\Delta^K(v_h, q) \quad \forall q \in \mathbb{P}_k(K), \quad (3.1a)$$

$$\widehat{\Pi_K^{k,\Delta} v_h} = \widehat{v_h}, \quad \widehat{\nabla \Pi_K^{k,\Delta} v_h} = \widehat{\nabla v_h}, \quad (3.1b)$$

donde  $\widehat{v_h}$  es definida como sigue:

$$\widehat{v_h} := \frac{1}{N^K} \sum_{i=1}^{N^K} v_h(V_i) \quad \forall v_h \in C^0(\partial K), \quad (3.2)$$

y  $V_i, 1 \leq i \leq N^K$ , son los vértices de  $K$ .

**Lema 3.2.1** *El operador  $\Pi_K^{k,\Delta} : \tilde{V}_h^k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K)$  está bien definido y es explícitamente calculable para todo  $v_h \in \tilde{V}_h^k(K)$ , usando solo la información de los operadores lineales **D<sub>1</sub>** – **D<sub>5</sub>**.*

**Demostración.** Primero, notemos que la forma bilineal  $A_\Delta^K(\cdot, \cdot)$  tiene kernel no trivial dado por  $\mathbb{P}_1(K)$ , de modo que el rol de (3.1b) es seleccionar un elemento del kernel de esta forma bilineal. Además, notemos que para cada  $v_h \in \tilde{V}_h^k(K)$  se entrega uno y sólo un elemento  $\Pi_K^{k,\Delta} v_h \in \mathbb{P}_k(K)$ , lo que implica que el operador está bien definido.

Ahora, veamos que el operador está determinado únicamente por la información proporcionada por los operadores lineales en **D<sub>1</sub>** – **D<sub>5</sub>**. En efecto, usando dos veces integración por partes en (3.1a), para todo  $q \in \mathbb{P}_k(K)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} A_\Delta^K(\Pi_K^{k,\Delta} v_h, q) &= A_\Delta^K(v_h, q) \\ &= \int_K D^2 v_h : D^2 q \\ &= \int_K \Delta^2 q v_h + \int_{\partial K} (D^2 q \mathbf{n}_K^e) \cdot \nabla v_h - \int_{\partial K} v_h (\mathbf{div}(D^2 q)) \cdot \mathbf{n}_K^e, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dado que  $\Delta^2 q \in \mathbb{P}_{k-4}(K)$ , entonces la primera integral de lado derecho de (3.3) es calculable usando los valores del conjunto **D<sub>5</sub>**. Notemos que las integrales sobre la frontera de (3.3) solo dependen

de los valores de  $v_h$  y  $\nabla v_h$  sobre la frontera de  $K$ , los cuales son calculables usando los valores de los conjuntos  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_4$ . Por otro lado, la parte del kernel (ver (3.1b)) es calculable usando la información proporcionada por  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2$ .  $\blacksquare$

Veamos con más detalles el caso particular cuando  $k = 2$ . En efecto, usando (3.3) y el hecho de que  $q \in \mathbb{P}_2(K)$  y por tanto  $\Delta^2 q = 0$  y  $\mathbf{div}(D^2 q) \cdot \mathbf{n}_K^e = 0$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta}^K(\Pi_K^{k,\Delta} v_h, q) &= \int_K \Delta^2 q v_h + \int_{\partial K} (D^2 q \mathbf{n}_K^e) \cdot \nabla v_h - \int_{\partial K} v_h (\mathbf{div}(D^2 q)) \cdot \mathbf{n}_K^e \\
&= \int_{\partial K} (D^2 q \mathbf{n}_K^e) \cdot \nabla v_h \\
&= \sum_{i=1}^{N^K} \int_{e_i} (D^2 q \mathbf{n}_{e_i}) \cdot \nabla v_h \\
&= \sum_{i=1}^{N^K} \left( \int_{e_i} (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{n}_{e_i}) \partial_n v_h + \int_{e_i} (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{t}_{e_i}) \partial_t v_h \right),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $\mathbf{n}_{e_i}$  denota el vector normal unitario exterior al lado  $e_i$ . Dado que  $\partial_n v_h \in \mathbb{P}_1(e_i)$  podemos usar la regla del trapecio (la cual es exacta para polinomios de grado 1) para obtener que

$$\begin{aligned}
\int_{e_i} (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{n}_{e_i}) \partial_n v_h &= (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{n}_{e_i}) \int_{e_i} \partial_n v_h \\
&= (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{n}_{e_i}) \frac{|e_i|}{2} (\partial_n v_h(V_i) + \partial_n v_h(V_{i+1})).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Además, para cada  $i \in \{1, \dots, N^K\}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{e_i} (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{t}_{e_i}) \partial_t v_h &= - \int_{e_i} \partial_t (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{t}_{e_i}) v_h + (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{t}_{e_i}) v_h \Big|_{\partial e_i} \\
&= (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{t}_{e_i}) (v_h(V_{i+1}) - v_h(V_i)),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde en la última igualdad hemos usado el hecho de que  $\partial_t (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{t}_{e_i}) v_h = 0$ .

Reemplazando (3.5) y (3.6) en (3.4), se sigue que:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta}^K(\Pi_K^{k,\Delta} v_h, q) &= \sum_{i=1}^{N^K} (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{n}_{e_i}) \frac{|e_i|}{2} (\partial_n v_h(V_i) + \partial_n v_h(V_{i+1})) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N^K} (D^2 q \mathbf{n}_{e_i} \cdot \mathbf{t}_{e_i}) (v_h(V_{i+1}) - v_h(V_i)).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Observamos que (3.7) depende solo de los valores de  $v_h$  y de  $\nabla v_h$  sobre la frontera de  $K$ . Concluimos que para cada  $v_h \in \tilde{V}_h^k(K)$  (con  $k = 2$ ), los valores de los operadores lineales en  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$  son suficientes para definir  $v_h$  y  $\nabla v_h$  sobre la frontera de  $K$ , de modo que el proyector  $\Pi_K^{k,\Delta}$  está determinado únicamente por la información proporcionada por los operadores en  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$ .

Ahora, partiendo del espacio  $\tilde{V}_h^k(K)$  y utilizando el operador  $\Pi_K^{k,\Delta}$  definimos los espacios virtuales locales.

**Definición 3.2.1** Para cada  $K \in \mathcal{T}_h$  y para cada  $k \geq 2$ , el espacio virtual local es definido como sigue:

$$W_h^k(K) := \left\{ v_h \in \tilde{V}_h^k(K) : \int_K q_\ell \Pi_K^{k,\Delta} v_h = \int_K q_\ell v_h, \quad \ell = k-3, \ell = k-2 \right\}. \quad (3.8)$$

En (3.8)  $q_\ell$  son polinomios homogéneos de grado  $\ell$ , con la convención de que  $q_{-1}$  es el polinomio nulo.

Dado que  $W_h^k(K) \subseteq \tilde{V}_h^k(K)$ , el operador  $\Pi_K^{k,\Delta}$  está bien definido sobre  $W_h^k(K)$  y es determinado usando únicamente los valores de los operadores en  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$ . Además, tenemos que  $\mathbb{P}_k(K) \subseteq W_h^k(K)$ , lo cual garantiza buenas propiedades de aproximación para el espacio  $W_h^k(K)$ .

Tenemos el siguiente resultado que caracteriza los grados de libertad del espacio virtual local (ver [3, 33]).

**Lema 3.2.2** El conjunto de operadores  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$  constituyen un conjunto de grados de libertad para el espacio  $W_h^k(K)$ .

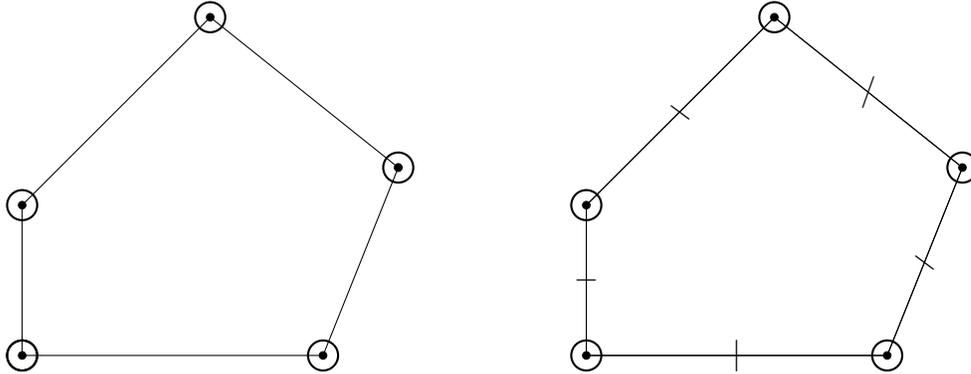


Figura 3.1: Grados de libertad para  $k = 2$  (izquierda) y grados de libertad para  $k = 3$  (derecha). Denotamos a  $\mathbf{D}_1$  con puntos, a  $\mathbf{D}_2$  con círculos y a  $\mathbf{D}_4$  con líneas.

Ahora consideremos la proyección  $L^2(K)$  sobre el espacio de polinomios  $\mathbb{P}_{k-2}(K)$ , la cual es denotada por  $\Pi_{k-2}^K$ , para esta proyección tenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.2.3** El operador  $\Pi_{k-2}^K : W_h^k(K) \rightarrow \mathbb{P}_{k-2}(K)$  es calculable usando los grados de libertad  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$ .

**Demostración.** Denotemos por  $\mathbb{P}_\ell^*(K)$  a los polinomios homogéneos de grado igual a  $\ell$  definidos sobre  $K$ , con esta notación tenemos que  $\mathbb{P}_{k-2}(K) = \mathbb{P}_{k-4}(K) \oplus \langle \mathbb{P}_{k-3}^*(K) \cup \mathbb{P}_{k-2}^*(K) \rangle$ . Entonces,

usando la propiedad que aparece en la definición del espacio  $W_h^K$  tenemos que la proyección  $\Pi_{k-2}^K$  puede ser definida como sigue:

$$\int_K q \Pi_{k-2}^K v_h := \begin{cases} \int_K q v_h, & \forall q \in \mathbb{P}_{k-4}(K), \\ \int_K q \Pi_K^{k,\Delta} v_h, & \forall q \in \mathbb{P}_{k-3}^*(K) \cup \mathbb{P}_{k-2}^*(K). \end{cases} \quad (3.9)$$

Tenemos que la primera expresión del lado derecho de (3.9) es calculable usando la información del grado de libertad  $\mathbf{D}_5$ , mientras que la segunda expresión depende del proyector  $\Pi_K^{k,\Delta}$  y por tanto es calculable usando los grados de libertad  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$  (ver Lema 3.2.1). ■

Consideremos el siguiente proyector sobre  $\mathbb{P}_k(K)$ : para cada  $v_h \in W_h^k(K)$  definimos  $\Pi_K^{k,\text{curl}} : W_h^k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K)$ , como la solución del problema

$$\int_K \mathbf{curl} \left( \Pi_K^{k,\text{curl}} v_h \right) \cdot \mathbf{curl} q = \int_K \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{curl} q \quad \forall q \in \mathbb{P}_k(K), \quad (3.10a)$$

$$\widehat{\Pi_K^{k,\text{curl}} v_h} = \widehat{v}_h, \quad (3.10b)$$

donde  $\widehat{v}_h$  es definido en (3.2).

**Lema 3.2.4** *El operador  $\Pi_K^{k,\text{curl}} : W_h^k(K) \rightarrow \mathbb{P}_k(K)$  es calculable usando los valores de los grados de libertad  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$ .*

**Demostración.** Usando integración por partes (ver (1.6)) en el lado derecho de (3.10a), para todo  $q \in \mathbb{P}_k(K)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{curl} \left( \Pi_K^{k,\text{curl}} v_h \right) \cdot \mathbf{curl} q &= \int_K \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{curl} q \\ &= \int_K \text{rot}(\mathbf{curl} q) v_h + \int_{\partial K} v_h (\mathbf{curl} q \cdot \mathbf{t}_K^e) \\ &= - \int_K \Delta q v_h + \int_{\partial K} \partial_n q v_h \\ &= - \int_K \Delta q \Pi_{k-2}^K v_h + \int_{\partial K} \partial_n q v_h. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tenemos que la primera integral de la última ecuación en (3.11) es calculable usando  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$ , pues depende solo de  $\Pi_{k-2}^K$  (ver Lema 3.2.3), mientras que la integral sobre la frontera solo depende de los valores de  $v_h$  sobre la frontera de  $K$ , los cuales son calculables usando los grados de libertad  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_3$  y  $\mathbf{D}_5$ . Por otro lado, la parte del kernel (ver (3.10b)) es calculable usando los grados de libertad  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_4$ . De esta manera concluimos que el proyector  $\Pi_K^{k,\text{curl}}$  es calculable usando la información entregada por  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$ .

■

A continuación se definirá otro proyector importante en nuestro trabajo. Para  $k \geq 2$ , consideremos la siguiente proyección sobre  $[\mathbb{P}_{k-1}(K)]^2$ : definimos  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K : [L^2(K)]^2 \rightarrow [\mathbb{P}_{k-1}(K)]^2$ , para cada  $\mathbf{v} \in [L^2(K)]^2$  por:

$$\int_K \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} = \int_K \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{q} \in [\mathbb{P}_{k-1}(K)]^2. \quad (3.12)$$

Para  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  y para cada  $v_h \in W_h^k(K)$  se tiene el siguiente resultado:

**Lema 3.2.5** *Para todo  $v_h \in W_h^k(K)$ , el polinomio  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h$  es calculable a partir de los grados de libertad  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$ .*

**Demostración.** Sea  $\mathbf{q} \in [\mathbb{P}_{k-1}(K)]^2$ , entonces por definición de  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  e integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{q} &= \int_K \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{q} \\ &= \int_K v_h \operatorname{rot} \mathbf{q} + \int_{\partial K} v_h (\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}_K^e) \\ &= \int_K \operatorname{rot} \mathbf{q} \Pi_{k-2}^K v_h + \int_{\partial K} v_h (\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}_K^e). \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho en la igualdad anterior solo depende de  $\Pi_{k-2}^K v_h$  y este depende de los valores de los grados de libertad  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$  (ver Lema 3.2.3), el segundo término por su parte puede ser calculado dado que  $\mathbf{q}$  es un polinomio de grado  $k - 1$  sobre cada lado y por tanto es determinado usando los valores de  $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_5$ .

■

La siguiente proposición contiene propiedades de estabilidad que involucran a los proyectores  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  y  $\mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}}$ .

**Proposición 3.2.1** *Para cualquier  $v \in W_h^k(K)$  se tienen las siguientes propiedades:*

$$|v - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v|_{1,K} \leq |v|_{1,K}, \quad (3.13)$$

$$|v - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v|_{1,K} \leq |v - v_\pi|_{1,K} \quad \forall v_\pi \in \mathbb{P}_k(K), \quad (3.14)$$

y

$$\left\| \mathbf{curl} \left( \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v \right) \right\|_{0,K} \leq \left\| \mathbf{\Pi}_{k-1}^K (\mathbf{curl} v) \right\|_{0,K}. \quad (3.15)$$

**Demostración.** Para demostrar (3.13), sea  $v \in W_h^k(K)$ , entonces usando la definición de  $\Pi_K^{k, \text{curl}}$  y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned}
|v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v|_{1,K}^2 &= \int_K \mathbf{curl} (v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v) \cdot \mathbf{curl} (v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v) \\
&= \int_K \mathbf{curl} (v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v) \cdot \mathbf{curl} v - \int_K \mathbf{curl} (v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v) \cdot \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \\
&= \int_K \mathbf{curl} (v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v) \cdot \mathbf{curl} v \\
&\leq \|\mathbf{curl} (v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v)\|_{0,K} \|\mathbf{curl} v\|_{0,K} \\
&\leq C |v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v|_{1,K} |v|_{1,K}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v|_{1,K} \leq C |v|_{1,K} \quad \forall v \in W_h^k(K).$$

Por otra parte, a partir (3.10a), para todo  $v \in W_h^k(K)$  se verifica que

$$|v - \Pi_K^{k, \text{curl}} v|_{1,K} \leq |v - v_\pi|_{1,K} \quad \forall v_\pi \in \mathbb{P}_k(K).$$

Finalmente, para cualquier  $v \in W_h^k(K)$  tenemos que  $\mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \in \mathbb{P}_{k-1}(K)$ , entonces usando la propiedad de ortogonalidad de los operadores  $\Pi_K^{k, \text{curl}}$  y  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$ , se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \right\|_{0,K}^2 &= \int_K \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \cdot \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \\
&= \int_K \mathbf{curl} v \cdot \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \\
&= \int_K \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v \cdot \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \\
&\leq \|\mathbf{\Pi}_{k-1}^K (\mathbf{curl} v)\|_{0,K} \left\| \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \right\|_{0,K}.
\end{aligned}$$

De modo que

$$\left\| \mathbf{curl} (\Pi_K^{k, \text{curl}} v) \right\|_{0,K} \leq \|\mathbf{\Pi}_{k-1}^K (\mathbf{curl} v)\|_{0,K} \quad \forall v \in W_h^k(K).$$

■

Ahora introduciremos el espacio global discreto virtual para aproximar la función de corriente del Problema de Brinkman. Para cada descomposición  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  en polígonos simples  $K$ , definimos el espacio virtual global:

$$W_h := \{v_h \in H_0^2(\Omega) : v_h|_K \in W_h^k(K)\}.$$

En la siguiente sección continuamos con la construcción de las formas bilineales discretas y el lado derecho de nuestro esquema discreto.

### 3.3. Construcción de las formas bilineales y del lado derecho

Consideremos cualquier par de formas bilineales simétricas definidas positivas y calculables:  $s_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  y  $s_{\Delta}^K(\cdot, \cdot)$  tales que

$$c_0 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) \leq s_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) \leq c_1 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in W_h^k(K) \quad \text{con} \quad \Pi_K^{k, \mathbf{curl}} v_h = 0, \quad (3.16)$$

$$c_2 A_{\Delta}^K(v_h, v_h) \leq s_{\Delta}^K(v_h, v_h) \leq c_3 A_{\Delta}^K(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in W_h^k(K) \quad \text{con} \quad \Pi_K^{k, \Delta} v_h = 0, \quad (3.17)$$

donde  $c_0, c_1, c_2, c_3$  son constantes positivas independientes de  $h_K$ . Una elección para las formas bilineales  $s_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  y  $s_{\Delta}^K(\cdot, \cdot)$  se hará en el Capítulo 5.

Entonces, sobre cada elemento  $K$  definimos las siguientes formas bilineales locales discretas:

$$A_{\mathbf{curl}}^{h, K}(v_h, w_h) := \int_K \mathbb{K}^{-1} \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h \cdot \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} w_h + s_{\mathbf{curl}}^K(v_h - \Pi_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, w_h - \Pi_K^{k, \mathbf{curl}} w_h), \quad (3.18)$$

$$A_{\Delta}^{h, K}(v_h, w_h) := A_{\Delta}^K(\Pi_K^{k, \Delta} v_h, \Pi_K^{k, \Delta} w_h) + s_{\Delta}^K(v_h - \Pi_K^{k, \Delta} v_h, w_h - \Pi_K^{k, \Delta} w_h). \quad (3.19)$$

El siguiente lema establece la  $k$ -consistencia de la forma bilineal  $A_{\Delta}^{h, K}(\cdot, \cdot)$  y estabilidad de  $A_{\Delta}^{h, K}(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\mathbf{curl}}^{h, K}(\cdot, \cdot)$ .

**Lema 3.3.1** *Las formas bilineales locales  $A_{\mathbf{curl}}^{h, K}(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\Delta}^{h, K}(\cdot, \cdot)$  sobre cada  $K \in \mathcal{T}_h$  satisfacen las siguientes propiedades:*

- *$k$ -consistencia: para cada  $h > 0$  y para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ , se tiene que*

$$A_{\Delta}^{h, K}(q, v_h) = A_{\Delta}^K(q, v_h) \quad \forall q \in \mathbb{P}_k(K), \quad k \geq 2, \quad \forall v_h \in W_h^k(K). \quad (3.20)$$

- *Estabilidad: existen constantes positivas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\alpha_4$ , independientes de  $h_K$  y  $K$ , tales que*

$$\alpha_1 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) \leq A_{\mathbf{curl}}^{h, K}(v_h, v_h) \leq \alpha_2 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in W_h^k(K), \quad (3.21)$$

$$\alpha_3 A_{\Delta}^K(v_h, v_h) \leq A_{\Delta}^{h, K}(v_h, v_h) \leq \alpha_4 A_{\Delta}^K(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in W_h^k(K). \quad (3.22)$$

**Demostración.** Iniciamos demostrando (3.20), para esto consideremos  $q \in \mathbb{P}_k(K)$ , entonces por definición del proyector  $\Pi_K^{k, \Delta}$ , se tiene que  $\Pi_K^{k, \Delta} q = q$  y por lo tanto:

$$s_{\Delta}^K(q - \Pi_K^{k, \Delta} q, v_h - \Pi_K^{k, \Delta} v_h) = 0 \quad \forall v_h \in W_h^k(K),$$

de modo que para todo  $v_h \in W_h^K$  tenemos:

$$\begin{aligned} A_{\Delta}^{h,K}(q, v_h) &= A_{\Delta}^K \left( \Pi_K^{k,\Delta} q, \Pi_K^{k,\Delta} v_h \right) + s_{\Delta}^K(q - \Pi_K^{k,\Delta} q, v_h - \Pi_K^{k,\Delta} v_h) \\ &= A_{\Delta}^K \left( q, \Pi_K^{k,\Delta} v_h \right) \\ &= A_{\Delta}^K(q, v_h), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado en la última igualdad la definición del proyector  $\Pi_K^{k,\Delta}$  (ver (3.1a)).

Mostremos ahora (3.21). Sea  $v_h \in W_h^k(K)$ , utilizando (3.16), la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (3.13) y (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{curl}}^K(v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h, v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h) &\leq c_1 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h, v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h) \\ &\leq c_1 \lambda_2 |v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h|_{1,K}^2 \\ &\leq c_1 \lambda_2 |v_h|_{1,K}^2 \\ &= \frac{c_1 \lambda_2}{\lambda_1} \int_K \lambda_1 \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{curl} v_h \\ &\leq \frac{c_1 \lambda_2}{\lambda_1} \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{curl} v_h, \end{aligned}$$

de donde

$$s_{\mathbf{curl}}^K(v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h, v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h) \leq \frac{c_1 \lambda_2}{\lambda_1} A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h). \quad (3.23)$$

Por otro lado, usando propiedades de estabilidad del proyector  $\Pi_{k-1}^K$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|\Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K}^2 &\leq \|\mathbf{curl} v_h\|_{0,K}^2 \\ &= \int_K \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{curl} v_h \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \int_K \lambda_1 \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{curl} v_h \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{curl} v_h, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado (2.1). De lo anterior tenemos que

$$\|\Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h). \quad (3.24)$$

Así, haciendo uso de (2.1), (3.24) y (3.23) tenemos que

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(v_h, v_h) &= \int_K \mathbb{K}^{-1} \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h \cdot \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h + s_{\mathbf{curl}}^K(v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h, v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h) \\ &\leq \lambda_2 \|\Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K}^2 + s_{\mathbf{curl}}^K(v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h, v_h - \Pi_K^{k,\mathbf{curl}} v_h) \\ &\leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) + \frac{c_1 \lambda_2}{\lambda_1} A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) \\ &\leq \alpha_2 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h), \end{aligned}$$

donde  $\alpha_2 := \max\left\{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{c_1\lambda_2}{\lambda_1}\right\} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \max\{1, c_1\} > 0$ .

Ahora bien, de la definición de las formas bilineales  $A_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$ ,  $A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $s_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$ , junto con (2.1), (3.15) y (3.16), tenemos que

$$\begin{aligned}
& A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(v_h, v_h) \\
&= \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h \cdot \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h + s_{\mathbf{curl}}^K \left( v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) \\
&\geq \lambda_1 \left\| \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbf{curl} v_h) \right\|_{0,K}^2 + s_{\mathbf{curl}}^K \left( v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) \\
&\geq \lambda_1 \left\| \mathbf{curl} \left( \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) \right\|_{0,K}^2 + c_0 A_{\mathbf{curl}}^K \left( v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) \\
&\geq \lambda_1 A_{\mathbf{curl}}^K \left( \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) + c_0 A_{\mathbf{curl}}^K \left( v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) \\
&\geq \min\{\lambda_1, c_0\} \left( A_{\mathbf{curl}}^K \left( \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) + A_{\mathbf{curl}}^K \left( v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k, \mathbf{curl}} v_h \right) \right) \\
&= \alpha_1 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h),
\end{aligned}$$

donde  $\alpha_1 := \min\{\lambda_1, c_0\} > 0$ . De modo que

$$\alpha_1 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h) \leq A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(v_h, v_h) \leq \alpha_2 A_{\mathbf{curl}}^K(v_h, v_h).$$

Para mostrar (3.22) notemos que por (3.17)

$$\begin{aligned}
A_{\Delta}^{h,K}(v_h, v_h) &= A_{\Delta}^K(\mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) + s_{\Delta}^K(v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) \\
&\leq A_{\Delta}^K(\mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) + c_3 A_{\Delta}^K(v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) \\
&\leq \max\{1, c_3\} \left( A_{\Delta}^K(\mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) + A_{\Delta}^K(v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) \right) \\
&= \alpha_4 A_{\Delta}^K(v_h, v_h),
\end{aligned}$$

donde  $\alpha_4 := \max\{1, c_3\} > 0$ . De manera análoga, usando nuevamente (3.17), se tiene que

$$\begin{aligned}
A_{\Delta}^{h,K}(v_h, v_h) &\geq \min\{1, c_2\} \left( A_{\Delta}^K(\mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) + A_{\Delta}^K(v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h, v_h - \mathbf{\Pi}_K^{k,\Delta} v_h) \right) \\
&= \alpha_3 A_{\Delta}^K(v_h, v_h),
\end{aligned}$$

donde  $\alpha_3 := \min\{1, c_2\} > 0$ . ■

Dado que  $\mathbb{K}^{-1}$  es un tensor general, la forma bilineal  $A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  no satisface la propiedad de consistencia. Sin embargo, para esta forma bilineal tenemos un resultado alternativo, el cual consiste en estimar la diferencia entre la forma bilineal continua y la discreta. Antes de esto establecemos el siguiente lema preliminar.

**Lema 3.3.2** *Sean  $k \geq 2$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$  y  $\mathbb{T}$  un tensor simétrico, suficientemente regular definido sobre  $K$ , sean además  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  campos vectoriales suficientemente regulares definidos sobre  $K$ . Entonces,*

$$\begin{aligned}
(\mathbb{T} \mathbf{p}, \mathbf{q})_{0,K} - (\mathbb{T} \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{q})_{0,K} &\leq \|\mathbb{T} \mathbf{p} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{T} \mathbf{p})\|_{0,K} \|\mathbf{q} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{q}\|_{0,K} \\
&\quad + \|\mathbb{T} \mathbf{q} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{T} \mathbf{q})\|_{0,K} \|\mathbf{p} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{p}\|_{0,K} \\
&\quad + C_{\mathbb{T}} \|\mathbf{p} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{p}\|_{0,K} \|\mathbf{q} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{q}\|_{0,K},
\end{aligned}$$

donde  $C_{\mathbb{T}} > 0$  es una constante que depende solo del tensor  $\mathbb{T}$ .

**Demostración.** Por simplicidad, consideremos la siguiente notación  $\bar{\mathbf{p}} := \Pi_{k-1}^K \mathbf{p}$ ,  $\bar{\mathbf{q}} := \Pi_{k-1}^K \mathbf{q}$ . Entonces, usando la simetría de  $\mathbb{T}$ , sumando y restando términos adecuados y usando la ortogonalidad de la proyección  $\Pi_{k-1}^K$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{T} \mathbf{p}, \mathbf{q})_{0,K} - (\mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p}, \mathbf{q})_{0,K} - (\bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p}, \mathbf{q})_{0,K} - (\mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})_{0,K} + (\mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})_{0,K} - (\bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p}, \mathbf{q})_{0,K} - (\mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})_{0,K} + (\bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} - (\bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p}, \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})_{0,K} + (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p}, \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})_{0,K} - (\mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})_{0,K} + (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} - (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p} - \mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})_{0,K} + (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}} - \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p} - \mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})_{0,K} + (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}} - \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}} - \mathbb{T} \mathbf{q} + \mathbb{T} \mathbf{q})_{0,K} \\
&= (\mathbb{T} \mathbf{p} - \mathbb{T} \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}})_{0,K} + (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} \mathbf{q} - \mathbb{T} \bar{\mathbf{q}})_{0,K} - (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}, \mathbb{T} (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}))_{0,K},
\end{aligned}$$

el resultado de sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz con  $C_{\mathbb{T}} = \|\mathbb{T}\|_{L^\infty(K)^{2 \times 2}}$ . ■

El siguiente resultado se tiene inmediatamente gracias a una aplicación directa del Lema 3.3.2.

**Lema 3.3.3** *Para todo  $K \in \mathcal{T}_h$  y para todo  $u_h, v_h \in W_h^k(K)$ , tenemos*

$$\begin{aligned}
& A_{\mathbf{curl}}^K(u_h, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(u_h, v_h) \\
&\leq \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} u_h - \Pi_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} u_h)\|_{0,K} \|\mathbf{curl} v_h - \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K} \\
&\quad + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h - \Pi_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h)\|_{0,K} \|\mathbf{curl} u_h - \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} u_h\|_{0,K} \\
&\quad + C_{\mathbb{K}} \|\mathbf{curl} u_h - \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K} \|\mathbf{curl} u_h - \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} u_h\|_{0,K} \\
&\quad + s_{\mathbf{curl}}^K(u_h - \Pi_K^k \mathbf{curl} u_h, v_h - \Pi_K^k \mathbf{curl} v_h),
\end{aligned}$$

donde  $C_{\mathbb{K}} > 0$  es una constante que depende del tensor  $\mathbb{K}^{-1}$ .

Continuamos con la construcción de la forma bilineal discreta. Consideremos la forma bilineal  $A^h : W_h \times W_h \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$A^h(v_h, w_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} A^{h,K}(v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in W_h, \quad (3.25)$$

donde las formas bilineales locales  $A^{h,K} : W_h^k(K) \times W_h^k(K) \rightarrow \mathbb{R}$ , están definidas por:

$$A^{h,K}(v_h, w_h) := A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(v_h, w_h) + \nu A_{\Delta}^{h,K}(v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in W_h^k(K), \quad (3.26)$$

donde  $A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\Delta}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  fueron definidas en (3.18) y (3.19), respectivamente. Para la forma bilineal  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$  tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.3.1** *La forma bilineal  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$  definida en (3.26) cumple la siguiente propiedad:*

- *Estabilidad: existen constantes positivas  $\alpha_5, \alpha_6$ , independientes de  $h_K$  y de  $K$ , tales que*

$$\alpha_5 A^K(w_h, w_h) \leq A^{h,K}(w_h, w_h) \leq \alpha_6 A^K(w_h, w_h) \quad \forall w_h \in W_h^k(K). \quad (3.27)$$

**Demostración.** Usando la definición de  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y la estabilidad de las formas bilineales  $A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\Delta}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  (ver (3.21) y (3.22)) se sigue que

$$\begin{aligned} A^{h,K}(w_h, w_h) &= A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(w_h, w_h) + \nu A_{\Delta}^{h,K}(w_h, w_h) \\ &\leq \alpha_2 A_{\mathbf{curl}}^K(w_h, w_h) + \alpha_4 A_{\Delta}^K(w_h, w_h) \\ &\leq \max\{\alpha_2, \alpha_4\} (A_{\mathbf{curl}}^K(w_h, w_h) + \nu A_{\Delta}^K(w_h, w_h)) \\ &= \alpha_6 A^K(w_h, w_h). \end{aligned}$$

Similarmente tenemos que

$$\begin{aligned} A^{h,K}(w_h, w_h) &= A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(w_h, w_h) + \nu A_{\Delta}^{h,K}(w_h, w_h) \\ &\geq \alpha_1 A_{\mathbf{curl}}^K(w_h, w_h) + \alpha_3 \nu A_{\Delta}^K(w_h, w_h) \\ &\geq \min\{\alpha_1, \alpha_3\} (A_{\mathbf{curl}}^K(w_h, w_h) + \nu A_{\Delta}^K(w_h, w_h)) \\ &= \alpha_5 A^K(w_h, w_h), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. ■

Seguimos con la construcción de una aproximación del funcional  $F(\cdot)$  definido en (2.5). En efecto, sobre cada  $K \in \mathcal{T}_h$ , definimos a  $\mathbf{f}_h$  como la proyección  $[L^2(K)]^2$  de  $\mathbf{f}$  sobre  $[\mathbb{P}_{k-1}(K)]^2$  ( $k \geq 2$ ), esto es,

$$\mathbf{f}_h|_K := \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{f} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Consideremos el funcional  $F^h : W_h \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$F^h(v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{f} \cdot \mathbf{curl} v_h \equiv \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h. \quad (3.28)$$

Para mostrar la igualdad en (3.28), sumamos y restamos términos adecuados y utilizando la pro-

propiedad de ortogonalidad del proyector  $\Pi_{k-1}^K$ , se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{curl} v_h &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Pi_{k-1}^K \mathbf{f} \cdot \mathbf{curl} v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\Pi_{k-1}^K \mathbf{f}, \mathbf{curl} v_h)_{0,K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\Pi_{k-1}^K \mathbf{f}, \mathbf{curl} v_h - \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h + \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ (\Pi_{k-1}^K \mathbf{f}, \mathbf{curl} v_h - \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} + (\Pi_{k-1}^K \mathbf{f}, \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} \right] \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\Pi_{k-1}^K \mathbf{f}, \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f} + \Pi_{k-1}^K \mathbf{f} - \mathbf{f}, \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ (\mathbf{f}, \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} + (\Pi_{k-1}^K \mathbf{f} - \mathbf{f}, \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} \right] \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f}, \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h,
\end{aligned}$$

en donde se ha utilizado el hecho que  $\Pi_{k-1}^K \mathbf{f}$  y  $\Pi_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h$  son elementos de  $[\mathbb{P}_{k-1}(K)]^2$ .

Notemos que  $F^h(\cdot)$  es calculable utilizando los grados de libertad propuestos, pues  $\Pi_{k-1}^K$  lo es.

**Observación 3.3.1** Si  $\mathbf{f}$  es más regular, notamos que mediante una simple integración por partes en (2.5) tenemos que  $(\mathbf{f}, \mathbf{curl} v)_{0,\Omega} = (\mathbf{rot} \mathbf{f}, v)_{0,\Omega} =: \tilde{F}(v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$ . De modo que podemos considerar un lado derecho alternativo: para cada  $K \in \mathcal{T}_h$  y para cada  $k \geq 2$ , definimos

$$\tilde{F}^{h,K}(v_h) := \int_K \Pi_{k-2}^K(\mathbf{rot} \mathbf{f}) v_h \equiv \int_K \mathbf{rot} \mathbf{f} \Pi_{k-2}^K v_h \quad \forall v_h \in W_h^k(K).$$

Globalmente consideramos el siguiente lado derecho alternativo:  $\tilde{F}^h : W_h \rightarrow \mathbb{R}$  es definido por

$$\tilde{F}^h(v_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{F}^{h,K}(v_h) \quad \forall v_h \in W_h. \quad (3.29)$$

Notemos que  $\tilde{F}^h(\cdot)$  es calculable a partir de los grados de libertad propuestos, pues  $\Pi_{k-2}^K$  lo es.

## 3.4. Problema discreto

En esta sección presentaremos el esquema discreto asociado al Problema 2.2.2 y mostraremos existencia y unicidad del esquema.

**Problema 3.4.1 (Problema Discreto)** Hallar  $\psi_h \in W_h \subseteq H_0^2(\Omega)$ , tal que

$$A^h(\psi_h, \varphi_h) = F^h(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in W_h,$$

donde  $A^h(\cdot, \cdot)$  es la forma bilineal definida en (3.25) y  $F^h(\cdot)$  es el funcional definido en (3.28).

Observemos que usando (3.27) la forma bilineal  $A^h(\cdot, \cdot)$  es acotada. Más aún, como se muestra en el siguiente lema, ella es una forma bilineal uniformemente elíptica.

**Lema 3.4.1** *Existe una constante  $\tilde{\alpha} > 0$  tal que*

$$A^h(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_{2,\Omega}^2 \quad \forall v_h \in W_h.$$

**Demostración.** A partir de (3.27) y el Lema 2.2.1, para todo  $v_h \in W_h$  tenemos que,

$$A^h(v_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} A^{h,K}(v_h, v_h) \geq \alpha_5 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} A^K(v_h, v_h) = \alpha_5 A(v_h, v_h) \geq \alpha_5 \alpha_0 \|v_h\|_{2,\Omega}^2,$$

de donde

$$A^h(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_{2,\Omega}^2 \quad \forall v_h \in W_h,$$

con  $\tilde{\alpha} = \alpha_5 \alpha_0 > 0$ . ■

El siguiente teorema establece existencia y unicidad de solución del Problema discreto 3.4.1.

**Teorema 3.4.1** *El Problema 3.4.1 tiene solución única  $\psi_h \in W_h \subseteq H_0^2(\Omega)$  que satisface la siguiente dependencia continua de los datos:*

$$\|\psi_h\|_{2,\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega},$$

con  $C > 0$ , independiente de  $h$ .

**Demostración.** Usando la simetría y estabilidad de las formas bilineales  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$  (ver Teorema 3.3.1) y la continuidad de  $A^K(\cdot, \cdot)$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$  tenemos que

$$\begin{aligned} A^{h,K}(v_h, w_h) &\leq (A^{h,K}(v_h, v_h))^{1/2} (A^{h,K}(w_h, w_h))^{1/2} \\ &\leq \alpha_6 (A^K(v_h, v_h))^{1/2} (A^K(w_h, w_h))^{1/2} \\ &\leq C \alpha_6 \|v_h\|_{2,K} \|w_h\|_{2,K} \quad \forall v_h, w_h \in W_h^K. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|A^h(v_h, w_h)| \leq C \|v_h\|_{2,\Omega} \|w_h\|_{2,\Omega} \quad \forall v_h, w_h \in W_h.$$

Ahora bien, dado que  $F^h(\cdot)$  es un funcional lineal y acotado de  $H_0^2(\Omega)$ , por una aplicación directa del Lema de Lax-Milgram concluimos que existe una única  $\psi_h \in W_h$ , solución del Problema 3.4.1 que satisface la siguiente estimación:

$$\|\psi_h\|_{2,\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega},$$

con  $C > 0$ , independiente de  $h$ . ■

**Observación 3.4.1** *Notemos que el Problema 3.4.1 también tiene única solución si consideramos como lado derecho al funcional  $\tilde{F}^h(\cdot)$  definido en (3.29). Esto se debe a que  $\tilde{F}^h(\cdot)$  es también un funcional lineal y acotado de  $H_0^2(\Omega)$ .*

# Capítulo 4

## Estimaciones de Error

En este capítulo estableceremos convergencia y estimaciones de error en norma  $H^2$  para la discretización propuesta. Usando argumentos de dualidad establecemos estimaciones de error para la función de corriente en normas  $H^1$  y  $L^2$ . Recuperamos el campo de velocidad del fluido, mediante un post-proceso de la función de corriente. Para  $k = 3$ , presentamos una estrategia para recuperar la presión del fluido a través de un problema de Poisson generalizado. Finalmente, establecemos estimaciones de error en norma  $H^1$  para la presión.

### 4.1. Convergencia

Iniciamos esta sección con resultados conocidos de aproximación sobre polígonos estrellados, el cual es derivado por interpolación entre espacios de Sobolev (ver, por ejemplo, [36, Teorema I.1.4]). El siguiente resultado se establece en la Proposición 4.2 de [5] para valores enteros de  $\delta$  y usando la teoría clásica de Scott-Dupont (ver, por ejemplo, [21] y [3, Proposición 3.1]) podemos escribirlo como sigue:

**Proposición 4.1.1** *Si la suposición A1 se satisface (ver Sección 3.1), entonces existe una constante positiva  $C$ , independiente de  $h_K$ , tal que para cada  $v \in H^\delta(K)$  existe  $v_\pi \in \mathbb{P}_k(K)$ ,  $k \geq 0$  tal que*

$$|v - v_\pi|_{\ell,K} \leq Ch_K^{\delta-\ell} |v|_{\delta,K}, \quad 0 \leq \delta \leq k+1, \ell = 0, 1, 2, \dots, [\delta],$$

donde  $[\delta]$  denota el mayor entero menor o igual que  $\delta \in \mathbb{R}$ .

A continuación, se presenta un resultado de aproximación para el proyector  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  que será muy útil en el próximo análisis.

**Proposición 4.1.2** *Existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h_K$ , tal que para todo  $\mathbf{v} \in [H^\delta(K)]^2$*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{v}\|_{0,K} \leq Ch_K^\delta |\mathbf{v}|_{\delta,K} \quad 0 \leq \delta \leq k, \quad k \geq 2.$$

Ahora presentamos un resultado de interpolación en el espacio virtual  $W_h$  (ver [24, 3, 16]).

**Proposición 4.1.3** *Si las suposiciones **A1** – **A2** se satisfacen (ver Sección 3.1), entonces existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que para cada  $v \in H^\delta(\Omega)$ , existe  $v_I \in W_h$  que satisface*

$$\|v - v_I\|_{\ell,\Omega} \leq Ch^{\delta-\ell}|v|_{\delta,\Omega}, \quad \ell = 0, 1, 2, \quad 2 \leq \delta \leq k+1, \quad k \geq 2.$$

En  $W'_h$  definimos la siguiente norma:

$$\|F - F^h\|_{W'_h} := \sup_{\substack{v_h \in W_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|F(v_h) - F^h(v_h)|}{\|v_h\|_{2,\Omega}}.$$

Para cada entero  $\ell \geq 0$  introducimos la semi-norma  $H^\ell(\mathcal{T}_h)$ :

$$|v|_{\ell,h} := \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{\ell,K}^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada  $v \in L^2(\Omega)$  tal que  $v|_K \in H^\ell(K)$  para todo polígono  $K \in \mathcal{T}_h$ .

**Proposición 4.1.4** *Sean  $k \geq 2$  y  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  tal que  $\mathbf{f}|_K \in [H^{k-2}(K)]^2$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ . Sean  $F(\cdot)$  y  $F^h(\cdot)$  los funcionales definidos en (2.5) y (3.28), respectivamente. Entonces, tenemos la siguiente estimación:*

$$\|F - F^h\|_{W'_h} \leq Ch^{k-1}|\mathbf{f}|_{k-2,h}.$$

**Demostración.** Sea  $v_h \in W_h$ , entonces usando la definición de  $F(\cdot)$  y  $F^h(\cdot)$  (ver (2.5) y (3.28), respectivamente) y la propiedad de ortogonalidad de  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  tenemos que

$$\begin{aligned} F(v_h) - F^h(v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{f}) \cdot \mathbf{curl} v_h \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h). \end{aligned}$$

Ahora, usando lo anterior, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Proposición 4.1.2, si  $k \geq 2$  tenemos que

$$\begin{aligned} |F(v_h) - F^h(v_h)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{f}\|_{0,K} \|\mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K} \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{k-2} |\mathbf{f}|_{k-2,K} h_K |\mathbf{curl} v_h|_{1,K} \\ &\leq Ch^{k-1} |\mathbf{f}|_{k-2,h} \|v_h\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|F - F^h\|_{W'_h} \leq Ch^{k-1}|\mathbf{f}|_{k-2,h}.$$

■

Con las definiciones anteriores y haciendo uso de la Proposición 4.1.2, tenemos el siguiente resultado:

**Lema 4.1.1** *Sea  $k \geq 2$  y sean  $\psi$  y  $\psi_h$ , las únicas soluciones de los Problemas 2.2.2 y 3.4.1, respectivamente. Entonces, existen  $s > 1/2$  y  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\begin{aligned} & \|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \\ & \leq C \left( \|F - F^h\|_{W'_h} + \|\psi - \psi_I\|_{2,\Omega} + |\psi - \psi_\pi|_{1,h} + |\psi - \psi_\pi|_{2,h} + h^{\min\{1+s,k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right), \end{aligned}$$

para todo  $\psi_I \in W_h$  y para todo  $\psi_\pi \in L^2(\Omega)$  tal que  $\psi_\pi|_K \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$ .

**Demostración.** Para todo  $\psi_I \in W_h$ , consideremos  $v_h := \psi_h - \psi_I$ . Entonces,

$$\|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \leq \|\psi - \psi_I\|_{2,\Omega} + \|v_h\|_{2,\Omega}. \quad (4.1)$$

Usando el Lema 3.4.1, sumando y restando el término  $A(\psi, v_h)$  y usando la definición de los problemas continuo y discreto (ver Problemas 2.2.2 y 3.4.1, respectivamente) tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|v_h\|_{2,\Omega}^2 & \leq A^h(v_h, v_h) \\ & = A^h(\psi_h, v_h) - A^h(\psi_I, v_h) \\ & = F^h(v_h) - A^h(\psi_I, v_h) \\ & = F^h(v_h) - A(\psi, v_h) + A(\psi, v_h) - A^h(\psi_I, v_h) \\ & = F^h(v_h) - F(v_h) + A(\psi, v_h) - A^h(\psi_I, v_h) \\ & = F^h(v_h) - F(v_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_\Delta^K(\psi, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^K(\psi, v_h) \right\} \\ & \quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_\Delta^{h,K}(\psi_I, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ahora, sumando y restando  $\psi_\pi \in L^2(\Omega)$  tal que  $\psi_\pi|_K \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$ ,  $k \geq 2$ , en el último término de la igualdad anterior y usando la consistencia de la forma bilineal  $A_\Delta^{h,K}(\cdot, \cdot)$  (ver (3.20)) se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_\Delta^{h,K}(\psi_I, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\} \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_\Delta^{h,K}(\psi_I - \psi_\pi, v_h) + \nu A_\Delta^{h,K}(\psi_\pi, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\} \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_\Delta^{h,K}(\psi_I - \psi_\pi, v_h) + \nu A_\Delta^K(\psi_\pi, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

de (4.2) y (4.3) se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|v_h\|_{2,\Omega}^2 &\leq F^h(v_h) - F(v_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_{\Delta}^K(\psi, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^K(\psi, v_h) \right\} \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_{\Delta}^{h,K}(\psi_I - \psi_{\pi}, v_h) + \nu A_{\Delta}^K(\psi_{\pi}, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Finalmente, asociando términos de manera adecuada en (4.4) y usando la bilinealidad de  $A_{\Delta}^K(\cdot, \cdot)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|v_h\|_{2,\Omega}^2 &\leq F^h(v_h) - F(v_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \nu A_{\Delta}^K(\psi - \psi_{\pi}, v_h) - \nu A_{\Delta}^{h,K}(\psi_I - \psi_{\pi}, v_h) \right\} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ A_{\mathbf{curl}}^K(\psi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\}, \\ &\leq \|F^h - F\|_{W'_h} \|v_h\|_{2,\Omega} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \left\{ A_{\Delta}^K(\psi - \psi_{\pi}, v_h) + A_{\Delta}^{h,K}(\psi_I - \psi_{\pi}, v_h) \right\} \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ A_{\mathbf{curl}}^K(\psi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora estimaremos los últimos dos términos de (4.5). En efecto, usando el acotamiento de la formas bilineales  $A_{\Delta}^K(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\Delta}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \nu \left\{ A_{\Delta}^K(\psi - \psi_{\pi}, v_h) + A_{\Delta}^{h,K}(\psi_I - \psi_{\pi}, v_h) \right\} &\leq C |\psi - \psi_{\pi}|_{2,K} |v_h|_{2,K} + |\psi_I - \psi_{\pi}|_{2,K} |v_h|_{2,K} \\ &\leq C (|\psi - \psi_{\pi}|_{2,K} + |\psi - \psi_I|_{2,K}) |v_h|_{2,K}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por otro lado, sumando y restando el término  $A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_I, v_h)$ , usando la bilinealidad de  $A_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{curl}}^K(\psi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) &= A_{\mathbf{curl}}^K(\psi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_I, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_I, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \\ &= A_{\mathbf{curl}}^K(\psi - \psi_I, v_h) + \left\{ A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_I, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Usando la continuidad de  $A_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  se tiene que

$$A_{\mathbf{curl}}^K(\psi - \psi_I, v_h) \leq C |\psi - \psi_I|_{1,K} |v_h|_{1,K} \leq C \|\psi - \psi_I\|_{2,K} \|v_h\|_{2,K}. \quad (4.8)$$

Ahora, usando el Lema 3.3.3 se tiene que

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_I, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) &\leq \left\| \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I) \right\|_{0,K} \left\| \mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h \right\|_{0,K} \\ &\quad + \left\| \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h) \right\|_{0,K} \left\| \mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \psi_I \right\|_{0,K} \\ &\quad + C \left\| \mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \psi_I \right\|_{0,K} \left\| \mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h \right\|_{0,K} \\ &\quad + s_{\mathbf{curl}}^K(\psi_I - \mathbf{\Pi}_K^k \mathbf{curl} \psi_I, v_h - \mathbf{\Pi}_K^k \mathbf{curl} v_h). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para el primer término del lado derecho de (4.9) sumamos y restamos las expresiones  $\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi$  y  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi)$ , usamos desigualdad triangular, propiedades de estabilidad del proyector  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  y la estimación de la Proposición 4.1.2 para obtener

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I)\|_{0,K} \\
& \leq \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I - \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi\|_{0,K} + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi)\|_{0,K} \\
& \quad + \|\mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi) - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I)\|_{0,K} \\
& \leq \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl}(\psi_I - \psi)\|_{0,K} + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi)\|_{0,K} \\
& \quad + \|\mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1}(\mathbf{curl}(\psi - \psi_I)))\|_{0,K} \\
& \leq C|\psi_I - \psi|_{1,K} + Ch_K^{\min\{1+s,k\}}|\mathbf{curl} \psi|_{1+s,K} + C|\psi - \psi_I|_{1,K} \\
& \leq C \left( \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}}|\psi|_{2+s,K} \right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Además, usando la Proposición 4.1.2 tenemos que

$$\|\mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K} \leq Ch_K |v_h|_{2,K}, \tag{4.11}$$

de las desigualdades (4.10) y (4.11) se tiene la siguiente estimación para el primer término de (4.9)

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_I)\|_{0,K} \|\mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K} \\
& \leq C \left( \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}}|\psi|_{2+s,K} \right) h_K |v_h|_{2,K}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

De manera análoga a como se procedió en (4.10) obtenemos que

$$\|\mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbf{curl} \psi_I)\|_{0,K} \leq C \left( \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}}|\psi|_{2+s,K} \right) \tag{4.13}$$

y usando nuevamente la Proposición 4.1.2 se sigue que

$$\|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h)\|_{0,K} \leq Ch_K |v_h|_{2,K}. \tag{4.14}$$

Por lo tanto de las desigualdades (4.13) y (4.14) para el segundo término de (4.9) tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} v_h)\|_{0,K} \|\mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \psi_I\|_{0,K} \\
& \leq C \left( \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}}|\psi|_{2+s,K} \right) h_K |v_h|_{2,K}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

De manera similar a lo hecho en (4.12) y en (4.15) se obtiene la siguiente estimación para el tercer término de (4.9)

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{curl} v_h - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h\|_{0,K} \|\mathbf{curl} \psi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \psi_I\|_{0,K} \\
& \leq C \left( \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}}|\psi|_{2+s,K} \right) h_K |v_h|_{2,K}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Finalmente, para el cuarto término, usando (3.16), la continuidad de la forma bilineal  $A_{\text{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  y (3.13) se obtiene que

$$\begin{aligned}
s_{\text{curl}}^K(\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I, v_h - \Pi_K^{k, \text{curl}} v_h) &\leq c_1 A_{\text{curl}}^K(\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I, v_h - \Pi_K^{k, \text{curl}} v_h) \\
&\leq C |\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I|_{1,K} |v_h - \Pi_K^{k, \text{curl}} v_h|_{1,K} \\
&\leq C |\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I|_{1,K} |v_h|_{1,K} \\
&\leq C |\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I|_{1,K} \|v_h\|_{2,K}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Para estimar el término  $|\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I|_{1,K}$  sumamos y restamos  $\psi$  y  $\Pi_K^{k, \text{curl}} \psi$ , usamos desigualdad triangular, la propiedad (3.14) y propiedades de estabilidad del operador  $\Pi_K^{k, \text{curl}} \psi$  para obtener

$$\begin{aligned}
&|\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I|_{1,K} \\
&\leq \left( |\psi_I - \psi|_{1,K} + |\psi - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi|_{1,K} + |\Pi_K^{k, \text{curl}}(\psi - \psi_I)|_{1,K} \right) \\
&\leq (|\psi_I - \psi|_{1,K} + |\psi - \psi_\pi|_{1,K} + C|\psi - \psi_I|_{1,K}) \\
&\leq C (\|\psi - \psi_I\|_{2,K} + C|\psi - \psi_\pi|_{1,K}).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

De (4.17) y (4.18) se obtiene la siguiente estimación para el cuarto término de la desigualdad (4.9)

$$s_{\text{curl}}^K(\psi_I - \Pi_K^{k, \text{curl}} \psi_I, v_h - \Pi_K^{k, \text{curl}} v_h) \leq C (\|\psi - \psi_I\|_{2,K} + C|\psi - \psi_\pi|_{1,K}) \|v_h\|_{2,K}. \tag{4.19}$$

Entonces, de las estimaciones (4.7), (4.8), (4.9), (4.12), (4.16) y (4.19) se obtiene que

$$A_{\text{curl}}^K(\psi, v_h) - A_{\text{curl}}^{h,K}(\psi_I, v_h) \leq C \left( \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + |\psi - \psi_\pi|_{1,K} + h^{\min\{1+s,k\}} |\psi|_{2+s} \right) \|v_h\|_{2,K}. \tag{4.20}$$

Ahora bien, usando (4.5), (4.6) y (4.20) tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} \|v_h\|_{2,\Omega}^2 &\leq \|F - F^h\|_{W'_h} \|v_h\|_{2,\Omega} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C (|\psi - \psi_\pi|_{2,K} + \|\psi - \psi_I\|_{2,K}) \|v_h\|_{2,K} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C \left( \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}} |\psi|_{2+s,K} + |\psi - \psi_\pi|_{1,K} \right) \|v_h\|_{2,K} \\
&\leq C \|F^h - F\|_{W'_h} \|v_h\|_{2,\Omega} \\
&\quad + C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( |\psi - \psi_\pi|_{1,K} + |\psi - \psi_\pi|_{2,K} + \|\psi - \psi_I\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}} \|\psi\|_{2+s,K} \right) \|v_h\|_{2,K} \right),
\end{aligned}$$

aplicando desigualdad de Cauchy-Schwarz en el segundo término del lado derecho de la estimación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha} \|v_h\|_{2,\Omega}^2 \\
&\leq C \left( \|F - F^h\|_{W'_h} + \|\psi - \psi_I\|_{2,\Omega} + |\psi - \psi_\pi|_{1,h} + |\psi - \psi_\pi|_{2,h} + h^{\min\{1+s,k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right) \|v_h\|_{2,\Omega}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Por lo tanto, de (4.1) y (4.21) se tiene el resultado.  $\blacksquare$

Tenemos el siguiente teorema de convergencia:

**Teorema 4.1.1** *Sea  $k \geq 2$  y  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  tal que  $\mathbf{f} \in [H^{k-2}(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h$ . Sean  $\psi$  y  $\psi_h$ , las únicas soluciones de los Problemas 2.2.2 y 3.4.1, respectivamente. Entonces, existen  $s > 1/2$  y  $C > 0$  independiente de  $h$ , tal que*

$$\|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \leq Ch^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}).$$

**Demostración.** Dado  $k \geq 2$  y  $\psi \in H^{2+s}(\Omega)$ , sean  $\psi_\pi \in L^2(\Omega)$  tal que  $\psi_\pi|_K \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$  y  $\psi_I \in W_h$  tales que las Proposiciones 4.1.1 y 4.1.3 son ciertas. En particular,

$$\|\psi - \psi_I\|_{2,\Omega} \leq Ch^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega}, \quad (4.22)$$

y

$$|\psi - \psi_\pi|_{1,K} \leq Ch_K^{\min\{s, k\}} \|\psi\|_{1+s,K} \quad |\psi - \psi_\pi|_{2,K} \leq Ch_K^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s,K} \quad (4.23)$$

Usando el Lema 4.1.1 junto con las desigualdades (4.22), (4.23) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} & \|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \\ & \leq C \left( \|F - F^h\|_{W'_h} + \|\psi - \psi_I\|_{2,\Omega} + |\psi - \psi_\pi|_{1,h} + |\psi - \psi_\pi|_{2,h} + h^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right) \\ & \leq C \left( \|F - F^h\|_{W'_h} + \|\psi - \psi_I\|_{2,\Omega} + \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi - \psi_\pi|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi - \psi_\pi|_{2,K}^2 \right)^{1/2} + h^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right) \\ & \leq C \left( \|F - F^h\|_{W'_h} + \|\psi - \psi_I\|_{2,\Omega} + \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2\min\{s, k\}} |\psi|_{1+s,K}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2\min\{s, k-1\}} |\psi|_{2+s,K}^2 \right)^{1/2} + h^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right) \quad (4.24) \\ & \leq C \left( Ch^{k-1} |\mathbf{f}|_{k-2,h} + Ch^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} + Ch^{\min\{s, k\}} |\psi|_{1+s,\Omega} \right. \\ & \quad \left. + Ch^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} + Ch^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right) \\ & \leq C \left( Ch^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) + Ch^{\min\{s, k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} + Ch^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right) \\ & \leq Ch^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}), \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración.  $\blacksquare$

## 4.2. Estimación en normas $H^1$ y $L^2$

En esta sección estableceremos estimaciones de error para la función de corriente en normas  $H^1$  y  $L^2$  usando argumentos de dualidad.

El siguiente lema preliminar será muy útil para nuestro análisis.

**Lema 4.2.1** *Sea  $k \geq 2$  y sean  $u_\pi, v_\pi \in \mathbb{P}_k(K)$ . Entonces las formas bilineales  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$ ,  $A^K(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\text{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  satisfacen las siguientes propiedades:*

- Para todo  $K \in \mathcal{T}_h$ , se tiene

$$\begin{aligned} & A^{h,K}(u_h, v_h) - A^K(u_h, v_h) \\ &= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) - A^K(u_h - u_\pi, v_h) \\ &+ A_{\text{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\text{curl}}^K(u_\pi, v_h) \quad \forall u_h, v_h \in W_h^k(K). \end{aligned} \tag{4.25}$$

- Para todo  $K \in \mathcal{T}_h$ , se tiene

$$\begin{aligned} & A^{h,K}(u_h, v_h) - A^K(u_h, v_h) \\ &= A^{h,K}(u_h, v_h - v_\pi) - A^K(u_h, v_h - v_\pi) \\ &+ A_{\text{curl}}^{h,K}(u_h, v_\pi) - A_{\text{curl}}^K(u_h, v_\pi) \quad \forall u_h, v_h \in W_h^k(K). \end{aligned} \tag{4.26}$$

**Demostración.** Mostraremos la propiedad (4.25). En efecto, sean  $u_h, v_h \in W_h^k(K)$  y sea  $u_\pi \in \mathbb{P}_k(K)$ ,  $k \geq 2$ , entonces sumando y restando  $u_\pi$ , usando la definición de las formas bilineales  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $A^K(\cdot, \cdot)$  y luego usando la consistencia de  $A_{\Delta}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  tenemos que

$$\begin{aligned} & A^{h,K}(u_h, v_h) - A^K(u_h, v_h) \\ &= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) + A^{h,K}(u_\pi, v_h) - A^K(u_h, v_h) \\ &= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) + \left\{ \nu A_{\Delta}^{h,K}(u_\pi, v_h) + A_{\text{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) \right\} \\ &\quad - \left\{ \nu A_{\Delta}^K(u_h, v_h) + A_{\text{curl}}^K(u_h, v_h) \right\} \\ &= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) + \left\{ \nu A_{\Delta}^K(u_\pi, v_h) + A_{\text{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) \right\} \\ &\quad - \left\{ \nu A_{\Delta}^K(u_h, v_h) + A_{\text{curl}}^K(u_h, v_h) \right\} \\ &= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) + \left\{ \nu A_{\Delta}^K(u_\pi, v_h) - \nu A_{\Delta}^K(u_h, v_h) \right\} \\ &\quad + \left\{ A_{\text{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\text{curl}}^K(u_h, v_h) \right\} \\ &= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) + \nu A_{\Delta}^K(u_\pi - u_h, v_h) \\ &\quad + A_{\text{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\text{curl}}^K(u_h, v_h), \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde hemos asociado términos de manera adecuada y usado la bilinealidad de  $A_{\Delta}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  en la dos últimas igualdades. Ahora, sumando y restando el término  $A_{\text{curl}}^K(u_\pi - u_h, v_h)$  y usando la definición

de  $A^K(\cdot, \cdot)$  tenemos que la última igualdad (4.27) se convierte en

$$\begin{aligned}
& A^{h,K}(u_h, v_h) - A^K(u_h, v_h) \\
&= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) + \{ \nu A_\Delta^K(u_\pi - u_h, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^K(u_\pi - u_h, v_h) \} \\
&\quad + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_h, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_\pi - u_h, v_h) \\
&= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) + A^K(u_\pi - u_h, v_h) \\
&\quad + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_h, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_\pi - u_h, v_h).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Finalmente, usando la bilinealidad de  $A_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  para los últimos tres términos del lado derecho de la igualdad de (4.28) se tiene que

$$\begin{aligned}
& A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_h, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_\pi - u_h, v_h) \\
&= A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_h, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_\pi, v_h) + A_{\mathbf{curl}}^K(u_h, v_h) \\
&= A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_\pi, v_h).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Por lo tanto de (4.28) y (4.29) se sigue que

$$\begin{aligned}
& A^{h,K}(u_h, v_h) - A^K(u_h, v_h) \\
&= A^{h,K}(u_h - u_\pi, v_h) - A^K(u_h - u_\pi, v_h) \\
&\quad + A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(u_\pi, v_h) - A_{\mathbf{curl}}^K(u_\pi, v_h) \quad \forall u_h, v_h \in W_h^k(K).
\end{aligned}$$

La segunda propiedad del lema es consecuencia de las igualdad anterior y de la simetría de las formas bilineales  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$ ,  $A^K(\cdot, \cdot)$ ,  $A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $A_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$ .  $\blacksquare$

El siguiente teorema establece una estimación del error para la función de corriente en norma  $H^1$ .

**Teorema 4.2.1** Sean  $k \geq 2$  y  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  tal que  $\mathbf{f}|_K \in [H^{k-2}(K)]^2$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ . Sean  $\psi$  la única solución del Problema 2.2.2 y  $\psi_h$  la única solución del Problema 3.4.1. Entonces, existen  $\tilde{s} \in (1/2, 1]$ ,  $s > 1/2$  y una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tilde{s} + \min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}).$$

**Demostración.** Sea  $\phi \in H_0^2(\Omega)$  la única solución del siguiente problema variacional: hallar  $\phi \in H_0^2(\Omega)$  tal que

$$A(\phi, v) = G(v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \tag{4.30}$$

donde  $A(\cdot, \cdot)$  es la forma bilineal definida en (2.4) y  $G(\cdot)$  es el funcional definido por

$$G(v) := \int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \cdot \nabla v \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Dado que  $G \in H^{-1}(\Omega)$ , por resultado de regularidad adicional (ver Teorema 2.2.2), existe  $\tilde{s} \in (1/2, 1]$  tal que  $\phi \in H^{2+\tilde{s}}(\Omega)$  y

$$\|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega} \leq C \|G\|_{-1,\Omega}. \tag{4.31}$$

Ahora bien, integrando por partes y aplicando desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}
\|G\|_{-1,\Omega} &= \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{(\nabla(\psi - \psi_h), \nabla v)_{0,\Omega}}{\|v\|_{1,\Omega}} \\
&\leq \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega}}{\|v\|_{1,\Omega}} \\
&\leq \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}}{\|v\|_{1,\Omega}} \\
&= |\psi - \psi_h|_{1,\Omega},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

de las desigualdades (4.31) y (4.32) se sigue que

$$\|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega} \leq C|\psi - \psi_h|_{1,\Omega}. \tag{4.33}$$

Ahora, tomando  $v = (\psi - \psi_h) \in H_0^2(\Omega)$  como función test en (4.30), obtenemos

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \cdot \nabla(\psi - \psi_h) = A(\psi - \psi_h, \phi), \tag{4.34}$$

donde hemos utilizado en la última igualdad la definición de la forma bilineal  $A(\cdot, \cdot)$  junto con su simetría.

Sea  $\phi_I \in W_h$  tal que el Lema 4.1.3 se satisface. En particular,

$$\|\phi - \phi_I\|_{2,\Omega} \leq Ch^{\min\{\tilde{s}, k-1\}} \|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega} \quad \text{y} \quad \|\phi - \phi_I\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\min\{1+\tilde{s}, k\}} \|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega},$$

y dado que  $\tilde{s} \in (1/2, 1]$  y  $k \geq 2$ , entonces

$$\|\phi - \phi_I\|_{2,\Omega} \leq Ch^{\tilde{s}} \|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega} \quad \text{y} \quad \|\phi - \phi_I\|_{1,\Omega} \leq Ch^{1+\tilde{s}} \|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega}. \tag{4.35}$$

Sumando y restando  $\phi_I$  en el lado derecho de (4.34) y usando la definición del problema continuo y discreto (ver 2.2.2 y 3.4.1, respectivamente), se tiene que

$$\begin{aligned}
A(\psi - \psi_h, \phi) &= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) + A(\psi - \psi_h, \phi_I) \\
&= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) + A(\psi, \phi_I) - A(\psi_h, \phi_I) \\
&= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) + F(\phi_I) - A(\psi_h, \phi_I) \\
&= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) + F(\phi_I) - F^h(\phi_I) + F^h(\phi_I) - A(\psi_h, \phi_I) \\
&= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) + [F(\phi_I) - F^h(\phi_I)] + [A^h(\psi_h, \phi_I) - A(\psi_h, \phi_I)],
\end{aligned} \tag{4.36}$$

donde en la cuarta igualdad hemos sumado y restando el término  $F^h(\phi_I)$ . De (4.34) y de (4.36) se sigue que

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega}^2 = T_1 + T_2 + T_3, \tag{4.37}$$

donde

$$T_1 := A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I), \quad T_2 := F(\phi_I) - F^h(\phi_I) \quad \text{y} \quad T_3 := A^h(\psi_h, \phi_I) - A(\psi_h, \phi_I).$$

Para estimar el término  $T_1$  utilizamos la continuidad de la forma bilineal  $A(\cdot, \cdot)$ , el Teorema 4.1.1 y (4.35) como sigue

$$\begin{aligned} T_1 &= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) \\ &\leq C \|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \|\phi - \phi_I\|_{2,\Omega} \\ &\leq Ch^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) h^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \end{aligned}$$

usando (4.33) y lo anterior se obtiene

$$T_1 \leq Ch^{\bar{s}+\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) |\psi - \psi_h|_{1,\Omega}. \quad (4.38)$$

Para estimar  $T_2$  utilizamos la definición de los funcionales  $F^h(\cdot)$  y  $F(\cdot)$ , aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Proposición 4.1.2 como sigue:

$$\begin{aligned} F^h(\phi_I) - F(\phi_I) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{f} - \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{curl} \phi_I) \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{f}\|_{0,K} \|\mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_I\|_{0,K} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{k-2} |\mathbf{f}|_{k-2,K} \|\mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_I\|_{0,K}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ahora estableceremos cotas para el término  $\|\mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_I\|_{0,K}$ . En efecto, sumando y restando  $\mathbf{curl} \phi$  y  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi$ , usando la desigualdad triangular y propiedades de estabilidad del proyector  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  junto con la estimación (4.35) y la Proposición 4.1.2 se tiene

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_I\|_{0,K} \\ &\leq \|\mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{curl} \phi\|_{0,K} + \|\mathbf{curl} \phi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi\|_{0,K} + \|\mathbf{\Pi}_{k-1}^K (\mathbf{curl} (\phi - \phi_I))\|_{0,K} \\ &\leq \|\mathbf{curl} (\phi_I - \phi)\|_{0,K} + \|\mathbf{curl} \phi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi\|_{0,K} + C \|\mathbf{curl} (\phi - \phi_I)\|_{0,K} \\ &\leq C \|\phi - \phi_I\|_{1,K} + \|\mathbf{curl} \phi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi\|_{0,K} \\ &\leq C \|\phi - \phi_I\|_{1,K} + Ch_K^{\min\{1+\bar{s}, k\}} \|\mathbf{curl} \phi\|_{1+\bar{s},K} \\ &\leq C \|\phi - \phi_I\|_{1,K} + Ch_K^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},K}. \end{aligned}$$

Ahora bien, usando lo anterior, (4.39) y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para  $\mathbb{R}^2$  se sigue que

$$\begin{aligned} F^h(\phi_I) - F(\phi_I) &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{k-2} |\mathbf{f}|_{k-2,K} \left( C \|\phi - \phi_I\|_{1,K} + Ch_K^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},K} \right) \\ &\leq Ch^{k-2} |\mathbf{f}|_{k-2,h} \left( C \|\phi - \phi_I\|_{2,\Omega} + Ch^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \right) \\ &\leq Ch^{k-2} |\mathbf{f}|_{k-2,h} \left( Ch^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} + Ch^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \right) \\ &\leq Ch^{k-2} |\mathbf{f}|_{k-2,h} Ch^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \\ &\leq Ch^{\bar{s}+(k-1)} |\mathbf{f}|_{k-2,h} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \\ &\leq Ch^{\bar{s}+(k-1)} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde hemos usado (4.35). Ahora bien, dado que  $\min\{s, k-1\} \leq k-1$  y  $0 < h \leq C \leq 1$  tenemos que  $h^{k-1} \leq h^{\min\{s, k-1\}}$ , y por tanto  $h^{\bar{s}+(k-1)} \leq h^{\bar{s}+\min\{s, k-1\}}$ . Entonces, de lo anterior y de (4.40) se sigue que

$$\begin{aligned} T_2 &= F^h(\phi_I) - F(\phi_I) \leq Ch^{\bar{s}+(k-1)} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \\ &\leq Ch^{\bar{s}+\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

De la desigualdad (4.41) y de la estimación (4.33) obtenemos

$$T_2 \leq Ch^{\bar{s}+\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) |\psi - \psi_h|_{1,\Omega}. \quad (4.42)$$

Continuamos con el término  $T_3$ . Dados  $\psi \in H^{2+s}(\Omega)$  y  $\phi \in H^{2+\bar{s}}(\Omega)$  las únicas soluciones de los Problemas 3.4.1 y (4.30), respectivamente. Sean  $\psi_\pi, \phi_\pi \in \mathbb{P}_k(K)$  tal que la Proposición 4.1.1 es cierta. Entonces, usando la propiedad (4.25) con  $u_h = \psi_h$ ,  $v_h = \phi_I$  y  $u_\pi = \psi_\pi$ , tenemos

$$\begin{aligned} T_3 &= A^h(\psi_h, \phi_I) - A(\psi_h, \phi_I) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h, \phi_I) - A^K(\psi_h, \phi_I)] \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I) - A^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I)] \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_\pi, \phi_I) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_\pi, \phi_I)]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ahora, usando la propiedad (4.26) en el primer término del lado derecho de la última igualdad de (4.43), con  $u_h = \psi_h - \psi_\pi$ ,  $v_h = \phi_I$  y  $v_\pi = \phi_\pi$ , obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I) - A^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I)] \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi) - A^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi)] \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi)], \end{aligned} \quad (4.44)$$

de (4.43) y (4.44), se sigue que

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi) + A^K(\psi_\pi - \psi_h, \phi_I - \phi_\pi)] \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi)] \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_\pi, \phi_I) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_\pi, \phi_I)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

A continuación estableceremos cotas para el primer término que conforma a  $T_3$ . En efecto, usando el acotamiento de las formas bilineales  $A^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $A^K(\cdot, \cdot)$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi) - A^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi)] \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C \|\psi_h - \psi_\pi\|_{2,K} \|\phi_I - \phi_\pi\|_{2,K}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Usando la desigualdad triangular, para cada  $K \in \mathcal{T}_h$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \|\psi_h - \psi_\pi\|_{2,K} \\ & \leq \|\psi_h - \psi\|_{2,K} + \|\psi - \psi_\pi\|_{2,K} \\ & = \|\psi_h - \psi\|_{2,K} + |\psi - \psi_\pi|_{2,K} + |\psi - \psi_\pi|_{1,K} + \|\psi - \psi_\pi\|_{0,K} \\ & \leq \|\psi - \psi_h\|_{2,K} + Ch_K^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s, K} + Ch_K^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s, K} + Ch_K^{\min\{2+s, k+1\}} \|\psi\|_{2+s, K} \\ & \leq \|\psi - \psi_h\|_{2,K} + Ch^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s, K} + Ch^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s, K} + Ch^{\min\{2+s, k+1\}} \|\psi\|_{2+s, K}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde hemos usado la Proposición 4.1.1. Ahora bien, dado que  $\min\{s, k-1\} \leq \min\{1+s, k\} \leq \min\{2+s, k+1\}$  y dado que  $0 < h \leq C \leq 1$ , entonces

$$h^{\min\{2+s, k+1\}} \leq h^{\min\{1+s, k\}} \leq h^{\min\{s, k-1\}},$$

de lo anterior y de la estimación (4.47) se sigue que

$$\|\psi_h - \psi_\pi\|_{2,K} \leq C \left( \|\psi - \psi_h\|_{2,K} + h^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s, K} \right). \quad (4.48)$$

Procediendo de manera análoga a como se obtuvo la desigualdad (4.48), se tiene que

$$\|\phi_I - \phi_\pi\|_{2,K} \leq C \left( \|\phi_I - \phi\|_{2,K} + Ch_K^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s}, K} \right). \quad (4.49)$$

Así, de las estimaciones (4.46), (4.48) y (4.49) se sigue que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi) - A^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi)] \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C \|\psi_h - \psi_\pi\|_{2,K} \|\phi_I - \phi_\pi\|_{2,K} \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C \left( \|\psi_h - \psi\|_{2,K} + h_K^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s, K} \right) \left( \|\phi_I - \phi\|_{2,K} + Ch_K^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s}, K} \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ahora, usando desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$  en la desigualdad anterior y usando el Teo-

rema 4.1.1 junto con la estimación (4.35) tenemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C(\|\psi_h - \psi\|_{2,K} + h_K^{\min\{s,k-1\}} \|\psi\|_{2+s,K}) (\|\phi_I - \phi\|_{2,K} + Ch_K^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},K}) \\
& \leq C(\|\psi_h - \psi\|_{2,\Omega} + Ch^{\min\{s,k-1\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega}) (Ch^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} + \|\phi_I - \phi\|_{2,\Omega}) \\
& \leq C(\|\psi_h - \psi\|_{2,\Omega} + h^{\min\{s,k-1\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega}) (Ch^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} + Ch^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+s,\Omega}) \\
& \leq C \left( h^{\min\{s,k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) + h^{\min\{s,k-1\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \right) Ch^{\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \\
& \leq Ch^{\bar{s}} \left( h^{\min\{s,k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) \right) \|\phi\|_{2+\bar{s},\Omega} \\
& \leq Ch^{\bar{s}+\min\{s,k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) |\psi - \psi_h|_{1,\Omega},
\end{aligned} \tag{4.51}$$

donde hemos usado (4.33) en la última desigualdad. Por lo tanto, de (4.50) y (4.51) tenemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi) - A^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_I - \phi_\pi)] \\
& \leq Ch^{\bar{s}+\min\{s,k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) |\psi - \psi_h|_{1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Ahora estableceremos cotas para el segundo término del lado derecho de (4.45). En efecto, usando el Lema 3.3.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
& A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi) \\
& \leq \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi) - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi))\|_{0,K} \|\mathbf{curl} \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_\pi\|_{0,K} \\
& \quad + \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \phi_\pi)\|_{0,K} \|\mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi) - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi)\|_{0,K} \\
& \quad + C \|\mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi) - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi)\|_{0,K} \|\mathbf{curl} \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_\pi\|_{0,K} \\
& \quad + s_{\mathbf{curl}}^K((\psi_h - \psi_\pi) - \mathbf{\Pi}_K^k \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi), \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_K^k \mathbf{curl} \phi_\pi),
\end{aligned} \tag{4.53}$$

dado que  $\phi_\pi \in \mathbb{P}_k(K)$  y por tanto  $\mathbf{curl} \phi_\pi = \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_\pi$  y  $\phi_\pi = \mathbf{\Pi}_K^k \mathbf{curl} \phi_\pi$ , entonces

$$\|\mathbf{curl} \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} \phi_\pi\|_{0,K} = s_{\mathbf{curl}}^K((\psi_h - \psi_\pi) - \mathbf{\Pi}_K^k \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi), \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_K^k \mathbf{curl} \phi_\pi) = 0.$$

De lo anterior y de (4.53) se sigue que

$$\begin{aligned}
& A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi) \\
& \leq \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \phi_\pi)\|_{0,K} \|\mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi) - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi)\|_{0,K}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Ahora bien, usando la propiedad de estabilidad del proyector  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi) - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi)\|_{0,K} & \leq \|\mathbf{curl}(\psi_h - \psi_\pi)\|_{0,K} \\
& \leq C|\psi_h - \psi_\pi|_{1,K} \\
& \leq C(|\psi_h - \psi|_{1,K} + |\psi - \psi_\pi|_{1,K}) \\
& \leq C(\|\psi_h - \psi\|_{2,K} + |\psi - \psi_\pi|_{1,K}) \\
& \leq C(\|\psi - \psi_h\|_{2,K} + h_K^{\min\{1+s,k\}} \|\psi\|_{2+s,K}) \\
& \leq C(\|\psi - \psi_h\|_{2,K} + h_K^{\min\{s,k-1\}} \|\psi\|_{2+s,K}),
\end{aligned} \tag{4.55}$$

en la última desigualdad hemos usado la Proposición 4.1.1. Con argumentos similares a los usados para obtener (4.10) y usando nuevamente la Proposición 4.1.1 se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \phi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \phi_\pi)\|_{0,K} &\leq C(|\phi_\pi - \phi|_{1,K} + h_K^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},K}) \\
&\leq C(Ch_K^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},K} + Ch^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},K}) \\
&\leq Ch_K^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s},K}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

De las estimaciones (4.54), (4.55), (4.56), la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$  y el Teorema 4.1.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi) - A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_h - \psi_\pi, \phi_\pi)] \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C(h_K^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s, K} + \|\psi - \psi_h\|_{2, K}) h_K^{1+\bar{s}} \|\phi\|_{2+\bar{s}, K} \\
&\leq Ch^{1+\bar{s}} (h^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s, \Omega} + \|\psi - \psi_h\|_{2, \Omega}) \|\phi\|_{2+\bar{s}, \Omega} \\
&\leq Ch^{1+\bar{s}} \left( h^{\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s, \Omega} + h^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2, h} + \|\psi\|_{2+s, \Omega}) \right) \|\phi\|_{2+\bar{s}, \Omega} \\
&\leq Ch^{1+\bar{s}} \left( h^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2, h} + \|\psi\|_{2+s, \Omega}) \right) \|\phi\|_{2+\bar{s}, \Omega} \\
&\leq Ch^{1+\bar{s}+\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2, h} + \|\psi\|_{2+s, \Omega}) |\psi - \psi_h|_{1, \Omega} \\
&\leq Ch^{\bar{s}+\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2, h} + \|\psi\|_{2+s, \Omega}) |\psi - \psi_h|_{1, \Omega}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

En este paso acotaremos el tercer término del lado derecho de (4.45). En efecto, de manera análoga a como se procedió para obtener (4.54) se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_\pi, \phi_I) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_\pi, \phi_I)] \\
&\leq \|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_\pi)\|_{0,K} \|\mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbf{curl} \phi_I)\|_{0,K}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Usando argumentos similares a los usado en (4.10) se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_\pi - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi_\pi)\|_{0,K} \\
&\leq C|\psi - \psi_\pi|_{1,K} + h_K^{\min\{1+s, k\}} |\psi|_{2+s, K} \\
&\leq Ch_K^{\min\{1+s, k\}} |\psi|_{2+s, K} + h_K^{\min\{1+s, k\}} |\psi|_{2+s, K} \\
&\leq Ch_K^{\min\{1+s, k\}} \|\psi\|_{2+s, K}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

y

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{curl} \phi_I - \mathbf{\Pi}_{k-1}^K(\mathbf{curl} \phi_I)\|_{0,K} \\
&\leq C|\phi - \phi_I|_{1,K} + h_K^{\min\{1+\bar{s}, k\}} |\phi|_{2+\bar{s}, K} \\
&\leq Ch_K^{1+\bar{s}} |\psi|_{2+\bar{s}, K} + h_K^{1+\bar{s}} |\psi|_{2+\bar{s}, K} \\
&\leq Ch_K^{1+\bar{s}} \|\psi\|_{2+\bar{s}, K}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Por lo tanto, de (4.58), (4.59), (4.60) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$  se sigue que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_\pi, \phi_I) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_\pi, \phi_I)] \leq Ch^{1+\tilde{s}+\min\{1+s,k\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega}. \quad (4.61)$$

Ahora bien, dado que  $\min\{s, k-1\} \leq \min\{1+s, k\}$  y dado que  $0 < h \leq C \leq 1$ , entonces  $h^{\min\{1+s,k\}} \leq h^{\min\{s, k-1\}}$  y por lo tanto  $h^{1+\tilde{s}+\min\{1+s,k\}} \leq h^{1+\tilde{s}+\min\{s, k-1\}}$ , entonces de este hecho y de (4.61) se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [A_{\mathbf{curl}}^{h,K}(\psi_\pi, \phi_I) - A_{\mathbf{curl}}^K(\psi_\pi, \phi_I)] &\leq h^{1+\tilde{s}+\min\{s, k-1\}} \|\psi\|_{2+s,\Omega} \|\phi\|_{2+\tilde{s},\Omega} \\ &\leq Ch^{\tilde{s}+\min\{s, k-1\}} (\|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) |\psi - \psi_h|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Usando (4.45), (4.52), (4.57) y (4.62) se concluye que

$$T_3 \leq Ch^{\tilde{s}+\min\{s, k-1\}} (\|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}) |\psi - \psi_h|_{1,\Omega}. \quad (4.63)$$

Finalmente, de (4.37), (4.38), (4.42) y (4.63) tenemos que

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tilde{s}+\min\{s, k-1\}} (\|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}).$$

■

El siguiente teorema establece una estimación del error en norma  $L^2$  para la función de corriente.

**Teorema 4.2.2** *Sea  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  y sean  $\psi$  la única solución del Problema 2.2.2 y  $\psi_h$  la única solución del Problema 3.4.1. Si  $k = 2$ , entonces existen  $s > 1/2$ ,  $\tilde{s} \in (1/2, 1]$  y una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|\psi - \psi_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\tilde{s}+\min\{s,1\}} (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}).$$

*Si  $k \geq 3$  y  $\mathbf{f}|_K \in [H^{k-2}(K)]^2$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ . Entonces, existen  $s > 1/2$ ,  $\gamma \in (1/2, 2]$  y una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|\psi - \psi_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\gamma+\min\{s, k-1\}} (\|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}).$$

**Demostración.** Supongamos que  $k = 2$ , entonces dado que  $(\psi - \psi_h) \in H_0^1(\Omega)$ , por equivalencia de normas y el Teorema 4.2.1 existen  $s > 1/2$  y  $\tilde{s} \in (1/2, 1]$  tales que

$$\|\psi - \psi_h\|_{0,\Omega} \leq C |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{\tilde{s}+\min\{s,1\}} (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}),$$

donde  $C > 0$  es una constante independiente de  $h$ .

Ahora bien, si  $k \geq 3$ , consideramos  $\phi \in H_0^2(\Omega)$  la única solución del siguiente problema: hallar  $\phi$  tal que

$$A(\phi, v) = G(v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \quad (4.64)$$

donde  $A(\cdot, \cdot)$  es la forma bilineal definida en (2.4) y  $G(\cdot)$  es el funcional definido por:

$$G(v) := \int_{\Omega} (\psi - \psi_h)v \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Dado que  $(\psi - \psi_h) \in L^2(\Omega)$ , por resultado de regularidad elíptica (ver Teorema 2.2.2), existe  $\gamma \in (1/2, 2]$  tal que  $\phi \in H^{2+\gamma}(\Omega)$  y

$$\|\phi\|_{2+\gamma, \Omega} \leq C\|\psi - \psi_h\|_{0, \Omega}.$$

Ahora, tomando  $v = \psi - \psi_h \in H_0^2(\Omega)$  como función test en (4.64), obtenemos

$$\|\psi - \psi_h\|_{0, \Omega}^2 = \int_{\Omega} (\psi - \psi_h)(\psi - \psi_h) = A(\psi - \psi_h, \phi), \quad (4.65)$$

en la última igualdad se ha utilizado la definición de la forma bilineal  $A(\cdot, \cdot)$  junto con su simetría.

Sea  $\phi_I \in W_h$  tal que el Lema 4.1.3 se satisface. En particular,

$$\|\phi - \phi_I\|_{2, \Omega} \leq Ch^{\min\{\gamma, k-1\}} \|\phi\|_{2+\gamma, \Omega} \quad \text{y} \quad \|\phi - \phi_I\|_{1, \Omega} \leq Ch^{\min\{1+\gamma, k\}} \|\phi\|_{2+\gamma, \Omega},$$

y dado que  $\gamma \in (1/2, 2]$  y  $k \geq 3$ , entonces

$$\|\phi - \phi_I\|_{2, \Omega} \leq Ch^{\gamma} \|\phi\|_{2+\gamma, \Omega} \quad \text{y} \quad \|\phi - \phi_I\|_{1, \Omega} \leq Ch^{1+\gamma} \|\phi\|_{2+\gamma, \Omega}.$$

Entonces, sumando y restando  $\phi_I$  y usando la definición del problema continuo y discreto (tal como se hizo para obtener (4.36)) se sigue que

$$\begin{aligned} A(\psi - \psi_h, \phi) &= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) + A(\psi - \psi_h, \phi_I) \\ &= A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I) + [F(\phi_I) - F^h(\phi_I)] + [A^h(\psi_h, \phi_I) - A(\psi_h, \phi_I)], \end{aligned} \quad (4.66)$$

entonces (4.65) y (4.66) se obtenemos que

$$\|\psi - \psi_h\|_{0, \Omega}^2 = T_1 + T_2 + T_3,$$

donde

$$T_1 := A(\psi - \psi_h, \phi - \phi_I), \quad T_2 := F(\phi_I) - F^h(\phi_I) \quad \text{y} \quad T_3 := A^h(\psi_h, \phi_I) - A(\psi_h, \phi_I).$$

Siguiendo los mismos pasos de la demostración del Teorema 4.2.1, podemos estimar los términos  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  de tal modo que

$$\|\psi - \psi_h\|_{0, \Omega} \leq Ch^{\gamma + \min\{s, k-1\}} (\|\mathbf{f}\|_{k-2, h} + \|\psi\|_{2+s, \Omega}), \quad k \geq 3.$$

■

### 4.3. Recuperación de la velocidad del fluido

La solución del Problema 2.2.2 entrega la función de corriente de la velocidad, a partir de eso podemos recuperar fácilmente la velocidad  $\mathbf{u}$ : si  $\psi \in H_0^2(\Omega)$  es la solución del Problema 2.2.2, entonces de acuerdo a (2.2) tenemos que

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl} \psi. \quad (4.67)$$

A nivel discreto la estrategia corresponde a calcular la velocidad como un post-proceso de la función de corriente: si  $\psi_h$  es la solución del Problema 3.4.1, entonces la función

$$\mathbf{u}_h := \mathbf{curl} \psi_h \quad (4.68)$$

es una aproximación de la velocidad. La exactitud de dicha aproximación se establece en el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.1** *Sean  $k \geq 2$  y  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  tal que  $\mathbf{f}|_K \in [H^{k-2}(K)]^2$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ . Sea  $\psi$  la única solución del Problema 2.2.2 y  $\psi_h$  la solución del Problema 3.4.1. Entonces existe  $s > 1/2$  y una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}).$$

**Demostración.** Sea  $k \geq 2$ , entonces usando (4.67), (4.68) y el Teorema 4.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} &= \|\mathbf{curl} \psi - \mathbf{curl} \psi_h\|_{1,\Omega} \leq C \|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \\ &\leq Ch^{\min\{s, k-1\}} (|\mathbf{f}|_{k-2,h} + \|\psi\|_{2+s,\Omega}). \end{aligned}$$

■

### 4.4. Recuperación de la presión del fluido

En esta sección presentamos una estrategia para recuperar la presión del fluido. Para  $k = 3$  planteamos un problema de Poisson generalizado con dato proveniente de la función de corriente aproximada. Se plantea un esquema discreto usando elementos virtuales de clase  $C^0$  para aproximar la presión. Considerando una hipótesis adicional sobre las mallas (quasi-uniformidad, tal como veremos más adelante en **A3**), mostramos existencia y unicidad del problema discreto y establecemos una estimación de error para la presión en norma  $H^1$ .

Iniciamos usando la identidad  $-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{curl}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})$  (ver (1.1)) en la ecuación de momento del Problema 2.1.1 para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p \\ &= \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} + \nu (\mathbf{curl}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) - \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})) + \nabla p \\ &= \mathbb{K}^{-1} \mathbf{u} + \nu \mathbf{curl}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) + \nabla p, \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde hemos usado en la última igualdad la incompresibilidad del fluido ( $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$ ). Dado que la función de corriente  $\psi$  se obtiene resolviendo el Problema 2.2.2 y  $\mathbf{u} = \mathbf{curl} \psi$ , entonces de (4.69) obtenemos

$$\nabla p = \mathbf{f} - \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi - \nu \mathbf{curl} (\operatorname{rot} \mathbf{curl} \psi), \quad (4.70)$$

usando la identidad  $\operatorname{rot} (\mathbf{curl} \psi) = -\Delta \psi$  en (4.70) se tiene que

$$\nabla p = \mathbf{f} - \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi + \nu \mathbf{curl} (\Delta \psi). \quad (4.71)$$

Ahora, testeando con  $\nabla q$ , donde  $q \in \tilde{H}^1(\Omega)$  en (4.71) se satisface el siguiente problema variacional:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla q - \int_{\Omega} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi \cdot \nabla q + \nu \int_{\Omega} \mathbf{curl} (\Delta \psi) \cdot \nabla q.$$

Por tanto, la presión  $p$  del fluido puede ser obtenida como la única solución del siguiente problema:

**Problema 4.4.1** Dadas  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  y  $\psi$  la única solución del Problema 2.2.2, hallar  $p \in \tilde{H}^1(\Omega)$  tal que

$$B_{\nabla}(p, q) = G^{\psi}(q) \quad \forall q \in \tilde{H}^1(\Omega),$$

donde  $B : \tilde{H}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , está definida por:

$$B_{\nabla}(p, q) := \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q \quad \forall p, q \in \tilde{H}^1(\Omega) \quad (4.72)$$

y  $G^{\psi} : \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es el funcional definido por:

$$G^{\psi}(q) := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla q - \int_{\Omega} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi \cdot \nabla q + \nu \int_{\Omega} \mathbf{curl} (\Delta \psi) \cdot \nabla q \quad \forall q \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (4.73)$$

Notemos que si  $\psi \in H^3(\Omega)$ , entonces el funcional  $G^{\psi}(\cdot)$  definido en (4.73) es lineal y acotado. Además, la forma bilineal  $B_{\nabla}(\cdot, \cdot)$  es acotada y usando la desigualdad de Poincaré generalizada se sigue que es elíptica, tal como se establece en el siguiente lema:

**Lema 4.4.1** Existe una constante  $\lambda > 0$  tal que

$$B_{\nabla}(q, q) \geq \lambda \|q\|_{1, \Omega}^2 \quad \forall q \in \tilde{H}^1(\Omega).$$

Como consecuencia del resultado anterior y del Lema de Lax-Milgram se tiene el siguiente resultado de existencia y unicidad del Problema 4.4.1:

**Teorema 4.4.1** Sea  $\psi$  la única solución del Problema 2.2.2. Supongamos que  $\psi \in H^3(\Omega)$ , entonces existe una única  $p \in \tilde{H}^1(\Omega)$ , solución del Problema 4.4.1 la cual satisface la siguiente dependencia continua del dato  $\mathbf{f}$ :

$$\|p\|_{1, \Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0, \Omega}.$$

Con el fin de establecer un esquema discreto que permita aproximar la solución del Problema 4.4.1, escribimos la forma bilineal  $B_{\nabla}(\cdot, \cdot)$  definida en (4.72), como sigue:

$$B_{\nabla}(p, q) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} B_{\nabla}^K(p, q) \quad \forall p, q \in \tilde{H}^1(\Omega),$$

donde

$$B_{\nabla}^K(p, q) = \int_K \nabla p \cdot \nabla q \quad \forall p, q \in H^1(K). \quad (4.74)$$

Ahora, con el fin de introducir la discretización, para cada polígono simple  $K \in \mathcal{T}_h$  consideramos el conjunto

$$\mathbb{B}_1(\partial K) := \{q_h \in C^0(\partial K) : q_h|_e \in \mathbb{P}_1(e) \quad \forall e \subset \partial K\}$$

y el espacio finito dimensional dado por:

$$\widehat{H}_h^K := \{q_h \in H^1(K) : q_h|_e \in \mathbb{B}_1(\partial K), \Delta q_h|_K \in \mathbb{P}_0(K)\}.$$

El siguiente conjunto de operadores lineales están bien definidos para todo  $q_h \in \widehat{H}_h^K$ :

- Los valores de  $q_h$  en los  $N_K$  vértices de  $K$ .

Definimos el proyector  $\Pi_K^{\nabla} : \widehat{H}_h^K \rightarrow \mathbb{P}_1(K) \subseteq \widehat{H}_h^K$ , para cada  $q_h \in \widehat{H}_h^K$  como la solución del problema (en cada elemento  $K$ ):

$$\begin{aligned} B_{\nabla}^K(\Pi_K^{\nabla} q_h, v) &= B_{\nabla}^K(q_h, v) \quad \forall v \in \mathbb{P}_1(K), \\ \widehat{\Pi_K^{\nabla} q_h} &= \widehat{q_h}, \end{aligned}$$

donde  $\widehat{q_h}$  es definido en (3.2).

Ahora, introducimos nuestro espacio virtual local:

$$H_h^K := \left\{ q_h \in \widehat{H}_h^K : \int_K q_h = \int_K \Pi_K^{\nabla} q_h \right\}. \quad (4.76)$$

Podemos ahora presentar el espacio virtual global para aproximar la presión del fluido: para cada descomposición  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  de  $\Omega$  en polígonos simples  $K$ , se define

$$H_h := \left\{ q_h \in \tilde{H}^1(\Omega) : q_h|_K \in H_h^K \right\}. \quad (4.77)$$

Los grados de libertad para  $H_h$  (ver [8, 9]) están dados por:

- $\mathbf{P}_1$  : Los valores de  $q_h$  en los vértices de  $\mathcal{T}_h$ .

Ahora continuamos con la construcción de la forma bilineal discreta, para esto, consideremos la proyección  $L^2$  sobre  $[\mathbb{P}_0(K)]^2$ : para cada  $\mathbf{v} \in [L^2(K)]^2$ , la proyección  $\mathbf{\Pi}_0^K : [L^2(K)]^2 \rightarrow [\mathbb{P}_0(K)]^2$  es la única función tal que

$$\int_K \mathbf{q} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_0^K \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in [\mathbb{P}_0(K)]^2. \quad (4.78)$$

**Observación 4.4.1** Para cada  $q_h \in H_h$ , la función  $\mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h$  es calculable usando los grados de libertad  $\mathbf{P}_1$  (ver [8, 9]).

Sea  $s_{\nabla}^K(\cdot, \cdot)$  cualquier forma bilineal simétrica definida positiva que verifique

$$c_4 B_{\nabla}^K(q_h, q_h) \leq s_{\nabla}^K(q_h, q_h) \leq c_5 B_{\nabla}^K(q_h, q_h) \quad \forall q_h \in H_h^K, \text{ con } \mathbf{\Pi}_K^{\nabla} q_h = 0, \quad (4.79)$$

en el Capítulo 5 introduciremos una forma bilineal  $s_{\nabla}^K(\cdot, \cdot)$  satisfaciendo (4.79). Definimos la siguiente forma bilineal discreta

$$B_{\nabla}^h(p_h, q_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} B_{\nabla}^{h,K}(p_h, q_h) \quad \forall p_h, q_h \in H_h, \quad (4.80)$$

donde

$$B_{\nabla}^{h,K}(p_h, q_h) := \int_K \mathbf{\Pi}_0^K \nabla p_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h + s_{\nabla}^K(p_h - \mathbf{\Pi}_K^{\nabla} p_h, q_h - \mathbf{\Pi}_K^{\nabla} q_h) \quad \forall p_h, q_h \in H_h^K. \quad (4.81)$$

El siguiente teorema nos entrega propiedades de las formas bilineales  $B_{\nabla}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $B_{\nabla}^K(\cdot, \cdot)$ .

**Teorema 4.4.2** Las formas bilineales locales  $B_{\nabla}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  y  $B_{\nabla}^K(\cdot, \cdot)$  definidas en (4.81) y (4.74) satisfacen las siguientes propiedades:

- *Consistencia:* para cada  $h > 0$  y para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ , se tiene que

$$B_{\nabla}^{h,K}(q, v_h) = B_{\nabla}^K(q, v_h) \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(K), \quad \forall v_h \in H_h^K. \quad (4.82)$$

- *Estabilidad:* existen constantes positivas  $\alpha_7, \alpha_8$  independientes de  $h_K$  y  $K$  tales que

$$\alpha_7 B_{\nabla}^K(q_h, q_h) \leq B_{\nabla}^{h,K}(q_h, q_h) \leq \alpha_8 B_{\nabla}^K(q_h, q_h) \quad \forall q_h \in H_h^K. \quad (4.83)$$

El siguiente paso consiste en construir una aproximación para el funcional  $G^{\psi}(\cdot)$  definido en (4.73), calculable a partir de los grados de libertad  $\mathbf{P}_1$ . Para esto, dado  $K \in \mathcal{T}_h$ , consideremos la proyección  $L^2$  sobre  $\mathbb{P}_1(K)$ : para cada  $v \in L^2(K)$ , la proyección  $\mathbf{\Pi}_1^K : L^2(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$  es la única función tal que

$$\int_K q(v - \mathbf{\Pi}_1^K v) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(K). \quad (4.84)$$

Para  $k = 3$  y para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ , definimos el siguiente funcional lineal: dado  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  y dada  $\psi_h \in W_h$  la única solución del Problema 3.4.1 consideremos

$$\begin{aligned} G^{\psi_h, K}(q_h) &:= \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h - \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{\Pi}_2^K \mathbf{curl} \psi_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \\ &\quad + \nu \int_K \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \quad \forall q_h \in H_h^K, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{\Pi}_2^K$  es la proyección definida en (3.12) (con  $k = 3$ ) y  $\mathbf{\Pi}_1^K$  la proyección definida en (4.84).

**Observación 4.4.2** Notemos que la función  $\Pi_1^K(\Delta\psi_h) \in \mathbb{P}_1(K)$  es calculable a partir de los grados de libertad  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  y  $\mathbf{D}_4$ . En efecto, sea  $K \in \mathcal{T}_h$  y  $\psi_h \in W_h$ ,  $k = 3$ . Entonces, para todo  $p_1 \in \mathbb{P}_1(K)$  tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_K \Pi_1^K(\Delta\psi_h)p_1 &= \int_K \Delta\psi_h p_1 \\
&= - \int_K \nabla\psi_h \cdot \nabla p_1 + \int_{\partial K} \partial_n \psi_h p_1 \\
&= \int_K \psi_h \Delta p_1 - \int_{\partial K} \partial_n p_1 \psi_h + \int_{\partial K} \partial_n \psi_h p_1 \\
&= - \int_{\partial K} \partial_n p_1 \psi_h + \int_{\partial K} \partial_n \psi_h p_1,
\end{aligned} \tag{4.85}$$

dado que  $\psi_h \in W_h$ , (con  $k = 3$ ), entonces  $\psi_h|_e \in \mathbb{P}_3(e) \quad \forall e \subseteq \partial K$  y  $\partial_n \psi_h|_e \in \mathbb{P}_2(e) \quad \forall e \subseteq \partial K$ . Además, como  $p_1 \in \mathbb{P}_1(K)$  entonces las integrales sobre la frontera del lado derecho de la igualdad (4.85) son calculable usando los grados de libertad  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  y  $\mathbf{D}_4$  y por tanto  $\Pi_1^K(\Delta\psi_h)$  también lo es.

Consideremos el funcional lineal  $G^{\psi_h} : H_h \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$G^{\psi_h}(q_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} G^{\psi_h, K}(q_h) \quad \forall q_h \in H_h. \tag{4.86}$$

Notemos que a partir de las Observaciones 4.4.1 y 4.4.2 se tiene que  $G^{\psi_h}(\cdot)$  es calculable usando los grados de libertad  $\mathbf{P}_1$ .

Ahora se introduce el problema discreto asociado al Problema 4.4.1:

**Problema 4.4.2** Hallar  $p_h \in H_h$  tal que

$$B_{\nabla}^h(p_h, q_h) = G^{\psi_h}(q_h) \quad \forall q_h \in H_h, \tag{4.87}$$

donde  $B_{\nabla}^h(\cdot, \cdot)$  es la forma bilineal definida en (4.80) y  $G^{\psi_h}(\cdot)$  es el funcional definido en (4.86).

Usando las propiedades de estabilidad, acotamiento (ver (4.83)) y Teorema 4.4.1 podemos demostrar que la forma bilineal  $B_{\nabla}^h(\cdot, \cdot)$  es acotada y uniformemente elíptica (tal como se hizo en la demostración del Teorema 3.4.1).

A continuación presentamos un resultado de aproximación en el espacio polinomial (ver [27]).

**Proposición 4.4.1** Si la suposición **A1** se satisface (ver Sección 3.1), entonces existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h_K$ , tal que para cada  $v \in H^2(K)$  existe  $v_\pi \in \mathbb{P}_1(K)$ , tal que

$$\|v - v_\pi\|_{0,K} + h_K |v - v_\pi|_{1,K} \leq Ch_K^2 |v|_{2,K}.$$

Para las proyecciones  $\Pi_0^K$  y  $\Pi_1^K$  definidas en (4.78) y en (4.84), tenemos el siguiente resultado de aproximación (ver [21, 8, 35]):

**Proposición 4.4.2** Consideremos las proyecciones  $\Pi_0^K$  y  $\Pi_1^K$  definidas en (4.78) y en (4.84), respectivamente. Entonces, las siguientes propiedades de aproximación son ciertas: existe una constante  $C > 0$  independiente de  $h_K$  tal que

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_0^K v\|_{0,K} &\leq Ch_K^\delta |v|_{\delta,K} \quad \forall v \in [H^\delta(K)]^2, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \\ \|v - \Pi_1^K v\|_{0,K} &\leq Ch_K^\delta |v|_{\delta,K} \quad \forall v \in H^\delta(K), \quad 0 \leq \delta \leq 2. \end{aligned}$$

Presentamos ahora un resultado de interpolación en el espacio virtual  $H_h$  (ver [27]).

**Proposición 4.4.3** Si las suposiciones **A1** – **A2** se satisfacen (ver Sección 3.1), entonces existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que para cada  $v \in H^2(\Omega)$  existe  $v_I \in H_h$ , tal que

$$\|v - v_I\|_{0,\Omega} + h|v - v_I|_{1,\Omega} \leq Ch^2 |v|_{2,\Omega}.$$

Con el objetivo de establecer existencia y unicidad del Problema 4.4.2 consideraremos una hipótesis adicional sobre las mallas, llamada quasi-uniformidad (ver [19]).

**A3:** Para cada  $h > 0$  y para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ , existe una constante  $\hat{c} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que  $h_K \geq \hat{c}h$ .

El siguiente resultado es conocido como desigualdad inversa en espacios polinomiales sobre polígonos (ver [32, Lema 3.1]).

**Lema 4.4.2** Asumiendo que **A1** – **A3** se satisfacen (ver Sección 3.1), entonces existe  $\tilde{C} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$|q|_{1,K} \leq \tilde{C}h_K^{-1} \|q\|_{0,K} \quad \forall q|_K \in \mathbb{P}_\ell(K), \quad \ell \geq 0. \quad (4.88)$$

El siguiente lema establece el acotamiento de  $G^{\psi_h}(\cdot)$  definido en (4.86) bajo la suposición **A3**.

**Proposición 4.4.4** Sea  $\psi$  la única solución del Problema 2.2.2. Asumiendo que **A1** – **A3** se satisfacen y que  $\psi \in H^3(\Omega)$ , entonces el funcional  $G^{\psi_h} : H_h \rightarrow \mathbb{R}$  definido en (4.86) es un funcional lineal y acotado.

**Demostración.** Para demostrar el acotamiento, consideremos  $q_h \in H_h$ , entonces por la definición

del funcional  $G^{\psi_h}(\cdot)$  (ver (4.86)) tenemos

$$\begin{aligned}
G^{\psi_h}(q_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h - \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{\Pi}_2^K \mathbf{curl} \psi_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \\
&\quad + \nu \int_K \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f}\|_{0,K} \|\mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C \|\mathbf{\Pi}_2^K \mathbf{curl} \psi_h\|_{0,K} \|\mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \int_K \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \\
&\leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|q_h\|_{1,\Omega} + C \|\psi_h\|_{1,\Omega} \|q_h\|_{1,\Omega} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \int_K \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h,
\end{aligned} \tag{4.89}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy- Schwarz y propiedades de estabilidad de los proyectores  $\mathbf{\Pi}_2^K$  y  $\mathbf{\Pi}_0^K$ . Para acotar el último término de (4.89) notemos que a partir de la definición de  $\mathbf{\Pi}_0^K$ , se tiene que

$$\int_K \nabla q_h \cdot \mathbf{p}_0 = \int_K \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \cdot \mathbf{p}_0 \quad \forall \mathbf{p}_0 \in [\mathbb{P}_0(K)]^2.$$

En particular,  $\mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h) \in [\mathbb{P}_0(K)]^2$ , por lo tanto usando lo anterior, sumando y restando el término  $\mathbf{curl}(\Delta \psi) \cdot \nabla q_h$  obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_K \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h = \int_K \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi_h)) \cdot \nabla q_h \\
&= \int_K (\mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h) - \mathbf{curl}(\Delta \psi)) \cdot \nabla q_h + \int_K \mathbf{curl}(\Delta \psi) \cdot \nabla q_h \\
&= \int_K \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h - \Delta \psi) \cdot \nabla q_h + \int_K \mathbf{curl}(\Delta \psi) \cdot \nabla q_h \\
&\leq \|\mathbf{curl}(\Delta \psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h)\|_{0,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} + \|\mathbf{curl}(\Delta \psi)\|_{0,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} \\
&\leq C |\Delta \psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h|_{1,K} \|q_h\|_{1,K} + C \|\psi\|_{3,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} \\
&\leq C \left( |\Delta \psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi|_{1,K} + |\mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h|_{1,K} \right) \|q_h\|_{1,K} + C \|\psi\|_{3,K} \|q_h\|_{1,K} \\
&\leq C \left( C |\Delta \psi|_{1,K} + |\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi - \Delta \psi_h)|_{1,K} \right) \|q_h\|_{1,K} + C \|\psi\|_{3,K} \|q_h\|_{1,K} \\
&\leq C \left( \|\psi\|_{3,K} + |\mathbf{\Pi}_1^K(\Delta \psi - \Delta \psi_h)|_{1,K} \right) \|q_h\|_{1,K} + C \|\psi\|_{3,K} \|q_h\|_{1,K},
\end{aligned} \tag{4.90}$$

donde hemos sumado y restando el término  $\mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi$  en la quinta desigualdad y usado desigualdad de Cauchy-Schwarz junto con propiedades de estabilidad de la proyección  $\mathbf{\Pi}_1^K$  (ver Proposición 4.4.2).

Ahora bien, dado que **A1** – **A3** se satisfacen, podemos usar el Lema 4.4.2, de modo que existe una

constante positiva  $\tilde{C} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\begin{aligned}
|\Pi_1^K(\Delta\psi - \Delta\psi_h)|_{1,K} &\leq \tilde{C}h_K^{-1}\|\Pi_1^K(\Delta\psi - \Delta\psi_h)\|_{0,K} \leq \tilde{C}h_K^{-1}\|(\Delta\psi - \Delta\psi_h)\|_{0,K} \\
&\leq \tilde{C}h_K^{-1}\|\Delta(\psi - \psi_h)\|_{0,\Omega} \leq \tilde{C}h_K^{-1}\|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \\
&\leq \tilde{C}h_K^{-1}h^{\min\{1,2\}}(|\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{3,\Omega}) \\
&\leq C\tilde{C}h_K^{-1}h(|\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{3,\Omega}) \\
&\leq \frac{C\tilde{C}}{\hat{c}}(|\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{3,\Omega}),
\end{aligned} \tag{4.91}$$

donde hemos usado **A3** y el Teorema 4.1.1. De las estimaciones (4.90) y (4.91) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$ , resulta

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \int_K \mathbf{curl}(\Pi_1^K(\Delta\psi_h)) \cdot \Pi_0^K \nabla q_h \leq C(\|\psi\|_{3,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}) \|q_h\|_{1,\Omega}. \tag{4.92}$$

Finalmente, de (4.89) y (4.92) se obtiene

$$\begin{aligned}
|G^{\psi_h}(q_h)| &\leq C(\|\psi_h\|_{1,\Omega} + \|\psi\|_{3,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}) \|q_h\|_{1,\Omega} \\
&\leq C(\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}),
\end{aligned}$$

donde hemos usado la dependencia continua del dato y el Teorema 2.2.2.  $\blacksquare$

El siguiente teorema establece la existencia y unicidad del problema discreto 4.4.2.

**Teorema 4.4.3** *Sea  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  tal que  $\mathbf{f}|_K \in [H^1(K)]^2$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ . Sean  $\psi$  y  $\psi_h$  las únicas soluciones de los Problemas 2.2.2 y 3.4.1, respectivamente. Asumiendo que **A1** – **A3** se satisface y que  $\psi \in H^3(\Omega)$ , entonces existe una única  $p_h \in H_h$  solución del Problema 4.4.2 que satisface la siguiente dependencia continua del dato:*

$$\|p_h\|_{1,\Omega} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}).$$

**Demostración.** Es consecuencia de la elípticidad y acotamiento de la forma bilineal  $B_{\nabla}^h(\cdot, \cdot)$ , el Teorema 4.4.4 y el Lema de Lax-Milgram.  $\blacksquare$

Para establecer la convergencia de este esquema, usamos la consistencia y estabilidad de las formas bilineales  $B_{\nabla}^{h,K}(\cdot, \cdot)$  (ver (4.82) y (4.79) respectivamente) y procedemos como en [5, Teorema 3.1] para obtener la siguiente proposición:

**Proposición 4.4.5** *Sean  $p$  y  $p_h$ , las únicas soluciones de los Problemas 4.4.1 y 4.4.2, respectivamente. Supongamos que **A3** se satisface, entonces existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|p - p_h\|_{1,\Omega} \leq C \left( \|G^\psi - G^{\psi_h}\|_{H'_h} + \|p - p_I\|_{1,\Omega} + |p - p_\pi|_{1,h} \right).$$

para todo  $p_I \in H_h$  y para todo  $p_\pi \in L^2(\Omega)$  tal que  $p_\pi|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$ , donde

$$\|G^\psi - G^{\psi_h}\|_{H'_h} := \sup_{\substack{q_h \in H_h \\ q_h \neq 0}} \frac{|G^\psi(q_h) - G^{\psi_h}(q_h)|}{\|q_h\|_{1,\Omega}}.$$

Ahora acotaremos el término  $\|G^\psi - G^{\psi_h}\|_{H'_h}$  como se muestra en la siguiente proposición:

**Proposición 4.4.6** Sean  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  tal que  $\mathbf{f}|_K \in [H^1(K)]^2$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $\psi$  y  $\psi_h$  las únicas soluciones de los Problemas 2.2.2 y 3.4.1, respectivamente. Sean  $G^\psi(\cdot)$  y  $G^{\psi_h}(\cdot)$  los funcionales definidos en (4.73) y (4.86), respectivamente. Asumiendo que **A1** – **A3** se satisfacen y que  $\psi \in H^4(\Omega)$ , entonces se tiene la siguiente estimación:

$$\|G^\psi - G^{\psi_h}\|_{H'_h} \leq Ch (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}).$$

**Demostración.** Sea  $q_h \in H_h$ , entonces usando la definición de  $G^\psi(\cdot)$  y  $G^{\psi_h}(\cdot)$  junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned} |G^\psi(q_h) - G^{\psi_h}(q_h)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \int_K \mathbf{f} \cdot (\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h) \right| \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi \cdot \nabla q_h - \mathbb{K}^{-1} \mathbf{\Pi}_2^K \mathbf{curl} \psi_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \left| \int_K \mathbf{curl}(\Delta \psi) \cdot \nabla q_h - \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\ &:= T_1 + T_2 + T_3, \end{aligned}$$

donde

$$T_1 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \int_K \mathbf{f} \cdot (\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h) \right|, \quad T_2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi \cdot \nabla q_h - \mathbb{K}^{-1} \mathbf{\Pi}_2^K \mathbf{curl} \psi_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right|$$

y

$$T_3 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu \left| \int_K \mathbf{curl}(\Delta \psi) \cdot \nabla q_h - \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K \Delta \psi_h) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right|.$$

Para el término  $T_1$ , aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la Proposición 4.4.2 y obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_K \mathbf{f} \cdot (\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h) \right| &= \left| \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_0^K \mathbf{f}) \cdot (\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h) \right| \\ &\leq C \|\mathbf{f} - \mathbf{\Pi}_0^K \mathbf{f}\|_{0,K} \|\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} \\ &\leq Ch_K |\mathbf{f}|_{1,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} \\ &= Ch_K |\mathbf{f}|_{1,K} \|q_h\|_{1,K}, \end{aligned}$$

de la definición del término  $T_1$  y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$  se sigue que

$$T_1 \leq Ch |\mathbf{f}|_{1,h} \|q_h\|_{1,\Omega}. \quad (4.93)$$

Para estimar  $T_2$ , sumamos y restamos  $\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h$  y  $\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h$ , aplicamos desigualdad triangular, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y observamos que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_K \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi \cdot \nabla q_h - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{\Pi}_2^K(\mathbf{curl}\psi_h) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \leq \left| \int_K \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi \cdot \nabla q_h - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \quad + \left| \int_K \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{\Pi}_2^K(\mathbf{curl}\psi_h) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \quad + \left| \int_K \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi_h \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \leq \left| \int_K \mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi \cdot (\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h) \right| + \left| \int_K (\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi_h - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{\Pi}_2^K \mathbf{curl}\psi_h) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \quad + \left| \int_K (\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}(\psi - \psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \leq \left| \int_K (\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi - \mathbf{\Pi}_0^K(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi)) \cdot (\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h) \right| + \left| \int_K (\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}(\psi - \psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \quad + \left| \int_K (\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi_h - \mathbb{K}^{-1}\mathbf{\Pi}_2^K(\mathbf{curl}\psi_h)) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
& \leq \|\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi - \mathbf{\Pi}_0^K(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi)\|_{0,K} \|\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} \\
& \quad + \|\mathbb{K}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{curl}(\psi - \psi_h)\|_{0,K} \|\mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} \\
& \quad + \|\mathbb{K}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{curl}\psi_h - \mathbf{\Pi}_2^K(\mathbf{curl}\psi_h)\|_{0,K} \|\mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K},
\end{aligned} \tag{4.94}$$

donde hemos usado la ortogonalidad y estabilidad el proyector  $\mathbf{\Pi}_0^K$ . Ahora, usando propiedades de aproximación de los proyectores  $\mathbf{\Pi}_0^K$  y  $\mathbf{\Pi}_{k-1}^K$  (ver Proposiciones 4.4.2 y 4.1.2) y el Teorema 4.2.1 se obtiene

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi - \mathbf{\Pi}_0^K(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi)\|_{0,K} \|\nabla q_h - \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} \\
& \quad + \|\mathbb{K}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{curl}(\psi - \psi_h)\|_{0,K} \|\mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} \\
& \quad + \|\mathbb{K}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{curl}\psi_h - \mathbf{\Pi}_2^K(\mathbf{curl}\psi_h)\|_{0,K} \|\mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h\|_{0,K} \\
& \leq Ch_K |\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi|_{1,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} + C|\psi - \psi_h|_{1,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} + Ch_K |\mathbf{curl}\psi_h|_{1,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} \\
& \leq Ch_K |\mathbb{K}^{-1}\mathbf{curl}\psi|_{1,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} + C|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \|\nabla q_h\|_{0,K} + Ch_K |\mathbf{curl}\psi_h|_{1,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} \\
& \leq Ch|\psi|_{2,K} \|q_h\|_{1,K} + Ch^3(|\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{4,\Omega}) \|q_h\|_{1,K} + Ch|\psi_h|_{2,K} \|q_h\|_{1,K} \\
& \leq Ch(|\psi|_{2,K} + |\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{4,\Omega}) \|q_h\|_{1,K} + |\psi_h|_{2,K} \|q_h\|_{1,K},
\end{aligned} \tag{4.95}$$

de (4.94) y (4.95), obtenemos que

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \int_K \mathbb{K}^{-1} \mathbf{curl} \psi \cdot \nabla q_h - \mathbb{K}^{-1} \mathbf{\Pi}_2^K (\mathbf{curl} \psi_h) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch (|\psi|_{2,K} + |\psi_h|_{2,K} + |\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{4,\Omega}) \|q_h\|_{1,K}.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Luego, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (4.96) se sigue que

$$T_2 \leq Ch (\|\psi\|_{4,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi_h\|_{2,\Omega}) \|q_h\|_{1,\Omega}. \tag{4.97}$$

Finalmente, para estimar el término  $T_3$  procedemos como en (4.90) y (4.91) notando que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_K \mathbf{curl}(\Delta\psi) \cdot \nabla q_h - \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi_h) \cdot \mathbf{\Pi}_0^K \nabla q_h \right| \\
&= \left| \int_K \mathbf{curl}(\Delta\psi) \cdot \nabla q_h - \mathbf{curl}(\mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi_h) \cdot \nabla q_h \right| \\
&= \left| \int_K \mathbf{curl}(\Delta\psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi_h) \cdot \nabla q_h \right| \\
&\leq \|\mathbf{curl}(\Delta\psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi_h)\|_{0,K} \|\nabla q_h\|_{0,K} \\
&\leq C |\Delta\psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi_h|_{1,K} \|q_h\|_{1,K} \\
&\leq C \left( |\Delta\psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi|_{1,K} + |\mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi - \mathbf{\Pi}_1^K \Delta\psi_h|_{1,K} \right) \|q_h\|_{1,K} \\
&\leq C \left( Ch_K |\Delta\psi|_{2,K} + |\mathbf{\Pi}_1^K (\Delta\psi - \Delta\psi_h)|_{1,K} \right) \|q_h\|_{1,K} \\
&\leq C \left( h_K \|\psi\|_{4,K} + |\mathbf{\Pi}_1^K (\Delta\psi - \Delta\psi_h)|_{1,K} \right) \|q_h\|_{1,K}.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Ahora bien, de forma análoga a como se procedió para obtener (4.91), usando desigualdad inversa sobre polígonos (ver (4.88)), existe una constante positiva  $\tilde{C} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{\Pi}_1^K (\Delta\psi - \Delta\psi_h)|_{1,K} &\leq \tilde{C} h_K^{-1} \|\mathbf{\Pi}_1^K (\Delta\psi - \Delta\psi_h)\|_{0,K} \leq \tilde{C} h_K^{-1} \|(\Delta\psi - \Delta\psi_h)\|_{0,K} \\
&\leq \tilde{C} h_K^{-1} \|\Delta(\psi - \psi_h)\|_{0,\Omega} \leq \tilde{C} h_K^{-1} \|\psi - \psi_h\|_{2,\Omega} \\
&\leq C \tilde{C} h_K^{-1} h^2 (|\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{4,\Omega}) \\
&\leq \frac{C\tilde{C}}{\hat{c}} h (|\mathbf{f}|_{1,h} + \|\psi\|_{4,\Omega}),
\end{aligned} \tag{4.99}$$

donde hemos usado **A3** y el Teorema 4.1.1. Entonces de (4.98), (4.99) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$ , se sigue que

$$T_3 \leq Ch (\|\psi\|_{4,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}) \|q_h\|_{1,\Omega}. \tag{4.100}$$

Por lo tanto, usando las estimaciones (4.93), (4.97) y (4.100) se obtiene

$$\begin{aligned}
|G^\psi(q_h) - G^{\psi_h}(q_h)| &\leq Ch (\|\psi_h\|_{2,\Omega} + \|\psi\|_{4,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}) \|q_h\|_{1,\Omega} \\
&\leq Ch (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}) \|q_h\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

El siguiente teorema establece la convergencia en norma  $H^1$  de este esquema.

**Teorema 4.4.4** *Supongamos que **A1** – **A3** se satisfacen (ver Sección 3.1). Sean  $\psi$ ,  $\psi_h$ ,  $p$  y  $p_h$  las únicas soluciones de los Problemas 2.2.2, 3.4.1, 4.4.1 y 4.4.2, respectivamente. Asumiendo que  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  y  $\mathbf{f}|_K \in [H^1(K)]^2$  para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $\psi \in H^4(\Omega)$  y  $p \in H^2(\Omega)$ , entonces existe  $C > 0$ , independiente de  $h$  tal que*

$$\|p - p_h\|_{1,\Omega} \leq Ch (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}).$$

**Demostración.** El resultado se obtiene usando las Proposiciones 4.4.1 y 4.4.3 junto con el Lema 4.4.5, la Proposición 4.4.6 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, como sigue :

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{1,\Omega} &\leq C \left( \|G^\psi - G^{\psi_h}\|_{H'_h} + \|p - p_I\|_{1,\Omega} + |p - p_\pi|_{1,h} \right) \\ &\leq C (h(\|\psi_h\|_{2,\Omega} + \|\psi\|_{4,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}) + h\|p\|_{2,\Omega} + h\|p\|_{2,\Omega}) \\ &\leq Ch (\|\psi_h\|_{2,\Omega} + \|\psi\|_{4,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h} + \|p\|_{2,\Omega}) \\ &\leq Ch (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{f}|_{1,h}), \end{aligned}$$

donde hemos usado en la última desigualdad la dependencia continua del dato  $\mathbf{f}$ . ■

**Observación 4.4.3** *La condición de integral nula para los elementos del espacio virtual  $H_h$  es impuesta mediante un multiplicador de Lagrange real. Esto significa que (4.87) es reformulado de manera equivalente como sigue: hallar  $(p_h, \xi) \in M_h \times \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned} B_{\nabla}^h(p_h, q_h) + \xi \int_{\Omega} q_h &= G^{\psi_h}(q_h), \quad \forall q_h \in M_h, \\ \rho \int_{\Omega} p_h &= 0, \quad \forall \rho \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.101}$$

con

$$M_h := \{q_h \in H^1(\Omega) : q_h|_K \in H_h^K\},$$

donde  $H_h^K$  es el espacio virtual local definido en (4.76).

Notemos que la restricción  $\int_{\Omega} p_h = 0$ , se satisface automáticamente para los elementos de  $H_h$  (ver (4.77)), sin embargo esta restricción no se satisface en el espacio  $M_h$  que es en donde ahora se busca  $p_h$ , pero se impone de manera débil en la segunda ecuación de (4.101). En otras palabras,  $\xi$  es una incógnita artificial, que actúa como el multiplicador de Lagrange que se ocupa de la condición de integral nula. De antemano se sabe que  $\xi$  es cero. Sin embargo,  $\xi$  se mantiene en (4.101) para mantener la simetría de este sistema equivalente (ver, por ejemplo, [26] para un caso similar con el espacio  $H(\mathbf{div}; \Omega)$ ).

**Observación 4.4.4** *Si consideramos en nuestro esquema como lado derecho al funcional alternativo definido en (3.29), los ordenes de convergencia del método siguen siendo los mismos. En*

efecto, sea  $v_h \in W_h$ , y sea  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$  tal que  $\mathbf{f} \in [H^{k-1}(K)]^2$ , para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ . Entonces, usando la definición y la propiedad de ortogonalidad del proyector  $\Pi_{k-2}^K$  junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\tilde{F}(v_h) - \tilde{F}^h(v_h)| &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{rot} \mathbf{f} v_h - \operatorname{rot} \mathbf{f} \Pi_{k-2}^K v_h \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{rot} \mathbf{f} (v_h - \Pi_{k-2}^K v_h) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\operatorname{rot} \mathbf{f} - \Pi_{k-2}^K(\operatorname{rot} \mathbf{f}))(v_h - \Pi_{k-2}^K v_h) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{rot} \mathbf{f} - \Pi_{k-2}^K(\operatorname{rot} \mathbf{f})\|_{0,K} \|v_h - \Pi_{k-2}^K v_h\|_{0,K} \quad (4.102) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch_K^{k-2} |\operatorname{rot} \mathbf{f}|_{k-2,K} Ch_K \|v_h\|_{1,K} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch_K^{k-1} |\mathbf{f}|_{k-1,K} \|v_h\|_{2,K} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} Ch^{k-1} |\mathbf{f}|_{k-1,h} \|v_h\|_{2,\Omega},
\end{aligned}$$

donde hemos usado desigualdad de Cauchy-Schwarz en  $\mathbb{R}^2$  y propiedades de aproximación del proyector  $\Pi_{k-2}^K$  (ver [8, Lema 5.1]). De (4.102) se sigue que

$$\|\tilde{F} - \tilde{F}^h\|_{W'_h} \leq Ch^{k-1} |\mathbf{f}|_{k-1,h}.$$

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

En este capítulo presentaremos varios ejemplos numéricos que ilustran el buen desempeño del esquema discreto propuesto y corroboran los resultados teóricos presentados en este trabajo para los casos  $k = 2$  y  $k = 3$ . Para esto se ha implementado un código en MATLAB sobre mallas poligonales arbitrarias.

Para completar el esquema de VEM, necesitamos elegir las formas bilineales  $s_{\Delta}^K(\cdot, \cdot)$ ,  $s_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  y  $s_{\nabla}^K(\cdot, \cdot)$ , satisfaciendo (3.16), (3.17) y (4.79), respectivamente. Procediendo como en [3], una elección natural para  $s_{\Delta}^K(\cdot, \cdot)$  y  $s_{\mathbf{curl}}^K(\cdot, \cdot)$  están dadas por:

$$s_{\Delta}^K(u_h, v_h) := \sigma^K \sum_{i=1}^{N^K} [u_h(V_i)v_h(V_i) + h_{V_i}^2 \nabla u_h(V_i) \cdot \nabla v_h(V_i)] \quad \forall u_h, v_h \in W_h^k(K),$$

y

$$s_{\mathbf{curl}}^K(u_h, v_h) := \sigma_{\mathbb{K}}^K \sum_{i=1}^{N^K} [u_h(V_i)v_h(V_i) + h_{V_i}^2 \nabla u_h(V_i) \cdot \nabla v_h(V_i)] \quad \forall u_h, v_h \in W_h^k(K).$$

Mientras que para el esquema de la presión del fluido, una elección para  $s_{\nabla}^K(\cdot, \cdot)$  (ver [5, 43]) está dada por:

$$s_{\nabla}^K(u_h, v_h) := \sum_{i=1}^{N^K} u_h(V_i)v_h(V_i) \quad \forall u_h, v_h \in H_h^K,$$

donde  $V_1, \dots, V_{N^K}$  son vértices de  $K$ ,  $h_{V_i}$  corresponde al diámetro máximo del elemento con  $V_i$  como vértice. Los parámetros  $\sigma^K, \sigma_{\mathbb{K}}^K > 0$  son factores multiplicativos que tienen información de las magnitudes físicas y/o el  $h$ -escalado, por ejemplo, tomamos a  $\sigma^K$  como la traza de la matriz local  $A_{\Delta}^K(\Pi_K^{k,\Delta} u_h, \Pi_K^{k,\Delta} v_h)$ . El parámetro  $\sigma_{\mathbb{K}}^K$  es tomado como la traza de  $(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} u_h, \mathbf{\Pi}_{k-1}^K \mathbf{curl} v_h)_{0,K}$ .

Testeamos el método usando diferentes familias de mallas:

- $\mathcal{T}_h^1$ : Malla triangular;

- $\mathcal{T}_h^2$ : Malla trapezoidal que consiste en particiones del dominio en  $N \times N$  trapecios congruentes, todos similares al trapecio con vértices  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  y  $(0, \frac{1}{3})$ ;
- $\mathcal{T}_h^3$ : Secuencia de TVC (Tesselaciones de Voronoi Centroidales) con  $h = 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$ ;
- $\mathcal{T}_h^4$ : Malla hexagonal.

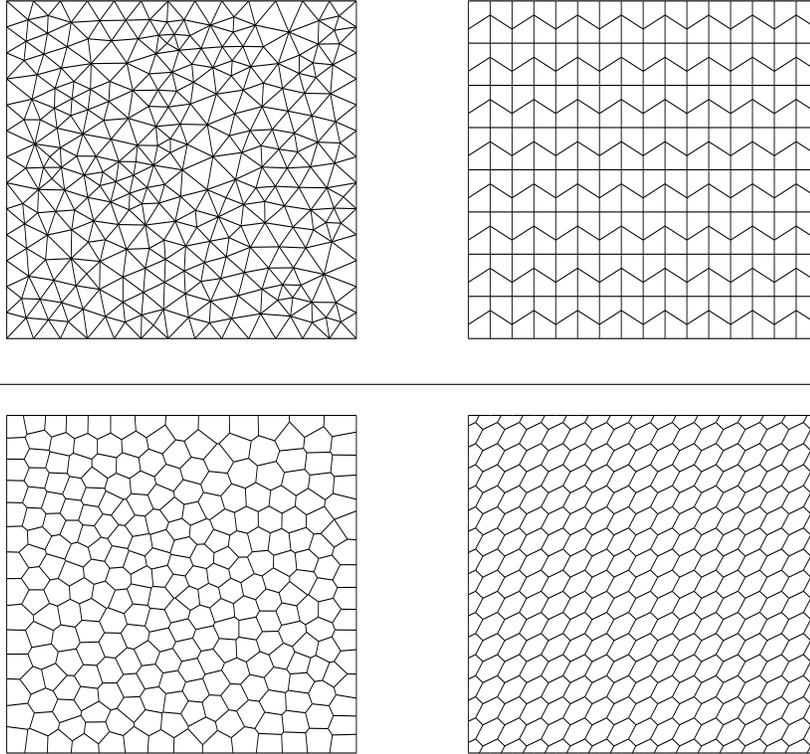


Figura 5.1: Mallas:  $\mathcal{T}_h^1$  (arriba izquierda),  $\mathcal{T}_h^2$  (arriba derecha),  $\mathcal{T}_h^3$  (abajo izquierda),  $\mathcal{T}_h^4$  (abajo derecha).

Para la función de corriente consideremos los siguientes errores calculables en VEM:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0(\psi) &= \mathbf{error}(\psi, L^2) := \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\psi - \Pi_K^{k,\Delta} \psi_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}, \\ \mathbf{e}_1(\psi) &= \mathbf{error}(\psi, H^1) := \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi - \Pi_K^{k,\Delta} \psi_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2}, \\ \mathbf{e}_2(\psi) &= \mathbf{error}(\psi, H^2) := \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi - \Pi_K^{k,\Delta} \psi_h|_{2,K}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mientras que para la presión consideremos

$$\mathbf{e}_1(p) = \mathbf{error}(p, H^1) := \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |p - \Pi_K^\nabla p_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2}.$$

Para mostrar las tasas de convergencia experimentales introducimos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(\psi) &:= \frac{\log(\mathbf{e}_0(\psi)/\mathbf{e}'_0(\psi))}{\log(h/h')}, & \mathbf{r}_1(\psi) &:= \frac{\log(\mathbf{e}_1(\psi)/\mathbf{e}'_1(\psi))}{\log(h/h')}, \\ \mathbf{r}_2(\psi) &:= \frac{\log(\mathbf{e}_2(\psi)/\mathbf{e}'_2(\psi))}{\log(h/h')} & \text{y} & \quad \mathbf{r}_1(p) := \frac{\log(\mathbf{e}_1(p)/\mathbf{e}'_1(p))}{\log(h/h')}. \end{aligned}$$

donde  $h$  y  $h'$  denota dos tamaños de malla consecutivos con sus respectivos errores  $\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{e}'_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

## 5.1. Ejemplo 1: Tensor constante

En este ejemplo, tomamos  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$  y testeamos las ecuaciones del Problema 2.1.1 considerando diferentes valores para la viscosidad del fluido  $\nu$  y fijamos el tensor de permeabilidad  $\mathbb{K}^{-1} = a\mathbb{I}$ , con  $a = 1$  y  $a = 1\mathbf{e}4$ . Elegimos  $\mathbf{f}$  tal que la solución analítica sea:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2(2\pi x) \sin(2\pi y) \cos(2\pi y) \\ -\sin^2(2\pi y) \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) \end{pmatrix}, & p(x, y) &= \pi^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y), \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{8\pi} \sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y). \end{aligned}$$

Este test es considerado en [18].

En la Tabla 5.1 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  del Ejemplo 5.1, con  $k = 2$  y  $a = 1$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$ , a saber,  $1\mathbf{e}0$ ,  $1\mathbf{e}-3$ ,  $1\mathbf{e}-6$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$ .

$\nu$	dof	$h$	$\mathbf{e}_0(\psi)$	$\mathbf{r}_0(\psi)$	$\mathbf{e}_1(\psi)$	$\mathbf{r}_1(\psi)$	$\mathbf{e}_2(\psi)$	$\mathbf{r}_2(\psi)$
$k = 2$								
1e0	147	1/8	3.7643e-3	—	6.7079e-2	—	1.3029e-0	—
	675	1/16	1.0833e-3	1.79	2.3144e-2	1.53	6.9430e-1	0.90
	2883	1/32	2.7676e-4	1.96	6.6124e-3	1.80	3.4661e-1	1.00
	11907	1/64	6.9202e-5	1.99	1.7234e-3	1.93	1.7249e-1	1.00
	48387	1/128	1.7290e-5	2.00	4.3571e-4	1.98	8.6113e-2	1.00
1e-3	147	1/8	9.2259e-3	—	1.1120e-1	—	1.7535e-0	—
	675	1/16	1.5704e-3	2.55	2.5445e-2	2.12	7.9227e-1	1.14
	2883	1/32	1.6103e-4	3.28	4.1832e-3	2.60	3.6190e-1	1.13
	11907	1/64	1.7332e-5	3.21	1.1508e-3	1.92	1.7160e-1	1.07
	48387	1/128	2.2092e-6	2.97	3.8146e-4	1.60	8.5491e-2	1.00
1e-6	147	1/8	9.6207e-3	—	1.1487e-1	—	1.7987e-0	—
	675	1/16	1.5820e-3	2.60	2.5999e-2	2.14	8.5718e-1	1.06
	2883	1/32	1.1760e-4	3.74	4.3087e-3	2.59	4.8066e-1	0.83
	11907	1/64	9.2839e-6	3.66	1.0180e-3	2.08	2.4275e-1	0.99
	48387	1/128	8.6358e-7	3.42	2.3205e-4	2.13	1.1229e-1	1.11

Tabla 5.1: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.1, con  $a = 1$  y  $k = 2$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$  y diferentes valores de  $\nu$ .

Observamos en la Tabla 5.1 que el método converge con los ordenes predichos en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1 y 4.2.2.

En la Figura 5.2 se muestra la función de corriente exacta y aproximada junto con el campo de velocidad del fluido, para el Ejemplo 5.1, obtenidas con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, usando la malla  $\mathcal{T}_h^2$ ,  $h = 1/32$ ,  $\nu = 1$ ,  $a = 1$  y grado polinomial  $k = 2$ .

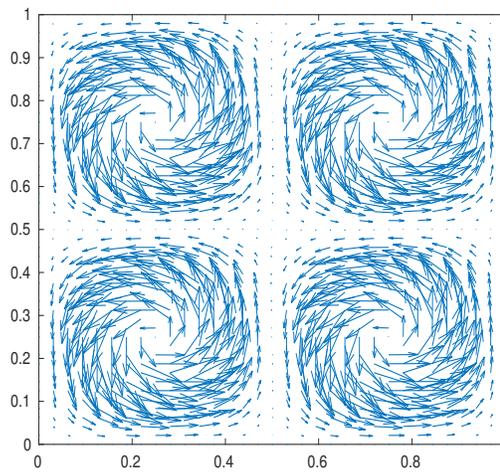
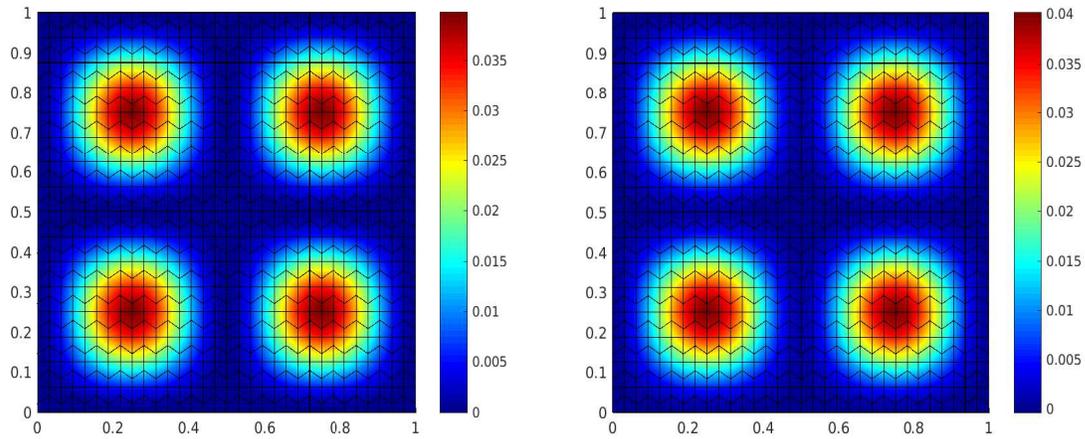


Figura 5.2: Gráficas Ejemplo 5.1: Función de corriente exacta (arriba izquierda), función de corriente aproximada (arriba derecha) y el campo de velocidad (abajo), obtenidos con la malla  $\mathcal{T}_h^2$ ,  $h = 1/32$ . Para  $k = 2$ ,  $\nu = 1$  y  $a = 1$ .

En la Tabla 5.2 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  y la presión  $p$  del fluido, para el Ejemplo 5.1, con  $k = 3$  y  $a = 1$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$ , a saber,  $1e0$ ,  $1e-3$ ,  $1e-6$  y usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$ .

$\nu$	dof	$h$	$e_0(\psi)$	$r_0(\psi)$	$e_1(\psi)$	$r_1(\psi)$	$e_2(\psi)$	$r_2(\psi)$	$e_1(p)$	$r_1(p)$
$k = 3$										
	259	1/8	1.5218e-3	—	2.1761e-2	—	5.4677e-1	—	15.411e-0	—
1e0	1155	1/16	1.2693e-4	3.58	2.3926e-3	3.18	1.5321e-1	1.83	7.7377e-0	0.99
	4867	1/32	8.9964e-6	3.81	2.6381e-4	3.18	3.8244e-2	2.00	3.8565e-0	1.00
	19971	1/64	5.8078e-7	3.95	3.0897e-5	3.09	9.4086e-3	2.00	1.9176e-0	1.00
	80899	1/128	3.6418e-8	3.99	3.7846e-6	3.02	2.3383e-3	2.00	9.5601e-1	1.00
	259	1/8	1.7420e-3	—	2.7338e-2	—	6.8020e-1	—	15.215e-0	—
1e-3	1155	1/16	6.8790e-5	4.66	2.6168e-3	3.38	1.8276e-1	1.89	7.6418e-0	0.99
	4867	1/32	3.3284e-6	4.36	2.6658e-4	3.29	3.9974e-2	2.19	3.8205e-0	1.00
	19971	1/64	1.7665e-7	4.23	3.0076e-5	3.14	9.3948e-3	2.08	1.9095e-0	1.00
	80899	1/128	1.0561e-8	4.06	3.7308e-6	3.01	2.3295e-3	2.01	9.5455e-1	1.00
	259	1/8	1.6112e-3	—	2.6619e-2	—	7.8905e-1	—	15.216e-0	—
1e-6	1155	1/16	6.2102e-5	4.69	3.2881e-3	3.01	2.7010e-1	1.54	7.6419e-0	0.99
	4867	1/32	3.6601e-6	4.08	3.7932e-4	3.11	6.4857e-2	2.05	3.8205e-0	1.00
	19971	1/64	2.3146e-7	4.00	4.1631e-5	3.18	1.3135e-2	2.30	1.9095e-0	1.00
	80899	1/128	1.4356e-8	4.01	4.7452e-6	3.13	2.6929e-3	2.28	9.5455e-1	1.00

Tabla 5.2: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.1, con  $a = 1$  y  $k = 3$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.2 observamos que el método converge con los ordenes predichos en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2 y 4.4.4.

En la Tabla 5.3 reportamos los errores y tasas de convergencia para para la función de corriente  $\psi$ , para el Ejemplo 5.1, con  $k = 2$ ,  $a = 1e4$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$ , a saber,  $1e0$ ,  $1e-3$ ,  $1e-6$  y usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$ .

$\nu$	dof	$h$	$\mathbf{e}_0(\psi)$	$\mathbf{r}_0(\psi)$	$\mathbf{e}_1(\psi)$	$\mathbf{r}_1(\psi)$	$\mathbf{e}_2(\psi)$	$\mathbf{r}_2(\psi)$
$k = 2$								
1e0	147	1/8	9.2375e-3	—	1.0983e-1	—	1.7428e-0	—
	675	1/16	1.5288e-3	2.59	2.4448e-2	2.16	8.0877e-1	1.10
	2883	1/32	1.1554e-4	3.72	3.3530e-3	2.86	4.1312e-1	0.96
	11907	1/64	9.2949e-6	3.63	6.3138e-4	2.40	1.8511e-1	1.14
	48387	1/128	9.6833e-7	3.26	1.7582e-4	1.84	8.6959e-2	1.09
1e-3	147	1/8	9.2793e-3	—	1.1018e-1	—	1.7469e-0	—
	675	1/16	1.5265e-3	2.60	2.4517e-2	2.16	8.1591e-1	1.09
	2883	1/32	1.0761e-4	3.82	3.6583e-3	2.74	4.5253e-1	0.85
	11907	1/64	7.4796e-6	3.84	8.4434e-4	2.11	2.2749e-1	0.99
	48387	1/128	5.6598e-7	3.72	1.8720e-4	2.17	1.0465e-1	1.12
1e-6	147	1/8	9.2794e-3	—	1.1028e-1	—	1.7469e-0	—
	675	1/16	1.5266e-3	2.60	2.4517e-2	2.16	8.1592e-1	1.09
	2883	1/32	1.0761e-4	3.82	3.6589e-3	2.74	4.5259e-1	0.85
	11907	1/64	7.4799e-6	3.84	8.4551e-4	2.11	2.2277e-1	0.99
	48387	1/128	5.6693e-7	3.72	1.8799e-4	2.16	1.0493e-1	1.08

Tabla 5.3: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.1, con  $a = 1\mathbf{e}4$  y  $k = 2$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.3 se observa que el método converge con los ordenes predichos en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1 y 4.2.2.

En la Tabla 5.4 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  y la presión  $p$  del fluido para el Ejemplo 5.1, con  $k = 3$ ,  $a = 1\mathbf{e}4$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$ , a saber,  $1\mathbf{e}0$ ,  $1\mathbf{e}-3$ ,  $1\mathbf{e}-6$  y usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$ .

$\nu$	dof	$h$	$e_0(\psi)$	$r_0(\psi)$	$e_1(\psi)$	$r_1(\psi)$	$e_2(\psi)$	$r_2(\psi)$	$e_1(p)$	$r_1(p)$
$k = 3$										
	259	1/8	2.6008e-4	—	9.2734e-3	—	4.5423e-1	—	17.191e-0	—
1e0	1155	1/16	2.2336e-5	3.54	1.4776e-3	2.64	1.3951e-1	1.70	7.8195e-0	1.13
	4867	1/32	1.7913e-6	3.64	2.0684e-4	2.83	3.5794e-2	1.96	3.8644e-0	1.01
	19971	1/64	1.2828e-7	3.80	2.8098e-5	2.89	9.1105e-3	1.98	1.9182e-0	1.01
	80899	1/128	8.5502e-9	4.01	3.6797e-6	3.13	2.3144e-3	2.28	9.5604e-1	1.00
	259	1/8	2.1179e-4	—	8.8551e-3	—	4.5111e-1	—	16.707e-0	—
1e-3	1155	1/16	1.5312e-5	3.78	1.2922e-3	2.77	1.3289e-1	1.76	7.6747e-0	1.12
	4867	1/32	1.1940e-6	3.68	1.7795e-4	2.86	3.4694e-2	1.93	3.8209e-0	1.00
	19971	1/64	8.2478e-8	3.89	2.1680e-5	3.03	8.3298e-3	2.05	1.9095e-0	1.00
	80899	1/128	5.4361e-9	3.92	2.6272e-6	3.04	2.0138e-3	2.04	9.5455e-1	1.00
	259	1/8	2.1174e-4	—	8.8557e-3	—	4.5115e-1	—	16.708e-0	—
1e-6	1155	1/16	1.5302e-5	3.79	1.2935e-3	2.77	1.3330e-1	1.76	7.6749e-0	1.12
	4867	1/32	1.1973e-6	3.68	1.8162e-4	2.83	3.5170e-2	1.91	3.8210e-0	1.00
	19971	1/64	8.7569e-8	3.80	2.8115e-5	2.70	9.6750e-3	1.86	1.9095e-0	1.00
	80899	1/128	6.4996e-9	3.75	4.9640e-6	2.50	3.0267e-3	1.67	9.5455e-1	1.00

Tabla 5.4: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.1, con  $a = 1e4$  y  $k = 3$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^2$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.4 observamos que el método converge con los ordenes predichos en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2 y 4.4.4.

En la Figura 5.3 se muestran la función de corriente exacta y aproximada, la presión exacta y aproximada junto con el campo de velocidad, para el Ejemplo 5.1, obtenidas con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, usando la malla  $\mathcal{T}_h^2$ ,  $h = 1/32$ ,  $\nu = 1e-6$ ,  $a = 1e4$  y grado polinomial  $k = 3$ .

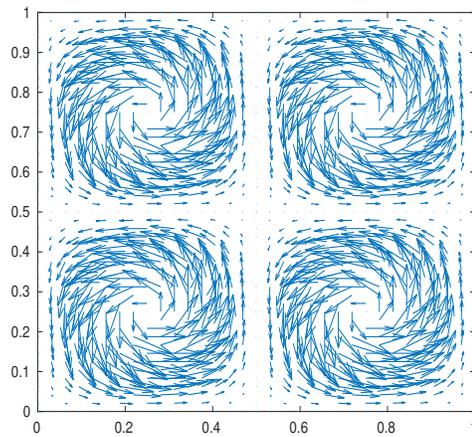
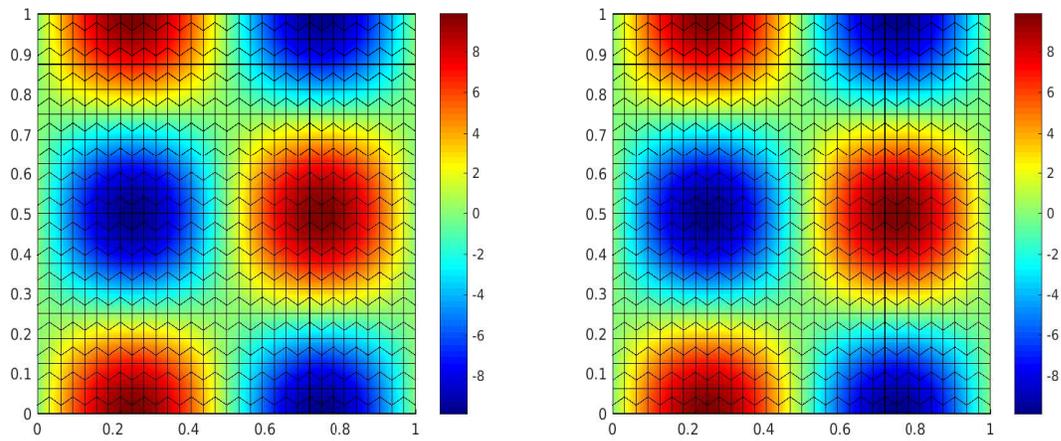
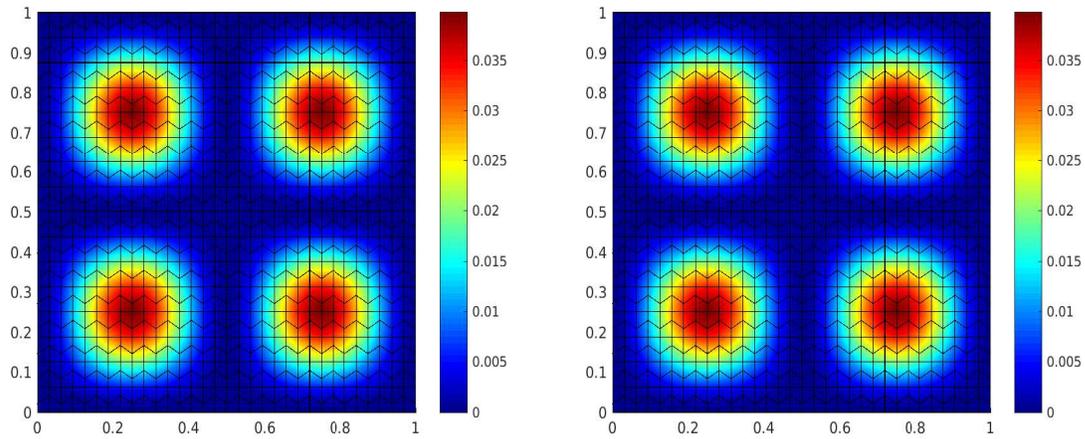


Figura 5.3: Gráficas Ejemplo 5.1: Función de corriente exacta (arriba izquierda), función de corriente aproximada (arriba derecha), presión exacta (medio izquierda), presión aproximada (medio derecha) y campo de velocidad (abajo). Obtenido con la malla  $\mathcal{T}_h^2$ ,  $h = 1/32$ . Para  $k = 3$ ,  $\nu = 1e - 6$  y  $a = 1e4$ .

## 5.2. Ejemplo 2: Tensor variable

Un ejemplo similar al que consideraremos a continuación se presenta en [39, 50]. Consideremos  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$  y testeamos las ecuaciones del Problema 2.1.1 considerando diferentes valores para la viscosidad del fluido  $\nu > 0$ , fijando el tensor de permeabilidad

$$\mathbb{K}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi x) + 1.1 & 10^{-6} \\ 10^{-6} & \sin(2\pi y) + 1.1 \end{pmatrix}.$$

Elegimos  $\mathbf{f}$  tal que la solución analítica sea

$$\mathbf{u}(x, y) = 200 \begin{pmatrix} x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y) \\ -x(1-x)(1-2x)y^2(1-y)^2 \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = x^3y^3 - \frac{1}{16},$$

$$\psi(x, y) = 100x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2.$$

En la Tabla 5.5 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$ , para el Ejemplo 5.2, con  $a = 1$  y grado polinomial  $k = 2$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$ , a saber,  $1\mathbf{e}0$ ,  $1\mathbf{e}-3$ ,  $1\mathbf{e}-6$  y usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^1$ .

$\nu$	dof	$h$	$\mathbf{e}_0(\psi)$	$\mathbf{r}_0(\psi)$	$\mathbf{e}_1(\psi)$	$\mathbf{r}_1(\psi)$	$\mathbf{e}_2(\psi)$	$\mathbf{r}_2(\psi)$
$k = 2$								
$1\mathbf{e}0$	156	1/8	5.8270e-3	—	6.8396e-2	—	1.4810e-0	—
	717	1/16	1.3577e-3	2.10	1.7187e-2	1.99	7.4629e-1	0.98
	3075	1/32	3.3027e-4	2.03	4.3066e-3	1.99	3.8153e-1	0.96
	12567	1/64	7.2984e-5	2.17	1.0155e-3	2.08	1.8521e-1	1.04
	50445	1/128	1.9721e-5	1.89	2.5987e-4	1.97	9.3480e-2	0.99
$1\mathbf{e}-3$	156	1/8	5.4990e-3	—	4.8501e-2	—	1.6789e-0	—
	717	1/16	8.1440e-4	2.75	1.1619e-2	2.06	8.0460e-1	1.06
	3075	1/32	1.0058e-4	3.01	2.8763e-3	2.01	3.9023e-1	1.04
	12567	1/64	1.3511e-5	2.89	7.3912e-4	1.96	1.8590e-1	1.06
	50445	1/128	3.0628e-6	2.14	1.9391e-4	1.93	9.3559e-2	0.99
$1\mathbf{e}-6$	156	1/8	5.2123e-3	—	4.9998e-2	—	1.7965e-0	—
	717	1/16	7.5145e-4	2.79	1.2263e-2	2.02	8.9518e-1	1.00
	3075	1/32	7.1514e-5	3.39	2.6389e-3	2.21	4.5514e-1	0.97
	12567	1/64	7.1873e-6	3.31	5.7059e-4	2.10	2.1804e-1	1.06
	50445	1/128	1.0034e-6	2.84	1.4271e-4	1.99	1.0976e-1	0.99

Tabla 5.5: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.2, con  $k = 2$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^1$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.5 observamos que el método converge con los ordenes predichos en el análisis hecho en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2.

En la Tabla 5.6 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  y para la presión  $p$  del fluido, para el Ejemplo 5.2, con  $a = 1$  y grado polinomial  $k = 3$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$ , a saber,  $1e0$ ,  $1e-3$ ,  $1e-6$  y usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^4$ .

$\nu$	dof	$h$	$e_0(\psi)$	$r_0(\psi)$	$e_1(\psi)$	$r_1(\psi)$	$e_2(\psi)$	$r_2(\psi)$	$e_1(p)$	$r_1(p)$
$k = 3$										
1e0	592	1/8	5.9202e-4	—	5.6400e-3	—	2.4624e-1	—	1.5823e-0	—
	2336	1/16	4.2842e-5	3.78	7.0210e-4	3.00	6.7019e-2	1.87	6.0008e-1	1.39
	9280	1/32	2.8204e-6	3.92	8.7271e-5	3.00	1.7463e-2	1.96	1.9556e-1	1.61
	36992	1/64	1.7738e-7	3.99	1.0937e-5	2.99	4.4619e-3	1.96	6.2018e-2	1.65
1e-3	592	1/8	1.2381e-3	—	1.1130e-2	—	2.9159e-1	—	1.2471e-1	—
	2336	1/16	5.2619e-5	4.55	8.3839e-4	3.73	6.9374e-2	2.07	6.7003e-2	0.89
	9280	1/32	2.0085e-6	4.71	8.8674e-5	3.24	1.7531e-2	1.98	3.4758e-2	0.94
	36992	1/64	7.7894e-8	4.68	1.0931e-5	3.01	4.4616e-3	1.97	1.7706e-2	0.97
1e-6	592	1/8	1.3601e-3	—	1.2549e-2	—	3.0966e-1	—	1.2469e-1	0.89
	2336	1/16	6.7498e-5	4.37	1.0842e-3	3.31	7.4691e-2	2.01	6.6998e-2	0.94
	9280	1/32	3.2600e-6	4.41	1.0915e-4	3.07	1.8438e-2	2.00	3.4757e-2	1.07
	36992	1/64	1.4181e-7	4.52	1.2126e-5	3.17	4.5779e-3	2.00	1.7706e-2	0.97

Tabla 5.6: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.2, con  $k = 3$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^4$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.6 se observa que el método converge con los ordenes predichos en el análisis hecho en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2 y 4.4.4.

En la Figura 5.4 se muestran la función de corriente exacta y aproximada, la presión exacta y aproximada junto con el campo de velocidad, para el Ejemplo 5.2, obtenidas con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, usando la malla  $\mathcal{T}_h^4$ ,  $h = 1/32$ ,  $\nu = 1e-6$  y grado polinomial  $k = 3$ .

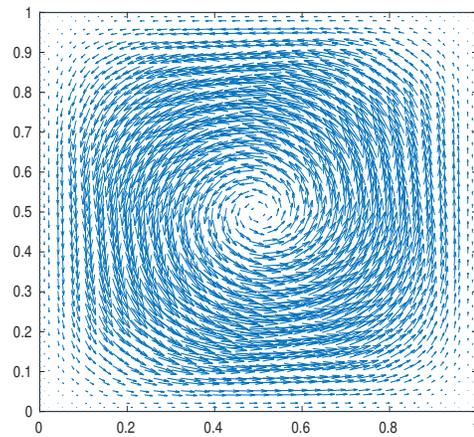
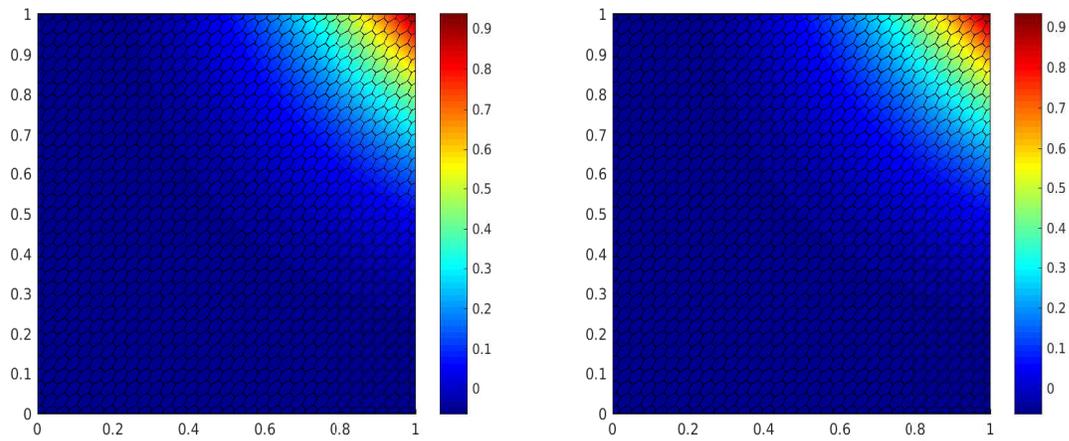
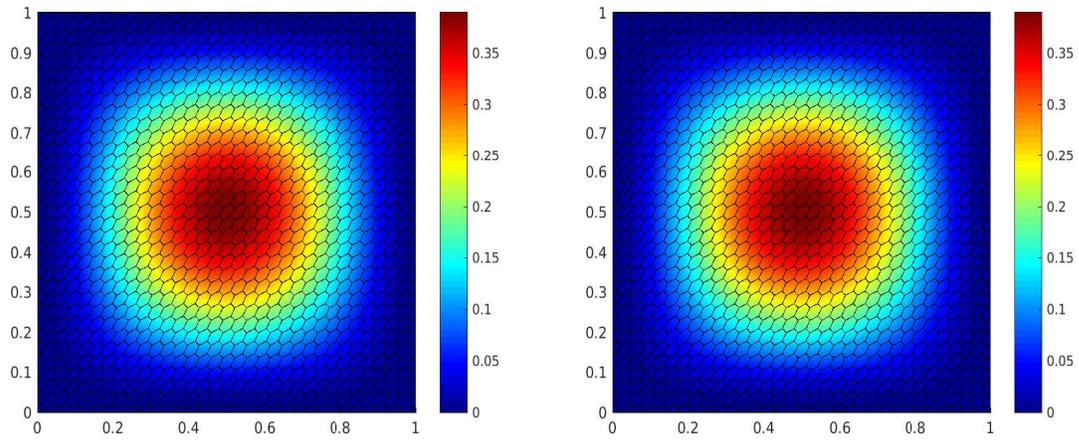


Figura 5.4: Gráficas Ejemplo 5.2: Función de corriente exacta (arriba izquierda), función de corriente aproximada (arriba derecha), presión exacta (medio izquierda), presión aproximada (medio derecha) y campo de velocidad (abajo). Obtenido con la malla  $\mathcal{T}_h^4$ ,  $h = 1/32$ . Para  $k = 3$  y  $\nu = 1e - 6$ .

### 5.3. Ejemplo 3: Solución dependiendo de $\nu$

En el siguiente ejemplo se estudia la convergencia del método con una solución dependiente de la viscosidad del fluido  $\nu$ , este ejemplo es tomado de [40]. Consideramos  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  y testeamos las ecuaciones del Problema 2.1.1 con varios valores para la viscosidad  $\nu \in (0, 1]$ , fijamos el tensor de permeabilidad  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$ . Elegimos a  $\mathbf{f}$  y las condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas de tal manera que la solución analítica sea;

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -xe^{-xy/\sqrt{\nu}} \\ ye^{-xy/\sqrt{\nu}} \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = \sqrt{\nu}e^{-x/\sqrt{\nu}} - \nu \left(1 - e^{-1/\sqrt{\nu}}\right),$$

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu}e^{-xy/\sqrt{\nu}}.$$

En la Tabla 5.7 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  del Ejemplo 5.3, con grado polinomial  $k = 2$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$  y usamos la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^1$  para comparar con los resultados de [40] (ver Sección 6).

$\nu$	dof	$h$	$\mathbf{e}_0(\psi)$	$\mathbf{r}_0(\psi)$	$\mathbf{e}_1(\psi)$	$\mathbf{r}_1(\psi)$	$\mathbf{e}_2(\psi)$	$\mathbf{r}_2(\psi)$
$k = 2$								
1e0	156	1/8	5.0133e-5	—	1.4125e-3	—	6.1541e-2	—
	717	1/16	1.4792e-5	1.76	3.8971e-4	1.85	3.2082e-2	0.93
	3075	1/32	3.7387e-6	1.98	9.3154e-5	2.06	1.5524e-2	1.04
	12567	1/64	9.9167e-7	1.91	2.2640e-5	2.04	7.7714e-3	1.00
	50445	1/128	2.5430e-7	1.96	5.7257e-6	1.98	3.8876e-3	0.99
2e-4	156	1/8	1.2934e-4	—	4.3789e-3	—	1.5849e-1	—
	717	1/16	2.8528e-5	2.18	1.2452e-3	1.81	8.5793e-2	0.88
	3075	1/32	5.3691e-6	2.40	2.9922e-5	2.05	4.1108e-2	1.06
	12567	1/64	1.1880e-6	2.17	7.0443e-5	2.08	2.0446e-2	1.00
	50445	1/128	2.9771e-7	1.99	1.7466e-5	2.01	1.0283e-2	0.99
2e-8	156	1/8	1.2656e-3	—	2.3827e-2	—	7.3821e-1	—
	717	1/16	2.6813e-4	2.23	7.7681e-3	1.61	4.3354e-1	0.76
	3075	1/32	4.8257e-5	2.47	2.0575e-3	1.91	2.1225e-1	1.03
	12567	1/64	8.0820e-6	2.57	4.9503e-4	2.05	1.0680e-1	0.99
	50445	1/128	2.0347e-6	1.98	1.2153e-4	2.02	5.2874e-2	1.01
2e-12	156	1/8	5.9604e-3	—	8.7424e-2	—	3.1005e-0	—
	717	1/16	1.8960e-3	1.65	4.2336e-2	1.04	2.5188e-0	0.29
	3075	1/32	4.4959e-4	2.07	1.5235e-2	1.47	1.5740e-0	0.67
	12567	1/64	6.6087e-5	2.76	4.0390e-3	1.91	0.8293e-0	0.92
	50445	1/128	1.2450e-5	2.04	1.0863e-3	1.89	4.2368e-1	0.96
2e-14	156	1/8	8.3152e-3	—	1.1557e-1	—	4.8636e-0	—
	717	1/16	3.2429e-3	1.35	6.8149e-2	0.76	4.5466e-0	0.09
	3075	1/32	9.8809e-4	1.71	3.1772e-2	1.10	3.5697e-0	0.34
	12567	1/64	1.8767e-4	2.39	1.0279e-2	1.62	2.2216e-0	0.68
	50445	1/128	3.6144e-5	2.37	3.0739e-3	1.74	1.2106e-0	0.87

Tabla 5.7: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.3, con  $k = 2$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^1$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.7 observamos que el método converge con los ordenes predichos en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1 y 4.2.2 para los primeros valores de  $\nu$ . Sin embargo, a medida que  $\nu$  tiende a cero, se observa pérdida de convergencia en las normas  $H^1$  y  $H^2$ , esto se debe a que dichas estimaciones error dependen de potencias negativas de  $\nu$  (ver [40, Sección 6]).

En la Figura 5.5 se muestran la función de corriente exacta y aproximada junto con el campo de velocidad, para el Ejemplo 5.3, obtenidas con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, usando la malla  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $h = 1/64$ ,  $\nu = 2e - 8$  y grado polinomial  $k = 2$ .

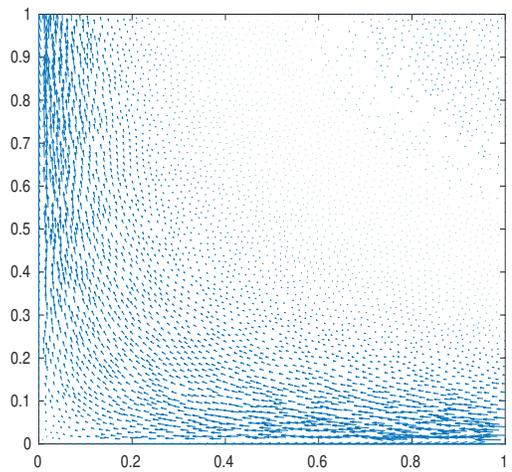
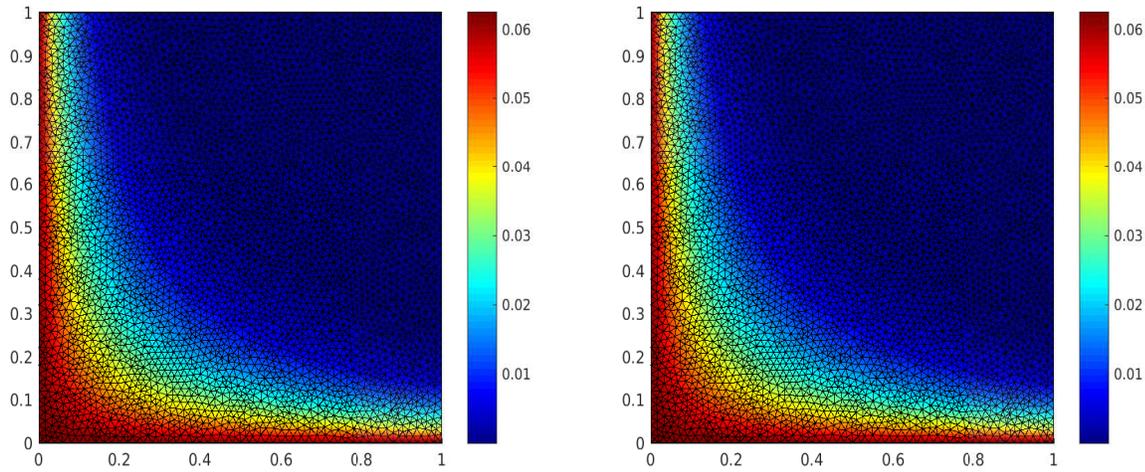


Figura 5.5: Gráficas Ejemplo 5.3: Función de corriente exacta (arriba izquierda), función de corriente aproximada (arriba derecha), campo de velocidad (abajo). Obtenido con malla la  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $h = 1/64$ . Para  $k = 2$ ,  $\nu = 2e - 8$ .

En la Tabla 5.8 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  y la presión  $p$  del fluido, para el Ejemplo 5.3, con  $k = 3$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. La tabla contiene los errores y tasas de convergencia para distintos valores de  $\nu$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^1$ .

$\nu$	dof	$h$	$e_0(\psi)$	$r_0(\psi)$	$e_1(\psi)$	$r_1(\psi)$	$e_2(\psi)$	$r_2(\psi)$	$e_1(p)$	$r_1(p)$
$k = 3$										
	337	1/8	2.8029e-4	—	7.1461e-3	—	3.6592e-1	—	1.319e+1	—
1e0	1483	1/16	2.66735e-5	3.39	1.1280e-3	2.66	9.8258e-2	1.89	3.4065e-0	1.95
	6247	1/32	1.1848e-6	4.49	1.2224e-4	3.20	2.0914e-2	2.23	9.6757e-1	1.81
	25331	1/64	5.7690e-8	4.36	1.3786e-5	3.14	4.5905e-3	2.18	3.8555e-1	1.32
	337	1/8	2.6674e-5	—	5.0579e-4	—	2.0472e-2	—	5.2708e-2	—
2e-4	1483	1/16	2.0115e-6	3.72	7.3093e-5	2.79	5.5582e-3	1.88	2.5928e-2	1.02
	6247	1/32	1.3605e-7	3.88	8.8796e-6	3.04	1.3217e-3	2.07	1.3141e-2	0.98
	25331	1/64	5.9674e-9	4.51	1.0078e-6	3.13	3.1392e-4	2.07	6.3251e-3	1.05
	337	1/8	4.0280e-4	—	7.9954e-3	—	3.2693e-1	—	8.5204e-2	—
2e-8	1483	1/16	2.5084e-5	4.00	9.4792e-4	3.07	7.9988e-2	2.03	4.8583e-2	0.81
	6247	1/32	2.1659e-6	3.53	1.3805e-4	2.77	2.1213e-2	1.91	2.6704e-2	0.86
	25331	1/64	9.8234e-8	4.46	1.5017e-5	3.20	4.7641e-3	2.15	1.2495e-2	1.09
	337	1/8	2.1209e-3	—	4.8793e-2	—	2.4098e-0	—	7.6529e-2	—
2e-12	1483	1/16	3.9343e-4	2.43	1.3628e-2	1.82	1.2411e-0	0.95	6.2576e-2	0.29
	6247	1/32	5.1396e-5	2.93	3.0092e-3	2.17	5.0774e-1	1.28	4.5453e-2	0.46
	25331	1/64	3.2830e-6	3.96	3.6621e-4	3.03	1.3095e-3	1.95	2.4533e-2	0.88
	147	1/8	3.3621e-3	—	7.3363e-2	—	4.2319e-0	—	5.8813e-2	—
2e-14	1483	1/16	9.0808e-4	1.88	3.0235e-2	1.27	3.0775e-0	0.45	5.3434e-2	0.13
	6247	1/32	1.6988e-4	2.41	9.7121e-3	1.63	1.7778e-0	0.79	4.5781e-1	0.22
	25331	1/64	1.6955e-4	3.32	1.6847e-3	2.52	6.3071e-1	1.49	3.0661e-2	0.57

Tabla 5.8: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.3, con  $k = 3$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^1$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.8 se observa que el método converge con los ordenes predichos en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2 y 4.4.4 para valores de  $\nu$  cercanos a 1. Sin embargo, a medida que  $\nu$  tiende a cero, se observa una pérdida de convergencia en las normas estimadas, esto se debe a que dichas estimaciones error dependen de potencias negativas de  $\nu$  (ver [40, Sección. 6]).

En la Tabla 5.9 reportamos los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  del Ejemplo 5.3, con  $k = 2$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. Dicha tabla contiene los errores y tasas de convergencia para distintos valores de  $\nu$ , usando ahora la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$ .

$\nu$	dof	$h$	$e_0(\psi)$	$r_0(\psi)$	$e_1(\psi)$	$r_1(\psi)$	$e_2(\psi)$	$r_2(\psi)$
$k = 2$								
1e0	294	1/8	1.4733e-4	—	2.4139e-3	—	6.8664e-2	—
	1362	1/16	3.2049e-5	2.20	7.0454e-4	1.77	3.4628e-2	0.98
	5778	1/32	5.8678e-6	2.44	1.9392e-4	1.86	1.7282e-2	1.00
	23868	1/64	7.5631e-7	2.95	5.1898e-5	1.90	8.7584e-3	0.99
	96855	1/128	1.3319e-7	2.50	1.3194e-5	1.97	4.3671e-3	1.00
2e-4	294	1/8	3.1289e-4	—	5.5733e-3	—	1.7690e-2	—
	1362	1/16	1.0570e-4	1.56	1.9967e-3	1.48	9.1863e-2	0.94
	5778	1/32	2.3571e-5	2.16	6.6588e-4	1.58	4.7183e-2	0.96
	23868	1/64	3.7483e-6	2.65	1.8425e-4	1.85	2.4126e-2	0.96
	96855	1/128	8.3831e-7	2.16	4.6844e-5	1.97	1.1912e-2	1.01
2e-8	294	1/8	1.4365e-3	—	2.4122e-3	—	8.0012e-1	—
	1362	1/16	2.8901e-4	2.32	7.2818e-3	1.72	4.5604e-1	0.81
	5778	1/32	3.3532e-5	3.10	2.6175e-3	1.47	2.4887e-1	0.87
	23868	1/64	1.7225e-5	0.96	9.0086e-4	1.53	1.2816e-1	0.95
	96855	1/128	7.0592e-6	1.28	2.7819e-4	1.69	6.3459e-2	1.01
2e-12	294	1/8	7.5856e-3	—	9.3425e-2	—	3.2108e-0	—
	1362	1/16	2.8559e-3	1.40	4.5170e-2	1.04	2.5577e-0	0.32
	5778	1/32	7.1604e-4	1.99	1.7538e-2	1.36	1.6955e-0	0.59
	23868	1/64	1.3095e-4	2.45	5.0045e-3	1.80	9.4171e-1	0.84
	96855	1/128	6.0655e-6	4.43	1.3193e-3	1.92	4.7914e-1	0.94
2e-14	294	1/8	1.0286e-2	—	1.2163e-1	0.65	4.7101e-0	—
	1362	1/16	4.6338e-3	1.15	7.2284e-2	1.75	4.5648e-0	0.04
	5778	1/32	1.5264e-3	1.60	3.6161e-2	0.99	3.6789e-0	0.31
	23868	1/64	3.9993e-4	1.93	1.3345e-2	1.43	2.4307e-0	0.59
	23868	1/128	6.0901e-5	2.71	3.4482e-3	1.95	1.3150e-0	0.88

Tabla 5.9: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.3, con  $k = 2$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.10 se reportan los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  y la presión  $p$  del fluido para el Ejemplo 5.3, con grado polinomial  $k = 3$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo. Dicha tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$  y usamos la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$ .

$\nu$	dof	$h$	$e_0(\psi)$	$r_0(\psi)$	$e_1(\psi)$	$r_1(\psi)$	$e_2(\psi)$	$r_2(\psi)$	$e_1(p)$	$r_1(p)$
$k = 3$										
1e0	455	1/8	2.7675e-6	—	6.0074e-5	—	3.1166e-3	—	3.8799e-2	—
	2083	1/16	1.6797e-7	4.04	7.3203e-6	3.03	7.6615e-4	2.02	1.9049e-2	1.02
	8751	1/32	9.5758e-9	4.13	8.7877e-7	3.05	1.8818e-4	2.02	8.7317e-3	1.12
	35927	1/64	6.3000e-10	3.92	1.0955e-7	3.00	4.7143e-5	1.99	4.3490e-3	1.00
	145523	1/128	1.2568e-10	2.32	1.2995e-8	3.07	1.1463e-5	2.04	2.1038e-3	1.04
2e-4	455	1/8	1.9751e-5	—	3.1573e-4	—	1.7872e-2	—	5.2559e-2	—
	2083	1/16	1.2440e-6	3.98	4.2338e-5	2.89	4.5735e-3	1.96	2.5779e-2	1.02
	8751	1/32	7.3212e-8	4.08	5.6899e-6	2.89	1.1793e-3	1.95	1.2860e-2	1.00
	35927	1/64	5.0346e-9	3.86	7.1118e-7	3.00	2.9863e-4	1.98	6.6953e-3	0.94
	145523	1/128	2.5581e-10	4.29	8.0837e-8	3.13	7.1172e-5	2.06	3.2631e-3	1.03
2e-8	455	1/8	1.2424e-4	—	3.2740e-3	—	1.8548e-1	—	8.7081e-2	0.50
	2083	1/16	8.5912e-6	3.85	5.1652e-4	2.66	5.6851e-2	1.70	4.7214e-2	0.88
	8751	1/32	8.2001e-7	3.38	8.6223e-4	2.58	1.7038e-2	1.73	2.4701e-2	0.93
	35927	1/64	7.8518e-8	3.38	1.1007e-5	2.96	4.4441e-3	1.93	1.3365e-2	0.88
	145523	1/128	4.1049e-9	4.25	1.2655e-6	3.12	1.0756e-3	2.04	6.4166e-3	1.05
2e-12	455	1/8	1.1947e-3	—	3.1189e-2	—	1.8091e-0	—	7.4471e-2	—
	2083	1/16	2.1203e-4	2.49	9.1684e-2	1.76	9.6404e-0	0.90	6.1875e-2	0.26
	8751	1/32	2.9785e-5	2.83	2.1509e-3	2.09	3.9847e-1	1.27	4.1765e-2	0.56
	35927	1/64	2.8334e-6	3.39	3.0597e-4	2.81	1.1643e-1	1.77	2.5111e-2	0.73
	145523	1/128	1.7274e-7	4.03	3.6915e-5	3.05	2.9951e-2	1.95	1.2649e-2	0.98
2e-14	455	1/8	2.4389e-3	—	5.6005e-2	—	3.3723e-0	—	4.8438e-2	—
	2083	1/16	6.7802e-4	1.84	2.4027e-2	1.22	2.6357e-0	0.35	5.2197e-2	-0.10
	8751	1/32	1.3093e-4	2.37	7.8967e-3	1.60	1.4993e-0	0.81	4.3840e-2	0.25
	35927	1/64	1.6672e-5	2.97	1.5353e-3	2.36	5.7439e-1	1.40	3.0822e-2	0.50
	145523	1/128	1.2019e-6	3.79	2.0572e-4	2.89	1.9192e-1	1.58	1.7138e-2	0.84

Tabla 5.10: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.3, con  $k = 3$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En las Tablas 5.9 y 5.10 observamos que el método converge con los ordenes predichos en los Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2 y 4.4.4, para valores de  $\nu$  cercanos a 1. Sin embargo, a medida que  $\nu$  tiende a cero, se observa pérdida en el orden de convergencia en las normas estimadas (para la función de corriente y para la presión), esto se debe a que dichas estimaciones error dependen de potencias negativas de  $\nu$  (ver [40, Sección. 6]).

En la Figura 5.6 se muestran la función de corriente y la presión (exactas y aproximadas) junto con el campo de velocidad, para el Ejemplo 5.3, obtenidas con el método de elementos virtuales

analizado en este trabajo, usando la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/32$ ,  $\nu = 2e - 4$  y grado polinomial  $k = 3$ .

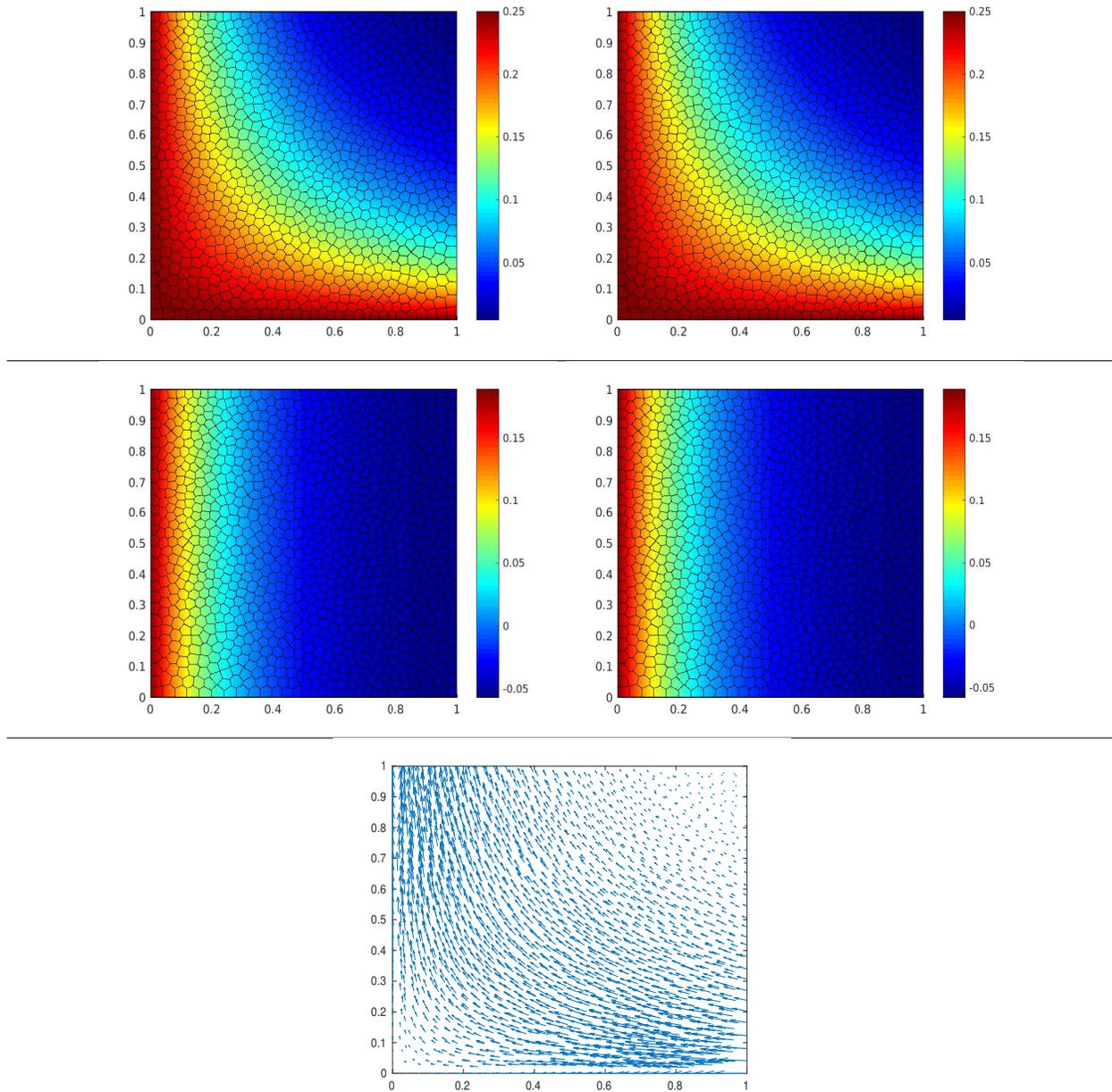


Figura 5.6: Gráficas Ejemplo 5.3: Función de corriente exacta (arriba izquierda), función de corriente aproximada (arriba derecha), presión exacta (medio izquierda), presión aproximada (medio derecha) y campo de velocidad (abajo). Obtenido con la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/32$ . Para  $k = 3$ ,  $\nu = 2e - 4$ .

## 5.4. Ejemplo 4: Lado derecho alternativo

En este ejemplo, tomamos  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$  y testeamos las ecuaciones del Problema 2.9, con el lado derecho alternativo definido en (3.29), considerando diferentes valores para la viscosidad  $\nu$  del fluido, fijamos el tensor de permeabilidad  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$ . Elegimos a  $\mathbf{f}$  y las condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas de tal manera que la solución analítica sea:

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} e^{x^2+y^2} \sin(2\pi x)(y \cos(2\pi y) - \pi \sin(2\pi y)) \\ -e^{x^2+y^2} \cos(2\pi y)(\pi \cos(2\pi x) + x \sin(2\pi x)) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) e^{x^2+y^2}.$$

En la Tabla 5.11 se reportan los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  del Ejemplo 5.4, con grado polinomial  $k = 2$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, considerando el lado derecho alternativo  $\tilde{F}^h(\cdot)$  definido en (3.29). Dicha tabla contiene los errores y tasas de convergencia usando distintos valores de  $\nu$ . Usamos la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$ .

$\nu$	dof	$h$	$\mathbf{e}_0(\psi)$	$\mathbf{r}_0(\psi)$	$\mathbf{e}_1(\psi)$	$\mathbf{r}_1(\psi)$	$\mathbf{e}_2(\psi)$	$\mathbf{r}_2(\psi)$
$k = 2$								
1e0	294	1/8	1.1785e-2	—	1.6670e-2	—	3.0690e-0	—
	1371	1/16	2.0476e-3	2.52	5.6516e-2	1.56	1.6703e-0	0.87
	5796	1/32	3.7762e-4	2.43	1.4727e-2	1.94	8.1566e-1	1.03
	23874	1/64	7.6485e-5	2.30	3.7906e-3	1.95	3.9964e-1	1.02
	96855	1/128	1.2350e-5	2.63	9.5973e-4	1.98	1.9977e-1	1.00
1e-3	294	1/8	1.7835e-2	—	1.4434e-1	—	3.1350e-0	—
	1371	1/16	2.6456e-3	2.75	2.9552e-2	2.28	1.6547e-0	0.92
	5796	1/32	5.7258e-4	2.20	7.5279e-3	1.97	8.0524e-1	1.03
	23874	1/64	1.2976e-4	2.14	2.4887e-3	1.59	3.9562e-1	1.02
	96855	1/128	2.8807e-5	2.17	8.8678e-4	1.48	1.9892e-1	0.99
1e-6	294	1/8	1.8061e-2	—	1.4551e-1	—	3.1503e-0	—
	1362	1/16	2.6159e-3	2.78	2.9100e-2	2.32	1.6780e-0	0.90
	5796	1/32	5.6692e-4	2.20	6.7443e-3	2.10	8.2222e-1	1.02
	23874	1/64	1.3689e-4	2.05	1.6432e-3	2.03	4.0483e-1	1.02
	96855	1/128	3.3572e-5	2.02	4.0989e-4	2.00	2.0176e-1	1.00

Tabla 5.11: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.4, con  $k = 2$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.11 notamos que el método converge con los mismos ordenes del esquema considerando

el lado derecho  $F^h(\cdot)$  definido en (3.28), tal como se predice en el análisis hecho en la Observación 4.4.4 (ver Capítulo 4).

En la Figura 5.7 se muestra la función de corriente exacta y aproximada junto con el campo de velocidad, para el Ejemplo 5.4, obtenidas con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, usando la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/64$ ,  $\nu = 1e - 6$  y grado polinomial  $k = 3$ .

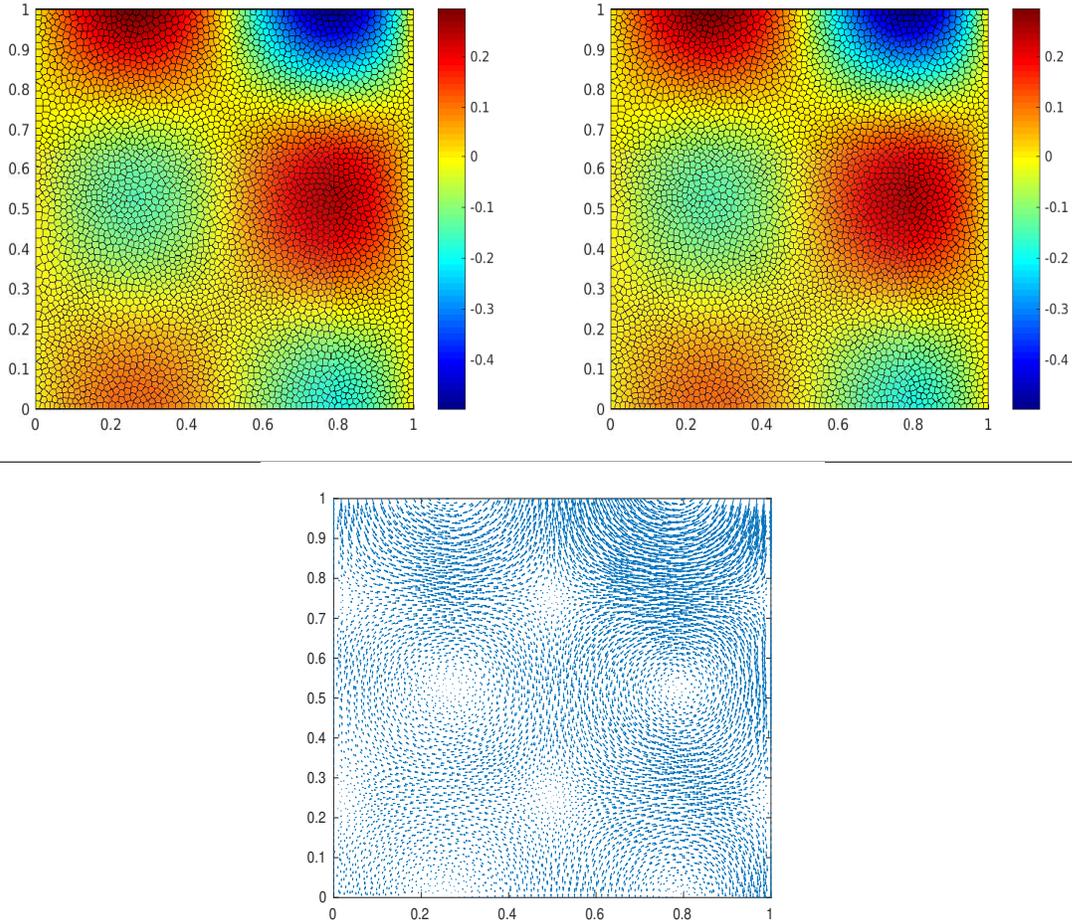


Figura 5.7: Gráficas Ejemplo 5.4: Función de corriente exacta (arriba izquierda), función de corriente aproximada (arriba derecha), campo de velocidad (abajo). Obtenido con la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/64$ . Para  $k = 2$ ,  $\nu = 1e - 6$ .

En la Tabla 5.12 se reportan los errores y tasas de convergencia para la función de corriente  $\psi$  y la presión  $p$  del fluido, para el Ejemplo 5.4, con grado polinomial  $k = 3$ , obtenidos con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, considerando el lado derecho alternativo definido en (3.29). Dicha tabla contiene los errores y tasas de convergencia para distintos valores de  $\nu$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$ .

$\nu$	dof	$h$	$e_0(\psi)$	$r_0(\psi)$	$e_1(\psi)$	$r_1(\psi)$	$e_2(\psi)$	$r_2(\psi)$	$e_1(p)$	$r_1(p)$
$k = 3$										
1e0	455	1/8	1.4032e-3	—	1.4424e-2	—	5.7787e-1	—	6.1831e-0	—
	2083	1/16	8.6754e-5	4.01	1.6969e-3	3.08	1.5373e-1	1.91	2.8911e-0	1.09
	8751	1/32	4.3044e-6	4.33	1.7599e-4	3.26	3.5548e-2	2.11	1.3553e-0	1.09
	35927	1/64	2.5045e-7	4.10	2.0674e-5	3.08	8.5250e-3	2.05	6.2373e-1	1.11
	145523	1/128	1.2691e-8	4.30	2.5342e-6	3.02	2.1115e-3	2.01	2.8758e-1	1.11
1e-3	455	1/8	2.4281e-3	—	2.7576e-2	—	8.1786e-1	—	2.9566e-2	—
	2083	1/16	1.1280e-4	4.42	2.6938e-3	3.35	1.8847e-1	2.11	1.4535e-2	1.02
	8751	1/32	3.6992e-6	4.93	2.1463e-4	3.64	3.8939e-2	2.27	6.9774e-3	1.05
	35927	1/64	1.6216e-7	4.51	2.2786e-5	3.23	8.9384e-3	2.12	3.4367e-3	1.02
	145523	1/128	7.5138e-9	4.43	2.6222e-6	3.11	2.1552e-3	2.05	1.7079e-3	1.00
1e-6	445	1/8	2.5402e-3	—	2.9386e-2	—	8.5597e-1	—	2.7139e-2	—
	2083	1/16	1.4447e-4	4.13	3.5018e-3	3.06	2.1802e-1	1.97	1.3731e-2	0.98
	8751	1/32	6.1532e-6	4.55	3.2273e-4	3.43	4.7071e-2	2.21	6.7386e-3	1.02
	35927	1/64	3.2389e-7	4.24	3.8732e-5	3.05	1.1173e-2	2.07	3.3527e-3	1.00
	145523	1/128	1.6776e-8	4.27	4.6117e-6	3.07	2.7269e-3	2.03	1.6773e-3	0.99

Tabla 5.12: Errores y ordenes numéricos para el Ejemplo 5.4, con  $k = 3$ , usando la familia de mallas  $\mathcal{T}_h^3$  y diferentes valores de  $\nu$ .

En la Tabla 5.12 notamos que el método converge con los mismos ordenes del esquema considerando el lado derecho  $F^h(\cdot)$  definido en (3.28), tal como se predice en el análisis hecho en la Observación 4.4.4 (ver Capítulo 4).

En la Figura 5.8 se muestran la función de corriente y la presión del fluido (exacta y aproximada) junto con el campo de velocidad, para el Ejemplo 5.4, obtenidas con el método de elementos virtuales analizado en este trabajo, usando la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/64$ ,  $\nu = 1e - 6$  y grado polinomial  $k = 3$ .

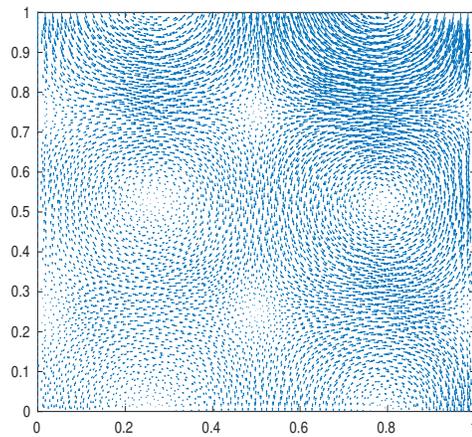
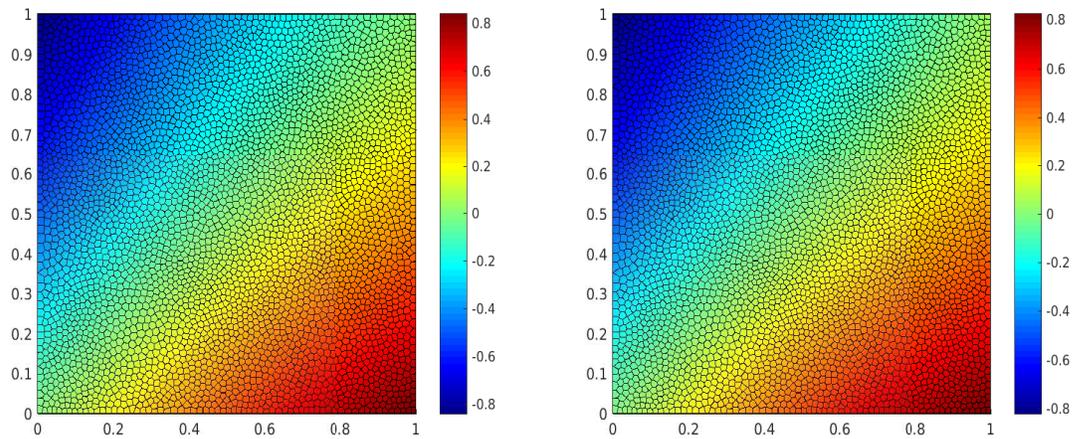
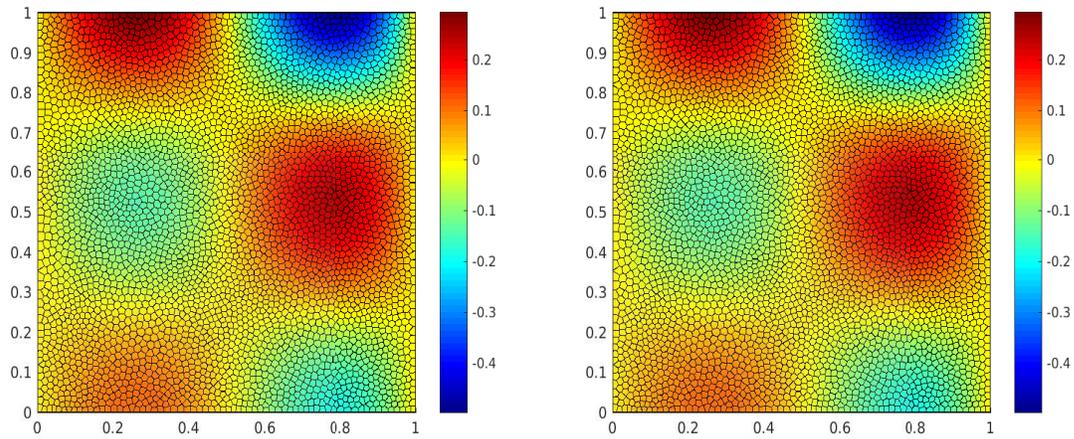


Figura 5.8: Gráficas Ejemplo 5.4: Función de corriente exacta (arriba izquierda), función de corriente aproximada (arriba derecha), presión exacta (medio izquierda), presión aproximada (medio derecha) y campo de velocidad (abajo). Obtenido con la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/64$ . Para  $k = 3$ ,  $\nu = 1e - 3$ .

## 5.5. Ejemplo 5: El problema de la cavidad

Este ejemplo es llamado el problema de la cavidad impulsada por la tapa el cual es un problema estándar en el cual no se tiene una solución exacta. En el caso bidimensional se describe el fluido en un contenedor rectangular que es impulsado por el movimiento uniforme de una tapa.

El problema está configurado con la siguiente condición de frontera:  $\mathbf{u} = (1, 0)$  en la tapa superior y  $\mathbf{u} = (0, 0)$  en el resto de la frontera, mientras que el dato  $\mathbf{f}$  es igual a  $\mathbf{0}$  y usamos distintos valores para viscosidad  $\nu$ .

Debido al cambio de las condiciones de contorno, aparecen dos singularidades en las esquinas superiores del dominio.

En lo que sigue, se muestran los resultados numéricos obtenidos usando la formulación 3.4.1 para  $k = 2$  y  $k = 3$ , donde se han empleado las siguientes condiciones de contorno para la función de corriente  $\psi_h$ :  $\nabla\psi_h = (0, 1)$ , en la tapa superior y  $\nabla\psi_h = (0, 0)$  en el resto, además  $\psi_h = 0$  sobre toda la frontera.

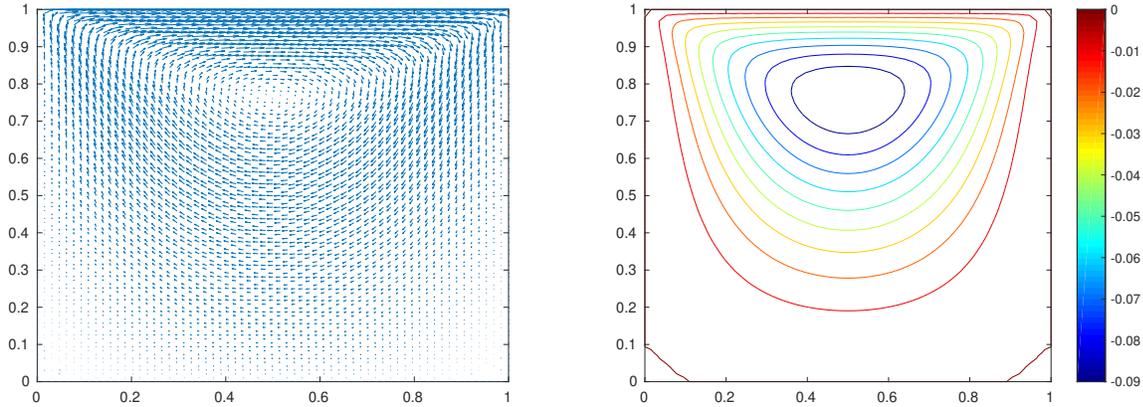


Figura 5.9: Para  $k = 2$ . El campo de velocidad y las líneas de corriente para el problema de cavidad obtenida con la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/64$ , con  $\nu = 1$  y  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$ .

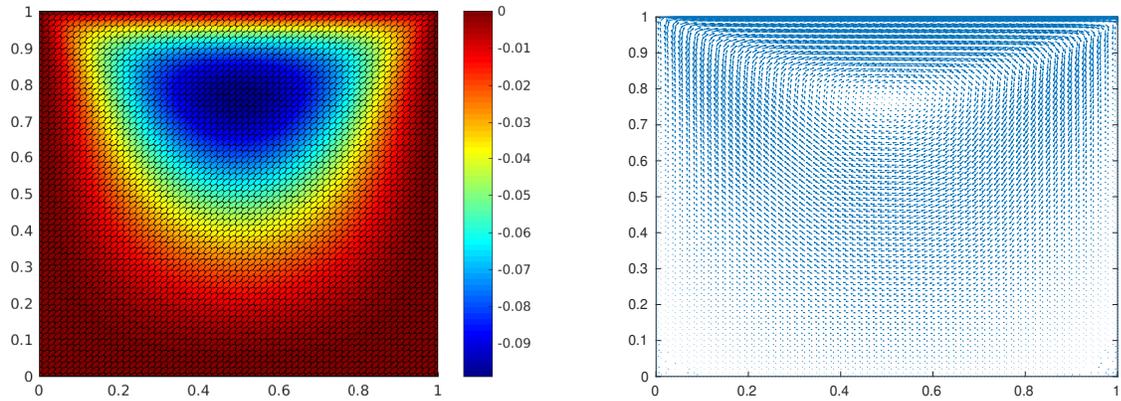


Figura 5.10: Para  $k = 2$ . La función de corriente, el campo de velocidad para el problema de cavidad obtenidos con la malla  $\mathcal{T}_h^4$ ,  $h = 1/64$ , con  $\nu = 1$  y  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$ .

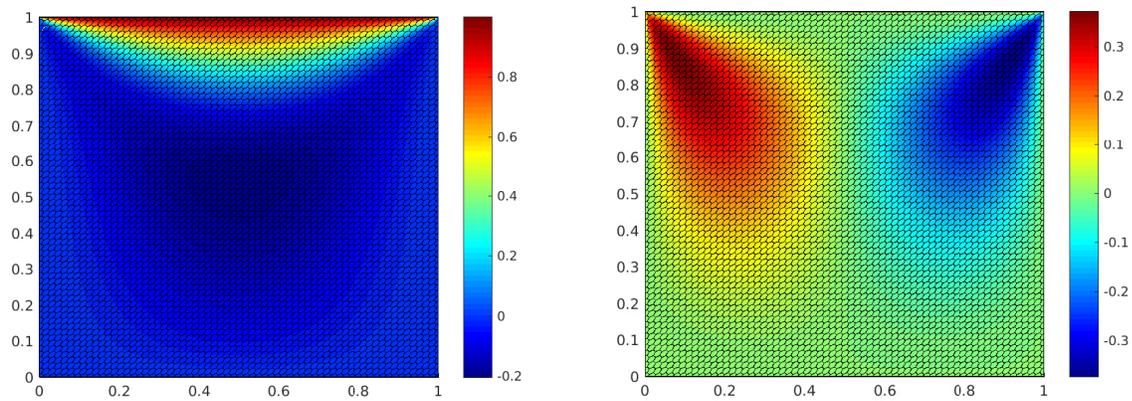


Figura 5.11: Para  $k = 2$ . Primera y segunda componente de la velocidad para el problema de cavidad obtenidas con la malla  $\mathcal{T}_h^4$ ,  $h = 1/64$ ,  $\nu = 1$  y  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$ .

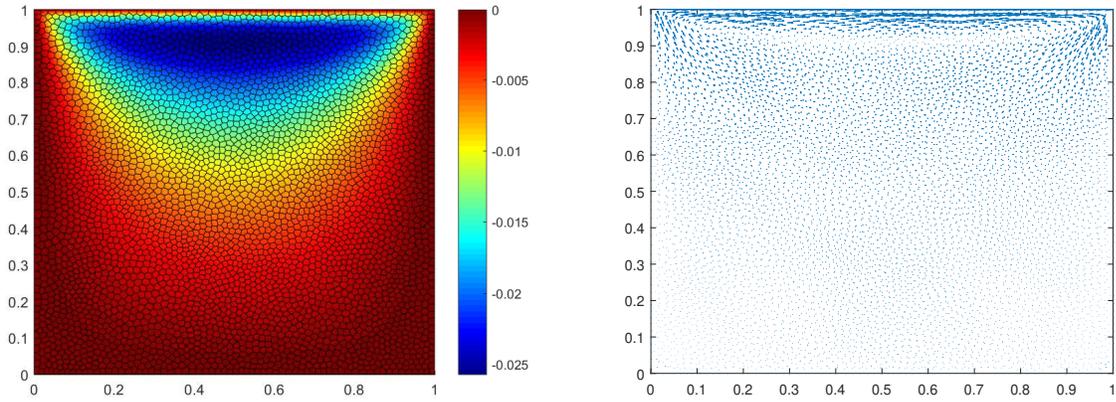


Figura 5.12: Para  $k = 3$ . La función de corriente, el campo de velocidad para el problema de cavidad obtenidos con la malla  $\mathcal{T}_h^3$ ,  $h = 1/64$ , con  $\nu = 1e - 3$  y  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$ .

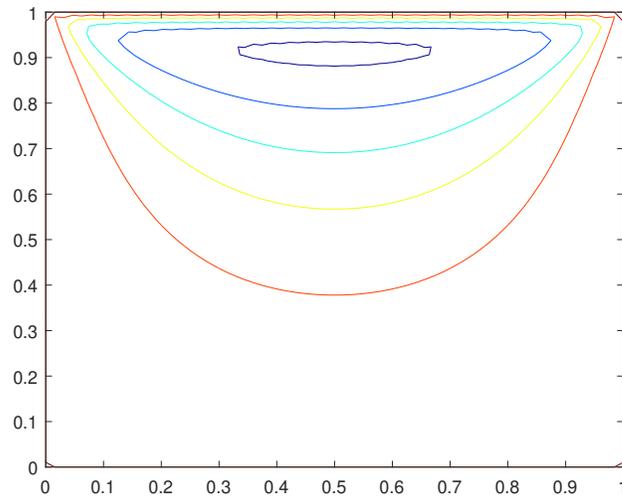


Figura 5.13: Para  $k = 3$ . Líneas de corriente para el problema de cavidad obtenida con la malla  $\mathcal{T}_h^2$ ,  $h = 1/64$ , con  $\nu = 1e - 3$  y  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{I}$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 6.1. Conclusiones

Esta tesis se ha desarrollado con el propósito de estudiar la flexibilidad y habilidad del Método de Elementos Virtuales para adaptarse a problemas de fluidos los cuales son de gran interés. En particular, en este trabajo se realizó un análisis matemático y numérico de un Método de Elementos Virtuales para el Problema de Brinkman formulado en términos de la función de corriente del campo de velocidad, el cual es un problema de cuarto orden, quedando en evidencia la habilidad de VEM para construir y analizar, de manera sencilla, esquemas conformes de  $H^2(\Omega)$  sobre mallas poligonales generales.

A continuación se presentan los resultados más relevantes de este trabajo:

1. En el Capítulo 2 se analizó existencia y unicidad de solución para el Problema de Brinkman en términos de la función de corriente de la velocidad a nivel continuo, haciendo uso del Lema de Lax-Milgram.
2. En el Capítulo 3 se propuso una discretización de orden arbitrario  $k \geq 2$  mediante elementos virtuales para la aproximación numérica de la función de corriente del Problema de Brinkman. Se observó que debido al enfoque del método VEM la construcción del esquema discreto es bastante simple, a diferencia del Método de Elementos Finitos clásico, donde la construcción de funciones  $C^1$  globales es más complicada. En este capítulo también se analizó existencia y unicidad de solución del problema discreto.
3. En el Capítulo 4 se establecieron estimaciones de error en norma  $H^2$  para la función de corriente. Además, mediante argumentos de dualidad se logró establecer estimaciones de error en norma  $H^1$  y  $L^2$ .
4. Se recuperó el campo de velocidad del fluido a través de un post-proceso a partir de la función de corriente y se estableció una estimación de error en norma  $H^1$  para la velocidad.

5. Para  $k = 3$  se propuso una estrategia para recuperar la presión del fluido mediante un problema de Poisson generalizado, con dato proveniente de la función de corriente, la cual se basa en un esquema discreto con elementos virtuales de clase  $C^0$ . Además, bajo la hipótesis de quasi-uniformidad de las mallas se mostró convergencia en norma  $H^1$ .
6. Se desarrolló un código en MATLAB para realizar simulaciones numéricas sobre mallas poligonales que ilustraron el buen desempeño del esquema discreto y corroboraron nuestros resultados teóricos.
7. A nivel computacional se obtuvieron ventajas. Por un lado, el número de grados de libertad, al estar relacionado con una sola variable escalar (la función de corriente) en lugar de una variable vectorial (la velocidad) más uno escalar (la presión), resulta ser menor que el número de grados de libertad para el esquema en términos de velocidad-presión. Lo anterior implica que el sistema lineal resultante sea más pequeño. Además, dicho sistema es ahora definido positivo, a diferencia del original que es indefinido.

## 6.2. Trabajo futuro

1. Extender el esquema discreto estudiado a otros problemas de la mecánica de fluidos tales como Navier-Stokes y Oseen, formulados en términos de la función de corriente.
2. Proponer discretizaciones mediante Elementos Virtuales para el Problema de Brinkman formulado términos de otras variables de interés.
3. Continuar con el estudio de la recuperación de la presión usando elementos virtuales de clase  $C^0$ .
4. Estudiar otros problemas de fluidos en distintas formulaciones y proponer discretizaciones usando elementos virtuales.

# Bibliografía

- [1] R.A. ADAMS, AND J.J.F. FOURNIER, *Sobolev Spaces, 2nd ed.*, Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] P.F. ANTONIETTI, L. BEIRÃO DA VEIGA, D. MORA AND M. VERANI, *A stream virtual element formulation of the Stokes problem on polygonal meshes*, SIAM J. Numer. Anal., **52**, (2014), pp. 386–404.
- [3] P.F. ANTONIETTI, L. BEIRÃO DA VEIGA, S. SCACCHI AND M. VERANI, *A  $C^1$  virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes*, SIAM J. Numer. Anal., **54**, (2016), pp. 36–56.
- [4] C. BACUTA, J. BRAMBLE, J. PASCIAK, *Shift theorems for the Biharmonic Dirichlet problem*, In Recent Progress in Computational and Applied PDEs Kluwer Plenum, New York (2002), pp. 1–26.
- [5] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, A. CANGIANI, G. MANZINI, L.D. MARINI AND A. RUSSO, *Basic principles of virtual element methods*, Math. Models Methods Appl. Sci., **23**, (2013), pp. 199–214.
- [6] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI AND L.D. MARINI, *Virtual elements for linear elasticity problems*, SIAM J. Numer. Anal., **51**, (2013), pp. 794–812.
- [7] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, L.D. MARINI AND A. RUSSO, *The hitchhiker’s guide to the virtual element method*, Math. Models Methods Appl. Sci., **24**, (2014), pp. 1541–1573.
- [8] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, L.D. MARINI AND A. RUSSO, *Virtual element method for general second-order elliptic problems on polygonal meshes*, Math. Models Methods Appl. Sci., **26**(4), (2016), pp. 729–750.
- [9] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, L.D. MARINI AND A. RUSSO, *Virtual element implementation for general elliptic equations*, *Building bridges: connections and challenges in modern approaches to numerical partial differential equations*, Notes Comput. Sci. Eng., **114**, Springer, (2016), pp. 39–71.
- [10] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, L.D. MARINI AND A. RUSSO,  *$H(\text{div})$  and  $H(\text{curl})$ -conforming virtual element method*, Numer. Math., **123**(2), (2016), pp. 303–332.

- [11] L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA AND D. MORA, *A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **295**, (2015) pp. 327–346.
- [12] L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA AND G. VACCA, *Divergence free virtual elements for the Stokes problem on polygonal meshes*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **51**, (2017), pp. 509–535.
- [13] L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA AND G. VACCA, *Virtual elements for the Navier-Stokes problem on polygonal meshes*, SAIM J. Numer. Anal., **56**(3), (2018), 1210–1242
- [14] L. BEIRÃO DA VEIGA AND G. MANZINI, *A virtual element method with arbitrary regularity*, IMA J. Numer. Anal., **34**, (2014), pp. 759–781.
- [15] L. BEIRÃO DA VEIGA AND G. MANZINI, *Residual a posteriori error estimation for the virtual element methods for elliptic problems*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **49**(2), (2015), pp. 577–599.
- [16] L. BEIRÃO DA VEIGA, D. MORA AND G. RIVERA, *Virtual elements for a shear-deflection formulation of Reissner-Mindlin plates*, Math. Comp., **88**, (2019), pp. 149–178.
- [17] L. BEIRÃO DA VEIGA, D. MORA, G. RIVERA AND R. RODRÍGUEZ, *A virtual element method for the acoustic vibration problem*, Numer. Math., **136**, (2017), pp. 725–763.
- [18] L. BEIRÃO DA VEIGA, D. MORA AND G. VACCA, *The Stokes complex for virtual elements with application to Navier-Stokes flows.*, J. Sci. Comput., (2019), pp. 1–29, DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-019-01049-3> (to appear).
- [19] L. BEIRÃO DA VEIGA, A. PICHLER AND G. VACCA, *A virtual element method for the miscible displacement of incompressible fluids in porous media*, arXiv:1907.13080 [math.NA], (2019).
- [20] S. C BRENNER AND L. SUNG,  *$C^0$  interior penalty Methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains*, J. Sci. Comput. **22/23** (2005), pp. 8–118.
- [21] S.C. BRENNER AND R.L. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, New York, 2008.
- [22] F. BREZZI, R.S. FALK, L.D. MARINI AND A. RUSSO, *Basic principles of mixed virtual element methods*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **48**(4), (2014), pp. 1227–1240.
- [23] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [24] F. BREZZI AND L.D. MARINI, *Virtual elements for plate bending problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **253**, (2013), pp. 455–462.
- [25] E. CÁCERES AND G.N. GATICA, *A mixed virtual element method for the pseudostress-velocity formulation of the Stokes problem*, IMA J. Numer. Anal., **37**, (2017), pp. 296–331.
- [26] E. CÁCERES, G.N. GATICA AND F. SEQUEIRA, *A mixed virtual element method for the Brinkman problem*, Math. Models Methods Appl. Sci., **27**, (2017), pp. 707–743.

- [27] A. CANGIANI, G. MANZINI AND O.J. SUTTON, *Conforming and nonconforming virtual element methods for elliptic problems*, IMA J. Numer. Anal., **37**, (2017), pp. 1317–1354.
- [28] A. CANGIANI, E.H. GEORGIOULIS, T. PRYER AND O.J. SUTTON, *A posteriori error estimates for the virtual element method*, Numer. Math., **137**(4), (2017), pp. 857–893.
- [29] M. CAYCO, *Finite Element Methods for the Stream Function Formulation of the Navier-Stokes Equations*, PhD thesis, CMU, Pittsburgh, PA., (1985).
- [30] M. CAYCO AND R.A. NICOLAIDES, *Analysis of nonconforming stream function and pressure finite element spaces of the Navier-Stokes equations*, Comp. and Math. Appl., **8**, (1989), pp. 745–760.
- [31] M. CAYCO AND R.A. NICOLAIDES, *Finite element technique for optimal pressure recovery from stream function formulation of viscous flows*, Math. Comp., **56**, (1986), pp. 371–377.
- [32] L. CHEN, J HUANG, *Some error analysis on virtual element methods*, Calcolo, **55**(1), (2018), pp. 5–23.
- [33] C. CHINOSI AND L.D. MARINI, *Virtual element method for fourth order problems:  $L^2$ -estimates*, Comput. Math. Appl., **72**, (2016), pp. 1959–1967.
- [34] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, SIAM, 2002.
- [35] G.N. GATICA, M. MUNAR, F. SEQUEIRA, *A mixed virtual element method for a nonlinear Brinkman model of porous media flow* Calcolo **55**(2), (2018), pp. 21–36.
- [36] V. GIRAULT AND P.A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [37] A. L. GAIN, C. TALISCHI AND G.H. PAULINO, *On the virtual element method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **282**, (2014), pp. 132–160.
- [38] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Non-Smooth Domains*, Pitman, Boston, 1985.
- [39] O. ILIEV, R. LAZAROV AND J. WILLIEMS, *Variational multiscale finite element method for flows in highly porous media*, Multiscale Model. Simul. **9**(4), (2011), pp. 1350–1372.
- [40] K.A. MARDAL, X. TAI, R. WINTHER, *A robust finite element method for Darcy-Stokes flow*, Multiscale Model. Simul. **9**(4), (2011), pp. 1350–1372. SIAM J. Numer. Anal., **40**(5), (2002), pp. 1605–1631.
- [41] A. QUARTERONI AND A. VALLI, *Numerical Aproximation of the Partial Differential Equation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [42] D. MORA AND G. RIVERA, *A priori and a posteriori error estimates for a virtual element spectral analysis for the elasticity equations*, IMA J. Numer. Anal., (2019), DOI: <https://doi.org/10.1093/imanum/dry063>.

- [43] D. MORA, G. RIVERA AND R. RODRÍGUEZ, *A virtual element method for the Steklov eigenvalue problem*, Math. Models Methods Appl. Sci., **25**, (2015), pp. 1421–1445.
- [44] D. MORA, G. RIVERA AND I. VELÁSQUEZ, *A virtual element method for the vibration problem of Kirchhoff plates*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **52**, (2018), pp. 1437–1456.
- [45] D. MORA AND I. VELÁSQUEZ, *Virtual element for the buckling problem of Kirchhoff-Love plates*, Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering, (2019) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112687>.
- [46] S. A. NAZAROV, B. A. PLAMENEVSKY, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*, De Gruyter Expositions in Mathematics, Berlin, 1994.
- [47] G. VACCA, *virtual element method for hyperbolic problems on polygonal meshes*, Comput. Math. Appl., **74**(5), (2017), pp. 882–898.
- [48] G. VACCA, *An  $H^1$ -conforming virtual element for Darcy and Brinkman equations*, Math. Models Methods Appl. Sci., **28**, (2018), pp. 159–194.
- [49] G. VACCA AND L. BEIRÃO DA VEIGA, *Virtual element methods for parabolic problems on polygonal meshes*, Numer. Methods Partial Differential Equations, **31**(6), (2015), pp. 2110–2134.
- [50] VOLKER J., KAISER K. AND NOVO J., *Finite element methods for the incompressible Stokes equations with variable viscosity*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech , **96**(2), (2016), pp. 205–216.
- [51] J. ZHAO, B. ZUAN AND XIAOPENG ZHU, *The nonconforming virtual element method for parabolic problems*, Appl. Numer. Math., **143**, (2019), pp. 97–111.