

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DIRECCION DE POSTGRADO
CONCEPCION-CHILE**



**METODOS NUMERICOS PARA ESPESADORES CLARIFICADORES
EN UNA Y DOS DIMENSIONES**

*Tesis para optar al grado de
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática*

Héctor Andrés Torres Apablaza

**FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA**

2011

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es el desarrollo y análisis de métodos numéricos para la aproximación de procesos de sedimentación en espesadores-clarificadores en una y dos dimensiones. Específicamente, se estudia la aproximación por Volúmenes Finitos de problemas de sedimentación en espesadores-clarificadores. Principalmente la tesis consiste de tres trabajos.

Por un lado, en el primer trabajo, para procesos de sedimentación modelados en 1D se proponen métodos de segundo orden para espesadores-clarificadores. La idea principal es controlar el término de corrección para el segundo orden, obteniendo un nuevo algoritmo llamado esquema FTVD (flux-TVD). Este nuevo esquema FTVD tiene propiedad TVD para el flujo numérico.

Por otro lado, dentro de la modelación bidimensional primero consideramos el problema de sedimentación batch un canal inclinado. El modelo está dado por una ecuación hiperbólica para la concentración y las ecuaciones de Stokes para la velocidad y presión. Para la concentración se utilizó un método adaptativo debido a las características de la solución para la concentración. Por otro lado un método estabilizado con la teoría de Brezzi-Pitkaranta es usado para Stokes.

Finalmente, dentro del modelamiento bidimensional, se considera un problema axisimétrico. Aquí estamos interesados en modelar el comportamiento del sedimento en un espesador-clarificador. El modelo consiste ahora en un sistema acoplado de una ecuación parabólica y ecuaciones de Stokes. Simplificando las ecuaciones tridimensionales, usando coordenadas cilíndricas obtenemos un problema bidimensional. Un método de volúmenes-elementos finitos es usado para la discretización espacial, construido en las bases de una

formulación de Galerkin discontinuo estabilizado para la concentración y un par estabilizado multiescala de elementos \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1

Contents

Resumen	vii
1 Introducción	1
1.1 English version.	1
1.1.1 uni-dimensional models	1
1.1.2 two-dimensional models	4
1.2 Organization theses	6
2 Second-order schemes for conservation laws with discontinuous flux modelling clarifier-thickener units	9
2.1 Introduction	9
2.2 The clarifier-thickener model	14
2.2.1 The clarifier-thickener unit	14
2.2.2 Derivation of the mathematical model	15
2.3 The difference schemes	19
2.3.1 Algorithm preliminaries	19
2.3.2 Truncation error analysis	19
2.3.3 A simple minmod TVD (STVD) scheme	23
2.3.4 A flux-TVD (FTVD) scheme	23
2.3.5 A refinement of the FTVD scheme	26
2.4 The nonlocal limiter algorithm	27
2.4.1 Description of the nonlocal limiter algorithm	27

2.4.2	Properties of the nonlocal limiter	30
2.5	Convergence of the second-order scheme	34
2.6	Numerical results	41
2.6.1	Examples 1 and 2: ideal suspension in a cylindrical unit	41
2.6.2	Example 3: ideal suspension in a unit with varying cross-sectional area	42
2.6.3	Observations and conclusions	42
2.7	A note on second-order degenerate parabolic equations	44
2.7.1	Operator splitting and Crank-Nicolson scheme	44
2.7.2	Examples 4 and 5: flocculated suspension	46

3 A multiresolution method for the numerical simulation of sedimentation in inclined channels 57

3.1	Introduction	57
3.1.1	Scope	57
3.1.2	Related work	59
3.1.3	Outline of the paper	60
3.2	Model of sedimentation	60
3.2.1	Boundary and initial conditions	62
3.2.2	Preliminaries and the pressure stabilization for the Stokes system	62
3.3	Discretization of the concentration equation	63
3.4	Adaptive multiresolution scheme	65
3.4.1	Data structure	66
3.4.2	Transfer operators and multiresolution transform	67
3.4.3	Conservative flux evaluation and boundary conditions	69
3.4.4	Error analysis and thresholding for the conservation law	70
3.5	Numerical approximation of the Stokes system	70
3.6	Coupling strategy and algorithm description	74
3.6.1	Some general remarks	74
3.6.2	Description of the algorithm	75

3.7	Numerical Examples	77
3.7.1	Example 1 and 2: hyperbolic problem	78
3.7.2	Examples 3–7: coupled system	80
4	A finite volume element method for a coupled transport–flow system modeling sedimentation	95
4.1	Introduction	95
4.1.1	Scope	95
4.1.2	Related work	96
4.1.3	Outline of the paper	98
4.2	Preliminaries and statement of the problem	98
4.2.1	Notation	98
4.2.2	Axisymmetric formulation	99
4.2.3	Flux vector, diffusion term, viscosity and body force	100
4.2.4	Initial and boundary conditions	102
4.2.5	Weak solutions	103
4.3	Approximation by finite volume elements	106
4.3.1	Axisymmetric finite elements setting	106
4.3.2	The finite volume element method	109
4.3.3	Space-time discrete scheme	113
4.4	Numerical results	115
4.4.1	A model problem	115
4.4.2	A steady state problem	116
4.4.3	A clarifier-thickener simulation	117
5	Conclusiones y trabajo futuro	127
5.1	Conclusiones	127
5.2	Trabajo futuro	128