

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCION  
ESCUELA DE GRADUADOS  
CONCEPCION-CHILE**

**MODELACION FENOMENOLOGICA DEL FLUJO EN  
VORTICE:  
APLICACION A HIDROCICLONES**

*Tesis para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática*

**Luis Jaime Collantes Santisteban**

**FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA  
2000**

*A mi esposa Luz Angélica, por su gran cariño, amor, dedicación y comprensión en el emprendimiento de este Proyecto de Doctorado.*

*A mi hijita Kelly Scarlett, fuente de inspiración de mis anhelos.*

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Gabriel Gatica y Dr. Hermann Alder, a quienes agradezco su invaluable apoyo y gran sentido de amistad en mi estadía en Chile.

Al Servicio de Intercambio Académico Alemán (DAAD) por el financiamiento, desde Abril de 1997, de mis estudios de Doctorado.

A los Profesores, Personal Administrativo y Compañeros del Programa de Doctorado, todos ellos grandes amigos y verdaderos embajadores de su país.

**MODELACION FENOMENOLOGICA DEL FLUJO EN  
VORTICE:  
APLICACION A HIDROCICLONES**

**Luis Jaime Collantes Santisteban**

**Director de Tesis:** Fernando Concha

**Director de Programa:** Rodolfo Rodríguez

**COMISION EXAMINADORA**

Firma:

---

Dr. Fernando Concha  
Universidad de Concepción, Chile

Firma:

---

Dr. Giulio Massarani  
Universidad Federal de Río de Janeiro, Brasil

Firma:

---

Dr. Marko Rojas  
Universidad de Campinas, Brasil

Firma:

---

Dr. Aldo Tamburrino  
Universidad de Chile, Chile

**Fecha Examen de Grado:** \_\_\_\_\_

**Calificación:** \_\_\_\_\_

*Concepción–Marzo 2000*

RESUMEN DE LA TESIS

**Modelación fenomenológica del flujo en vórtice:  
Aplicación a hidrociclones**

por

**Luis Jaime Collantes Santisteban**

Doctor en Ciencias Aplicadas c/m Ingeniería Matemática  
Universidad de Concepción, Chile, 2000

Fernando Concha Arcil, Profesor Patrocinante

En esta Tesis se propone un modelo fenomenológico que representa el flujo en vórtice desarrollado dentro de un hidrociclón de fondo plano. Se prueba existencia de solución para los campos de velocidad media y presión media del fluido y además se utiliza un método de expansión en términos del número de Rossby para la obtención de una solución completa específica.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Existencia y unicidad de solución</b>	<b>9</b>
2.1	Marco funcional . . . . .	9
2.1.1	Teoremas de inclusión . . . . .	12
2.1.2	Teoremas de Compacidad . . . . .	12
2.2	Formulación variacional del problema homogéneo . . . . .	18
2.3	Las ecuaciones de Navier-Stokes: caso no homogéneo . . . . .	27
2.4	Aplicación . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Modelo fenomenológico</b>	<b>40</b>
3.1	Modelo físico . . . . .	40
3.2	Ecuaciones de movimiento . . . . .	40
3.3	Condiciones de frontera . . . . .	44
3.3.1	Condiciones sin considerar núcleo de aire . . . . .	44
3.3.2	Condiciones considerando núcleo de aire . . . . .	45
3.3.3	Condiciones de partición de flujo . . . . .	45
3.4	Solución exacta: Procedimiento en Expansión . . . . .	47
3.4.1	Aproximación de orden cero . . . . .	49
3.4.2	Aproximación de orden uno . . . . .	52
3.5	Solución aproximada: Caso $v_\theta = v_\theta(r)$ . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Pruebas numéricas</b>	<b>59</b>
4.1	Aproximación de orden cero . . . . .	59
4.2	Solución aproximada: Caso $v_\theta = v_\theta(r)$ . . . . .	65
4.3	Aproximación de orden uno . . . . .	75

# Índice de Tablas

4.1	Condiciones de diseño y operación de un hidrociclón de fondo plano usado por Chiné [16] . . . . .	60
4.2	Números radiales de Reynolds y sus correspondientes viscosidades de remolino . . . . .	60
4.3	Condiciones de diseño y operación del hidrociclón de fondo plano usado para las mediciones de velocidad . . . . .	66

# Índice de Figuras

1.1	Representación geométrica de un hidrociclón cónico. . . . .	2
1.2	Representación esquemática de un hidrociclón de fondo plano. . . . .	6
1.3	Modelo axial-simétrico de un hidrociclón según Rietema. . . . .	7
3.1	Representación de la supuesta entrada de alimentación al hidrociclón. . . . .	41
4.1	Distribución de velocidad tangencial adimensional para varios valores del número radial de Reynolds, donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . . . . .	61
4.2	Distribución de velocidad radial adimensional en la zona II, donde $v_r^* = v_r/v_R$ y $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero . . . . .	62
4.3	Distribución de velocidad radial adimensional en la zona I, donde $v_r^* = v_r/v_R$ y $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero . . . . .	62
4.4	Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero. Datos de Chiné [16] . . . . .	63
4.5	Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para $Re = 40$ , donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero. Datos de Chiné [16] . . . . .	64
4.6	Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Datos de Chiné [16] . . . . .	67
4.7	Simulación de la distribución de velocidad axial . . . . .	68
4.8	Distribución de velocidad tangencial adimensional para varios valores del número radial de Reynolds, donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Los valores experimentales corresponden a $z^* = 0.28$ . Datos de Chiné [16] . . . . .	69



4.9	Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para $Re = 65$ , donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Datos de Chiné [16] . . . . .	70
4.10	Distribución de la velocidad tangencial adimensional en la zona I y en la zona II para $Re = 65$ , donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$	71
4.11	Distribución de la velocidad axial en diferentes niveles axiales	72
4.12	Distribución de la velocidad radial adimensional en la zona I y en la zona II, donde $v_r^* = v_r/v_R$ y $r^* = r/R$ . . . . .	73
4.13	Error de la solución aproximada . . . . .	74
4.14	Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Primera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	77
4.15	Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para $Re = 40$ , donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Primera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]	78
4.16	Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde $v_r^* = -v_r/v_R$ y $r^* = r/R$ . Primera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	79
4.17	Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Segunda prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	80
4.18	Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para $Re = 40$ , donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Segunda prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]	81
4.19	Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde $v_r^* = -v_r/v_R$ y $r^* = r/R$ . Segunda prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	82
4.20	Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Tercera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	83
4.21	Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para $Re = 40$ , donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Tercera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]	84

4.22	Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde $v_r^* = -v_r/v_R$ y $r^* = r/R$ . Tercera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	85
4.23	Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Cuarta prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	86
4.24	Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para $Re = 40$ , donde $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$ y $r^* = r/R$ . Cuarta prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]	87
4.25	Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde $v_r^* = -v_r/v_R$ y $r^* = r/R$ . Cuarta prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16] . . . . .	88

# Capítulo 1

## Introducción

Los hidrociclones son equipos que han encontrado un amplio uso en la Industria Minero-Metalúrgica y Química, principalmente debido a su simplicidad operacional, su bajo costo y su versatilidad. Dos son su tipo de aplicaciones. El primero se refiere a la separación por tamaño de una suspensión, operación que recibe el nombre de clasificación y el segundo a la separación de las partículas según su densidad. Esta última es una operación de pre-concentración.

El fluido conteniendo partículas de diferentes tamaños y densidades, ó aún dos fluidos distintos, son inyectados a alta velocidad a través de un tubo de alimentación, el cual es de sección transversal circular o rectangular y se junta tangencialmente al cuerpo del hidrociclón, ver figura 1.1. La alta velocidad rotacional induce una aceleración centrífuga que produce el movimiento relativo de las partículas con respecto al fluido. Como el flujo sale del equipo a través del núcleo del ciclón por la parte superior (vortex) e inferior (apex), componentes de velocidad radial y axial deben existir. Las altas aceleraciones radiales producidas permiten una rápida migración de las partículas permitiendo un gran caudal a través del equipo. Por el apex se descargan las partículas gruesas y en el vortex rebalsan las partículas finas. Por consiguiente se forma un flujo en vórtice tridimensional dentro del hidrociclón.

La simplicidad operacional y estructural del hidrociclón esconde, sin embargo, una gran complejidad en los mecanismos que rigen su acción. Los esfuerzos que se ha hecho para describir el comportamiento del equipo han dado lugar a dos tipos de modelos: los modelos empíricos y los modelos fenomenológicos.

**Los modelos empíricos** están basados en la observación experimental de la operación de un hidrociclón y consisten en la correlación entre las variables obtenidas por ajuste estadístico a numerosos datos. Más

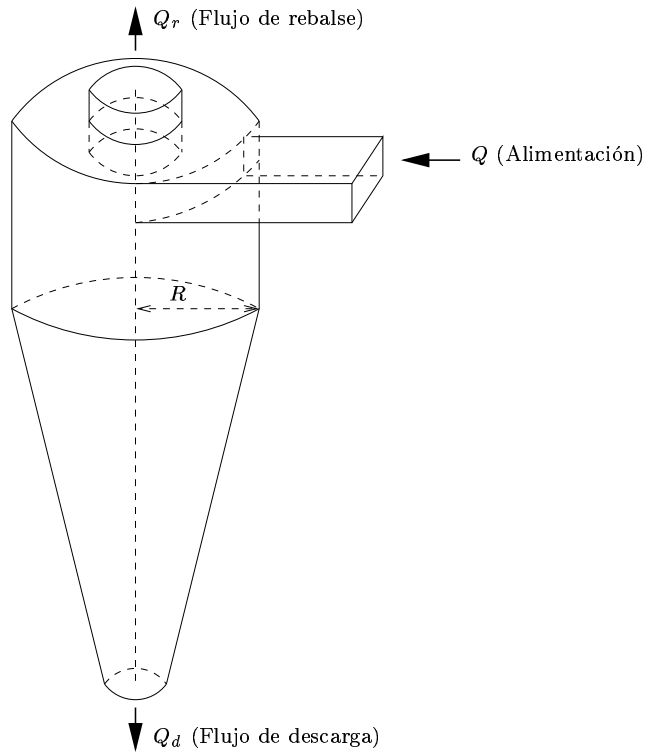


Figura 1.1: Representación geométrica de un hidrociclón cónico.

específicamente, las expresiones empíricas relacionan eficiencia de clasificación o separación por tamaño a las dimensiones del hidrociclón y más comúnmente al caudal de alimentación y de descarga.

La modelación empírica ha culminado en los modelos propuestos por Lynch (Lynch y Rao, 1975) y posteriormente por Plitt (1976), los cuales son de utilidad en el control de hidrociclones de tamaño industrial y en el modelo de Arterburn (1982) utilizado para diseño. La experiencia ha demostrado que estos modelos tienen serias limitaciones. Mencionamos aquí sus dos principales limitaciones. Primero, que pueden ser utilizados solamente dentro de un pequeño rango de condiciones vecinas a aquellas en que fueron obtenidos sus parámetros y segundo, que las ecuaciones desarrolladas para un tipo de material no son generalmente válidas para otro. También es importante señalar que existen contradicciones entre los diversos modelos empíricos.

Antunes y Medronho (1987) hicieron una evaluación crítica de los modelos de Lynch y Rao y de Plitt, realizando una gran cantidad de experiencias con cinco distintos tipos de hidrociclones. Los autores concluyen que el modelo de Lynch y Rao no predice adecuadamente el comportamiento de

los equipos en ninguna circunstancia y que el modelo de Plitt sólo puede ser usado en una vecindad de un 5% de las condiciones para las cuales fueron determinados sus parámetros.

**La modelación fenomenológica**, se basa en cambio, en el estudio de los fenómenos físicos que suceden dentro del hidrociclón en su operación. Aquí las ecuaciones del modelo son independientes del material y son validadas con datos experimentales. Además la geometría del diseño del hidrociclón es incorporado en este modelo, por lo que luego se puede investigar fácilmente otros nuevos diseños.

## Aspectos relevantes en la modelación de hidrociclones

- El principal problema en la simulación numérica de hidrociclones es el tremendo recurso computacional necesitado. A este problema contribuyen varios factores. Por ejemplo, para un hidrociclón de 100 (mm) de diámetro, la discretización del dominio tridimensional requiere una malla de 20,000 volúmenes e involucra la solución de muchas ecuaciones diferenciales en estos volúmenes haciendo el proceso extremadamente lento en la estación de trabajo disponible. La simplificación axial-simétrica permite discretizar el dominio bidimensional en aproximadamente 2,000 volúmenes, haciendo los cálculos mas rápidos.
- Agregado al problema de recursos computacionales está la naturaleza turbulenta del flujo. La alta velocidad de entrada, del orden de varios metros por segundo, produce un flujo altamente turbulento en el equipo. La modelación de turbulencia es crucial para obtener resultados razonables de los patrones de flujo. Existen muchos modelos de turbulencia, desde los más simples modelos de viscosidad de remolino (eddy viscosity) para turbulencia isotrópica a los más complicados modelos de esfuerzo de Reynolds para el caso no isotrópico. Los modelos más completos requieren la solución de ecuaciones diferenciales adicionales que incrementan la potencia computacional necesitada.
- Generalmente se considera la hipótesis de simetría axial, la cual es una aproximación de la situación real del flujo ya que en su modo normal de operación, el hidrociclón no tiene una entrada distribuída simétricamente. Esta hipótesis, sin embargo, ha sido retenida en

previos estudios analíticos así como en investigaciones numéricas. En vista de la evidencia experimental que el flujo pierde su carácter tridimensional a una corta distancia de la entrada tangencial y llega a ser muy cercano a axial simétrico, es permisible considerarlo simétrico, ganando mucho en términos de simplicidad a costo de una mínima pérdida de precisión. Esta hipótesis, sin embargo, impide que la solución pueda ser obtenida de la real condición de frontera en la entrada, sino que sólo por aproximación (Malhotra *et al.* [26]). Bloor [8] hace una evaluación de la forma en que la elección de las condiciones de frontera para el modelo axial-simétrico influye la naturaleza del flujo y, aún más, dá la sugerencia de una elección apropiada de las condiciones que pueden ser relacionadas a las condiciones de real entrada.

- Otra dificultad en la modelación de un hidrociclón es el núcleo de aire. El fuerte movimiento en vórtice, inducido por la alta velocidad tangencial de entrada, crea una zona de baja presión en el centro del equipo que succiona aire del exterior formando un núcleo de aire de naturaleza desconocida. La forma de esta columna de aire ha sido descrita como cilíndrica y cónica, pero por simple observación, ninguna de estas descripciones se ajustan a la real forma.
- Mientras en una operación normal, un hidrociclón tiene velocidades axiales y tangenciales del orden de varios metros por segundo, la velocidad radial es de un orden de magnitud más pequeño. Por esta razón la distribución de velocidad radial en el equipo no es muy bien conocida. Es difícil medir esta componente de velocidad en presencia de componentes tangenciales y axiales altamente turbulentas con fluctuaciones del mismo orden de magnitud de la componente radial. Las distribuciones de velocidad radial informadas en publicaciones experimentales han sido obtenidas utilizando la ecuación de continuidad en conjunto con datos experimentales de las velocidades tangenciales y axiales.
- Es conveniente resaltar que, mientras los hidrociclones cónicos son los equipos más ampliamente usados en la Industria Minera, los hidrociclones cilíndricos, más comúnmente llamados hidrociclones de fondo plano, ver figura 1.2, fueron los primeros en ser modelados matemáticamente. La razón de ésto es que la geometría cilíndrica es mas familiar al tratamiento matemático que la combinación cilíndrico-cónica.

El trabajo previo en hidrociclones de fondo plano fué fragmentario y restringido en el sentido que sólo la componente tangencial de velocidad fué estudiada, suponiendo que ésta es función sólo de la coordenada radial y que la forma funcional de la velocidad radial podría ser derivada de la evidencia experimental. La consecuencia de esta hipótesis no fué investigada con posterioridad.

- El objetivo que se persigue en el trabajo con hidrociclones es dilucidar el mecanismo por el cual ocurre la separación de partículas dentro del equipo y así definir los límites prácticos de eficiencia y descubrir fuentes de ineficiencia en la operación de clasificación.

Bloor e Ingham [5, 6, 7, 9, 10] desarrollaron, en una serie de artículos, un modelo de clasificación para un hidrociclón cónico. Su trabajo consistió en obtener los patrones de flujo del hidrociclón suponiendo que en éste escurre un fluido ideal. Luego introdujeron partículas que, al moverse en este fluido, pasan al rebalse o descarga dependiendo de su trayectoria de equilibrio. Para calcular ésta resuelven la ecuación de movimiento de las partículas (balance de momentum) en la dirección axial y radial ya que en la otra dirección las partículas son arrastradas por el fluido a su misma velocidad. Para mayores detalles ver Barrientos *et al.* [4].

El camino seguido por Bloor e Ingham y complementado por Barrientos *et al.* [4] es viable para hidrociclones de fondo plano. Sin embargo para hacerlo es necesario disponer de un buen modelo del patrón de flujo en un hidrociclón de fondo plano.

El objetivo de la presente Tesis es predecir el patrón de flujo en un hidrociclón de fondo plano en términos de parámetros geométricos y variables operacionales.

En base a los comentarios anteriores se propone un modelo fenomenológico para los ciclones de fondo plano que permite obtener distribuciones de velocidad y presión en forma cerrada como formas funcionales simples. En tal modelo se consideran las ecuaciones de conservación de masa y momentum en su forma completa. Por otra parte, se considera el flujo como turbulento isotrópico, con la turbulencia representada por una constante viscosidad de remolino  $\nu$ . Como la operación de hidrociclones industriales es en régimen estacionario, se considera el problema bajo el mismo régimen.

Las Ecuaciones de Navier-Stokes en estado estacionario, con apropiadas condiciones de frontera, constituyen el punto de partida para resolver este

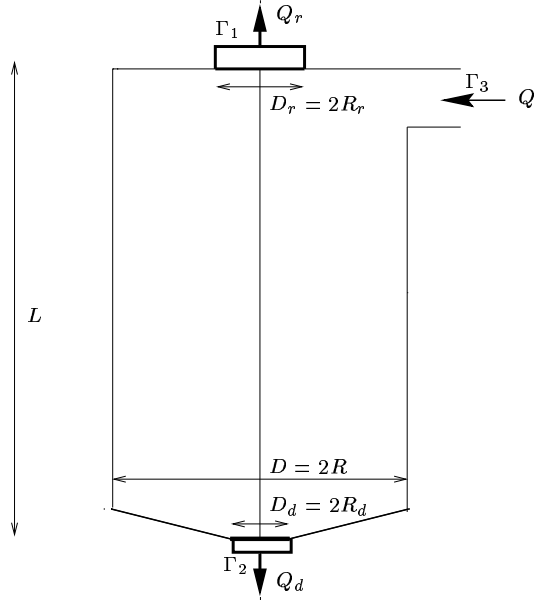


Figura 1.2: Representación esquemática de un hidrociclón de fondo plano.

problema de dinámica de fluidos, que matemáticamente está dado por:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{ en } \Omega \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ en } \Omega \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}, \text{ en } \Gamma \quad (1.3)$$

con

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{cases} \boldsymbol{\phi}_1 & \text{en } \Gamma_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 & \text{en } \Gamma_2 \\ \boldsymbol{\phi}_3 & \text{en } \Gamma_3 \\ \mathbf{0} & \text{en } \Gamma - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3\} \end{cases}$$

donde,  $\mathbf{f}$  es la densidad de las fuerzas externas (fuerza gravitacional),  $\nu$  es la viscosidad,  $\mathbf{u}$  y  $p$  son los campos de velocidad media y presión media, respectivamente.

A continuación se presenta una revisión del desarrollo de modelos fenomenológicos del flujo en un hidrociclón, desde la perspectiva de la



dinámica de fluidos (ecuaciones de Navier-Stokes).

1. **Modelos con velocidad radial y tangencial que dependen sólo de la coordenada radial  $r$ .**

Kelsall (1952) fué el primero en determinar experimentalmente las características esenciales del patrón de flujo en un hidrociclón. Con regular grado de aproximación, su trabajo muestra que las componentes de velocidad radial y tangencial dependen sólo de la coordenada  $r$ .

Rietema y colaboradores (Rietema y Krajenbrink (1958), Rietema (1961) y Van Duijn y Rietema (1983)) modelaron el hidrociclón como un aparato cilíndrico usando coordenadas cilíndricas. Suponiendo simetría axial, ellos consideraron que la alimentación entra al equipo a través de toda la periferia cilíndrica con una combinación independiente de una componente de velocidad radial  $v_R$  y una componente de velocidad tangencial  $v_{\theta R}$ , ver figura 1.3. Como la única información disponible acerca de distribución de velocidades en un hidrociclón fué la de Kelsall para un hidrociclón cónico, Rietema y colaboradores, basaron su trabajo en el patrón de flujo determinado experimentalmente para hidrociclones cónicos, sin esperar que estos patrones fueran diferentes de aquellos de hidrociclones cilíndricos.

Sólo la componente tangencial de velocidad fué estudiada, suponiendo

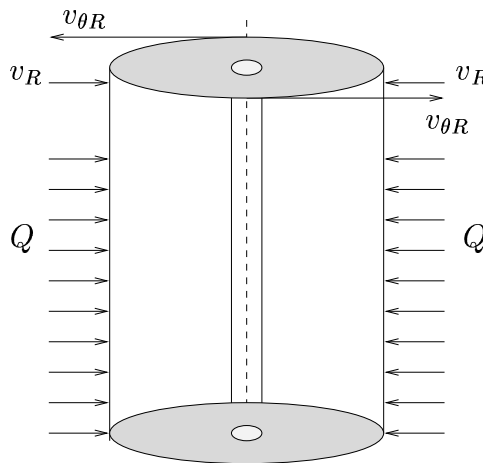


Figura 1.3: Modelo axial-simétrico de un hidrociclón según Rietema.

que ésta es función sólo de la coordenada radial y que la forma funcional de la velocidad radial podría ser derivada de la evidencia experimental. Como ejemplos tenemos los casos analizados por Rietema y Krajenbrink [30], donde la velocidad radial se supuso de la forma

$v_r = Rv_R/r$ , Rietema [29], quien usó una velocidad radial constante en todo el campo de flujo  $v_r = v_R$  ó Rietema [31] quien utilizó la velocidad radial como una función lineal del radio,  $v_r = (v_R/R)r$ . En los tres casos ellos obtuvieron una ecuación analítica con muy similares distribuciones de velocidad tangencial, excepto para el valor del número radial de Reynolds con el que compararon su predicción con respecto a los experimentos de Kelsall. Mientras que para Rietema y Krajenbrink [30] este valor fué de  $Re \approx 3$ , correspondiente a una viscosidad de remolino del orden de  $\nu \approx 10^{-3}(\text{m}^2/\text{s})$ , para Rietema [29]  $Re \approx 10$ , ésto es, una viscosidad turbulenta de remolino del orden de  $\nu \approx 3 \times 10^{-4}(\text{m}^2/\text{s})$  y para Rietema [31]  $Re \approx 30$ , ésto es, con una viscosidad turbulenta de remolino de  $\nu \approx 10^{-4}(\text{m}^2/\text{s})$ .

El problema con los modelos desarrollados por Rietema y colaboradores es que ellos no consideran explícitamente la velocidad axial, que fué experimentalmente conocida en su tiempo y supusieron arbitrariamente una velocidad radial. Aún más, sus soluciones sólo sirven para calcular la fuerza centrífuga, pero no da indicios de cómo las partículas y el fluido son evacuados del equipo. Resulta entonces necesario incorporar la componente axial de las Ecuaciones de Navier-Stokes en el proceso dinámico.

## 2. Modelos con velocidad tangencial dependiendo sólo de la coordenada radial $r$ y las velocidades radial y axial dependiendo de las coordenadas radial $r$ y axial $z$ .

Bloor e Ingham (1973, 1983) analizaron el flujo isocórico inviscido dentro de un hidrociclón. Suponiendo vórtice libre para la velocidad tangencial, obtuvieron las velocidades radial y axial como funciones de las coordenadas radial y axial. Luego usaron los resultados de velocidad radial y axial para recalculer la velocidad tangencial de las ecuaciones de Navier-Stokes con viscosidad de remolino variable.

Bloor e Ingham (1987) concluyen diciendo que es crucial que un modelo que intente analizar la eficiencia de separación de un ciclón deba tener en cuenta no sólo la velocidad de rotación (spin) sino también las otras componentes de velocidad.

Por consiguiente, para resolver el proceso dinámico en hidrociclones cilíndricos es esencial solucionar las 3 componentes de velocidad en las ecuaciones de Navier-Stokes juntamente con la ecuación de continuidad.

# Capítulo 2

## Existencia y unicidad de solución

En este capítulo se hace un estudio concerniente al análisis de existencia-unicidad de solución del problema de hidrociclones planteado en (1.1)–(1.3). En general se tomó como referencia las demostraciones dadas por Temam [32, 33] sobre ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes, las mismas que en este capítulo se detallan.

### 2.1 Marco funcional

Primero, se da una descripción detallada de los espacios funcionales y de los dominios considerados en este trabajo.

Sea  $\Omega \subset R^n$  un conjunto abierto, con frontera  $\Gamma$ . Todas las funciones consideradas aquí se asumirán reales y localmente sumables en el sentido de Lebesgue, mientras que todas las derivadas serán interpretadas en el sentido generalizado.

El espacio

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow R; \int_{\Omega} u^2 dx < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert con la norma  $|\cdot|$  proveniente del producto interior  $(\cdot, \cdot)$  dado por

$$(u, v) := \int_{\Omega} uv dx.$$

Se denota por  $\mathcal{D}(\Omega)$  al espacio:

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow R, u \in C^\infty(\Omega), \text{ sop } u \text{ compacto, sop } u \subset \Omega\}$$

donde  $\text{sop } u = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$ .

El espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$  es definido por

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$$

donde  $D_i := \partial/\partial x_i$ .

Constituye un espacio de Hilbert,  $H^1(\Omega)$  con la norma  $[\cdot]$  proveniente del producto interior  $[\cdot, \cdot]$  dado por

$$[u, v] := (u, v) + \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v) = (u, v) + (\nabla u, \nabla v).$$

Se define el espacio  $H_0^1(\Omega)$  como

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

dicho espacio es Hilbert con la norma  $[\cdot]$ .

En  $H^1(\Omega)$  se define también el producto interior  $((\cdot, \cdot))$  como

$$((u, v)) := (\nabla u, \nabla v)$$

y se denota por  $\|\cdot\|$  la norma proveniente de este producto interior.

Se cumple que  $\|u\| \leq [u]$  y  $|u| \leq [u]$ ,  $\forall u \in H^1(\Omega)$ .

Consideremos la **desigualdad de Poincaré**:

Si  $\Omega$  es acotado en alguna dirección, entonces existe una constante  $c > 0$ ,  $c = c(\Omega)$ , tal que:

$$|u| \leq c |Du|, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

donde  $D$  es la derivada en la dirección acotada y  $c$  es acotado por  $2l$ , siendo  $l$  el diámetro de  $\Omega$  ó el grosor de  $\Omega$  en esa dirección.

Como consecuencia de este resultado, para  $\Omega$  acotado, las normas  $[\cdot]$  y  $\|\cdot\|$  son equivalentes en  $H_0^1(\Omega)$ . El espacio  $H_0^1(\Omega)$  con la norma  $\|\cdot\|$  también es un espacio de Hilbert.

Ahora se describen los **espacios Hölder**.

Sea  $0 < \gamma \leq 1$ . Una función  $u : \Omega \rightarrow R$ , es **Lipschitziana** si existe  $c > 0$  tal que:

$$|u(x) - u(y)| \leq c |x - y|, \forall x, y \in \Omega,$$

se dice que  $u$  es Hölder-continua con exponente  $\gamma$  si existe  $c > 0$  tal que:

$$|u(x) - u(y)| \leq c |x - y|^\gamma, \forall x, y \in \Omega,$$

luego, las funciones Lipschitzianas son aquellas Hölder-continuas con exponente 1.

Si  $u : \Omega \rightarrow R$  es una función continua y acotada, su norma es definida por

$$\| u \|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} | u(x) | .$$

Si  $u : \Omega \rightarrow R$  es Hölder-continua con exponente  $\gamma$ , su  $\gamma$ -ésima Hölder semi-norma es definida por

$$[ u ]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \left\{ \frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^\gamma} \right\}$$

y su  $\gamma$ -ésima Hölder norma por

$$\| u \|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \| u \|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + [ u ]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} .$$

**Definición 2.1.1** *El espacio Hölder  $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$  consiste de todas las funciones  $u : \Omega \rightarrow R$  que son  $k$ -veces continuamente diferenciables y cuyas  $k$ -ésimas derivadas parciales son Hölder-continuas con exponente  $\gamma$ .*

En este espacio la siguiente norma está bien definida:

$$\| u \|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [ D^\alpha u ]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} .$$

El espacio de funciones  $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$  es un espacio de Banach.

**Definición 2.1.2** *Un conjunto abierto  $\Omega \subset R^n$  es de clase  $\mathcal{C}^r$  si  $\Omega$  está localmente a un lado de  $\Gamma$  y existen subconjuntos abiertos  $X_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, \dots, m$ , tal que:*

1.  $\overline{X_0} \subset \Omega$
2.  $\overline{\Omega} \subset \bigcup_0^m X_i$
3. *Para todo índice  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , existe una aplicación  $\phi_i : X_i \rightarrow B(0, 1)$  con  $\phi_i \in \mathcal{C}^r(X_i)$ ,  $\phi_i^{-1} \in \mathcal{C}^r(B(0, 1))$  y tal que:*
  - $\phi_i(X_i \cap \Omega) = B(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^n$   
 $= \{ y = (\hat{y}, y_n) \in \mathbb{R}^n / y \in B(0, 1), y_n > 0 \}$
  - $\phi_i(X_i \cap \Gamma) = \{ y = (\hat{y}, y_n) \in \mathbb{R}^n / y \in B(0, 1), y_n = 0 \}$
  - $\phi_i(\partial X_i \cap \Omega) = \{ y = (\hat{y}, y_n) \in \mathbb{R}^n / \| y \| = 1, y_n > 0 \}$

Se dice que  $\{(X_i, \phi_i)\}_{i=1, \dots, m}$  es un sistema de cartas locales para  $\Gamma$ .

Por otro lado, si  $\phi_i \in \mathcal{C}^{k, \gamma}(\overline{X_i})$  y  $\phi_i^{-1} \in \mathcal{C}^{k, \gamma}(\overline{B(0, 1)})$  se dice que  $\Omega$  es un dominio de clase  $\mathcal{C}^{k, \gamma}$  ó  $\Omega \in \mathcal{C}^{k, \gamma}$ .

Segundo, se consideran las desigualdades de Sobolev y los teoremas de compacidad.

Sea  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 1$  y  $1 \leq p < \infty$ . Sea  $\Omega$  acotado y de clase  $\mathcal{C}^{0, 1}$ . El espacio de Sobolev  $W^{m, p}(\Omega)$  se define como

$$W^{m, p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

**Notación:**  $H^m(\Omega) = W^{m, 2}(\Omega)$ .

### 2.1.1 Teoremas de inclusión

1. Si  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$  entonces  $W^{m, p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  con  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$  y

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(m, p, n, \Omega) \|u\|_{W^{m, p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m, p}(\Omega). \quad (2.1)$$

2. Si  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$  entonces  $W^{m, p}(\Omega) \subset L^q(\Theta)$ , para cualquier  $\Theta$  acotado,  $\Theta \subset \Omega$ , cualquier  $q : 1 \leq q < \infty$  y

$$\|u\|_{L^q(\Theta)} \leq c(m, p, n, q, \Theta, \Omega) \|u\|_{W^{m, p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m, p}(\Omega). \quad (2.2)$$

3. Si  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$  entonces  $W^{m, p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Theta)$  c.t.p., para cualquier  $\Theta$  acotado,  $\Theta \subset \Omega$  y

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0(\Theta)} \leq c(m, p, n, \Theta, \Omega) \|u\|_{W^{m, p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m, p}(\Omega). \quad (2.3)$$

Las anteriores propiedades son válidas también para  $W_0^{m, p}(\Omega)$  en lugar de  $W^{m, p}(\Omega)$  sin ninguna restricción para  $\Omega$ . En particular para el caso  $p = 2$ ,  $m = 1$ , se tiene:

$$n = 2 : \quad H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \text{cualquier } q : 1 \leq q < \infty \quad (2.4)$$

$$n \geq 3 : \quad H_0^1(\Omega) \subset L^{2n/(n-2)}(\Omega). \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Teoremas de Compacidad

1. Si  $1 \leq p < n$  :

$$W^{1, p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \quad \text{cualquier } q : 1 \leq q < q_1 \quad (2.6)$$

$$\text{con } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

2. Si  $p \geq n$  :

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \text{ cualquier } q : 1 \leq q < \infty. \quad (2.7)$$

En ambos casos  $\subset\subset$  denotando inclusión compacta.

Las anteriores propiedades son válidas también para  $W_0^{1,p}(\Omega)$  en lugar de  $W^{1,p}(\Omega)$  sin ninguna restricción sobre  $\Omega$ . En particular para el caso  $p = 2$ , se tiene:

$$n = 2 : H_0^1(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \text{ cualquier } q : 1 \leq q < \infty \quad (2.8)$$

$$n \geq 3 : H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega). \quad (2.9)$$

Tercero, se caracteriza el gradiente de una distribución.

**Proposición 2.1.1** *Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ ,  $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $\mathbf{f} = \nabla p$ , para algún  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , es que*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n / \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \}.$$

**Prueba.** Para todo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle D_i p, v_i \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle p, D_i v_i \rangle \\ &= - \langle p, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

El recíproco se prueba usando un profundo resultado de De Rham [19].

**Proposición 2.1.2** *Sea  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ , de clase  $\mathcal{C}^{0,1}$ .*

1. *Si  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tiene todas sus primeras derivadas  $D_i p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en  $L^2(\Omega)$ , entonces  $p \in L^2(\Omega)$  y*

$$| p |_{L^2(\Omega)/R} \leq c(\Omega) | \nabla p |$$

donde  $L^2(\Omega)/R$  es isomorfo al subespacio de  $L^2(\Omega)$  ortogonal a las constantes, ésto es, al conjunto

$$\left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p(x) dx = 0 \right\}.$$

2. Si  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tiene todas sus primeras derivadas  $D_i p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en  $H^{-1}(\Omega) := [H_0^1(\Omega)]'$ , entonces  $p \in L^2(\Omega)$  y

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega) \|\nabla p\|_{[H^{-1}(\Omega)]^n}.$$

Deny y Lions [18] prueban la primera parte, la segunda es probada en Nečas [27].

A continuación, se definen y caracterizan los espacios  $V$  y  $\tilde{V}$  en los cuales Temam prueba existencia y unicidad de solución de las Ecuaciones de Navier-Stokes. Más aún, se introduce una forma no lineal (trilineal) que se utiliza en la formulación variacional.

Los espacios  $V$  y  $\tilde{V}$  son definidos por:

$$V := \overline{\mathcal{V}}^{[H_0^1(\Omega)]^n} \quad (2.10)$$

$$\tilde{V} := \overline{\mathcal{V}}^{[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n} \quad (2.11)$$

donde  $H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$  es equipado con la norma  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\cdot\|_{L^n(\Omega)}$ .

En general  $\tilde{V}$  es un subespacio de  $V$ , diferente de  $V$ , pero por (2.4) y (2.5),  $\tilde{V} = V$  para  $n = 2, 3$  ó  $4$ . En estos casos  $H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega) = H_0^1(\Omega)$  y sus respectivas normas son equivalentes.

**Teorema 2.1.1** *Sea  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ , de clase  $\mathcal{C}^{0,1}$ .  $V$  es caracterizado por*

$$V = \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n / \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

**Prueba.** Sea  $\hat{V} = \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n / \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$ . Temam prueba que  $V = \hat{V}$ . Se ve que  $V \subset \hat{V}$ . En efecto:

Sea  $\mathbf{u} \in V$ , luego  $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^n$  y existe una sucesión  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$  tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ en } [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Entonces, para cada  $i = 1, \dots, n$  se tiene que

$$\|u_i - u_{im}\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ en } H_0^1(\Omega),$$

ésto implica que

$$\|D_i u_i - D_i u_{im}\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ en } L^2(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

siguiéndose que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \nabla \cdot \mathbf{u} \text{ en } L^2(\Omega),$$



pero como  $\mathbf{u}_m \in \mathcal{V}$ , se tiene que  $\nabla \cdot \mathbf{u}_m = 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , de donde se deriva que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  y así  $\mathbf{u} \in \hat{V}$ .

A continuación Temam prueba que un funcional lineal y continuo  $L : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $L|_{\mathcal{V}} \equiv 0$  es tal que  $L \equiv 0$  en  $\hat{V}$ .

Para ésto en primer lugar se ve que  $\hat{V}$  es un subespacio cerrado de  $[H_0^1(\Omega)]^n$ . Por un corolario del teorema de Hahn-Banach,  $L$  se extiende a un funcional lineal y continuo cuyo dominio es  $[H_0^1(\Omega)]^n$ . Luego  $L$  admite una (no única) representación del tipo:

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \langle l_i, v_i \rangle, \text{ con } l_i \in H^{-1}(\Omega) \text{ y } \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Ahora el vector distribución  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n) \in [H^{-1}(\Omega)]^n$  es tal que

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

como consecuencia de que  $\mathcal{V} \subset V$  y

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle l_i, v_i \rangle = L(\mathbf{v}) = 0, \text{ ya que } L|_{\mathcal{V}} \equiv 0.$$

Aplicando la proposición (2.1.1) se sigue que existe  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tal que  $\mathbf{l} = \nabla p$ . Más aún como  $D_i p = l_i \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , se establece, aplicando la proposición (2.1.2), que  $p \in L^2(\Omega)$ .

Luego, para todo  $w_i \in \mathcal{D}(\Omega)$  :

$$\langle l_i, w_i \rangle = \langle D_i p, w_i \rangle = - \langle p, D_i w_i \rangle = - (p, D_i w_i).$$

Ahora para todo  $w_i \in H_0^1(\Omega)$  existe una sucesión  $(w_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) : w_{ik} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} w_i$  en  $(H_0^1(\Omega); \|\cdot\|)$ . Entonces

$$D_i w_{ik} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} D_i w_i \text{ en } L^2(\Omega).$$

Para todo  $w_i \in H_0^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \langle l_i, w_i \rangle &= \langle l_i, \lim_{k \rightarrow \infty} w_{ik} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle l_i, w_{ik} \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} - (p, D_i w_{ik}) \\ &= - (p, D_i w_i) \end{aligned}$$

Como consecuencia, para todo  $\mathbf{v} \in \hat{V}$  se obtiene

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \langle l_i, v_i \rangle = - (p, \sum_{i=1}^n D_i v_i) = (-p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

por consiguiente,  $L \equiv 0$  en  $\hat{V}$ . Se sigue necesariamente que  $V = \hat{V}$ , lo cual es justificado por otro corolario del Teorema de Hahn-Banach.

**Lema 2.1.1** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ . La forma  $b$  definida por:

$$\begin{aligned} b : [H_0^1(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx \end{aligned}$$

es trilineal y continua.

**Prueba.** Primero se ve que para cualquier  $n$ ,  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  está bien definida, probando que

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c(n) \|\mathbf{u}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \|\mathbf{v}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \|\mathbf{w}\|_{[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n}. \quad (2.12)$$

Para  $n \geq 3$ :

Por (2.5)  $u_i \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2n/(n-2)}(\Omega)$ . Como  $v_j \in H_0^1(\Omega)$  luego  $D_i v_j \in L^2(\Omega)$ . Igualmente, como  $w_j \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$  entonces  $w_j \in L^n(\Omega)$ . Por la desigualdad general de Hölder<sup>1</sup> y el hecho que  $\frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$  se tiene que  $u_i (D_i v_j) w_j \in L^1(\Omega)$  y

$$\left| \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx \right| \leq |u_i|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^n(\Omega)}$$

luego, aplicando la desigualdad discreta de Hölder<sup>2</sup> y (2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |u_i|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^n(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |u_i|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} |D_i \mathbf{v}|_{[L^2(\Omega)]^n} |\mathbf{w}|_{[L^n(\Omega)]^n} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>**Desigualdad general de Hölder.** Sea  $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ , con  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ , y asuma que  $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$  para  $k = 1, \dots, m$ . Entonces

$$\int_{\Omega} |u_1 \cdots u_m| dx \leq \prod_{k=1}^m |u_k|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

<sup>2</sup>**Desigualdad discreta de Hölder.** Para  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $1 \leq p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  se tiene que

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\mathbf{u}|_{[L^{2n/(n-2)}(\Omega)]^n} |\nabla \mathbf{v}|_{[L^2(\Omega)]^n} |\mathbf{w}|_{[L^n(\Omega)]^n} \\
&\leq c(n, \Omega) \|\mathbf{u}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \|\mathbf{v}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \|\mathbf{w}\|_{[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n}.
\end{aligned}$$

Para  $n = 2$  :

$\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^n$ ,  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n$ ,  $\mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)]^n = [H_0^1(\Omega)]^n$  por (2.4).  
Más aún  $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  y

$$|\mathbf{u}|_{[L^4(\Omega)]^n} \leq c(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}; \quad |\mathbf{w}|_{[L^4(\Omega)]^n} \leq c(\Omega) \|\mathbf{w}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}. \quad (2.13)$$

Como  $u_i \in L^4(\Omega)$ ,  $D_i v_j \in L^2(\Omega)$  y  $w_j \in L^4(\Omega)$  entonces por la desigualdad general de Hölder se sigue que  $u_i(D_i v_j)w_j \in L^1(\Omega)$  y

$$\left| \int_{\Omega} u_i(D_i v_j) w_j dx \right| \leq |u_i|_{L^4(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^4(\Omega)}$$

luego, aplicando la desigualdad discreta de Hölder y (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} u_i(D_i v_j) w_j dx \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n |u_i|_{L^4(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=1}^n |u_i|_{L^4(\Omega)} |D_i \mathbf{v}|_{[L^2(\Omega)]^n} |\mathbf{w}|_{[L^4(\Omega)]^n} \\
&\leq |\mathbf{u}|_{[L^4(\Omega)]^n} |\nabla \mathbf{v}|_{[L^2(\Omega)]^n} |\mathbf{w}|_{[L^4(\Omega)]^n} \\
&\leq c(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \|\mathbf{v}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \|\mathbf{w}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}.
\end{aligned}$$

Es obvio que la forma  $b$  es trilineal. Probemos que  $b$  es continua. Si:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_k &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u} \text{ en } [H_0^1(\Omega)]^n, \\
\mathbf{v}_k &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{v} \text{ en } [H_0^1(\Omega)]^n \text{ y} \\
\mathbf{w}_k &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{w} \text{ en } [H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n
\end{aligned} \quad (2.14)$$

se tiene que probar que  $b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ . En efecto:

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) - b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &= \\
&= |b(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) - b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \\
&= |b(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}, \mathbf{w}_k) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_k) - b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \\
&= |b(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}, \mathbf{w}_k) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_k - \mathbf{w})| \\
&\leq |b(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k)| + |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}, \mathbf{w}_k)| + |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_k - \mathbf{w})|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(n) \| \mathbf{u}_k - \mathbf{u} \|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \| \mathbf{v}_k \|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \| \mathbf{w}_k \|_{[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n} \\
&\quad + c(n) \| \mathbf{u} \|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \| \mathbf{v}_k - \mathbf{v} \|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \| \mathbf{w}_k \|_{[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n} \\
&\quad + c(n) \| \mathbf{u} \|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \| \mathbf{v} \|_{[H_0^1(\Omega)]^n} \| \mathbf{w}_k - \mathbf{w} \|_{[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n} \\
&\quad \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

aquí se ha usado (2.12) y (2.14).

En particular se tiene:

**Lema 2.1.2** *Para  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $b$  es una forma trilineal en  $V \times V \times \tilde{V}$ . Si  $n \leq 4$ ,  $b$  es trilineal continua en  $V \times V \times V$ .*

## 2.2 Formulación variacional del problema homogéneo

Sea  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ , de clase  $\mathcal{C}^{0,1}$  y sea  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$  ó  $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ . Se busca una función vectorial  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  representando la velocidad del fluido y una función escalar  $p$  representando la presión, definidas en  $\Omega$  y que satisfacen el siguiente problema de valor de frontera:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{ en } \Omega \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ en } \Omega \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ en } \Gamma \quad (2.17)$$

Si  $\mathbf{u}$  y  $p$  son funciones suaves satisfaciendo (2.15)–(2.17), tomando el producto interior de (2.15) con  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , se obtiene:

$$(-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \quad (2.18)$$

Analizando  $(-\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v})$ :

$$(-\Delta u_i, v_i) = - \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx = \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx - \int_{\Gamma} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} ds \quad (1a. \text{ ident. Green}).$$

Como  $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$  entonces  $v_i = 0$  en  $\Gamma$ . Luego

$$(-\Delta u_i, v_i) = \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx = ((u_i, v_i))$$

por consiguiente

$$(-\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})). \quad (2.19)$$

Analizando  $(\nabla p, \mathbf{v})$ :

$$\begin{aligned} (D_i p, v_i) &= \int_{\Omega} v_i D_i p \, dx = - \int_{\Omega} p D_i v_i \, dx \quad (\text{integración por partes}) \\ &= -(p, D_i v_i) \end{aligned}$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^n (D_i p, v_i) = - \sum_{i=1}^n (p, D_i v_i) = -(p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad \text{pues } v \in \mathcal{V}$$

luego

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = 0. \quad (2.20)$$

Reemplazando (2.19) y (2.20) en (2.18) y considerando la forma  $b$  del lema 2.1.1 se obtiene

$$\nu ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.21)$$

Cada lado de (2.21) depende lineal y continuamente de  $\mathbf{v}$  para la topología de  $[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n$ . Luego la igualdad (2.21) es válida por continuidad para todo  $v \in \tilde{V}$ .

Con respecto a la función suave  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$  y por el teorema de trazas (que también es válido para dominios Lipschitzianos, ver Wloka [36])  $u_i \in \ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$ , donde  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ , ya que por (2.17):

$$\gamma_0 u_i = u_i|_{\Gamma} = 0.$$

Entonces  $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^n$  verificando por (2.16) que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$ . De acuerdo al teorema 2.1.1 se concluye que  $\mathbf{u} \in V$  y satisface

$$\nu ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}. \quad (2.22)$$

Recíprocamente: se asume que  $\mathbf{u} \in V$  satisface (2.22).

Como  $(\nu \Delta \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \mathbf{f}) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ , entonces es posible tomar en el sentido distribucional

$$\langle \nu \Delta \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

lo que implica, aplicando la proposición 2.1.1, que existe una distribución  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tal que:

$$\nu \Delta \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \mathbf{f} = \nabla p \quad \text{en } \Omega, \quad \text{en el sentido distribucional.}$$

Más aún por la proposición 2.1.2 se puede afirmar para  $n \leq 4$  que  $p \in L^2(\Omega)$ .

En efecto:

Para  $n = 3$  ó  $4$  por (2.5) se tiene  $H_0^1(\Omega) \subset L^n(\Omega)$ , entonces  $L^{n'}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  con  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} = 1$ .

Por (2.5)  $u_i \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2n/(n-2)}(\Omega)$ . Además  $D_i u_j \in L^2(\Omega)$ .

Por consiguiente  $u_i D_i u_j \in L^{n'}(\Omega)$  ya que  $\frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{n'}$ . Esto implica que  $u_i D_i \mathbf{u} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ .

Para  $n = 2$ ,  $u_i \in H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  por (2.4). Además  $D_i \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^n$ , luego  $u_i D_i \mathbf{u} \in [L^{4/3}(\Omega)]^n$ . Como  $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , entonces  $L^{4/3}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  lo que implica que  $u_i D_i \mathbf{u} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ .

Es fácil ver que  $\Delta \mathbf{u} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$  y  $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ .

Por otro lado, usando el hecho que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \in L^2(\Omega)$ , ya que  $\mathbf{u} \in V$ , se establece que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$ , en el sentido distribucional.

Finalmente  $u_i \in H_0^1(\Omega) = \ker(\gamma_0)$ , entonces  $\gamma_0(u_i) = 0$  en  $\Gamma, \forall i = 1, \dots, n$ .

Como conclusión, la formulación variacional del problema homogéneo de Navier-Stokes es:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \in V : \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}. \quad (2.23)$$

Notemos que esta formulación variacional reduce el problema clásico (2.15)–(2.17) al problema de encontrar sólo  $\mathbf{u}$ , la existencia de  $p$  es una consecuencia de la proposición 2.1.1 y proposición 2.1.2.

Para probar existencia y unicidad de solución del problema homogéneo de Navier-Stokes, Temam establece algunas propiedades de la forma trilineal  $b$  y algunos lemas previos.

### Lema 2.2.1

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n \quad (2.24)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \in V; \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n. \quad (2.25)$$

**Prueba.** Por la continuidad de  $b$  es suficiente probar (2.24) para  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  y  $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) v_j \, dx &= \int_{\Omega} u_i D_i \left( \frac{v_j^2}{2} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j^2) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (D_i u_i) v_j^2 \, dx. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) v_j \, dx = \sum_{i,j=1}^n -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (D_i u_i) v_j^2 \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) v_j^2 \, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para probar (2.25):  $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n$  luego  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = 0$  por (2.24), lo que implica que

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$$

por consiguiente, aplicando (2.24) se obtiene:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

**Lema 2.2.2** *Sea  $X$  un espacio de Hilbert finito dimensional con producto interior  $[\cdot, \cdot]$  y norma  $[\cdot]$  y sea  $P$  una aplicación continua de  $X$  en sí mismo, tal que*

$$[P(x), x] > 0, \quad \forall x \in X : [x] = k > 0.$$

*Entonces existe  $\xi \in X$ ,  $[\xi] \leq k$  tal que  $P(\xi) = 0$ .*

**Prueba.** Para  $k > 0$  sea  $D_k := \{y \in X / [y] \leq k\}$ . Para todo  $x \in \partial(D_k) : [P(x), x] > 0$ . Se prueba por el absurdo que existe  $\xi \in D_k$  tal que  $P(\xi) = 0$ . Para ésto se supone que  $P$  no tiene ceros en  $D_k$  (ésto es  $P(x) \neq 0, \forall x \in D_k$ ). Se define

$$\begin{aligned}
S : D_k &\rightarrow D_k \\
\xi &\mapsto S(\xi) := -k \frac{P(\xi)}{[P(\xi)]}
\end{aligned}$$

Note que para  $\xi \in D_k$  se tiene  $[S(\xi)] = k$ , luego  $S(\xi) \in \partial(D_k) \subset D_k$ . Más aún, por la suposición hecha, la aplicación  $S$  es continua. Por el teorema de Brouwer<sup>3</sup> se sigue que  $S$  tiene un punto fijo en  $D_k$  denotado por  $\xi_0$ . Por lo tanto  $S(\xi_0) = \xi_0$ , ésto implica que

$$-k \frac{P(\xi_0)}{[P(\xi_0)]} = \xi_0 \quad \text{y} \quad [\xi_0] = k.$$

Entonces

$$\left[ -k \frac{P(\xi_0)}{[P(\xi_0)]}, \xi_0 \right] = [\xi_0, \xi_0] = [\xi_0]^2 = k^2$$

lo que significa que  $[P(\xi_0), \xi_0] = -k [P(\xi_0)] < 0$ , lo que contradice la suposición. Como conclusión existe  $\xi \in D_k$  tal que  $P(\xi) = 0$ .

---

<sup>3</sup>**Teorema de Brouwer:** Si  $B = B(0, R)$ ,  $R > 0$  y  $f : B \rightarrow B$  es una aplicación continua, entonces  $f$  tiene un punto fijo.

**Lema 2.2.3** Si  $\mathbf{u}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}$  en  $V$  y  $\mathbf{u}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}$  en  $[L^2(\Omega)]^n$ , entonces

$$b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.26)$$

**Prueba.** En forma similar a la prueba de (2.24) y (2.25) del lema 2.2.1 se tiene que

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_{ki}(D_i v_j) u_{kj} dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_{ki} u_{kj} (D_i v_j) dx \end{aligned}$$

Además,  $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$  luego  $v_j \in \mathcal{D}(\Omega)$  y  $D_i v_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Esto implica que  $D_i v_j \in L^\infty(\Omega)$ . Por el hecho que

$$u_{ki} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_i \in L^2(\Omega) \text{ y } u_{kj} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_j \in L^2(\Omega)$$

entonces<sup>4</sup>

$$u_{ki} u_{kj} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_i u_j \in L^1(\Omega)$$

y consecuentemente

$$u_{ki} u_{kj} D_i v_j \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_i u_j D_i v_j \in L^1(\Omega).$$

Nuevamente, en forma similar a la prueba de (2.24) y (2.25), se obtiene

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_{ki} u_{kj} D_i v_j dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) u_j dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i u_j) v_j dx$$

por lo tanto

$$b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

**Teorema 2.2.1** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $R^n$ , de clase  $\mathcal{C}^{0,1}$  y sea  $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ . Luego el problema (2.23):

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \in V : \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}$$

---

<sup>4</sup>**Resultado:** Si  $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \in L^p(\Omega)$  y  $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \in L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  entonces  $f_k g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f g \in L^1(\Omega)$ .



tiene al menos una solución  $\mathbf{u} \in V$  y existe una distribución  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ( $p \in L^2(\Omega)$  si  $n = 2, 3$  ó  $4$ ) tal que (2.15)–(2.17):

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \text{ en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \text{ en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

son satisfechas.

**Prueba.** Temam prueba la existencia de  $\mathbf{u}$  utilizando el método de Galerkin: construye una solución aproximada de (2.23) y luego pasa al límite.

$[H_0^1(\Omega)]^n$  es un espacio de Hilbert separable y  $\tilde{V}$  como subespacio de  $[H_0^1(\Omega)]^n$  es Hilbert y separable<sup>5</sup>.

Debido a que un espacio de Hilbert separable admite una base Hilbertiana<sup>6</sup> y que  $\tilde{V} := \overline{\mathcal{V}}^{[H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n}$  se sigue que existe una sucesión  $w_1, \dots, w_m, \dots$  de elementos linealmente independientes de  $V$  tal que el espacio generado por la sucesión  $(w_k)$  y denotado por  $W$  es denso en  $\tilde{V} \subset V$ .

Para cada entero fijo  $m \geq 1$ , se busca definir una solución aproximada  $\mathbf{u}_m$  de (2.23) como

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^m \xi_{i,m} \mathbf{w}_i; \quad \xi_{i,m} \in \mathbb{R} \quad (2.27)$$

$$\nu ((\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k)) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.28)$$

(2.27)–(2.28) es un sistema de ecuaciones no lineales para  $\xi_{1,m}, \dots, \xi_{m,m}$ ; para la existencia de una solución de este sistema se tiene que considerar lo siguiente:

Sea  $X = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$ ;  $X = (X, ((\cdot, \cdot)))$  es un espacio de Hilbert, donde  $((\cdot, \cdot))$  es el producto interior de  $V$ , definido anteriormente.

Se define

$$\begin{aligned} P_m : X &\rightarrow X \\ \mathbf{u} &\mapsto P_m(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Todo subespacio de un espacio separable, es separable.

<sup>6</sup>**Base Hilbertiana** de un espacio de Hilbert  $H$  es una sucesión  $(e_k)$  de elementos de  $H$  tal que:

1.  $|e_k| = 1, \forall k; (e_k, e_l) = 0, \forall k, l: k \neq l$
2. El espacio generado por la sucesión  $(e_k)$  es denso en  $H$ .

de la siguiente forma:

Para  $\mathbf{u} \in X$  :

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{u}} : X &\rightarrow R \\ \mathbf{v} &\mapsto F_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

por (2.25) y (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} |F_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})| &\leq \nu|((\mathbf{u}, \mathbf{v}))| + |b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| + |(\mathbf{f}, \mathbf{v})| \\ &= \nu|((\mathbf{u}, \mathbf{v}))| + |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u})| + |(\mathbf{f}, \mathbf{v})| \\ &\leq \nu\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V + c(n)\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{v}\|_V\|\mathbf{u}\|_{\tilde{V}} + \|\mathbf{f}\|_{V'}\|\mathbf{v}\|_V \\ &= (\nu\|\mathbf{u}\|_V + c(n)\|\mathbf{u}\|_V\|\mathbf{u}\|_{\tilde{V}} + \|\mathbf{f}\|_{V'})\|\mathbf{v}\|_V, \quad \forall \mathbf{v} \in X \end{aligned}$$

entonces  $F_{\mathbf{u}} \in X'$  (ésto es,  $F_{\mathbf{u}}$  es lineal y continua en  $X$ ). Por el teorema de representación de Riesz se establece que existe un único  $\mathbf{y} = P_m(\mathbf{u}) \in X$  tal que

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = ((\mathbf{y}, \mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in X$$

ésto significa que

$$((P_m \mathbf{u}, \mathbf{v})) = \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in X, \forall \mathbf{u} \in X. \quad (2.29)$$

$P_m$  es continua:

Si  $\mathbf{u}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}$  en  $X$  se debe probar que  $P_m(\mathbf{u}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P_m(\mathbf{u})$  en  $X$ , lo que es equivalente a probar que  $((P_m(\mathbf{u}_k), \mathbf{v})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} ((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{v}))$ ,  $\forall \mathbf{v} \in X$ . En efecto:

$$\begin{aligned} &|((P_m(\mathbf{u}_k), \mathbf{v})) - ((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{v}))| = \\ &= |\nu((\mathbf{u}_k, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{f}, \mathbf{v})| \\ &= |\nu((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \\ &\leq \underbrace{\nu|((\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{v}))|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|}_{\rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Más aún por (2.24):

$$\begin{aligned} ((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) &= \nu\|\mathbf{u}\|^2 + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}) \\ &= \nu\|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{f}, \mathbf{u}) \\ &\geq \nu\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{f}\|_{V'}\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

luego

$$((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) \geq \|\mathbf{u}\|(\nu\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{f}\|_{V'})$$

se sigue que  $((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) > 0$  para  $\|\mathbf{u}\| = k$  y  $k$  lo suficientemente grande (más precisamente para  $k > \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{V'}$ ).

De esta forma se tiene la hipótesis del lema 2.2.2 y luego se afirma que existe  $\mathbf{u}_m \in X$  tal que  $P_m(\mathbf{u}_m) = 0$ . Por (2.29) y para  $k = 1, \dots, m$ , ésto implica que

$$\nu((\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k)) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k) - (\mathbf{f}, \mathbf{w}_k) = 0$$

por lo tanto, existe una solución  $\mathbf{u}_m$  de (2.27)–(2.28).

**Paso al límite:**

Multiplicando (2.28) por  $\xi_{k,m}$  y sumando las respectivas igualdades para  $k = 1, \dots, m$  se obtiene

$$\nu((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)$$

luego

$$\nu \|\mathbf{u}_m\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m) \leq \|\mathbf{f}\|_{V'} \|\mathbf{u}_m\|$$

lo que implica

$$\|\mathbf{u}_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{V'}$$

entonces  $(\mathbf{u}_m)$  es acotada en  $V$ , el cual es Hilbert y consecuentemente reflexivo<sup>7</sup>. Se sigue que existe una subsucesión  $(\mathbf{u}_{m'}) \subset (\mathbf{u}_m)$  y existe  $\mathbf{u} \in V$  tal que  $\mathbf{u}_{m'} \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} \mathbf{u}$  en  $V$ .

En vista de (2.8) y (2.9) se tiene que  $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ , por lo que  $\mathbf{u}_{m'} \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} \mathbf{u}$  en  $[L^2(\Omega)]^n$ .

De (2.28), para cualquier  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \dots$  se tiene:

$$\nu((\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (2.30)$$

para tal  $\mathbf{v}$  se considera

$$\begin{aligned} g &: V \rightarrow R \\ \mathbf{w} &\mapsto g(\mathbf{w}) = ((\mathbf{w}, \mathbf{v})) \end{aligned}$$

como  $\mathbf{u}_{m'} \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} \mathbf{u}$  en  $V$  y  $g \in V'$  entonces  $g(\mathbf{u}_{m'}) \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} g(\mathbf{u})$ , lo que significa que  $((\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v})) \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ .

Aplicando el lema 2.2.3 en (2.30), para  $m' \rightarrow \infty$  :  $b(\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v}) \rightarrow b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  y

$$\nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

---

<sup>7</sup>Toda sucesión acotada en un espacio reflexivo posee una subsucesión débilmente convergente

para cualquier  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \dots$  y consecuentemente para todo  $\mathbf{v} \in W$ . Ya que  $W$  es denso en  $\tilde{V}$ , para cada  $\mathbf{v} \in \tilde{V}$  existe una sucesión  $(\mathbf{z}_k) \subset W$  tal que  $\mathbf{z}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}$  en  $\tilde{V}$ , entonces por la continuidad de  $b$  se tiene que

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Por la última convergencia y haciendo  $k \rightarrow \infty$  en

$$\nu((\mathbf{u}, \mathbf{z}_k)) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z}_k) = (\mathbf{f}, \mathbf{z}_k)$$

se obtiene

$$\nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}$$

lo que significa que  $\mathbf{u} \in V$  es una solución de (2.23).

Para la unicidad de solución del problema homogéneo de Navier-Stokes, Temam presenta el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.2** *Si  $n \leq 4$  y  $\nu$  es “suficientemente grande” ó  $\mathbf{f}$  es “suficientemente pequeño” tal que*

$$\nu^2 > c(n) \|\mathbf{f}\|_{V'} \quad (2.31)$$

*entonces existe un único  $\mathbf{u} \in V$  solución de (2.23). La constante  $c(n)$  en (2.31) es la constante  $c(n)$  de (2.12).*

**Prueba.** Como para  $n \leq 4$  se tiene que  $V = \tilde{V}$ , luego en (2.23) se puede tomar  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  y se obtiene

$$\nu \|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{u}) \leq \|\mathbf{f}\|_{V'} \|\mathbf{u}\|$$

por consiguiente una solución de (2.23) satisface

$$\|\mathbf{u}\| \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{V'}. \quad (2.32)$$

A continuación, sean  $\mathbf{u}_*$  y  $\mathbf{u}_{**}$  dos soluciones de (2.23) y sea  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{**}$ , luego para todo  $\mathbf{v} \in V$ :

$$\nu((\mathbf{u}_*, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_*, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (2.33)$$

$$\nu((\mathbf{u}_{**}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}_{**}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (2.34)$$

Sustrayendo (2.34) de (2.33) se tiene respectivamente

$$\nu((\mathbf{u}_*, \mathbf{v})) - \nu((\mathbf{u}_{**}, \mathbf{v})) = \nu((\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v})) = \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$$

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_*, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}_{**}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) &= b(\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}_{**}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) \\
&= b(\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{**}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) \\
&= b(\mathbf{u}_*, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

entonces

$$\nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}_*, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.35)$$

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  en (2.35):  $\nu \|\mathbf{u}\|^2 = -b(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{u})$ . Por (2.12) y (2.32) se sigue que

$$\begin{aligned}
\nu \|\mathbf{u}\|^2 = |b(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{**}, \mathbf{u})| &\leq c(n) \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{u}_{**}\| \\
&\leq c(n) \|\mathbf{u}\|^2 \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{V'},
\end{aligned}$$

luego

$$(\nu^2 - c(n) \|\mathbf{f}\|_{V'}) \|\mathbf{u}\|^2 \leq 0.$$

Por (2.31) se concluye que  $\|\mathbf{u}\| = 0$  y consecuentemente  $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{**}$ .

**Observación 2.2.1** En (2.31) se puede reemplazar  $c(n)$  por un valor específico, por ejemplo  $c(n) = 2\sqrt{3d}$ , donde  $d$  es el diámetro de  $\Omega$  ó el grosor de  $\Omega$  en alguna dirección acotada, como se ve en Ladyzhenskaya [23].

## 2.3 Las ecuaciones de Navier-Stokes: caso no homogéneo

Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $R^n$ , de clase  $C^{0,1}$  y sea  $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$  y  $\phi$  definida en  $\Gamma$  bajo las siguientes condiciones:

$$\phi = \gamma_0(\mathbf{curl} \boldsymbol{\xi}), \text{ donde } \boldsymbol{\xi} \in [H^2(\Omega)]^n, D_i \boldsymbol{\xi} \in [L^n(\Omega)]^n, \boldsymbol{\xi} \in [L^\infty(\Omega)]^n \quad (2.36)$$

El problema es encontrar  $\mathbf{u}$  y  $p$  tal que:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{ en } \Omega \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ en } \Omega \quad (2.38)$$

$$\mathbf{u} = \phi, \text{ en } \Gamma. \quad (2.39)$$

Para probar existencia de solución de este problema no homogéneo, Temam necesita de algunos lemas previos.

**Lema 2.3.1** Sea  $\rho(x) = d(x, \Gamma) =$  distancia de  $x$  a  $\Gamma$ . Para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una función  $\theta_\epsilon \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  tal que

$$\theta_\epsilon = 1 \quad \text{en una vecindad de } \Gamma \text{ que depende de } \epsilon \quad (2.40)$$

$$\theta_\epsilon = 0 \quad \text{si } \rho(x) > 2\delta(\epsilon), \quad \delta(\epsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (2.41)$$

$$|D_k \theta_\epsilon(x)| \leq \epsilon / \rho(x), \quad \text{si } \rho(x) \leq 2\delta(\epsilon), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.42)$$

**Prueba.** Se considera

$$\eta_\epsilon : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \mapsto \eta_\epsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \lambda < \delta^2 \\ \epsilon \log\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) & \text{si } \delta^2 \leq \lambda \leq \delta \\ 0 & \text{si } \lambda > \delta \end{cases}$$

y se define  $\zeta_\epsilon(x) = \eta_\epsilon(\rho(x))$ ,  $\forall x \in \overline{\Omega}$ .

De esta forma

$$\zeta_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \rho(x) < \delta^2 \\ \epsilon \log\left(\frac{\delta}{\rho(x)}\right) & \text{si } \delta^2 \leq \rho(x) \leq \delta \\ 0 & \text{si } \rho(x) > \delta. \end{cases}$$

Por regularización se define  $\theta_\epsilon := \zeta_\epsilon * \rho_{\delta(\epsilon)} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , donde se asume que  $\zeta_\epsilon$  se extiende por 0 fuera de  $\overline{\Omega}$ . Se sigue que  $\text{sop } \theta_\epsilon \subset \{x \in \overline{\Omega} / 0 \leq \rho(x) < 2\delta\}$ . Definido de esta forma  $\theta_\epsilon$  satisface (2.40), (2.41) y (2.42).

**Lema 2.3.2** Existe una constante positiva  $c_1(\Omega)$  tal que

$$\left| \frac{1}{\rho} v \right|_{L^2(\Omega)} \leq c_1(\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.43)$$

**Prueba.** Tomando una partición de la unidad subordinada a un cubrimiento de  $\Gamma$  y coordenadas locales cerca a la frontera (lo cual es posible ya que  $\Omega$  es acotado y de clase  $\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ ) la prueba de (2.43) se reduce al dominio

$$\Omega = \{x = (x', x_n) / x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$$

en este caso  $\rho(x) = x_n$ .

Temam prueba primeramente la siguiente desigualdad unidimensional:

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{v(s)}{s} \right|^2 ds \leq 4 \int_0^{+\infty} |v'(s)|^2 ds, \quad \forall v \in \mathcal{D}(0, +\infty). \quad (2.44)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{v(s)}{s} &= \frac{1}{s} \int_0^s w(t) dt, \quad \text{con } v' = w \\ \int_0^{+\infty} \frac{|v(s)|^2}{s^2} ds &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2} \left[ \int_0^s w(t) dt \right]^2 ds \end{aligned}$$

Haciendo en el lado derecho  $s = e^\sigma$  y luego  $t = e^\tau$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{|v(s)|^2}{s^2} ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma} \left[ \int_0^{e^\sigma} w(t) dt \right]^2 d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma} \left[ \int_{-\infty}^{\sigma} w(e^\tau) e^\tau d\tau \right]^2 d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-\sigma/2} e^\tau w(e^\tau) d\tau \right]^2 d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-(\sigma-\tau)/2} w(e^\tau) e^{\tau/2} d\tau \right]^2 d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Y}(\sigma - \tau) e^{-(\sigma-\tau)/2} w(e^\tau) e^{\tau/2} d\tau \right]^2 d\sigma
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{Y}$  representa la función de Heaviside

$$\mathcal{Y}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma < 0. \end{cases}$$

Para terminar la prueba de (2.44) se define

$$f(t) = \mathcal{Y}(t) e^{-t/2} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad g(t) = w(e^t) e^{t/2} \in L^2(\mathbb{R})$$

entonces  $f * g \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .

Tomando el cuadrado de esta desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} [f * g(\sigma)]^2 d\sigma &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(\sigma)| d\sigma \right]^2 \int_{\mathbb{R}} [g(\sigma)]^2 d\sigma \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma - \tau) g(\tau) d\tau \right]^2 d\sigma &\leq \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Y}(\sigma) e^{-\sigma/2} d\sigma \right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [w(e^\sigma) e^{\sigma/2}]^2 d\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Y}(\sigma - \tau) e^{-(\sigma-\tau)/2} w(e^\tau) e^{\tau/2} d\tau \right]^2 d\sigma \\
\leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}(\sigma) e^{-\sigma/2} d\sigma \right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [w(e^\sigma)]^2 e^\sigma d\sigma
\end{aligned}$$

finalmente, se consigue (2.44) calculando los términos del lado derecho de esta desigualdad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Y}(\sigma) e^{-\sigma/2} d\sigma = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma/2} d\sigma = 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [w(e^\sigma)]^2 e^\sigma d\sigma = \int_0^{+\infty} [w(t)]^2 dt = \int_0^{+\infty} |v'(s)|^2 ds.$$

Así, por (2.44) para todo  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  en el nuevo dominio  $\Omega$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{[v(x)]^2}{x_n^2} dx &= \int_{R^{n-1}} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{|v(x', x_n)|^2}{x_n^2} dx_n \right] dx' \\ &\leq \int_{R^{n-1}} \left[ 4 \int_0^{+\infty} |D_n v(x', x_n)|^2 dx_n \right] dx' \\ &= 4 \int_{\Omega} |D_n v(x)|^2 dx \\ &\leq 4 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En consecuencia para el dominio original se tiene que

$$\int_{\Omega} \frac{|v(x)|^2}{|\rho(x)|^2} dx \leq c_1^2(\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

como  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$ , por continuidad se sigue que la última desigualdad es válida para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Lema 2.3.3** *Para cualquier  $\gamma > 0$ , existe  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\gamma)$  tal que*

$$\boldsymbol{\psi} \in [H^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}_0(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\phi} \text{ en } \Gamma \quad (2.45)$$

$$|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})| \leq \gamma \|\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V} \quad (2.46)$$

**Prueba.** Temam considera la función  $\theta_\epsilon$  del lema 2.3.1 y  $\boldsymbol{\xi}$  de (2.36) y define  $\boldsymbol{\psi} = \text{curl}(\theta_\epsilon \boldsymbol{\xi})$ . Como  $\theta_\epsilon \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in [H^2(\Omega)]^n$ ,  $D_i \boldsymbol{\xi} \in [L^n(\Omega)]^n$  y  $\boldsymbol{\xi} \in [L^\infty(\Omega)]^n$  se tiene que  $\boldsymbol{\psi} \in [H^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n$ . Por (2.36) y (2.40) se sigue que  $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$  y  $\boldsymbol{\gamma}_0(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\phi}$  en  $\Gamma$ , lo que completa la prueba de (2.45). Para la prueba de (2.46). Por la definición de  $\boldsymbol{\psi}$  se satisface

$$\psi_j(x) = 0 \text{ si } \rho(x) > 2\delta(\epsilon), \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.47)$$

Más aún por (2.42) y como  $\boldsymbol{\psi} \in [L^\infty(\Omega)]^n$ , para  $\rho(x) \leq 2\delta(\epsilon)$  y para todo índice  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$  se tiene

$$|\psi_j(x)| \leq c_2 \left( \frac{\epsilon}{\rho(x)} + |D\boldsymbol{\xi}(x)| \right) \quad (2.48)$$



donde  $|D\xi(x)| = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |D_i \xi_j(x)|^2 \right\}^{1/2}$ .

Se define  $\hat{\Omega} := \{x \in \Omega / \rho(x) \leq 2\delta\}$ . Para todo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
|v_i \psi_j|_{L^2(\Omega)} &= \left\{ \int_{\Omega} |v_i(x)|^2 |\psi_j(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \int_{\hat{\Omega}} |v_i(x)|^2 |\psi_j(x)|^2 dx + \int_{\rho(x) > 2\delta} |v_i(x)|^2 \underbrace{|\psi_j(x)|^2}_{=0} dx \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \int_{\hat{\Omega}} |v_i(x)|^2 \left[ c_2^2 \left( \frac{\epsilon}{\rho(x)} + |D\xi(x)| \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \int_{\hat{\Omega}} 2c_2^2 \left[ \frac{\epsilon^2}{\rho(x)^2} |v_i(x)|^2 + |D\xi(x)|^2 |v_i(x)|^2 \right] dx \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ 2c_2^2 \left[ \epsilon^2 \int_{\Omega} \frac{|v_i(x)|^2}{\rho(x)^2} dx + \int_{\hat{\Omega}} |D\xi(x)|^2 |v_i(x)|^2 dx \right] \right\}^{1/2} \\
&= c_3 \left\{ \left( \epsilon \left| \frac{v_i}{\rho} \right|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \left( \left[ \int_{\hat{\Omega}} |D\xi(x)|^2 |v_i(x)|^2 dx \right]^{1/2} \right)^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq c_3 \left\{ \left( \epsilon \left| \frac{v_i}{\rho} \right|_{L^2(\Omega)} + \left[ \int_{\hat{\Omega}} |D\xi(x)|^2 |v_i(x)|^2 dx \right]^{1/2} \right)^2 \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$|v_i \psi_j|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \left\{ \epsilon \left| \frac{v_i}{\rho} \right|_{L^2(\Omega)} + \left( \int_{\hat{\Omega}} |v_i(x)|^2 |D\xi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right\}; \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.49}$$

Como  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , en particular para todo índice  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$  :  $v_i \in L^\alpha(\hat{\Omega})$ , donde  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ .

Más aún, como  $|D\xi| \in L^n(\hat{\Omega})$ , por Hölder se tiene que  $v_i |D\xi| \in L^2(\hat{\Omega})$  y

$$|v_i |D\xi||_{L^2(\hat{\Omega})} \leq |v_i|_{L^\alpha(\hat{\Omega})} ||D\xi||_{L^n(\hat{\Omega})}$$

definiendo

$$\mu(\epsilon) = ||D\xi||_{L^n(\hat{\Omega})} = \left( \int_{\hat{\Omega}} |D\xi(x)|^n dx \right)^{1/n}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\left( \int_{\hat{\Omega}} |v_i(x)|^2 |D\xi(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \mu(\epsilon) |v_i|_{L^\alpha(\hat{\Omega})} \\
&\leq \mu(\epsilon) |v_i|_{L^\alpha(\Omega)}
\end{aligned}$$

reemplazando en (2.49) y aplicando (2.43) y (2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} |v_i \psi_j|_{L^2(\Omega)} &\leq c_3 \epsilon \left| \frac{v_i}{\rho} \right|_{L^2(\Omega)} + c_3 \mu(\epsilon) |v_i|_{L^\alpha(\Omega)} \\ &\leq c_4 (\epsilon + \mu(\epsilon)) \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

A continuación, para cada  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})| &= |b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})| = \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i (D_i v_j) \psi_j dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |v_i \psi_j| |D_i v_j| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |v_i \psi_j|_{L^2(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n c_4 (\epsilon + \mu(\epsilon)) \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

entonces

$$|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})| \leq c_5 (\epsilon + \mu(\epsilon)) \|\mathbf{v}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}^2. \quad (2.50)$$

Por otro lado  $\delta(\epsilon) = \exp(-1/\epsilon)$ , entonces  $\delta(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  y  $\hat{\Omega} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \Gamma$ . Note que  $\mu(\epsilon)$  puede ser escrito como  $\mu(\epsilon) = \left( \int_{\Omega} g_{\hat{\Omega}} dx \right)^{1/n}$ , donde  $g_{\hat{\Omega}} = \chi_{\hat{\Omega}} |D\boldsymbol{\xi}(x)|^n$  y

$$\chi_{\hat{\Omega}} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \hat{\Omega} \\ 0, & \text{si } x \in \Omega - \hat{\Omega} \end{cases}$$

de (2.36) se tiene que  $D_i \boldsymbol{\xi} \in [L^n(\Omega)]^n$ , luego  $g_{\hat{\Omega}} \leq |D\boldsymbol{\xi}|^n \in L^1(\Omega)$ .

Por el teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} g_{\hat{\Omega}} dx &= \int_{\Omega} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_{\hat{\Omega}} dx = 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\epsilon) &= \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} g_{\hat{\Omega}} dx \right)^{1/n} = 0 \end{aligned}$$

por este hecho se puede tomar en (2.50)  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño tal que  $c_5 (\epsilon + \mu(\epsilon)) \leq \gamma$ , lo que implica que

$$|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})| \leq \gamma \|\mathbf{v}\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

esta desigualdad es válida por continuidad para todo  $\mathbf{v} \in \tilde{V}$ , con lo que Temam completa la prueba de (2.46).

A continuación se presentan las demostraciones de existencia y unicidad de solución para el problema (2.37)–(2.39), dadas por Temam.

**Teorema 2.3.1** *Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado de  $R^n$ , de clase  $C^{0,1}$ . Sea  $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$  y  $\boldsymbol{\phi}$  definida en  $\Gamma$  bajo la condición (2.36):*

$$\boldsymbol{\phi} = \gamma_0(\mathbf{curl} \boldsymbol{\xi}), \text{ donde } \boldsymbol{\xi} \in [H^2(\Omega)]^n, D_i \boldsymbol{\xi} \in [L^n(\Omega)]^n, \boldsymbol{\xi} \in [L^\infty(\Omega)]^n.$$

*Entonces existe  $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$  y existe una distribución  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ( $p \in L^2(\Omega)$  si  $n = 2, 3$  ó 4) que verifica (2.37)–(2.39):*

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \text{ en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \text{ en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\phi}, \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

**Prueba.** Por el lema 2.3.3 para  $\gamma = \nu/2$  existe  $\boldsymbol{\psi} \in [H^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)]^n$  tal que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \text{ en } \Omega, \gamma_0(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\phi} \text{ en } \Gamma \text{ y } |b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})| \leq \nu/2 \|\mathbf{v}\|^2, \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}.$$

Sea  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}$ , entonces  $\hat{\mathbf{u}} \in [H^1(\Omega)]^n$ .

En  $\Omega$ :  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = \nabla \cdot (\mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}) = \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ . En  $\Gamma$ :  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi} = 0$ .

Como consecuencia  $\hat{\mathbf{u}} \in V$ .

Introduciendo  $\hat{\mathbf{u}}$  en (2.37) se obtiene

$$-\nu \Delta \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i D_i \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i D_i \boldsymbol{\psi} + \sum_{i=1}^n \psi_i D_i \hat{\mathbf{u}} + \nabla p = \hat{\mathbf{f}} \quad (2.51)$$

donde  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \nu \Delta \boldsymbol{\psi} - \sum_{i=1}^n \psi_i D_i \boldsymbol{\psi}$ . Es claro que  $(\mathbf{f} + \nu \Delta \boldsymbol{\psi}) \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ . Se completa ahora la prueba que  $\hat{\mathbf{f}} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ .

Para  $n = 2$ :

$\psi_i \in H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  por (2.2). Además  $D_i \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^n$ , por consiguiente  $\psi_i D_i \boldsymbol{\psi} \in [L^{4/3}(\Omega)]^n$ .

Como por (2.4)  $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  entonces  $L^{4/3}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  lo que implica que  $\psi_i D_i \boldsymbol{\psi} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ .

Para  $n \geq 3$ :

$\psi_i \in L^n(\Omega)$  y  $D_i \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^n$  entonces  $\psi_i D_i \boldsymbol{\psi} \in [L^{\alpha'}(\Omega)]^n$ :  $\frac{1}{n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\alpha'}$ .

Ya que por (2.5)  $H_0^1(\Omega) \subset L^\alpha(\Omega)$ :  $\alpha = \frac{2n}{n-2}$  y  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ , entonces  $L^{\alpha'}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ , lo que implica que  $\psi_i D_i \boldsymbol{\psi} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ .

Se puede ver que el nuevo problema se resuelve si se encuentra  $\hat{\mathbf{u}} \in V$  tal que

$$\nu((\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})) + b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = (\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}. \quad (2.52)$$

La existencia de  $\hat{\mathbf{u}} \in V$  satisfaciendo (2.52) se prueba exactamente como en el teorema 2.2.1.

Para el paso  $((P_m \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})) > 0$  para  $\|\hat{\mathbf{v}}\| = k > 0$ :

$$\begin{aligned} ((P_m \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})) &= \nu \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 + \underbrace{b(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})}_{=0} + b(\hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{v}}) + \underbrace{b(\boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})}_{=0} - (\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{v}}) \\ &\geq (\nu \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 + b(\hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{v}})) - \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{v}}\| \\ &\geq \frac{\nu}{2} \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 - \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{v}}\| \end{aligned}$$

la última desigualdad por el hecho que  $|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})| \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\|^2$  implica que  $-\frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \leq b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})$  y consecuentemente  $\frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \leq \nu \|\mathbf{v}\|^2 + b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v})$ . Por lo tanto

$$((P_m \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})) \geq \|\mathbf{v}\| \left( \frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{f}\|_{V'} \right) = k \left( \frac{\nu}{2} k - \|\mathbf{f}\|_{V'} \right)$$

tomando  $k$  lo suficientemente grande (específicamente  $k > \frac{2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{V'}$ ) se sigue que  $((P_m \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})) > 0$  para  $\|\hat{\mathbf{v}}\| = k > 0$ .

**Paso al límite:**

$$\nu ((\hat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_k)) + b(\hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_k) + b(\hat{\mathbf{u}}_m, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{w}_k) + b(\boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_k) = (\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{w}_k). \quad (2.53)$$

Multiplicando (2.53) por  $\xi_{k,m}$  y sumando las respectivas igualdades para  $k = 1, \dots, m$  se obtiene

$$\nu \|\hat{\mathbf{u}}_m\|^2 + b(\hat{\mathbf{u}}_m, \boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}_m) = (\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_m) \leq \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}_m\|$$

luego

$$\begin{aligned} \nu \|\hat{\mathbf{u}}_m\|^2 &\leq \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}_m\| - b(\hat{\mathbf{u}}_m, \boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}_m) \\ &\leq \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}_m\| + |b(\hat{\mathbf{u}}_m, \boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}_m)| \\ &\leq \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}_m\| + \frac{\nu}{2} \|\hat{\mathbf{u}}_m\|^2 \end{aligned}$$

ésto implica que

$$\|\hat{\mathbf{u}}_m\| \leq \frac{2}{\nu} \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'}.$$

Como consecuencia existe una subsucesión  $(\hat{\mathbf{u}}_{m'}) \subset (\hat{\mathbf{u}}_m)$  y existe  $\hat{\mathbf{u}} \in V$  tal que  $\hat{\mathbf{u}}_{m'} \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{u}}$  en  $V$ . Se sigue que  $\hat{\mathbf{u}}_{m'} \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{u}}$  en  $[L^2(\Omega)]^n$ . Por el lema 2.2.3 y lema 2.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} b(\hat{\mathbf{u}}_{m'}, \hat{\mathbf{u}}_{m'}, \hat{\mathbf{w}}_k) &\xrightarrow{m' \rightarrow \infty} b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}_k) \\ b(\hat{\mathbf{u}}_{m'}, \boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{w}}_k) &\xrightarrow{m' \rightarrow \infty} b(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{w}}_k) \\ b(\boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}_{m'}, \hat{\mathbf{w}}_k) &\xrightarrow{m' \rightarrow \infty} b(\boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}_k). \end{aligned}$$

Haciendo  $m' \rightarrow \infty$  en (2.53) se obtiene

$$\nu((\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})) + b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\psi}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = (\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v})$$

para cualquier  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \dots$  y luego es válido para todo  $\mathbf{v} \in \tilde{V}$ . Por lo tanto  $\hat{\mathbf{u}} \in V$  es una solución de (2.52).

**Observación 2.3.1** En vista de (2.1), (2.2) y (2.3) del teorema de inclusión de Sobolev, para  $n \leq 3$ , la condición (2.36) se reduce a  $\boldsymbol{\xi} \in [H^2(\Omega)]^n$ .

**Teorema 2.3.2** *Asuma que  $n \leq 4$ , que la norma de  $\boldsymbol{\phi}$  en  $L^\alpha(\Omega)$  ( $\alpha = 4$ , si  $n = 2$ ;  $\alpha = n$ , si  $n = 3, 4$ ) es “suficientemente pequeña” tal que*

$$|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v})| \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.54)$$

y  $\nu$  “suficientemente grande” (ó  $\hat{\mathbf{f}}$  “suficientemente pequeña”) tal que

$$\nu^2 > 4c(n) \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'}, \quad (2.55)$$

donde  $c(n)$  es la constante de (2.12) y  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \nu\Delta\boldsymbol{\phi} - \sum_{i=1}^n \phi_i D_i \boldsymbol{\phi}$ . Entonces existe una única solución  $\{\mathbf{u}, p\}$  de (2.37)-(2.39) ( $p$  es única excepto una constante).

**Prueba.** Se probó en el lema 2.2.1, lema 2.1.1 y lema 2.1.2 que para todo  $\mathbf{v} \in V$ :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}) &= -b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) \\ |b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi})| &\leq c(n) \|\mathbf{v}\|^2 |\boldsymbol{\phi}|_{L^\alpha(\Omega)} \end{aligned}$$

luego la condición (2.54) es satisfecha si  $|\boldsymbol{\phi}|_{L^\alpha(\Omega)}$  es lo suficientemente pequeña tal que

$$|\boldsymbol{\phi}|_{L^\alpha(\Omega)} \leq \frac{\nu}{2c(n)}. \quad (2.56)$$

Sea  $\mathbf{u}_1$  una solución de (2.37)-(2.39), entonces  $\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_1 - \boldsymbol{\phi}$  es una solución de (2.52) con  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi}$ . Al tomar  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}_1$  en (2.52) y aplicar (2.54) se obtiene

$$\begin{aligned} \nu \|\hat{\mathbf{u}}_1\|^2 &= -b(\hat{\mathbf{u}}_1, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}_1) + (\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}_1) \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\hat{\mathbf{u}}_1\|^2 + \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \end{aligned}$$

luego

$$\|\hat{\mathbf{u}}_1\| \leq \frac{2}{\nu} \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'}. \quad (2.57)$$

A continuación, se asume que  $\hat{\mathbf{u}}_0$  y  $\hat{\mathbf{u}}_1$  son dos soluciones de (2.37)–(2.39). Sea  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 - \boldsymbol{\phi}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_1 - \boldsymbol{\phi}$ ,  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_1$ ;  $\hat{\mathbf{u}}_0$  y  $\hat{\mathbf{u}}_1$  satisfacen (2.52) con  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi}$ :

$$\begin{aligned}\nu((\hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{v})) + b(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{v}) + b(\hat{\mathbf{u}}_0, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{v}) &= (\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ \nu((\hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v})) + b(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v}) + b(\hat{\mathbf{u}}_1, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v}) &= (\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V.\end{aligned}$$

Al tomar  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}$  en éstas ecuaciones y sustraer la segunda de la primera, se obtiene

$$\begin{aligned}\nu((\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}})) + b(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_1) + b(\hat{\mathbf{u}}_0, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}) + b(\boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_1) \\ - \nu((\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}})) - b(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_1) - b(\hat{\mathbf{u}}_1, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}) - b(\boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_1) &= 0 \\ \nu((\hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}})) - b(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1) + b(\hat{\mathbf{u}}_0, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}) - b(\boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1) \\ - b(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_0) - b(\hat{\mathbf{u}}_1, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}) - b(\boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_0) &= 0\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\nu \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 &= (b(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1) + b(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_0)) - (b(\hat{\mathbf{u}}_0, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}) - b(\hat{\mathbf{u}}_1, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}})) \\ &= b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1) - b(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}})\end{aligned}$$

pero  $b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1) = -b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_0) = -b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_1) = -b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}})$ , luego

$$\nu \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = -b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}) - b(\hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\phi}, \hat{\mathbf{u}}). \quad (2.58)$$

Por (2.12) y (2.57) se tiene que

$$\begin{aligned}-b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}) &\leq c(n) \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 \\ &\leq \frac{2}{\nu} c(n) \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}\|^2.\end{aligned}$$

Al reemplazar la última desigualdad en (2.58) y usando (2.54) se obtiene

$$\nu \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 \leq \frac{2}{\nu} c(n) \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = \left( \frac{2}{\nu} c(n) \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'} + \frac{\nu}{2} \right) \|\hat{\mathbf{u}}\|^2$$

entonces  $(\nu^2 - 4c(n) \|\hat{\mathbf{f}}\|_{V'}) \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 \leq 0$ . Por (2.55) se sigue que  $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 0$  y consecuentemente  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ . Esto significa que  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_1$  y por (2.37) se obtiene que  $\nabla p_0 = \nabla p_1$  concluyendo que  $p_0 - p_1$  es una constante, lo que completa la prueba.

## 2.4 Aplicación

Sea  $\Omega \subset R^3$  un dominio abierto y acotado. No hay restricción en que  $\Omega$  sea simplemente conexo sinó que podría ser un dominio Lipschitziano múltiplemente conexo. Se denota por  $\Gamma_i$ ,  $0 \leq i \leq I$ , las componentes conexas de  $\Gamma$ . Un vector unitario normal exterior a la frontera puede ser definido en casi todo  $\Gamma$ ; éste es denotado por  $\boldsymbol{\nu}$ .

Se define el espacio  $H(\text{div}, \Omega)$  como

$$H(\text{div}, \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 / \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Se recuerdan primero algunos resultados importantes.

**Lema 2.4.1** *Sea  $\Omega \in C^{0,1}$  en  $R^3$ . Para una función  $\mathbf{u}$  en  $H(\text{div}, \Omega)$  que satisfice*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (2.59)$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \quad 0 \leq i \leq I \quad (2.60)$$

*existe un vector potencial  $\boldsymbol{\psi} \in [H^1(\Omega)]^3$ , tal que*

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl} \boldsymbol{\psi} \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \text{ en } \Omega. \quad (2.61)$$

*Recíprocamente, para una función  $\boldsymbol{\psi}$  en  $[H^1(\Omega)]^3$ , la función  $\mathbf{u} = \mathbf{curl} \boldsymbol{\psi}$  satisfice (2.59) y (2.60).*

Para su prueba ver por ejemplo el lema 3.5 de Amrouche *et al.* [1] ó el teorema 3.2 de Girault y Raviart [20].

**Lema 2.4.2** *Si se tiene que el dominio  $\Omega$  es de clase  $C^{m,1}$  para un entero  $m \geq 1$ , entonces el espacio de funciones*

$$\left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3; \mathbf{curl} \mathbf{v} \in [H^{m-1}(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega) \text{ y } \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \in H^{m-1/2}(\Gamma) \right\}$$

*está continuamente incluido en  $[H^m(\Omega)]^3$ .*

Para su prueba ver el corolario 2.15 de Amrouche *et al.* [1].

**Observación 2.4.1** El lema 2.4.2 no es en general válido para dominios Lipschitzianos, como es probado en el referido trabajo mediante un contraejemplo en un dominio no convexo que tiene una “esquina reentrante”.

En el siguiente teorema Temam prueba que, para una clase específica de dominios, se obtiene la condición (2.36) del teorema 2.3.1 concerniente a la existencia de solución del problema no homogéneo de Navier-Stokes.

**Teorema 2.4.1** Sea  $\phi$  una función en  $[H^{1/2}(\Gamma)]^3$  tal que

$$\int_{\Gamma_i} \phi \cdot \nu \, ds = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.62)$$

Entonces, la condición (2.36): existe  $\xi \in [H^2(\Omega)]^3$  tal que  $\phi = \gamma_0(\mathbf{curl} \xi)$ , es satisfecha.

**Prueba.** Con  $\phi$  satisfaciendo (2.62) el siguiente problema no-homogéneo de Stokes:

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi + \nabla \Pi &= 0 & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \Phi &= 0 & \text{en } \Omega \\ \Phi &= \phi & \text{en } \Gamma \end{aligned}$$

admite, de acuerdo a Temam [32], una solución  $\Phi \in [H^1(\Omega)]^3$  tal que  $\gamma_0(\Phi) = \phi$ . Para los detalles de esta prueba, ver Collantes *et al.* [12]. Por el lema 2.4.1 se sigue que existe  $\xi \in [H^1(\Omega)]^3$  tal que  $\Phi = \mathbf{curl} \xi$  en  $\Omega$ . Entonces  $\gamma_0(\mathbf{curl} \xi) = \phi$ .

Por la fórmula generalizada de Stokes se tiene que

$$(\mathbf{u}, \nabla w) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, w) = \langle \gamma_\nu \mathbf{u}, \gamma_0 w \rangle, \quad \forall \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3, \forall w \in H^1(\Omega)$$

tomando  $w = 1$  y  $\mathbf{u} = \xi$  se obtiene que  $\gamma_\nu \xi = \mathbf{0}$ . Una forma de conseguir que  $\xi$  pertenezca a  $[H^2(\Omega)]^3$  es considerando  $\Omega$  de clase  $\mathcal{C}^{2,1}$  y aplicando el lema 2.4.2 para  $m = 2$ .

**Observación 2.4.2** La existencia de solución del problema no homogéneo de Navier-Stokes para dominios Lipschitzianos en general, es aún un problema abierto ya que sólo con esta hipótesis no se puede asegurar que la condición (2.36) del teorema 2.3.1 sea satisfecha.

**Observación 2.4.3** Un hidrociclón (ver figura 1.2) es un dominio Lipschitziano simplemente conexo; se le denota por  $\Omega$  en el próximo teorema. Para el flujo en vórtice desarrollado dentro de un hidrociclón, es válida la condición (2.62):

$$\int_{\Gamma} \phi \cdot \nu \, ds = 0.$$

Finalmente se aplica el teorema 2.3.1 y el teorema 2.4.1 para establecer existencia de solución del problema (1.1)–(1.3) planteado en la Introducción, lo que constituye el aporte original de este trabajo.



**Teorema 2.4.2** *Considere  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , donde  $\Omega_2$  contiene las “esquinas” de  $\Omega$  y sea  $\Omega' = \Omega_1 \cup \Omega_3$  con  $\Omega_3$  de clase  $\mathcal{C}^{2,1}$ . Entonces el problema (1.1)–(1.3):*

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \text{ en } \Omega' \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \text{ en } \Omega' \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\phi}, \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

con

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{cases} \boldsymbol{\phi}_1 & \text{en } \Gamma_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 & \text{en } \Gamma_2 \\ \boldsymbol{\phi}_3 & \text{en } \Gamma_3 \\ \mathbf{0} & \text{en } \Gamma - \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3\} \end{cases}$$

tiene una solución para los campos de velocidad media y presión media del fluido.

**Observación 2.4.4** Debido a la alta velocidad de entrada  $\boldsymbol{\phi}_3$  y como  $\nu$  es pequeña para el proceso industrial considerado, no es posible obtener la desigualdad (2.55) del teorema 2.3.2 para establecer unicidad de solución.

# Capítulo 3

## Modelo fenomenológico

### 3.1 Modelo físico

La hipótesis de simetría axial conduce a una representación diferente de la alimentación en el equipo. La figura 3.1 muestra esta representación. Se considera el hidrociclón dividido en dos zonas. La zona I corresponde a la parte superior del cilindro con una altura  $L_A$  y la zona II es el resto del ciclón con una altura de  $L - L_A$ , donde  $L$  es la altura total del hidrociclón. Se supone que la alimentación  $Q > 0$  ingresa al equipo a través de todo el anillo periférico correspondiente a la zona I, por lo que el fluido entra con una velocidad radial dada por el caudal de flujo total dividido por el área de entrada, esto es,  $|v_r(R)| = Q/(2\pi RL_A)$ .

### 3.2 Ecuaciones de movimiento

El proceso dinámico en estudio es representado por las siguientes variables: campo de velocidad media  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  y campo de presión media  $p(\mathbf{r})$ , que obedecen a las ecuaciones de conservación de masa y momentum para un flujo incompresible y estacionario:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (3.1)$$

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{en } \Omega. \quad (3.2)$$

En estas ecuaciones las constantes  $\rho$  y  $\nu$  son la densidad del fluido y la viscosidad turbulenta de remolino (eddy viscosity), además la fuerza de cuerpo (fuerza gravitacional) ha sido despreciada en comparación con la alta fuerza rotacional del fluido, o alternatively puede considerarse dentro de  $p$ , si ésta incluye la energía potencial.

Para resolver el sistema (3.1)-(3.2) se consideran coordenadas cilíndricas, con

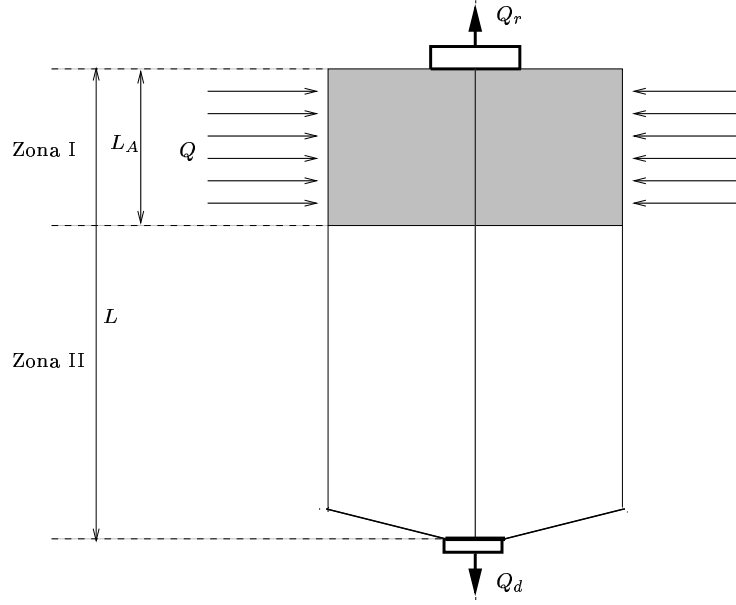


Figura 3.1: Representación de la supuesta entrada de alimentación al hidrociclón.

$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z$ , donde  $v_r$ ,  $v_\theta$  y  $v_z$  son las componentes radial, tangencial y axial de velocidad.

En coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \nabla p &= \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \\ &+ \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta + \\ &+ \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z \\ \Delta \mathbf{v} &= \left( \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \mathbf{e}_r + \left( \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta + (\Delta v_z) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}\Delta v_r &= \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \Delta v_\theta &= \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\ \Delta v_z &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r}.\end{aligned}$$

Al haber considerado un flujo axial-simétrico:

$$\begin{aligned}v_r &= v_r(r, z) \\ v_\theta &= v_\theta(r, z) \\ v_z &= v_z(r, z) \\ p &= p(r, z).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Bajo las consideraciones anteriores el sistema (3.1)–(3.2) se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0\tag{3.4}$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)\tag{3.5}$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right)\tag{3.6}$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).\tag{3.7}$$

Como el flujo es tomado bidimensional, para satisfacer automáticamente la ecuación de continuidad (3.4), se introduce una función de corriente  $\psi(r, z)$ , definida a través de:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.\tag{3.8}$$

Por otro lado se puede definir la circulación  $2\pi\Gamma(r, z)$  como:

$$v_\theta = \frac{1}{r} \Gamma.\tag{3.9}$$

Sustituyendo (3.8) y (3.9) en (3.5)–(3.7), se obtiene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^3} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^3} \Gamma^2 =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \nu \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Los términos de presión pueden ser eliminados de las ecuaciones (3.10) y (3.12) diferenciando la segunda con respecto a  $r$  y sustrayendo ésta de la primera ecuación diferenciada con respecto a  $z$ :

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \Gamma^2}{\partial z} &= 3 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 3r \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \\ &\quad - r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - 2r \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \\ &- \nu \left( -2r^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} + 2r^3 \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} + r^3 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - 3 \frac{\partial \psi}{\partial r} + 3r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + r^3 \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con estos cambios las cuatro ecuaciones diferenciales parciales (3.4)–(3.7) han sido reducidas a sólo dos (3.11) y (3.13). En compensación, el orden de las ecuaciones diferenciales ha aumentado de dos a cuatro.

Tomando las ideas de Lewellen [24] los siguientes parámetros son introducidos para definir variables adimensionales:

$$\eta = \frac{r^2}{R^2}; \quad \xi = \frac{z}{l}; \quad \hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma_R}; \quad \hat{\psi} = \frac{\psi}{\hat{Q} L_A} \quad (3.14)$$

donde  $R, l, \Gamma_R$  y  $\hat{Q}$  son cantidades dimensionales apropiadas. Valores convenientes para el vórtice considerado son: el radio del hidrociclón para  $R$ , la longitud de la zona I:  $L_A$  y  $L - L_A$  de la zona II para  $l$ , la circulación en el radio exterior  $2\pi\Gamma_R$  y el caudal de flujo por unidad de longitud  $2\pi\hat{Q} = Q/L_A$ . En términos de las variables adimensionales (3.14) las ecuaciones (3.11) y (3.13) se escriben como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial \xi} = \frac{l}{Re L_A} \left( 2\eta \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial \eta^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial \xi^2} \right) \quad (3.15) \\ & \hat{\Gamma} \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial \xi} = \epsilon \left\{ 4\eta^2 \left[ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \eta^3} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{2l}{Re L_A} \left( 2 \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \eta^3} + \eta \frac{\partial^4 \hat{\psi}}{\partial \eta^4} \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \alpha \left[ -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \eta \partial \xi^2} - \eta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \xi^3} - \frac{l}{ReL_A} \left( 4\eta^2 \frac{\partial^4 \hat{\psi}}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\alpha}{2} \eta \frac{\partial^4 \hat{\psi}}{\partial \xi^4} \right) \right] \quad (3.16)$$

donde:

$\epsilon = (\hat{Q}/\Gamma_R)^2 (L_A/R)^2 = (v_r(R)/v_\theta(R))^2 (L_A/R)^2$  es el número de Rossby,  $\alpha = (R/l)^2$  y  $Re = \hat{Q}/\nu = -RV_r(R)/\nu$  es el número radial de Reynolds, con  $v_\theta(R) = v_{\theta R}$  y  $v_r(R) = v_{rR}$  siendo la velocidad tangencial exterior y la velocidad radial exterior en la zona I, respectivamente.

### 3.3 Condiciones de frontera

Considerando una zona arbitraria, de las descritas en el modelo físico, se plantea para la función de corriente la siguiente condición de frontera:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\eta, 0) &= g_0(\eta) \\ \hat{\psi}(\eta, 1) &= g_1(\eta). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Las condiciones impuestas en el radio exterior  $r = R$  son:

$$v_r(R, z) = \begin{cases} -\frac{Q}{2\pi RL_A} & \text{en la zona I} \\ 0 & \text{en la zona II} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$v_\theta(R, z) = \frac{\Gamma_R}{R} \quad (3.19)$$

$$v_z(R, z) = 0. \quad (3.20)$$

Las condiciones dadas en (3.18), (3.19) y (3.20) en términos de  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\Gamma}$  y de las variables  $\eta$  y  $\xi$  quedan expresadas por:

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi}(1, \xi) = \begin{cases} -1 & \text{en la zona I} \\ 0 & \text{en la zona II} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\hat{\Gamma}(1, \xi) = 1 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta}(1, \xi) = 0. \quad (3.23)$$

#### 3.3.1 Condiciones sin considerar núcleo de aire

Se imponen condiciones en el eje  $r = 0$  ( $\eta = 0$ ).

De (3.8) y (3.9) se deduce que para mantener las velocidades finitas en el eje del ciclón, es necesario tener:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}|_{r=0} = \frac{\partial \psi}{\partial r}|_{r=0} = \Gamma|_{r=0} = 0. \quad (3.24)$$

Las condiciones dadas en (3.24) en términos de  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\Gamma}$  y de las variables  $\eta$  y  $\xi$  quedan expresadas por:

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi}(0, \xi) = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta}(0, \xi) < \infty \quad (3.26)$$

$$\hat{\Gamma}(0, \xi) = 0. \quad (3.27)$$

### 3.3.2 Condiciones considerando núcleo de aire

En este caso se considera que en una superficie libre no se debe tener esfuerzos de cizalle (ver [29]), lo que se traduce en:

$$\frac{dv_\theta}{dr} = \frac{v_\theta}{r} \quad \text{en } r = R_a \quad (\text{radio del núcleo de aire}). \quad (3.28)$$

La condición (3.28) en términos de  $\hat{\Gamma}$  equivale a:

$$\hat{\Gamma}|_{\eta=\eta_a} = \eta_a \hat{\Gamma}'|_{\eta=\eta_a} \quad (3.29)$$

donde  $\eta_a = R_a^2/R^2$ . Esta condición coincide con (3.27) al tomar  $\eta_a = 0$ .

### 3.3.3 Condiciones de partición de flujo

El fluido es evacuado del hidrociclón a través de un flujo de rebalse en la parte superior del equipo y a través de un flujo de descarga en la parte inferior del mismo, con caudales de  $Q_r$  y  $Q_d$  respectivamente. Ambos son considerados números no negativos. Se define la partición de flujo  $\lambda$  como:

$$\lambda = \frac{Q_d}{Q}. \quad (3.30)$$

Como  $Q_d + Q_r = Q$  entonces

$$\frac{Q_r}{Q} = 1 - \lambda. \quad (3.31)$$

Si los radios del flujo de rebalse y de descarga son designados por  $R_r$  y  $R_d$  respectivamente, se tiene que:

$$v_z(r, z) = 0, \quad R_r \leq r \leq R, \quad z = L_A, \quad \text{en la zona I} \quad (3.32)$$

$$v_z(r, z) = 0, \quad R_d \leq r \leq R, \quad z = 0, \quad \text{en la zona II.} \quad (3.33)$$

Los caudales en cada salida están dados por:

$$Q_r = \int_{R_a}^{R_r} 2\pi r v_z(r) dr \quad \text{y} \quad Q_d = - \int_{R_a}^{R_d} 2\pi r v_z(r) dr \quad (3.34)$$

los cuales pueden ser usados para determinar condiciones de frontera adicionales para la función de corriente en los respectivos niveles axiales. Así:

En  $\xi = 0$  de la zona II:

$$\begin{aligned} Q_d &= \int_{R_a}^{R_d} 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, 0) dr \\ &= 2\pi \int_{R_a}^{R_d} d\psi(r, 0) \\ &= 2\pi \hat{Q} L_A \int_{\eta_a}^{\eta_d} d\hat{\psi}(\eta, 0) \end{aligned}$$

donde  $\eta_d = R_d^2/R^2$ . Luego:

$$\frac{Q_d}{Q} = \hat{\psi}(\eta_d, 0) - \hat{\psi}(\eta_a, 0).$$

De lo anterior y de (3.30) y (3.33) se sigue que:

$$\hat{\psi}(\eta, 0) - \hat{\psi}(\eta_a, 0) = \lambda, \quad \eta_d \leq \eta \leq 1. \quad (3.35)$$

En forma análoga, en  $\xi = 1$  de la zona I:

$$Q_r = -2\pi \hat{Q} L_A \int_{\eta_a}^{\eta_r} d\hat{\psi}(\eta, 1)$$

donde  $\eta_r = R_r^2/R^2$ . Luego:

$$\frac{Q_r}{Q} = - \left( \hat{\psi}(\eta_r, 1) - \hat{\psi}(\eta_a, 1) \right).$$

De lo anterior y de (3.31) y (3.32) se sigue que:

$$\hat{\psi}(\eta, 1) - \hat{\psi}(\eta_a, 1) = -(1 - \lambda), \quad \eta_r \leq \eta \leq 1. \quad (3.36)$$

En el caso que no se considere núcleo de aire, simplemente en (3.35) y (3.36) se toma  $\eta_a = 0$ .



### 3.4 Solución exacta: Procedimiento en Expansión

Para muchos flujos físicos de interés  $(\hat{Q}/\Gamma_R)^2 < 10^{-2}$ , de tal forma que aún para  $L_A/R$  moderadamente grande,  $\epsilon$  es pequeño. Para los procesos en hidrociclones generalmente  $\epsilon < 10^{-2}$ . Por ejemplo, en una de las pruebas para la comparación de las predicciones con mediciones experimentales (ver tabla 4.1), se tiene que  $\hat{Q} = 0.0022$  (m<sup>2</sup>/s) y  $\Gamma_R = 0.0663$  (m<sup>2</sup>/s), por consiguiente  $(\hat{Q}/\Gamma_R)^2 = 0.0011 < 10^{-2}$ ; como  $(L_A/R)^2 = 4.24$ , entonces  $\epsilon = 0.00466 < 10^{-2}$ .

Nuevamente siguiendo a Lewellen [24], en las ecuaciones (3.15) y (3.16) se expande  $\hat{\Gamma}$  y  $\hat{\psi}$  en series de  $\epsilon$ , ésto es:

$$\hat{\Gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\Gamma}_n(\eta, \xi) \epsilon^n \quad (3.37)$$

$$\hat{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\psi}_n(\eta, \xi) \epsilon^n. \quad (3.38)$$

Reemplazando  $\hat{\Gamma}$  y  $\hat{\psi}$  dados en (3.37) y (3.38) en la ecuación (3.16), se obtiene:

$$(\hat{\Gamma}_0 \frac{\partial \hat{\Gamma}_0}{\partial \xi}) \epsilon^0 + (\dots) \epsilon^1 + \dots = (\dots) \epsilon^1 + (\dots) \epsilon^2 + \dots$$

por lo tanto

$$\hat{\Gamma}_0 = \hat{\Gamma}_0(\eta). \quad (3.39)$$

De (3.15) se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{\Gamma}_0}{\partial \eta} \epsilon^0 = \frac{2l}{ReL_A} \eta \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}_0}{\partial \eta^2} \epsilon^0$$

de donde

$$2\eta \hat{\Gamma}_0'' - \frac{ReL_A}{l} \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial \xi} \hat{\Gamma}_0' = 0. \quad (3.40)$$

En particular

$$\frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial \xi} = \frac{2l}{ReL_A} \eta \frac{\hat{\Gamma}_0''(\eta)}{\hat{\Gamma}_0'(\eta)}$$

lo que significa que  $\partial \hat{\psi}_0 / \partial \xi$  sólo depende de  $\eta$ ; considerando  $\partial \hat{\psi}_0 / \partial \xi = f_{01}(\eta)$  se sigue que existe una función  $f_{00}(\eta)$  tal que:

$$\hat{\psi}_0 = f_{00}(\eta) + \xi f_{01}(\eta). \quad (3.41)$$

De (3.40):

$$2\eta\hat{\Gamma}_0'' - \frac{ReL_A}{l}f_{01}\hat{\Gamma}_0' = 0. \quad (3.42)$$

Para calcular  $\hat{\Gamma}_0$ , debe introducirse  $f_{01}$  de las condiciones de frontera, luego  $\hat{\Gamma}_0$  es calculado resolviendo la ecuación diferencial lineal (3.42).

Se debe notar que para obtener una solución bajo el orden de aproximación cero sólo se necesita determinar las funciones  $f_{00}(\eta)$  y  $f_{01}(\eta)$ .

Para el orden de aproximación uno, además de (3.39) y (3.41) y por similitud a ellos, se considera:

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_{10}(\eta) + \xi\hat{\Gamma}_{11}(\eta) \quad (3.43)$$

$$\hat{\psi}_1 = f_{10}(\eta) + \xi f_{11}(\eta) + \xi^2 f_{12}(\eta). \quad (3.44)$$

Reemplazando (3.37) y (3.38) en (3.15) e igualando los coeficientes de la potencia  $\epsilon^1$  se obtiene:

$$(f_{01}\hat{\Gamma}'_{10} + f_{11}\hat{\Gamma}'_0 - f'_{00}\hat{\Gamma}_{11}) + (f_{01}\hat{\Gamma}'_{11} + 2f_{12}\hat{\Gamma}'_0 - f'_{01}\hat{\Gamma}_{11})\xi = \frac{2l}{ReL_A} \left( \eta\hat{\Gamma}''_{10} + \eta\hat{\Gamma}''_{11}\xi \right)$$

por consiguiente:

$$2l\eta\hat{\Gamma}''_{11} - ReL_A \left( f_{01}\hat{\Gamma}'_{11} + 2f_{12}\hat{\Gamma}'_0 - f'_{01}\hat{\Gamma}_{11} \right) = 0 \quad (3.45)$$

$$2l\eta\hat{\Gamma}''_{10} - ReL_A \left( f_{01}\hat{\Gamma}'_{10} + f_{11}\hat{\Gamma}'_0 - f'_{00}\hat{\Gamma}_{11} \right) = 0 \quad (3.46)$$

De la misma forma al reemplazar (3.37) y (3.38) en (3.16) e igualar los coeficientes de la potencia  $\epsilon^1$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0\hat{\Gamma}_{11} = & 4\eta^2 \left[ f_{01}f'''_{00} - f'_{00}f''_{01} - \frac{2l}{ReL_A} \left( 2f'''_{00} + \eta f^{(iv)}_{00} \right) \right] + \\ & + 4\eta^2 \left[ f_{01}f'''_{01} - f'_{01}f''_{01} - \frac{2l}{ReL_A} \left( 2f'''_{01} + \eta f^{(iv)}_{01} \right) \right] \xi \end{aligned}$$

lo que implica que:

$$0 = 4\eta^2 \left[ f_{01}f'''_{01} - f'_{01}f''_{01} - \frac{2l}{ReL_A} \left( 2f'''_{01} + \eta f^{(iv)}_{01} \right) \right] \quad (3.47)$$

$$\hat{\Gamma}_0\hat{\Gamma}_{11} = 4\eta^2 \left[ f_{01}f'''_{00} - f'_{00}f''_{01} - \frac{2l}{ReL_A} \left( 2f'''_{00} + \eta f^{(iv)}_{00} \right) \right] \quad (3.48)$$

De (3.42) y (3.45)–(3.48) se obtiene un sistema de cinco ecuaciones con siete incógnitas:

$$\hat{\Gamma}_0, f_{00}, f_{01}, \hat{\Gamma}_{10}, \hat{\Gamma}_{11}, f_{11}, f_{12}$$

lo cual es ventajoso para tomar la libertad deseada en las condiciones de frontera.

Para obtener una solución bajo el orden de aproximación uno, además de  $f_{00}(\eta)$  y  $f_{01}(\eta)$  se necesita también conocer la función  $f_{11}(\eta)$ . Las incógnitas del sistema (3.42) y (3.45)–(3.48) se determinarán mediante el siguiente esquema secuencial:

- 1) De la ecuación diferencial lineal (3.42) se obtiene  $\hat{\Gamma}_0$ .
- 2) De la ecuación (3.48) se obtiene  $\hat{\Gamma}_{11}$ .
- 3) De la ecuación (3.45) se obtiene  $f_{12}$ .
- 4) Determinación de  $f_{11}$ .
- 5) De la ecuación diferencial lineal (3.46) se obtiene  $\hat{\Gamma}_{10}$ .

### 3.4.1 Aproximación de orden cero

Si  $\hat{\psi}$  y  $\hat{\Gamma}$  dados en (3.38) y (3.37) son truncados en  $\hat{\psi}_0$  y  $\hat{\Gamma}_0$  respectivamente, entonces de (3.17):

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_0(\eta, 0) &= g_0(\eta) \\ \hat{\psi}_0(\eta, 1) &= g_1(\eta).\end{aligned}\tag{3.49}$$

Por (3.41) se sigue que:

$$\begin{aligned}f_{00} &= g_0 \\ f_{00} + f_{01} &= g_1\end{aligned}\tag{3.50}$$

por consiguiente:

$$f_{00} = g_0\tag{3.51}$$

$$f_{01} = g_1 - g_0.\tag{3.52}$$

Físicamente ésto significa que, para pequeños valores del número de Rossby, la función de corriente está totalmente especificada por sus condiciones de frontera.

#### Determinación de $\hat{\Gamma}_0$ :

De (3.42) se tiene que:

$$\frac{\hat{\Gamma}_0''}{\hat{\Gamma}_0'} = \frac{ReL_A}{2l} \frac{f_{01}(\eta)}{\eta}\tag{3.53}$$

integrando en ambos lados de (3.53), se obtiene:

$$\ln(\hat{\Gamma}_0')|_{\eta_a}^t = \frac{ReL_A}{2l} \int_{\eta_a}^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds$$

de donde

$$\frac{\hat{\Gamma}'_0(t)}{\hat{\Gamma}'_0(\eta_a)} = \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_{\eta_a}^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) \quad (3.54)$$

al integrar nuevamente en ambos lados de (3.54), se sigue que:

$$\hat{\Gamma}_0(\eta) - \hat{\Gamma}_0(\eta_a) = \hat{\Gamma}'_0(\eta_a) \int_{\eta_a}^{\eta} \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_{\eta_a}^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt. \quad (3.55)$$

Por la condición (3.22) se tiene que

$$\hat{\Gamma}_0(1) = 1. \quad (3.56)$$

Si no se considera núcleo de aire, la condición (3.27) equivale a

$$\hat{\Gamma}_0(0) = 0. \quad (3.57)$$

Por otro lado, considerando núcleo de aire, la condición (3.29) queda expresada por:

$$\hat{\Gamma}_0(\eta_a) = \eta_a \hat{\Gamma}'_0(\eta_a) \quad (3.58)$$

la que coincide con (3.57) tomando  $\eta_a = 0$ .

Al aplicar las condiciones (3.56) y (3.58) en (3.55) se concluye que:

$$\hat{\Gamma}_0(\eta) = \frac{\eta_a + \int_{\eta_a}^{\eta} \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_{\eta_a}^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}{\eta_a + \int_{\eta_a}^1 \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_{\eta_a}^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}. \quad (3.59)$$

En particular para  $\eta_a = 0$  se obtiene:

$$\hat{\Gamma}_0(\eta) = \frac{\int_0^{\eta} \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_0^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}{\int_0^1 \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_0^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}. \quad (3.60)$$

### Elección de las funciones de corriente $g_0(\eta)$ y $g_1(\eta)$ :

Las condiciones (3.21), (3.23), (3.25), (3.26), (3.35) y (3.36) así como las relaciones (3.41), (3.51) y (3.52) implican que las funciones de corriente  $g_0(\eta)$  y  $g_1(\eta)$  consideradas como condiciones de frontera, deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\left[ \begin{array}{ll} g_0 \in C^1([0, 1]) & g_1 \in C^1([0, 1]) \\ g_0(0) = \begin{cases} \beta, \beta \in \mathbb{R}, & \text{zona I} \\ \gamma, \gamma \in \mathbb{R}, & \text{zona II} \end{cases} & g_1(0) = \begin{cases} \beta, & \text{zona I} \\ \gamma, & \text{zona II} \end{cases} \\ g_0(1) = \beta + \lambda, & \text{zona I} & g_1(\eta) = \beta - (1 - \lambda), \eta_r \leq \eta \leq 1, & \text{zona I} \\ g_0(\eta) = \gamma + \lambda, \eta_d \leq \eta \leq 1, & \text{zona II} & g_1(1) = \gamma + \lambda, & \text{zona II} \\ g'_0(1) = 0 & & g'_1(1) = 0 & \end{array} \right] \quad (3.61)$$

Las funciones de corriente que se proponen son las siguientes:

**Zona I:**

$$g_1(\eta) = -(1 - \lambda) \left( 1 - \exp \left( -\frac{\delta}{\eta_r} \eta \right) \right) \quad (3.62)$$

$$g_0(\eta) = j(\eta) \quad (3.63)$$

**Zona II:**

$$g_1(\eta) = j(\eta) \quad (3.64)$$

$$g_0(\eta) = \lambda \left( 1 - \exp \left( -\frac{\delta}{\eta_d} \eta \right) \right) \quad (3.65)$$

donde  $\delta$  se selecciona tal que  $\exp(-\delta) \approx 0$  y con  $j(\eta)$  satisfaciendo:

$$j \in C^1([0, 1]) \quad (3.66)$$

$$j(0) = 0 \quad (3.67)$$

$$j(1) = \lambda \quad (3.68)$$

$$j'(1) = 0. \quad (3.69)$$

El problema radica en que no se conoce a priori  $j(\eta)$  que es la función de corriente adimensional al nivel axial de la frontera entre las zonas I y II. Los resultados experimentales obtenidos a la fecha nos dan un indicio de la forma de esta curva. Conviene mencionar que tales pruebas muestran que la velocidad axial en la pared lateral es cero, pero después de una muy delgada capa límite cambia rápidamente a valores lejanos de cero.

Se proponen dos formas de obtener  $j(\eta)$ . La primera, como una curva de ajuste de datos experimentales medidos a un nivel axial igual o por debajo de la parte inferior del tubo buscador de vórtice. Esta curva debe además cumplir las condiciones (3.66), (3.67), (3.68) y (3.69). La segunda, a través de una curva simple que semeja la distribución de la referida función de corriente y que además cumple las condiciones (3.66), (3.67) y (3.68), pero que no cumple (3.69), es decir que no considera  $v_z = 0$  en la pared.

La primera proposición necesita de un set de datos experimentales por cada operación del hidrociclón; la distancia del nivel axial, en el que se toman estas mediciones, a la tapa superior del hidrociclón determina la altura de alimentación  $L_A$ . La segunda proposición tiene la ventaja de ser general para cualquier condición de operación, lo que otorga la libertad de elegir  $L_A$ , por ejemplo, se puede tomar  $L_A = L_V$ , la longitud del tubo buscador de vórtice.

### 3.4.2 Aproximación de orden uno

Si  $\hat{\psi}$  y  $\hat{\Gamma}$  dados en (3.38) y (3.37) son truncados en  $\hat{\psi}_1$  y  $\hat{\Gamma}_1$  respectivamente, se tiene:

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_1\epsilon \quad \text{y} \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_0 + \hat{\Gamma}_1\epsilon. \quad (3.70)$$

Reemplazando en (3.70):  $\hat{\psi}_0$  de (3.41),  $\hat{\psi}_1$  de (3.44) y  $\hat{\Gamma}_1$  de (3.43), se obtiene:

$$\hat{\psi} = (f_{00} + \xi f_{01}) + (f_{10} + \xi f_{11} + \xi^2 f_{12})\epsilon \quad (3.71)$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_0 + (\hat{\Gamma}_{10} + \xi \hat{\Gamma}_{11})\epsilon. \quad (3.72)$$

Considerando (3.71) en (3.17) se sigue que:

$$\begin{aligned} f_{00} + \hat{f}_{10} &= g_0 \\ f_{00} + f_{01} + \hat{f}_{10} + \hat{f}_{11} + \hat{f}_{12} &= g_1 \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde  $\hat{f}_{1i} = f_{1i}\epsilon$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Las condiciones dadas en (3.17) son independientes de  $\epsilon$  por lo que en el sistema (3.73) se considera:

$$f_{10} = 0 \quad (3.74)$$

$$f_{11} + f_{12} = 0 \quad (3.75)$$

Las ecuaciones que resultan en (3.73) son:

$$f_{00} = g_0 \quad (3.76)$$

$$f_{00} + f_{01} = g_1 \quad (3.77)$$

Del sistema (3.74)–(3.77) se obtiene la solución:  $f_{00} = g_0$ ,  $f_{01} = g_1 - g_0$ ,  $f_{10} = 0$  y  $f_{11} = -f_{12}$ . Esta última igualdad es la que debe considerarse en el paso 4 del esquema propuesto para resolver el sistema (3.42) y (3.45)–(3.48).

En el orden de aproximación uno, (3.22) implica las dos condiciones siguientes:

$$\hat{\Gamma}_0(1) = 1 \quad (3.78)$$

$$\hat{\Gamma}_1(1, \xi) = 0 \quad (3.79)$$

Además, si no se considera núcleo de aire, de la condición (3.27) se sigue que

$$\hat{\Gamma}_0(0) = 0 \quad (3.80)$$

$$\hat{\Gamma}_1(0, \xi) = 0 \quad (3.81)$$

Si se considera núcleo de aire, de la condición (3.29) se sigue que

$$\hat{\Gamma}_0(\eta_a) = \eta_a \hat{\Gamma}'_0(\eta_a) \quad (3.82)$$

$$\hat{\Gamma}_1(\eta_a, \xi) = \eta_a \hat{\Gamma}'_1(\eta_a, \xi) \quad (3.83)$$

condiciones que coinciden con (3.80) y (3.81) para  $\eta_a = 0$ .

En vista de que (3.78) y (3.82) son las mismas condiciones de frontera (3.56) y (3.58) con las cuales se determinó  $\hat{\Gamma}_0$  en el orden de aproximación cero, entonces la fórmula (3.59) es válida para el orden de aproximación uno. Por consiguiente:

$$\hat{\Gamma}_0(\eta) = \frac{\eta_a + \int_{\eta_a}^{\eta} \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_{\eta_a}^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}{\eta_a + \int_{\eta_a}^1 \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_{\eta_a}^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}. \quad (3.84)$$

En particular para  $\eta_a = 0$  se obtiene:

$$\hat{\Gamma}_0(\eta) = \frac{\int_0^{\eta} \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_0^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}{\int_0^1 \exp\left(\frac{ReL_A}{2l} \int_0^t \frac{f_{01}(s)}{s} ds\right) dt}. \quad (3.85)$$

#### Determinación de $\Gamma_{10}$ :

De (3.79) y (3.83) se obtienen las condiciones de frontera para  $\hat{\Gamma}_{10}$ , las cuales son dadas por:

$$\hat{\Gamma}_{10}(\eta_a) = \eta_a \hat{\Gamma}'_{10}(\eta_a) \quad (3.86)$$

$$\hat{\Gamma}_{10}(1) = 0 \quad (3.87)$$

La ecuación (3.46) puede ser escrita como

$$\hat{\Gamma}_{10}'' + w(\eta) \hat{\Gamma}'_{10} = h(\eta) \quad (3.88)$$

donde  $w(\eta)$  y  $h(\eta)$  están dados por:

$$w(\eta) = -\frac{ReL_A f_{01}}{2l \eta} \quad (3.89)$$

$$h(\eta) = \frac{ReL_A \left( f_{11} \hat{\Gamma}'_0 - f'_{00} \hat{\Gamma}_{11} \right)}{2l \eta}. \quad (3.90)$$

Definiendo

$$\phi(s) = \exp\left(-\int_{\eta_a}^s w(t) dt\right) \quad (3.91)$$

y multiplicando (3.88) por el factor integrante  $1/\phi(\eta)$ , se obtiene:

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{\hat{\Gamma}'_{10}(\eta)}{\phi(\eta)} \right) = \frac{h(\eta)}{\phi(\eta)} \quad (3.92)$$

integrando ambos lados de (3.92):

$$\frac{\hat{\Gamma}'_{10}(\eta)}{\phi(\eta)} - \frac{\hat{\Gamma}'_{10}(\eta_a)}{\phi(\eta_a)} = \int_{\eta_a}^{\eta} \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \quad (3.93)$$

pero  $\phi(\eta_a) = 1$ , luego

$$\hat{\Gamma}'_{10}(\eta) = \hat{\Gamma}'_{10}(\eta_a)\phi(\eta) + \phi(\eta) \int_{\eta_a}^{\eta} \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \quad (3.94)$$

al integrar ambos lados de (3.94) se tiene que

$$\hat{\Gamma}_{10}(\eta) - \hat{\Gamma}_{10}(\eta_a) = \hat{\Gamma}'_{10}(\eta_a) \int_{\eta_a}^{\eta} \phi(s) ds + \int_{\eta_a}^{\eta} \left( \phi(s) \int_{\eta_a}^s \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \right) ds. \quad (3.95)$$

Considerando las condiciones (3.86) y (3.87) en (3.95) se concluye que:

$$\hat{\Gamma}_{10}(\eta) = - \frac{\left( \int_{\eta_a}^1 \left( \phi(s) \int_{\eta_a}^s \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \right) ds \right) \left( \eta_a + \int_{\eta_a}^{\eta} \phi(s) ds \right)}{\eta_a + \int_{\eta_a}^1 \phi(s) ds} + \int_{\eta_a}^{\eta} \left( \phi(s) \int_{\eta_a}^s \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \right) ds \quad (3.96)$$

En particular para  $\eta_a = 0$  se obtiene:

$$\hat{\Gamma}_{10}(\eta) = - \left( \int_0^1 \phi(s) ds \right)^{-1} \int_0^1 \left( \phi(s) \int_0^s \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \right) ds \int_0^{\eta} \phi(s) ds + \int_0^{\eta} \left( \phi(s) \int_0^s \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \right) ds. \quad (3.97)$$

lo que también puede expresarse como

$$\hat{\Gamma}_{10}(\eta) = - \left\{ \int_0^1 \left( \phi(s) \int_0^s \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \right) ds \right\} \hat{\Gamma}_0(\eta) + \int_0^{\eta} \left( \phi(s) \int_0^s \frac{h(t)}{\phi(t)} dt \right) ds. \quad (3.98)$$

### Elección de las funciones de corriente $g_0(\eta)$ y $g_1(\eta)$ :

Las condiciones (3.21), (3.23), (3.25), (3.26), (3.35) y (3.36) y el desarrollo del esquema secuencial propuesto para resolver el sistema (3.42) y (3.45)–(3.48) implican que las funciones de corriente  $g_0(\eta)$  y  $g_1(\eta)$  consideradas como condiciones de frontera, deben satisfacer lo siguiente:

$$\left[ \begin{array}{ll} g_0 \in C^4([0, 1]) & g_1 \in C^4([0, 1]) \\ g_0^{(k)}(0) < \infty, k \leq 14 & g_1^{(k)}(0) < \infty, k \leq 14 \\ g_0(0) = \begin{cases} \beta, & \beta \in \mathbb{R}, \text{ zona I} \\ \gamma, & \gamma \in \mathbb{R}, \text{ zona II} \end{cases} & g_1(0) = \begin{cases} \beta, & \text{zona I} \\ \gamma, & \text{zona II} \end{cases} \\ g_0(1) = \beta + \lambda, \text{ zona I} & g_1(\eta) = \beta - (1 - \lambda), \eta_r \leq \eta \leq 1, \text{ zona I} \\ g_0(\eta) = \gamma + \lambda, \eta_d \leq \eta \leq 1, \text{ zona II} & g_1(1) = \gamma + \lambda, \text{ zona II} \\ g_0'(1) = 0 & g_1'(1) = 0 \end{array} \right] \quad (3.99)$$



Las funciones de corriente que se proponen son las siguientes:

**Zona I:**

$$g_1(\eta) = -(1 - \lambda) \left( 1 - \exp \left( -\frac{\delta}{\eta_r} \eta \right) \right) \quad (3.100)$$

$$g_0(\eta) = j(\eta) \quad (3.101)$$

**Zona II:**

$$g_1(\eta) = j(\eta) \quad (3.102)$$

$$g_0(\eta) = \lambda \left( 1 - \exp \left( -\frac{\delta}{\eta_d} \eta \right) \right) \quad (3.103)$$

donde  $\delta$  se selecciona tal que  $\exp(-\delta) \approx 0$  y con  $j(\eta)$  satisfaciendo la ecuación (3.47) y

$$j \in C^4([0, 1]) \quad (3.104)$$

$$j^{(k)}(0) < \infty, \quad k \leq 14 \quad (3.105)$$

$$j(0) = 0 \quad (3.106)$$

$$j(1) = \lambda \quad (3.107)$$

$$j'(1) = 0. \quad (3.108)$$

### 3.5 Solución aproximada: Caso $v_\theta = v_\theta(r)$

La experimentación con velocimetría laser Doppler muestra que hay poca variación del campo de velocidad tangencial en los diferentes niveles axiales dentro de un hidrociclón de fondo plano. Por consiguiente es posible considerar  $v_\theta = v_\theta(r)$  en el sistema (3.4)–(3.7).

Integrando la ecuación de continuidad (3.4) se tiene:

$$r v_r(r, z) = - \int \frac{\partial v_z(r, z)}{\partial z} r dr + k \quad (3.109)$$

Con la hipótesis  $v_\theta = v_\theta(r)$  y de la ecuación (3.6) se puede deducir que la velocidad radial debe también depender sólo de la coordenada radial.

Ahora, de la ecuación (3.109) es claro que la derivada parcial  $\partial v_z / \partial z$  debe ser independiente de  $z$ . La conclusión es que la forma mas general de la velocidad axial  $v_z(r, z)$  es (Donaldson y Sullivan [17]):

$$v_z = f(r)z + g(r) \quad (3.110)$$

Sustituyendo esta relación en las ecuaciones (3.4) a (3.7) se obtiene:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_r(r)) + f(r) = 0 \quad (3.111)$$

Componente radial:

$$v_r(r) \frac{dv_r(r)}{dr} - \frac{v_\theta^2(r)}{r} - \nu \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_r(r)) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(r, z)}{\partial r} \quad (3.112)$$

Componente tangencial:

$$\frac{v_r(r)}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta(r)) = \nu \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta(r)) \right] \quad (3.113)$$

Componente axial:

$$\begin{aligned} & \left[ v_r(r) \frac{df(r)}{dr} + f^2(r) - \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df(r)}{dr} \right) \right] z \\ & + \left[ v_r(r) \frac{dg(r)}{dr} + f(r)g(r) - \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dg(r)}{dr} \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Eliminando la presión de las ecuaciones (3.112) y (3.114), el siguiente sistema de ecuaciones se obtiene para  $f(r)$  y  $g(r)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ v_r \frac{df}{dr} + f^2 - \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) \right] &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left[ v_r \frac{dg}{dr} + fg - \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dg}{dr} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Se considera la función de corriente  $\psi(r, z)$  para satisfacer la ecuación de continuidad del tal manera que:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \equiv \frac{q(r)}{r} \quad \text{y} \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \equiv -\frac{1}{r} \frac{dq(r)}{dr} z + g(r) \quad (3.116)$$

donde  $f$  en términos de  $q(r)$  es dada por  $f(r) = -(1/r)dq/dr$ .

Introduciendo la variable  $\eta = (r/R)^2$  y las expresiones (3.116) en la ecuación (3.115) se obtiene para  $q(\eta)$  y  $g(\eta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dq(\eta)}{d\eta} \frac{d^2q(\eta)}{d\eta^2} - q(\eta) \frac{d^3q(\eta)}{d\eta^3} &= 0 \\ \frac{d}{d\eta} \left[ q(\eta) \frac{dg(\eta)}{d\eta} \right] - \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{dq(\eta)}{d\eta} g(\eta) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

Para obtener esta ecuación, que define la velocidad radial y axial, se despreciaron los términos viscosos de la ecuación (3.115). Ésta es la misma hipótesis considerada por Bloor e Ingham [7], que dió buenos resultados

para la velocidad axial en hidrociclones cónicos.

Una solución que aproxima el sistema de ecuaciones es:

$$q(\eta) = \lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_3\eta)) + \lambda_2 \sin(\beta\eta) \quad (3.118)$$

donde  $\beta = -(\pi + \arcsin(\lambda))$ , con  $\lambda = Q_d/Q$  y con valores apropiados para  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  los cuales, al igual que  $g(\eta)$ , son determinados dependiendo de la zona.

Entonces:

$$v_r(r) = \frac{1}{r} [\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_3\eta)) + \lambda_2 \sin(\beta\eta)] \quad (3.119)$$

$$v_z(r, z) = -\frac{2}{R^2} [\beta\lambda_2 \cos(\beta\eta) + \lambda_1\lambda_3 \exp(-\lambda_3\eta)] z + g(r) \quad (3.120)$$

A continuación, la ecuación diferencial lineal (3.6) se resuelve para  $v_\theta$  :

$$v_\theta(r) = \frac{1}{r} \left[ k_1 \int r \exp\left(\frac{1}{\nu} \int v_r(s) ds\right) dr + k_2 \right] \quad (3.121)$$

Usando las condiciones de frontera (3.18), (3.19), (3.24), (3.32)–(3.34) y considerando cada zona en forma separada de tal manera que  $z$  varíe de 0 a  $L_A$  en la zona I y de 0 a  $L - L_A$  en la zona II, se encontró la siguiente solución:

**Zona I:**

$$v_r(r) = -\frac{(1-\lambda)Q}{2\pi L_A r} \left\{ 1 - \exp\left(-\delta \left(\frac{r}{R_r}\right)^2\right) + \frac{1}{1-\lambda} \sin\left(\beta \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \right\} \quad (3.122)$$

$$v_z(r, z) = \frac{Q}{\pi R^2} \left\{ \left[ \beta \cos\left(\beta \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) + \delta(1-\lambda) \left(\frac{R}{R_r}\right)^2 \exp\left(-\delta \left(\frac{r}{R_r}\right)^2\right) \right] \frac{z}{L_A} - \beta \cos\left(\beta \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \right\} \quad (3.123)$$

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma_R}{2\pi r} \frac{\{1 - \exp(N_1 (r/R)^2)\}}{\{1 - \exp(N_1)\}} \quad (3.124)$$

**Zona II:**

$$v_r(r) = -\frac{\lambda Q}{2\pi(L-L_A)r} \left\{ 1 - \exp\left(-\delta \left(\frac{r}{R_d}\right)^2\right) - \frac{1}{\lambda} \sin\left(\beta \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \right\} \quad (3.125)$$

$$v_z(r, z) = -\frac{Q}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\beta}{R^2} \cos\left(\beta\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - \frac{\delta\lambda}{R_d^2} \exp\left(-\delta\left(\frac{r}{R_d}\right)^2\right) \right] \frac{z}{L - L_A} + \frac{\delta\lambda}{R_d^2} \exp\left(-\delta\left(\frac{r}{R_d}\right)^2\right) \right\} \quad (3.126)$$

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma_R}{2\pi r} \frac{\{1 - \exp(N_2(r/R)^2)\}}{\{1 - \exp(N_2)\}} \quad (3.127)$$

donde:

$N_1 = \beta Re/2$ ,  $N_2 = \beta Re L_A / (2(L - L_A))$  y  $Re = -Rv_R/\nu$  es el número radial de Reynolds. El valor de  $\delta$  se escoge de tal forma que  $\exp(-\delta) \approx 0$ .

En ambas zonas se escogió  $g$  satisfaciendo la ecuación (3.117) y considerando que  $v_z(r, 0)$  de la zona I es la misma que  $v_z(r, L - L_A)$  de la zona II y que  $v_z(r, L_A)$  de la zona I y  $v_z(r, 0)$  de la zona II se expresan como funciones exponenciales que se anulan fuera de los radios de rebalse y descarga respectivamente.

En ambas zonas la distribución de presión puede ser calculada de:

$$p(r, z)/\rho = \int \frac{v_\theta^2}{r} dr - \frac{v_r^2(r)}{2} - \left( v_r(r) \frac{dg(r)}{dr} + f(r)g(r) \right) z - \frac{1}{2} \left( v_r(r) \frac{df(r)}{dr} + f^2(r) \right) z^2 \quad (3.128)$$

El error de la solución de aproximación (3.118) con respecto a la solución exacta del sistema (3.117) es dado por las funciones  $k_{1j}$ ,  $j = 1, 2$  en la zona I y  $k_{2j}$ ,  $j = 1, 2$  en la zona II. Estas funciones están definidas por:

$$k_{11}(\eta) = \{ \lambda_2 (\lambda_3^2 + \beta^2) [\beta \cos(\beta\eta) + \lambda_3 \sin(\beta\eta)] + \lambda_1 \lambda_3^2 \} \exp(-\lambda_3\eta) - \lambda_2 \beta^3 \cos(\beta\eta) \quad (3.129)$$

$$k_{12}(\eta) = \{ (\lambda_3^2 + \beta^2) \exp(-\lambda_3\eta) - \beta^2 \} \cos(\beta\eta) \quad (3.130)$$

$$k_{21}(\eta) = \{ \lambda_2 (\lambda_3^2 + \beta^2) [\beta \cos(\beta\eta) + \lambda_3 \sin(\beta\eta)] + \lambda_1 \lambda_3^2 \} \exp(-\lambda_3\eta) - \lambda_2 \beta^3 \cos(\beta\eta) \quad (3.131)$$

$$k_{22}(\eta) = \{ \lambda_2 (\lambda_3^2 + \beta^2) \sin(\beta\eta) + \lambda_1 \lambda_3^2 \} \exp(-\lambda_3\eta) \quad (3.132)$$

En las ecuaciones (3.129) y (3.130) los valores de  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  corresponden a aquellos de la zona I y en las ecuaciones (3.131) y (3.132), a los de la zona II.

# Capítulo 4

## Pruebas numéricas

### 4.1 Aproximación de orden cero

Para el orden de aproximación cero se desarrolló una prueba numérica, bajo las condiciones de diseño y operación del hidrociclón dadas en la tabla 4.1, se tomó  $\delta = 8$  y:

$$j(\eta) = -1445.32\eta^5 + 6166.26\eta^{9/2} - 11025.86\eta^4 + 10676\eta^{7/2} - 5964.80\eta^3 + 1829.91\eta^{5/2} - 220.59\eta^2 - 15.53\eta^{3/2} \quad (4.1)$$

donde  $j(\eta)$  se obtuvo como ajuste de mediciones experimentales. Los resultados de este orden de aproximación se validaron con los valores experimentales, obtenidos por Chiné [16], usando velocimetría laser Doppler.

La figura 4.1 muestra la simulación del perfil de velocidad tangencial para diferentes valores del número radial de Reynolds  $Re$  desde 1 hasta 70. La tabla 4.2 muestra los valores de las viscosidades de remolino correspondientes a estos números de Reynolds. El valor de  $Re = 40$  fué seleccionado como valor de ajuste a las mediciones experimentales.

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran la predicción de distribución de velocidad radial para las zonas I y II respectivamente. En vista de que esta componente no pudo ser experimentalmente medida, no se tiene indicios de su calidad.

Las distribuciones de velocidad axial y tangencial simuladas fueron comparadas en la zona II con los valores experimentales. Las figuras 4.4 y 4.5 muestran esta comparación en varios niveles axiales. El resultado es razonable en ambos casos. Es notorio que la velocidad tangencial cambia poco con la coordenada axial y la velocidad axial depende linealmente de esta coordenada.

Tabla 4.1: Condiciones de diseño y operación de un hidrociclón de fondo plano usado por Chiné [16]

- Radio del hidrociclón ( $R$ )	=	5.1 (cm)
- Radio del rebalse ( $R_r$ )	=	1.6 (cm)
- Radio de la descarga ( $R_d$ )	=	0.95 (cm)
- Longitud del hidrociclón ( $L$ )	=	31.05 (cm)
- Altura del tubo buscador de vórtice ( $L_V$ )	=	8.2 (cm)
- Supuesta altura de alimentación ( $L_A$ )	=	10.5 (cm)
- Altura cilíndrica del hidrociclón	=	30.1 (cm)
- Altura cónica del hidrociclón	=	0.95 (cm)
- Parámetro característico $\alpha$	=	$\begin{cases} 0.236 & \text{en la zona I} \\ 0.062 & \text{en la zona II} \end{cases}$
- Caudal de alimentación ( $Q$ )	=	1.42 (l/s)
- Caudal de rebalse ( $Q_r$ )	=	1.27 (l/s)
- Caudal de descarga ( $Q_d$ )	=	0.15 (l/s)
- Parámetro característico $\lambda$	=	0.106
- Velocidad tangencial exterior ( $v_{\theta R}$ )	=	1.3 (m/s)
- Número radial de Reynolds ( $Re$ )	=	40
- Viscosidad turbulenta de remolino ( $\nu$ )	=	$5.5 \cdot 10^{-5}(\text{m}^2/\text{s})$
- Número de Rossby ( $\epsilon$ )	=	$4.66 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.2: Números radiales de Reynolds y sus correspondientes viscosidades de remolino

$Re = 1$	$\nu = 2.2 \cdot 10^{-3}(\text{m}^2/\text{s})$
$Re = 10$	$\nu = 2.2 \cdot 10^{-4}(\text{m}^2/\text{s})$
$Re = 20$	$\nu = 1.1 \cdot 10^{-4}(\text{m}^2/\text{s})$
$Re = 30$	$\nu = 7.3 \cdot 10^{-5}(\text{m}^2/\text{s})$
$Re = 40$	$\nu = 5.5 \cdot 10^{-5}(\text{m}^2/\text{s})$
$Re = 50$	$\nu = 4.4 \cdot 10^{-5}(\text{m}^2/\text{s})$
$Re = 60$	$\nu = 3.7 \cdot 10^{-5}(\text{m}^2/\text{s})$
$Re = 70$	$\nu = 3.1 \cdot 10^{-5}(\text{m}^2/\text{s})$

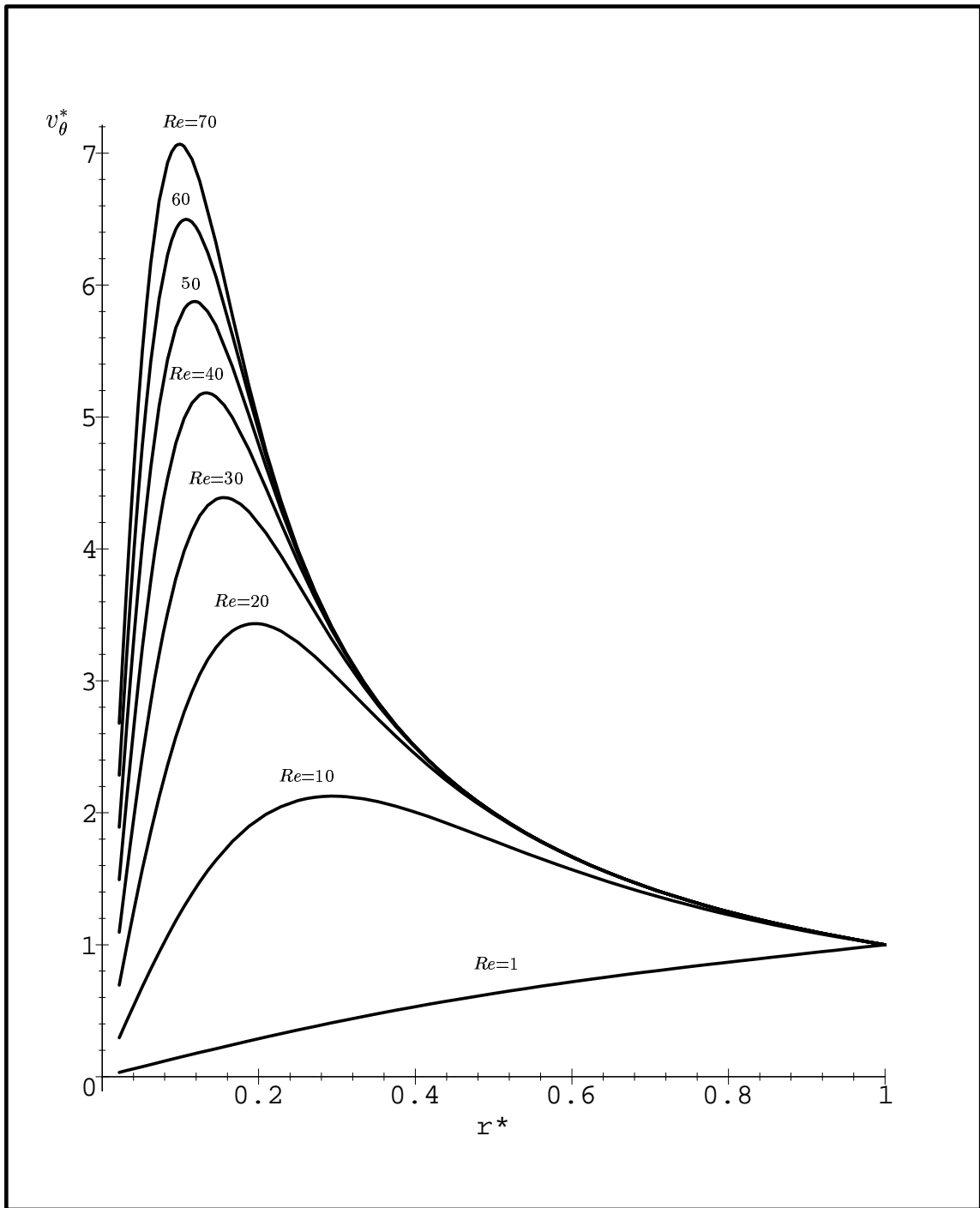


Figura 4.1: Distribución de velocidad tangencial adimensional para varios valores del número radial de Reynolds, donde  $v_{\theta}^* = v_{\theta}/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$

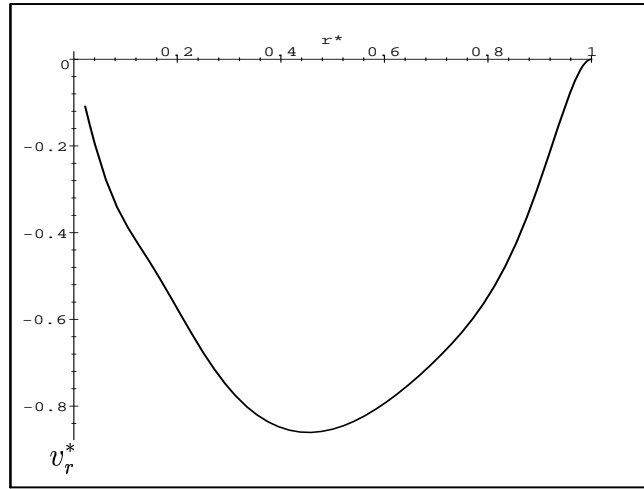


Figura 4.2: Distribución de velocidad radial adimensional en la zona II, donde  $v_r^* = v_r/v_R$  y  $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero

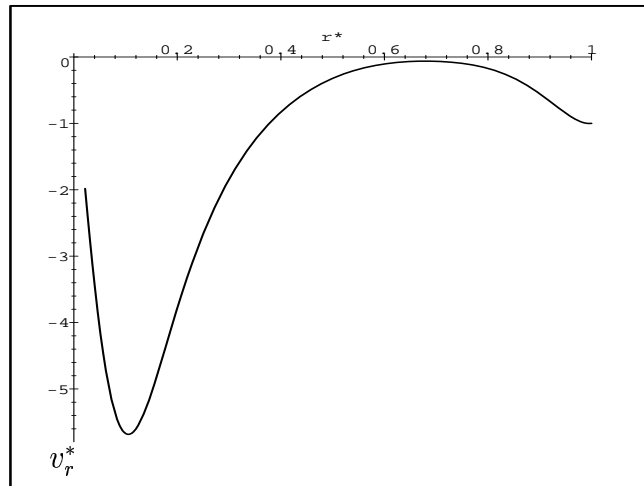


Figura 4.3: Distribución de velocidad radial adimensional en la zona I, donde  $v_r^* = v_r/v_R$  y  $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero



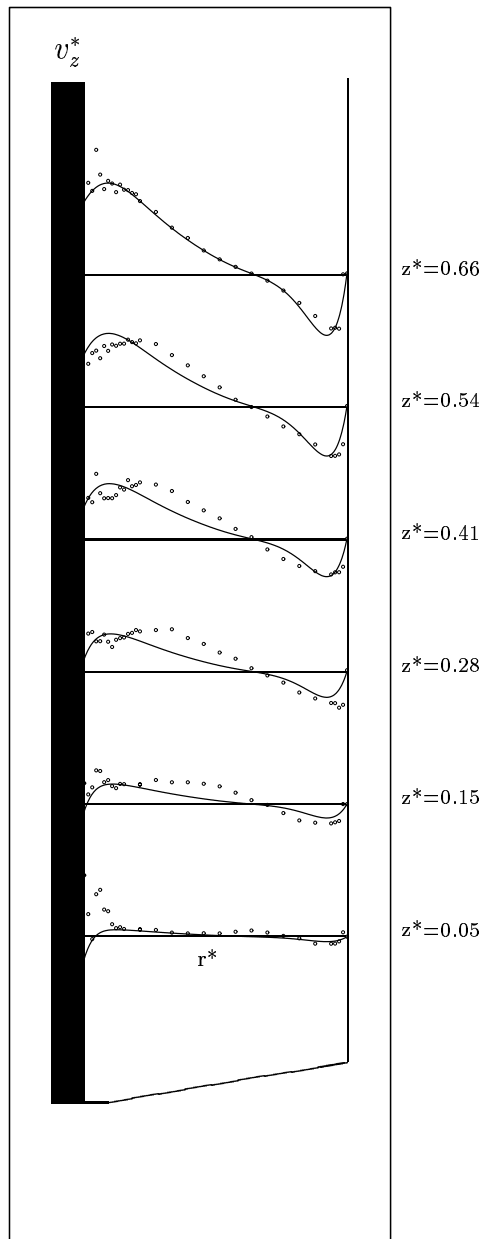


Figura 4.4: Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde  $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero. Datos de Chiné [16]

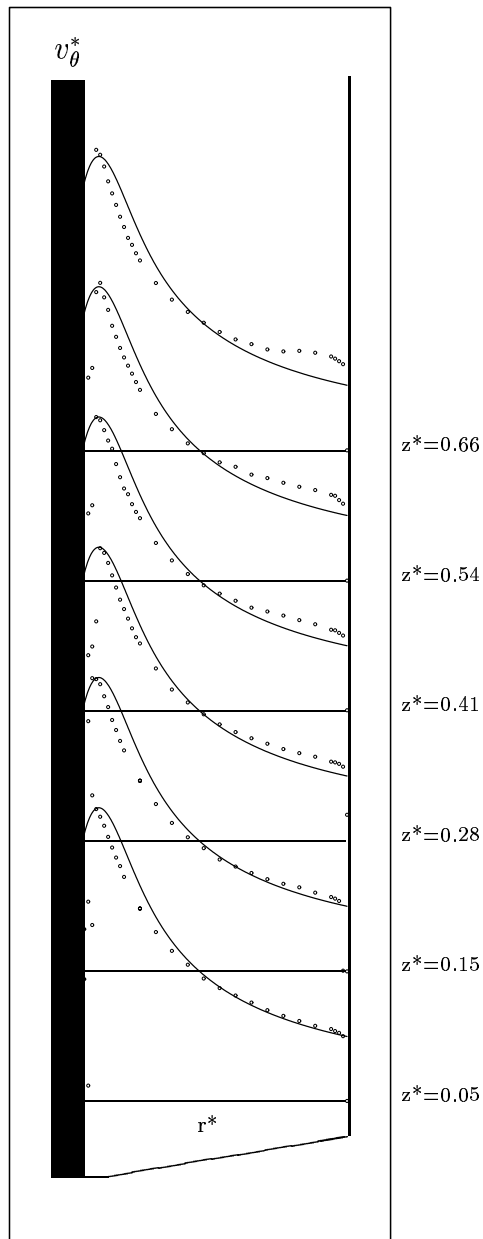


Figura 4.5: Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para  $Re = 40$ , donde  $v_{\theta}^* = v_{\theta}/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Prueba numérica de la aproximación de orden cero. Datos de Chiné [16]

## 4.2 Solución aproximada: Caso $v_\theta = v_\theta(r)$

En la tabla 4.3 se dan las condiciones de diseño y operación del hidrociclón de fondo plano usado para las mediciones de velocidad en esta prueba numérica. Se consideró  $\delta = 8$ .

Las alturas de la zona I y zona II son arbitrarias. Se tomó  $L_A = 5/4 L_V$  ya que, de los resultados experimentales, a partir de este nivel axial hacia abajo se tiene una distribución simétrica de velocidad. El primer conjunto de valores experimentales de velocidad se tomó justo por debajo de la frontera común de las zonas I y II seleccionadas de esta forma.

La velocidad tangencial exterior  $v_{\theta R}$  se consideró como el menor de los valores experimentales en los diferentes niveles axiales de la velocidad tangencial cerca a la pared.

La figura 4.6 muestra una comparación de la predicción de velocidad axial usando la ecuación (3.126) y los valores experimentales. Aunque la dependencia radial de  $v_z$  no es representada en forma muy satisfactoria, la representación global de la velocidad axial si lo es. La figura 4.7 muestra la forma de  $v_z$  en el rebalse, en la descarga y en la frontera común de las zonas I y II.

La variación de la velocidad tangencial dependiendo del número de Reynolds es dada en la figura 4.8 y ésta es similar a aquella obtenida por otros investigadores. Como resultado el valor de  $Re = 65$  fué seleccionado como apropiado en la comparación con los datos experimentales. La comparación de la velocidad tangencial experimental y la simulada con la ecuación (3.127) en varias alturas del hidrociclón es dada en la figura 4.9, con resultados satisfactorios.

La figura 4.10 muestra la solución de la velocidad tangencial en la zona I y en la zona II. Además, en la figura 4.11 se muestra la variación de la velocidad axial en diferentes alturas. La figura 4.12 muestra la predicción de la velocidad radial en la zona I y en la zona II.

Finalmente, la figura 4.13 muestra el error de la solución aproximada (3.118). Como se ve en las subfiguras, es muy buena la solución aproximada en la zona II, que es la zona de gran importancia en la clasificación de partículas. La modelación de la zona I es dada para completar el modelo axial simétrico, pero sólo da una idea de lo que puede ocurrir en esa zona.

Tabla 4.3: Condiciones de diseño y operación del hidrociclón de fondo plano usado para las mediciones de velocidad

- Radio del hidrociclón ( $R$ )	=	5.1 (cm)
- Radio del vortex ( $R_r$ )	=	1.6 (cm)
- Radio del apex ( $R_d$ )	=	0.95 (cm)
- Longitud del hidrociclón ( $L$ )	=	31.05 (cm)
- Altura del tubo buscador de vórtice ( $L_V$ )	=	8.2 (cm)
- Supuesta altura de alimentación ( $L_A$ )	=	10.25 (cm)
- Longitud cilíndrica del hidrociclón	=	30.1 (cm)
- Longitud cónica del hidrociclón	=	0.95 (cm)
- Caudal de alimentación ( $Q$ )	=	1.42 (l/s)
- Caudal de rebalse ( $Q_r$ )	=	1.27 (l/s)
- Caudal de descarga ( $Q_d$ )	=	0.15 (l/s)
- Parámetro característico ( $\lambda$ )	=	0.106
- Presión de entrada ( $\Delta p$ )	=	4 (psi)
- Velocidad tangencial exterior ( $v_{\theta R}$ )	=	1.3 (m/s)
- Número radial de Reynolds ( $Re$ )	=	65
- Viscosidad turbulenta de remolino ( $\nu$ )	=	$3.4 \cdot 10^{-5}(\text{m}^2/\text{s})$

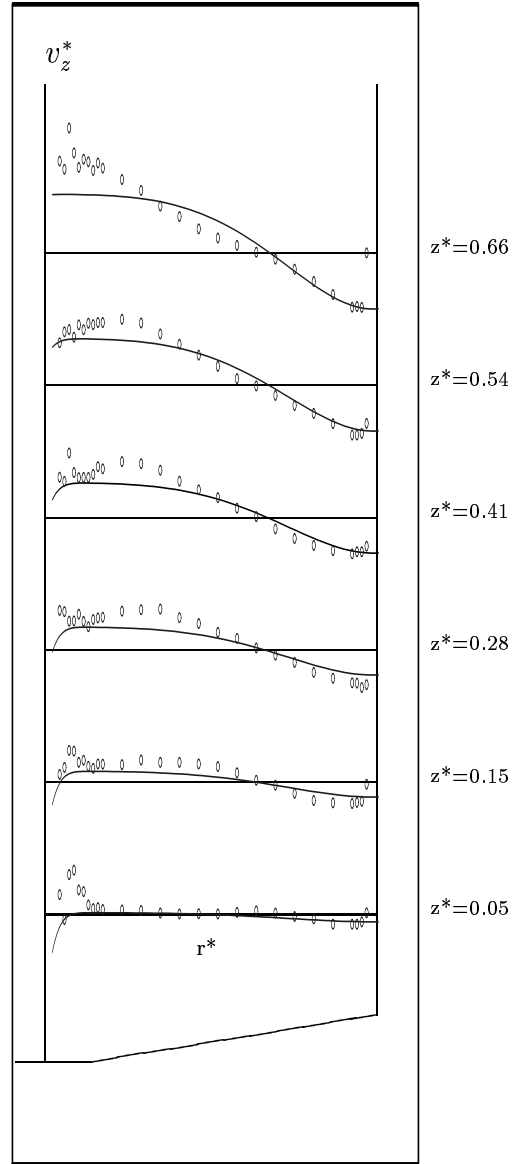


Figura 4.6: Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde  $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Datos de Chiné [16]

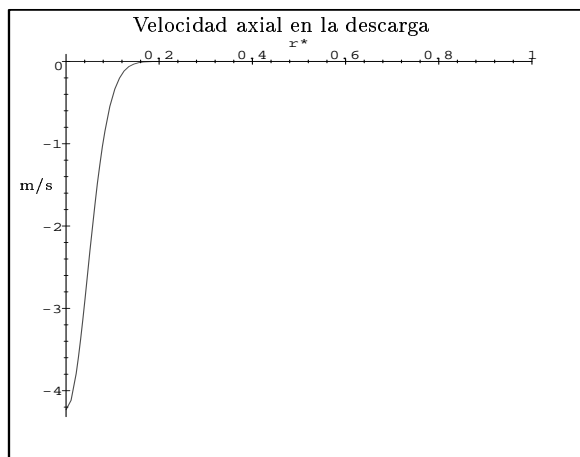
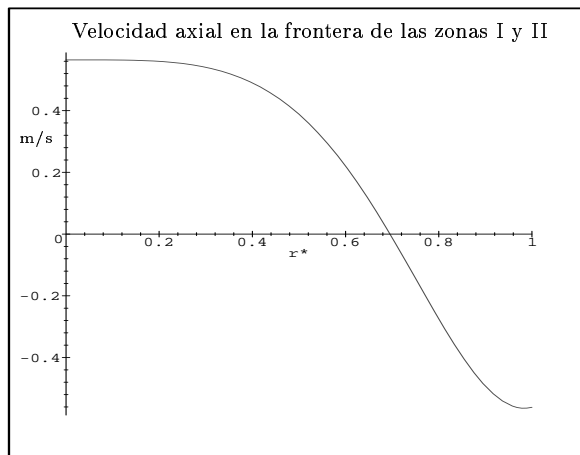
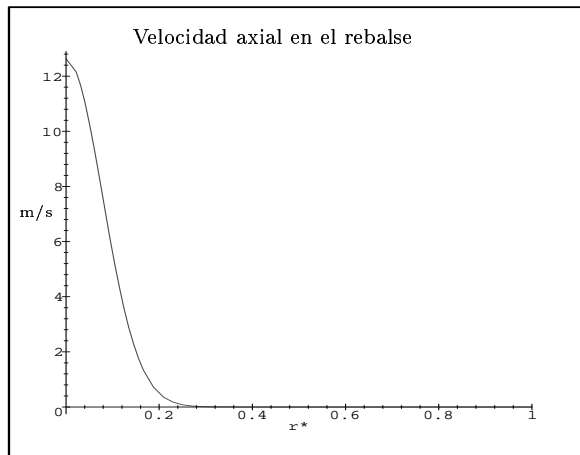


Figura 4.7: Simulación de la distribución de velocidad axial

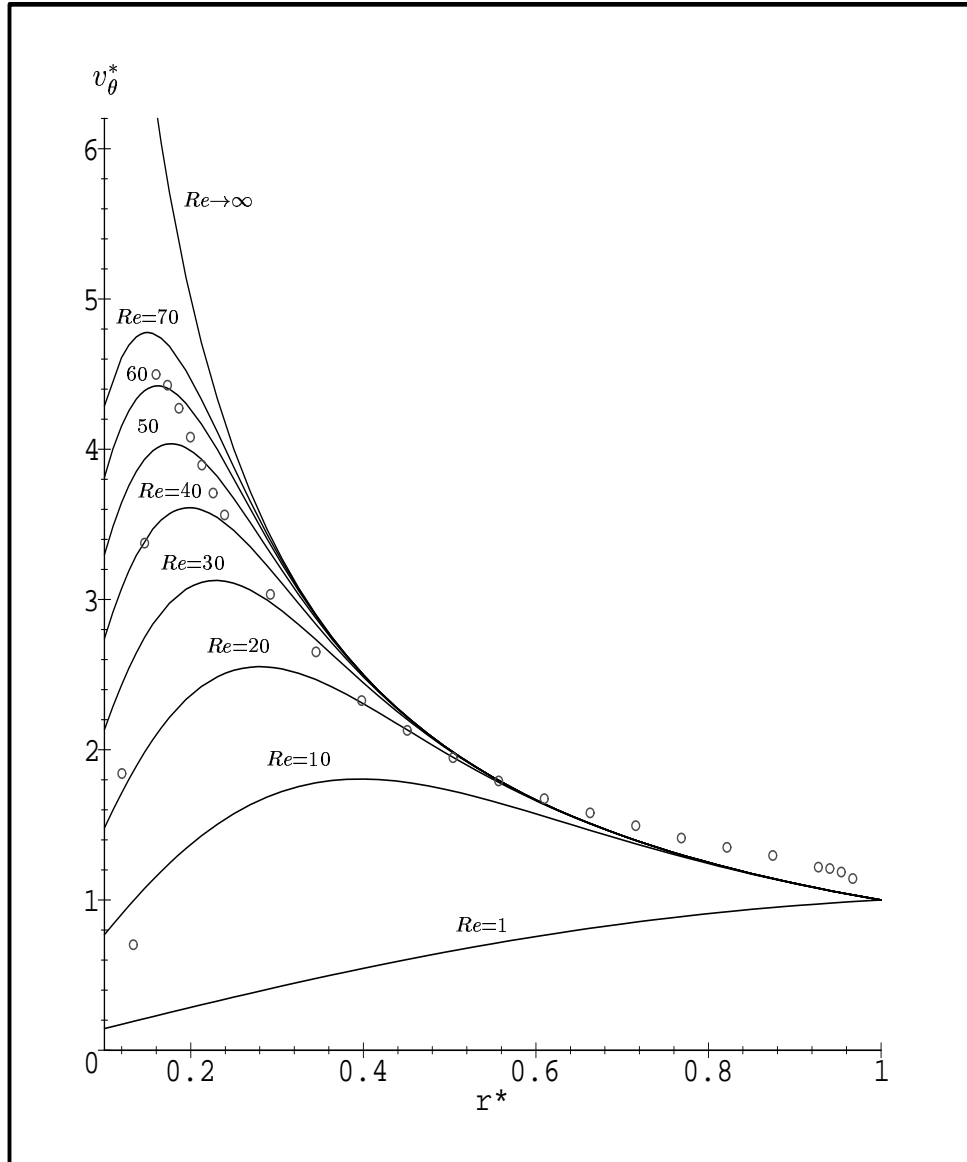


Figura 4.8: Distribución de velocidad tangencial adimensional para varios valores del número radial de Reynolds, donde  $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Los valores experimentales corresponden a  $z^* = 0.28$ . Datos de Chiné [16]

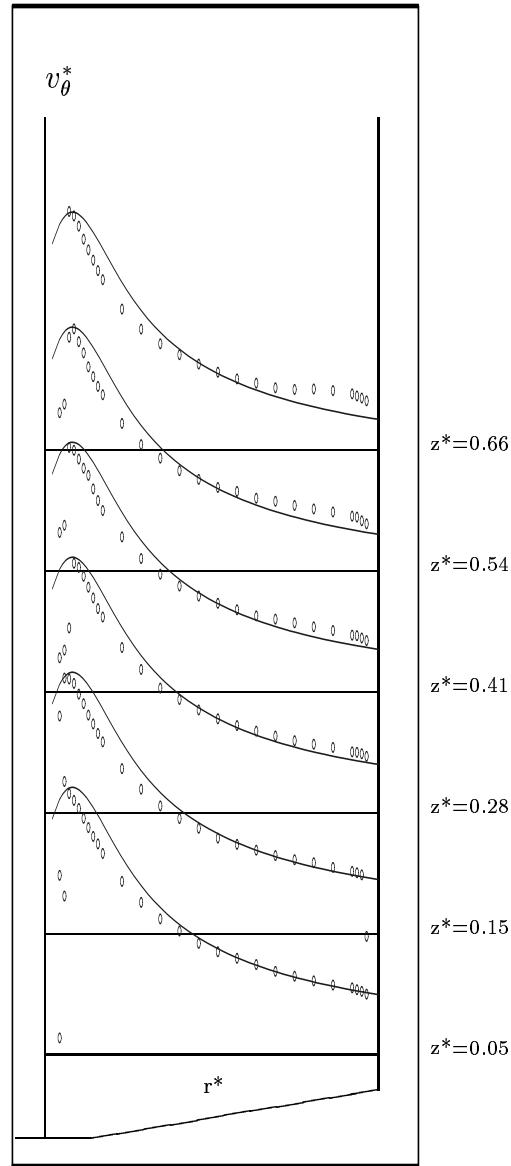
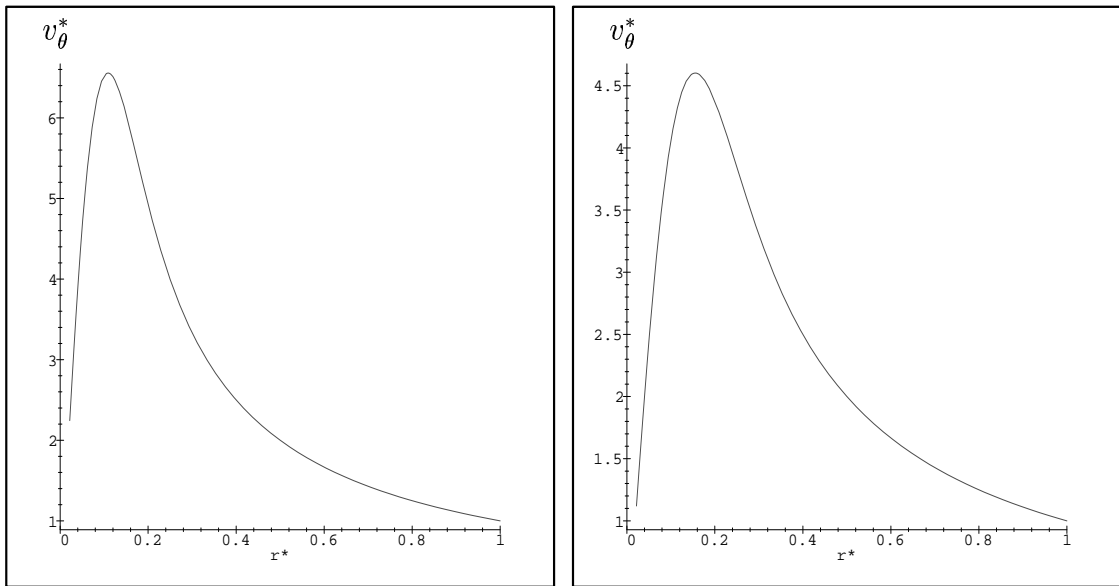


Figura 4.9: Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para  $Re = 65$ , donde  $v_{\theta}^* = v_{\theta}/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Datos de Chiné [16]

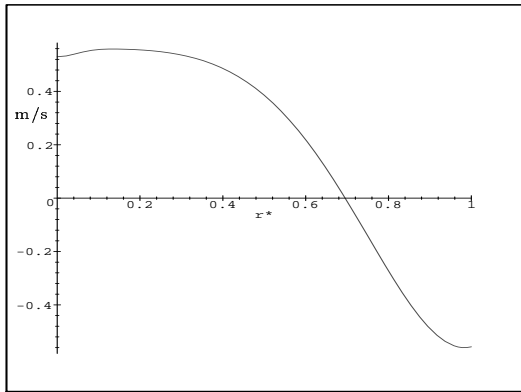




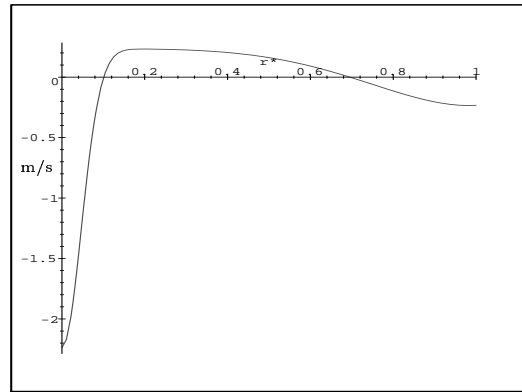
a) Zona I

b) Zona II

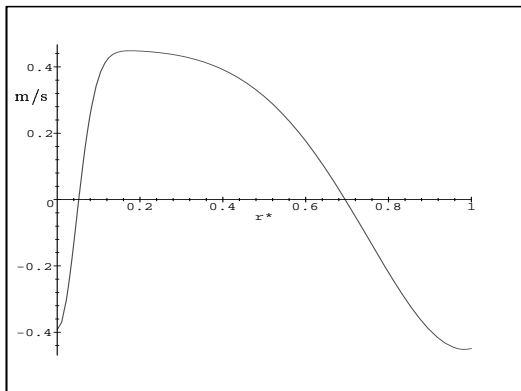
Figura 4.10: Distribución de la velocidad tangencial adimensional en la zona I y en la zona II para  $Re = 65$ , donde  $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$



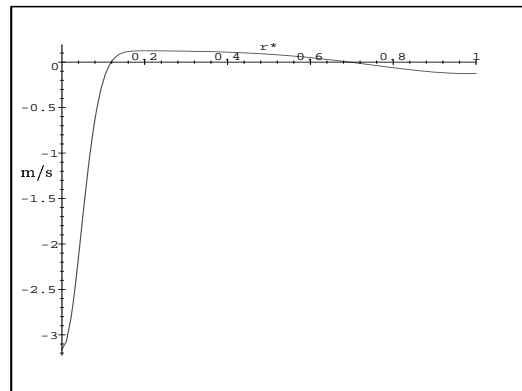
a)  $z^*=0.66$



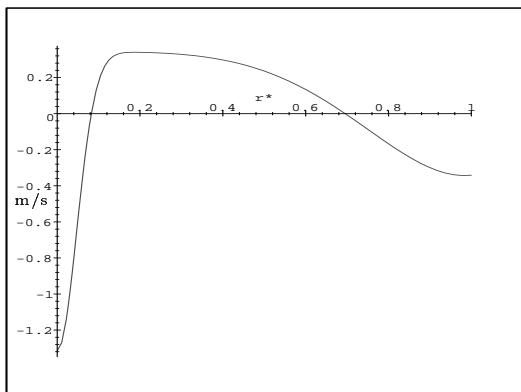
d)  $z^*=0.28$



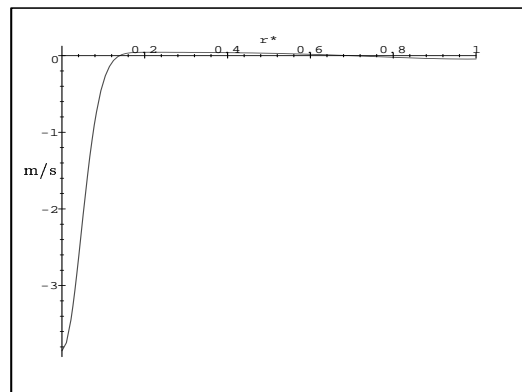
b)  $z^*=0.54$



e)  $z^*=0.15$

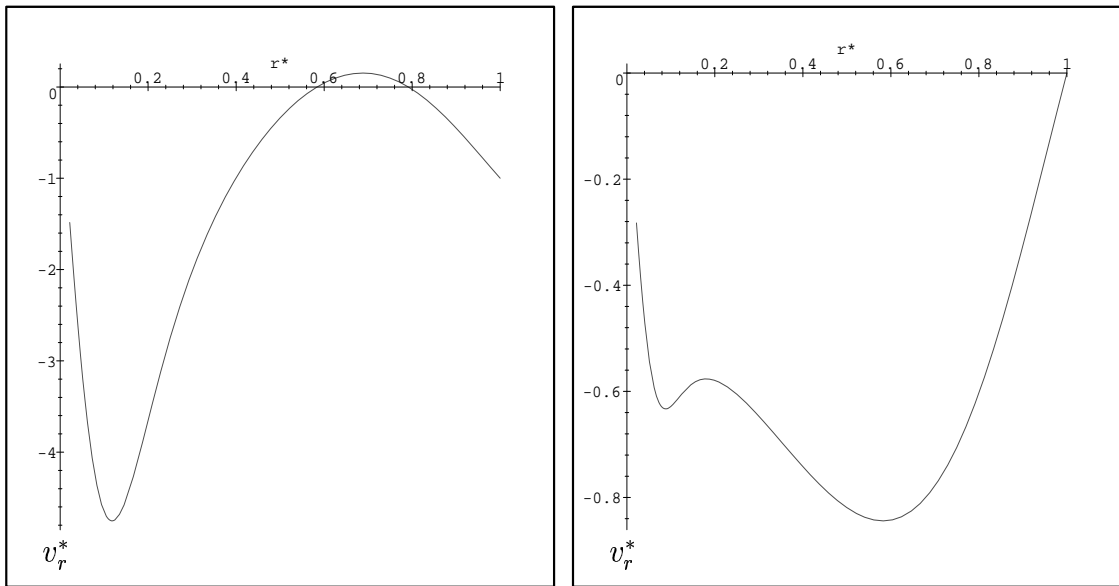


c)  $z^*=0.41$



f)  $z^*=0.05$

Figura 4.11: Distribución de la velocidad axial en diferentes niveles axiales



a) Zona I

b) Zona II

Figura 4.12: Distribución de la velocidad radial adimensional en la zona I y en la zona II, donde  $v_r^* = v_r/v_R$  y  $r^* = r/R$

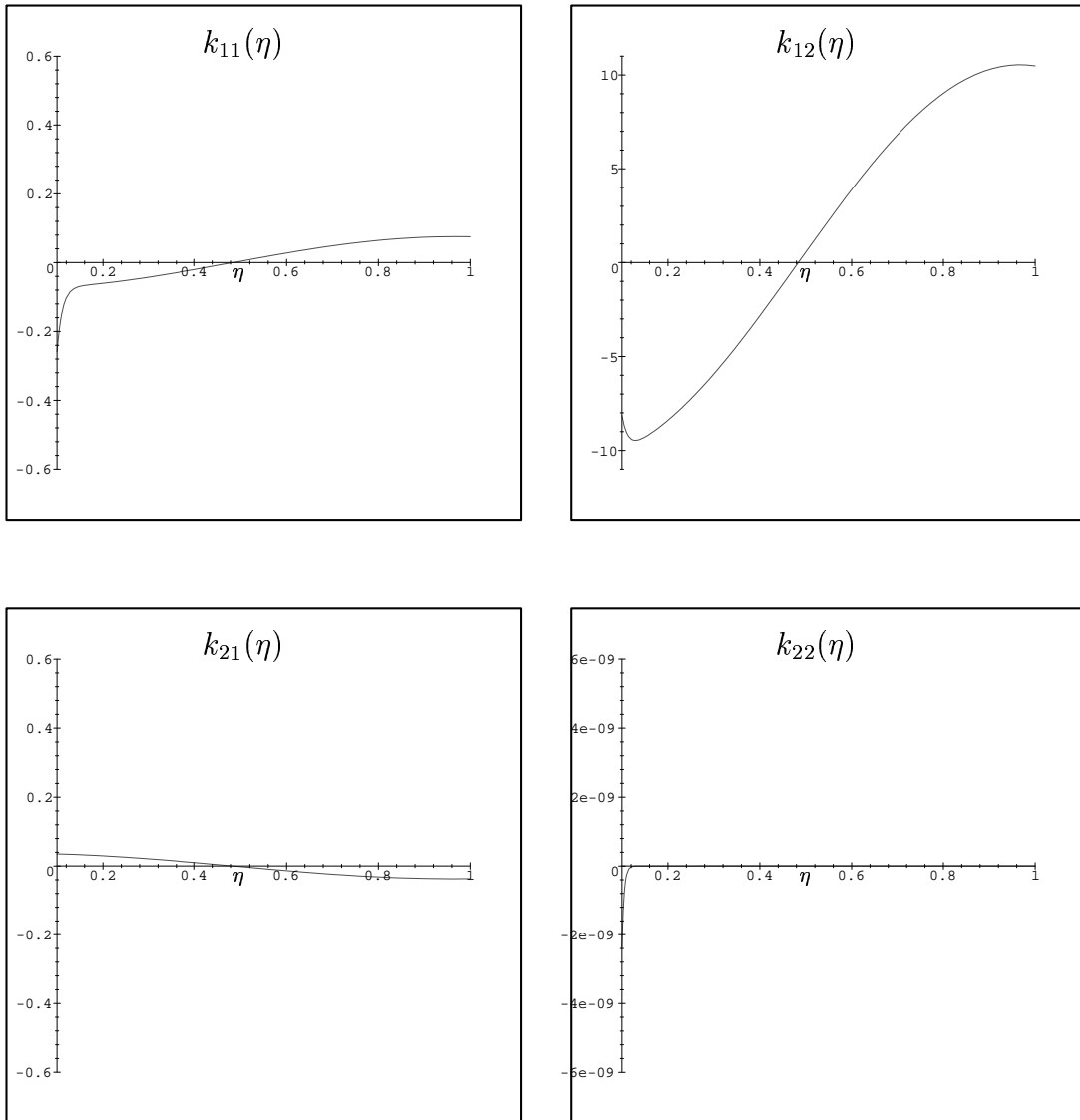


Figura 4.13: Error de la solución aproximada

### 4.3 Aproximación de orden uno

Para el orden de aproximación uno se desarrollaron cuatro pruebas numéricas bajo las condiciones de diseño y operación del hidrociclón dadas en la tabla 4.1 y se tomó  $\delta = 8$ . Los resultados de este orden de aproximación se validaron, nuevamente, con los valores experimentales obtenidos por Chiné [16].

Para la primera prueba numérica se consideró

$$j(\eta) = -1445.32\eta^5 + 6166.26\eta^{9/2} - 11025.86\eta^4 + 10676\eta^{7/2} - 5964.80\eta^3 + 1829.91\eta^{5/2} - 220.59\eta^2 - 15.53\eta^{3/2} \quad (4.2)$$

En la segunda prueba numérica se tomó

$$j(\eta) = -\sin(3.035\eta) \quad (4.3)$$

La tercera prueba numérica correspondió a

$$j(\eta) = \lambda \left( 1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\eta_d}\eta\right) \right) + 5\eta(\eta - 1) \quad (4.4)$$

con lo que  $f_{01}(\eta) = 5\eta(\eta - 1)$ .

Para la cuarta prueba numérica se consideró

$$j(\eta) = \lambda \left( 1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\eta_d}\eta\right) \right) - 1.5 \sin(\pi\eta) \quad (4.5)$$

con lo que  $f_{01}(\eta) = -1.5 \sin(\pi\eta)$ .

Las figuras 4.14, 4.17, 4.20 y 4.23 (correspondientes a distintas pruebas numéricas) muestran una comparación de la predicción de velocidad axial usando la ecuación (3.71) y los valores experimentales. Se observa que la dependencia radial y representación global de la velocidad axial es más satisfactoria para las funciones consideradas en las pruebas numéricas tercera y cuarta. Justamente las funciones  $f_{01}$  consideradas en estas pruebas son las que producen menor error en el ajuste con respecto a la ecuación (3.47).

En lo que se refiere a la comparación de la velocidad axial obtenida bajo el orden de aproximación uno con la obtenida bajo el orden de aproximación cero, se observa que no hay mayor diferencia entre una y la otra. Esto es debido a que las funciones  $f_{11}$  y  $f_{12}$  son prácticamente nulas excepto en las zonas cercanas al eje del hidrociclón.

La comparación de la velocidad tangencial experimental y la simulada usando la ecuación (3.72) es dada en las figuras 4.15, 4.18, 4.21 y 4.24. Los

resultados son satisfactorios.

Cabe señalar que se obtiene la misma distribución de velocidad tangencial en todas las cuatro pruebas numéricas realizadas. Esto indica que el tipo de función aproximante de la función de corriente en la interfase de las zonas I y II no incide en la distribución de la velocidad tangencial.

Es importante también señalar que la distribución de velocidad tangencial es mejorada en el orden de aproximación uno con respecto al orden de aproximación cero. Aunque la diferencia de ambas es poca, sin embargo hay una ligera variación axial, la que se justifica al observar en la fig. 4.5 los máximos de velocidad tangencial en los distintos niveles axiales.

Finalmente, las figuras 4.16, 4.19, 4.22 y 4.25 muestran las predicciones de velocidad radial obtenidas en cada prueba numérica. Se observa ciertas variaciones entre ellas. Esto es debido a la función de corriente considerada en la interfase de las zonas I y II.

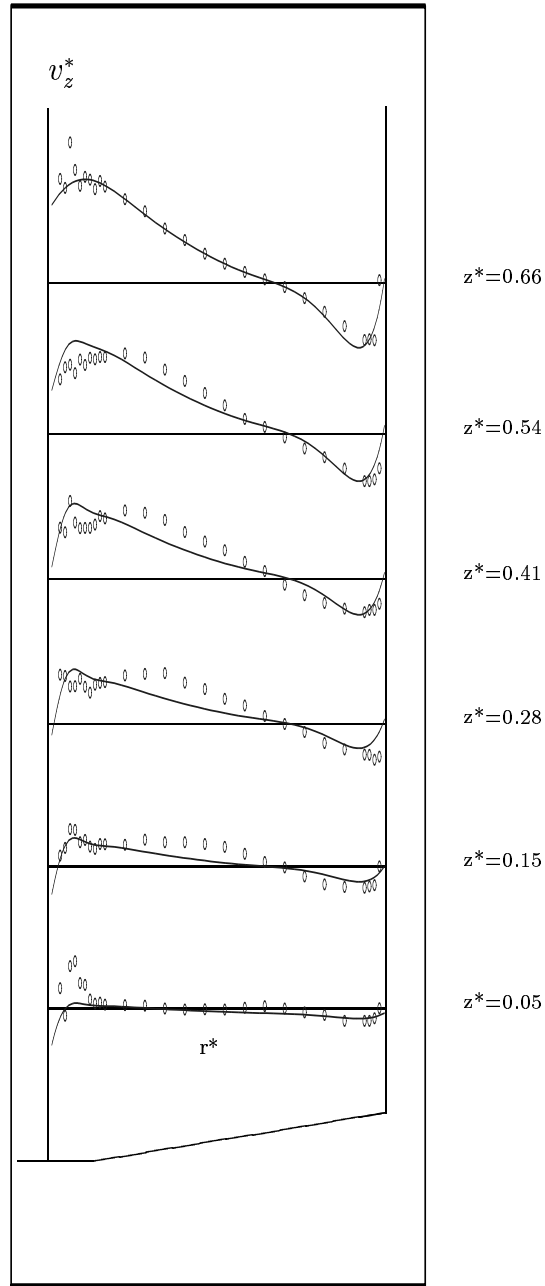


Figura 4.14: Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde  $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Primera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

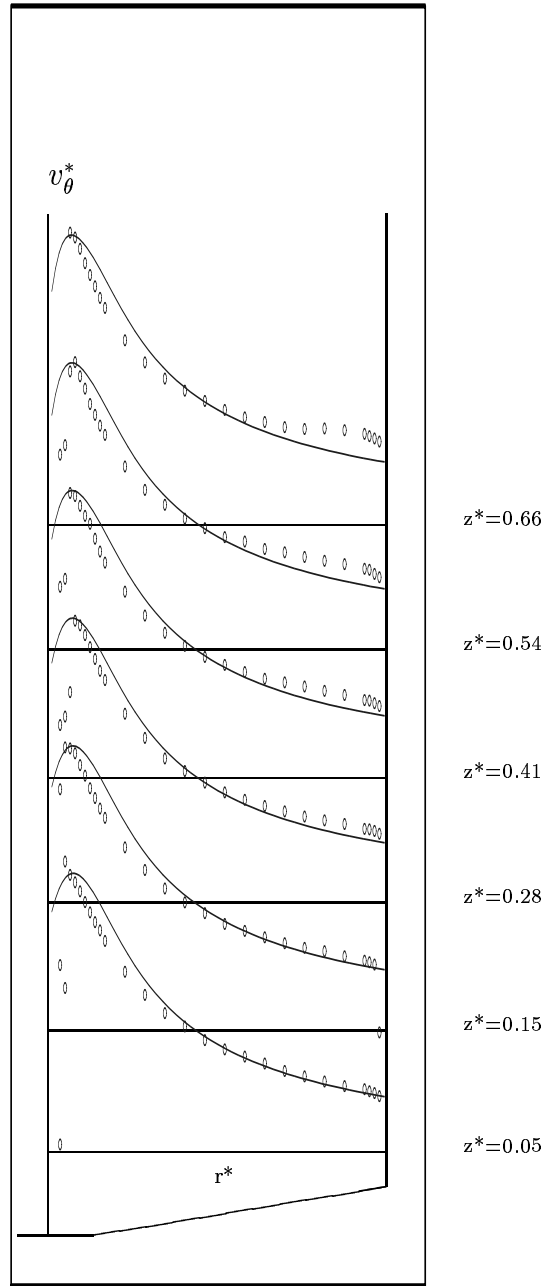


Figura 4.15: Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para  $Re = 40$ , donde  $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Primera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]



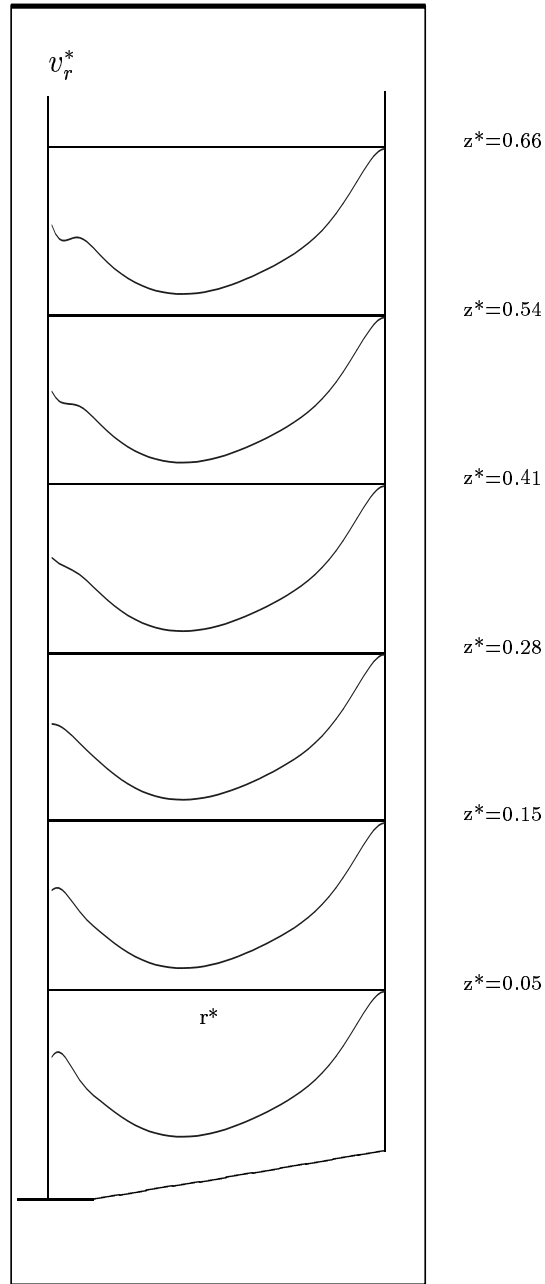


Figura 4.16: Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde  $v_r^* = -v_r/v_R$  y  $r^* = r/R$ . Primera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

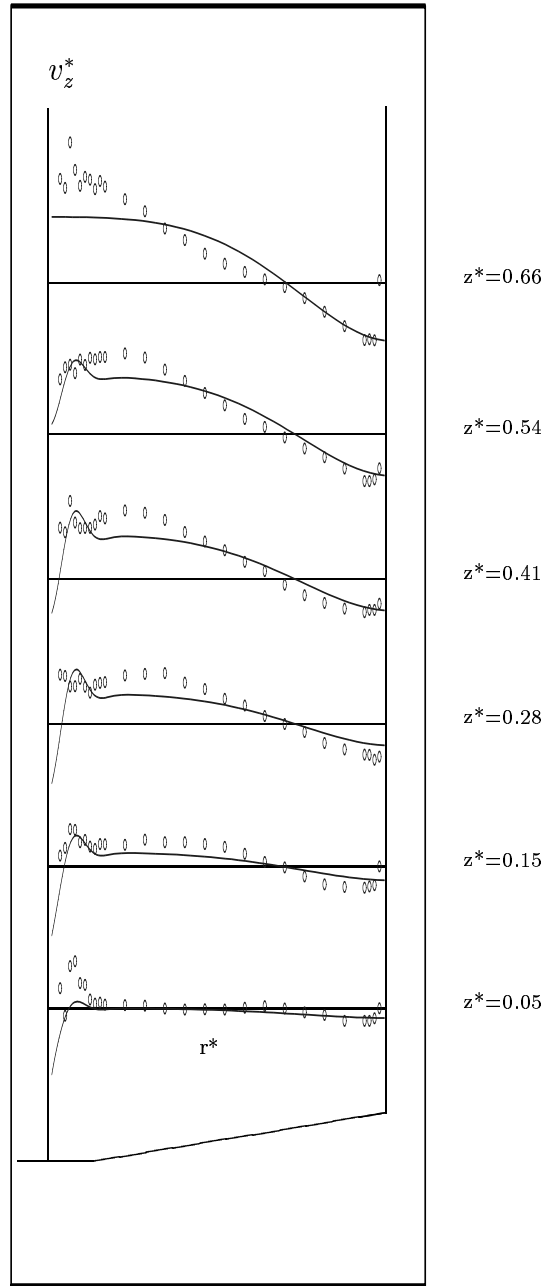


Figura 4.17: Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde  $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Segunda prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

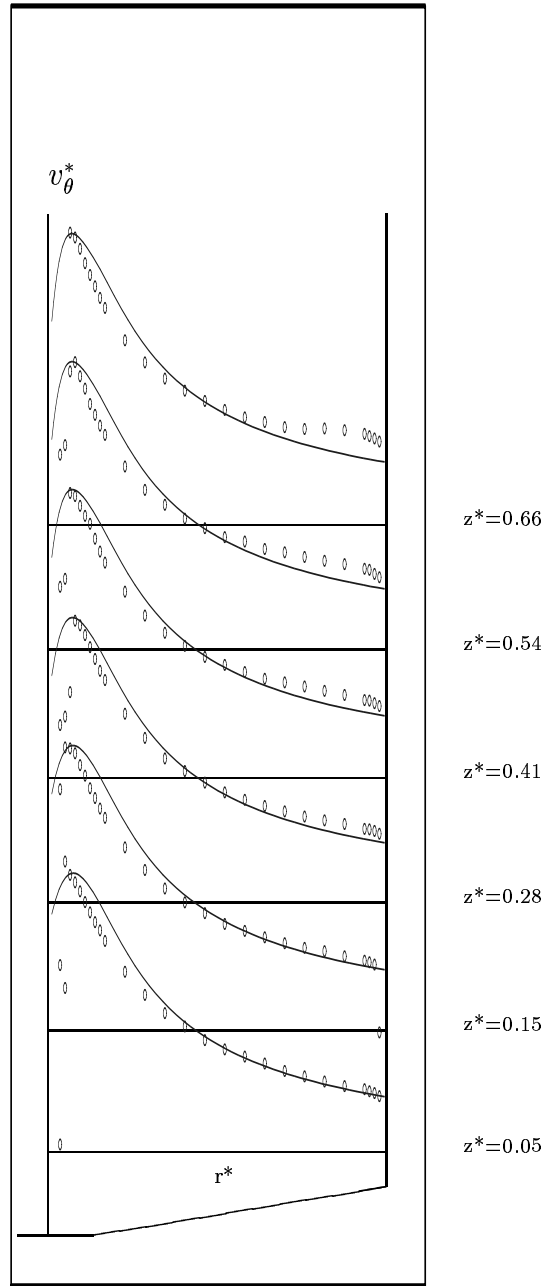


Figura 4.18: Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para  $Re = 40$ , donde  $v_{\theta}^* = v_{\theta}/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Segunda prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

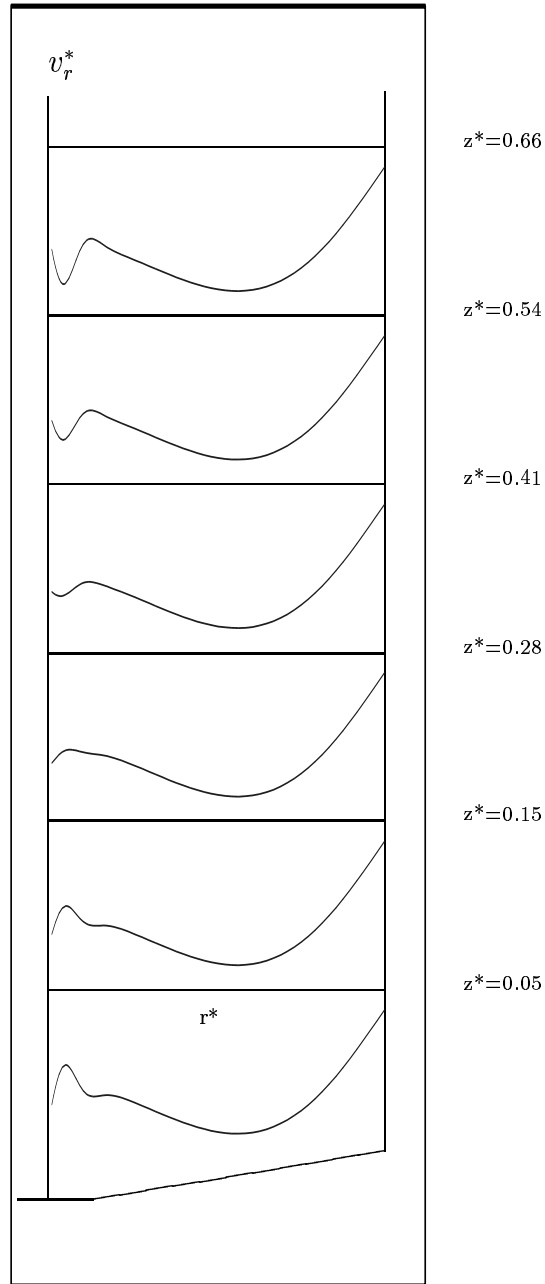


Figura 4.19: Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde  $v_r^* = -v_r/v_R$  y  $r^* = r/R$ . Segunda prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

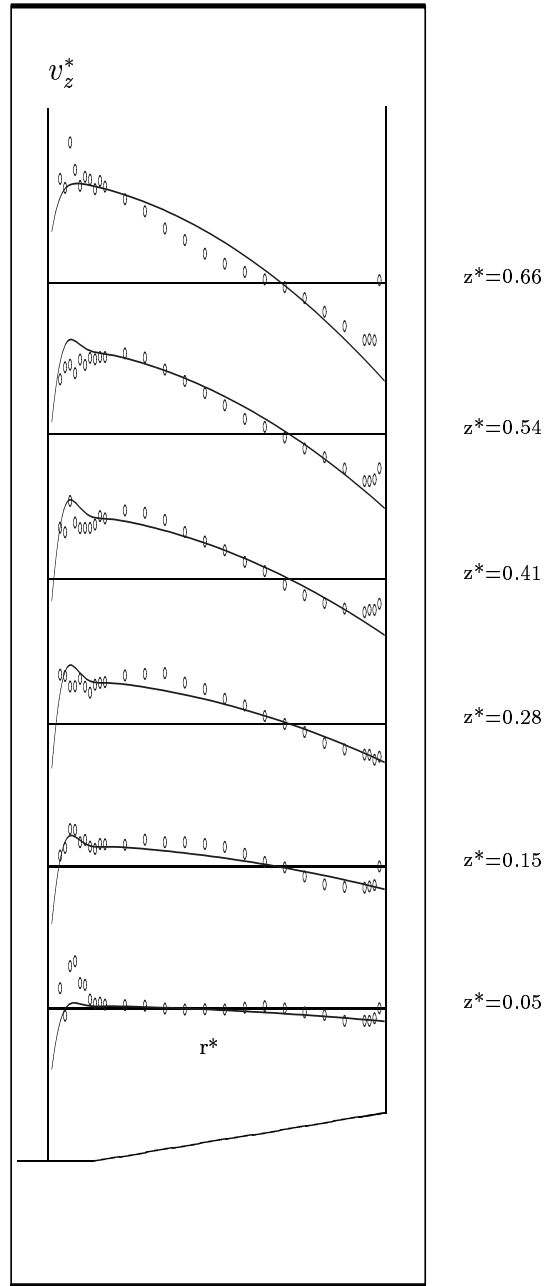


Figura 4.20: Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde  $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Tercera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

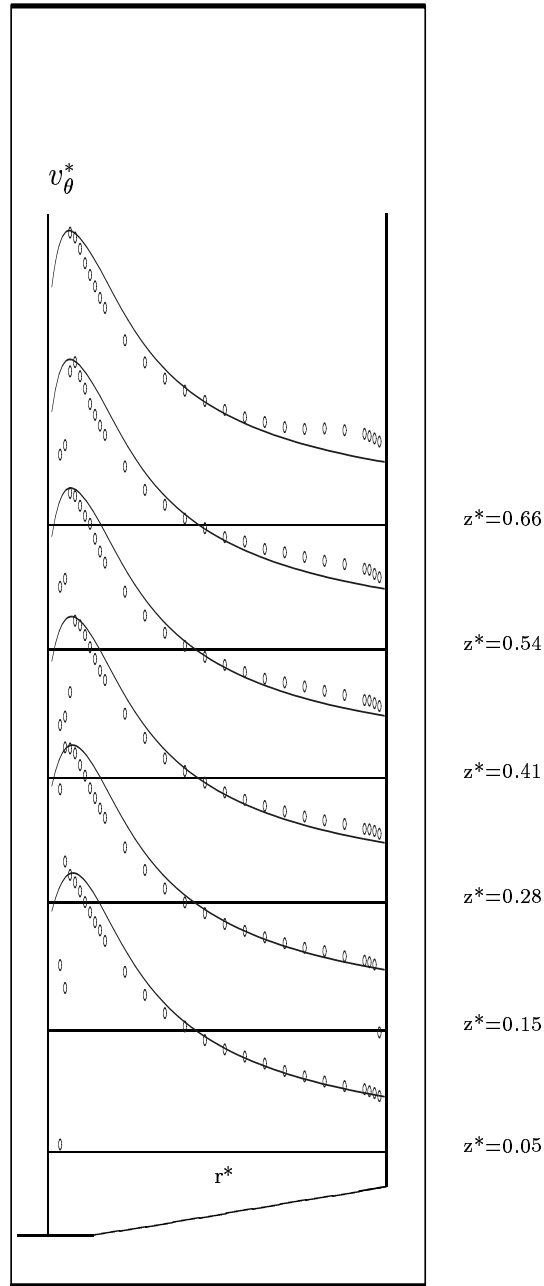


Figura 4.21: Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para  $Re = 40$ , donde  $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Tercera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

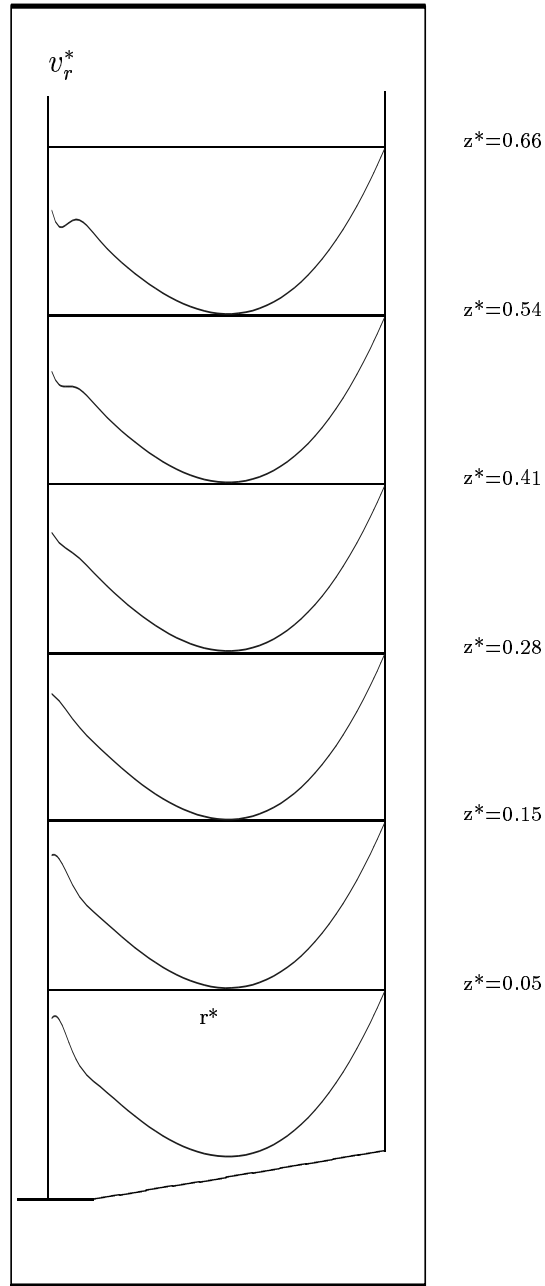


Figura 4.22: Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde  $v_r^* = -v_r/v_R$  y  $r^* = r/R$ . Tercera prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

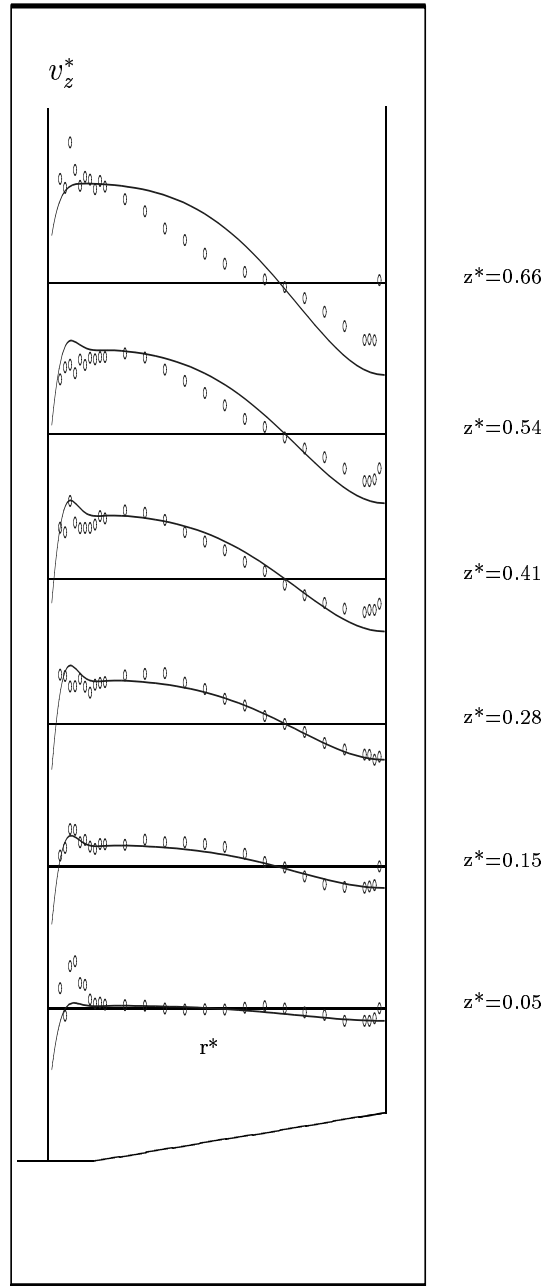


Figura 4.23: Comparación de la distribución de velocidad axial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales, donde  $v_z^* = v_z/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Cuarta prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]



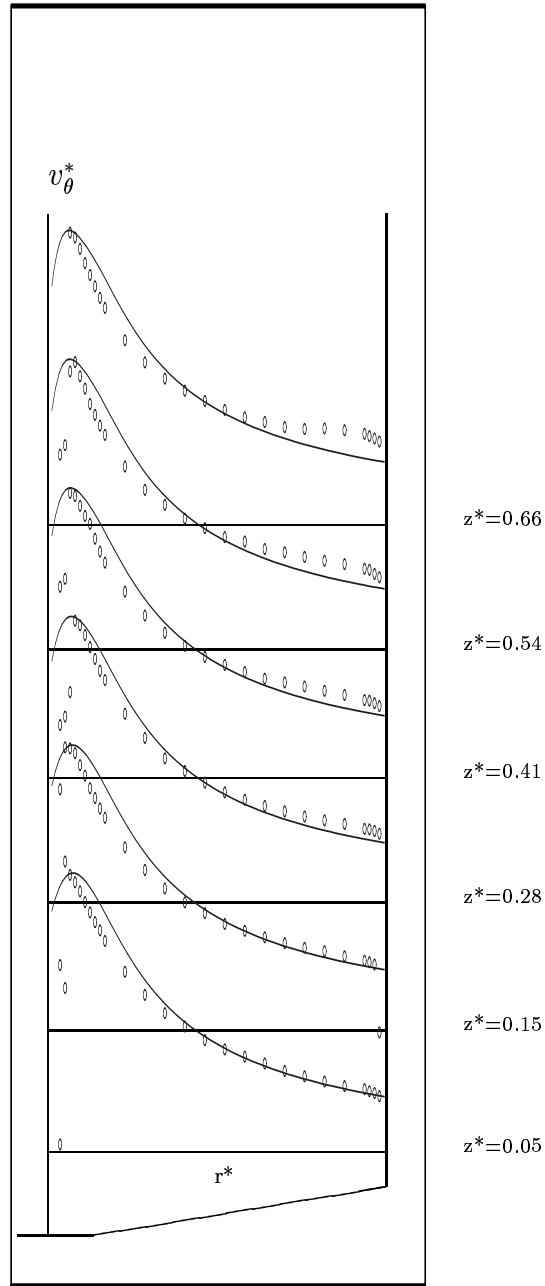


Figura 4.24: Comparación de la distribución de velocidad tangencial adimensional predecida y experimental en varios niveles axiales para  $Re = 40$ , donde  $v_\theta^* = v_\theta/v_{\theta R}$  y  $r^* = r/R$ . Cuarta prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

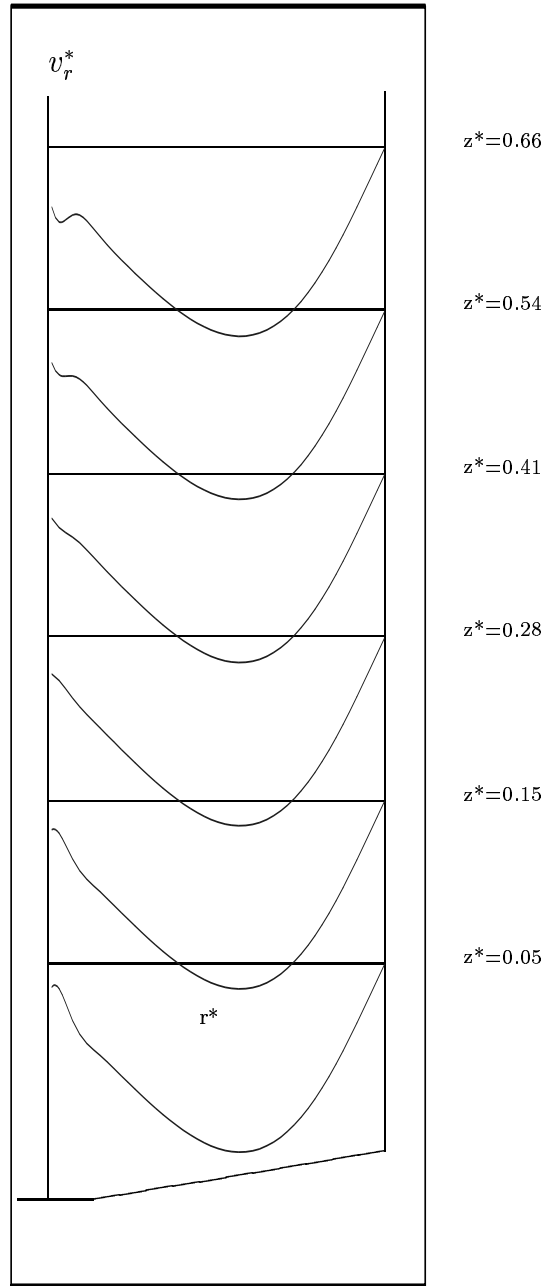


Figura 4.25: Distribución de velocidad radial adimensional predecida en varios niveles axiales, donde  $v_r^* = -v_r/v_R$  y  $r^* = r/R$ . Cuarta prueba numérica de la aproximación de orden uno. Datos de Chiné [16]

# Conclusiones

De la presente tesis se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1) Las ecuaciones completas de Navier-Stokes constituyen un buen punto de partida para modelar el flujo en vórtice en un hidrociclón de fondo plano.

2) Modelando la turbulencia como isotrópica, por medio de una viscosidad de remolino constante, se obtiene una distribución radial y axial razonable de la velocidad tangencial y axial. Aún cuando mediciones experimentales han demostrado que la turbulencia en un hidrociclón cónico o de fondo plano es anisotrópica con valores más altos cerca de la pared y el núcleo de aire, no hay necesidad de introducir una descripción de turbulencia mas elaborada para obtener perfiles de velocidad razonables en hidrociclones de fondo plano.

3) El número de Rossby, obtenido bajo condiciones de operación, fué del orden de  $10^{-2}$ , asegurando de esta forma una buena aproximación de la solución.

4) En el orden de aproximación cero, el número radial de Reynolds afecta solamente a la distribución de velocidad tangencial. Con un incremento en el número de Reynolds la posición del máximo en la velocidad tangencial se acerca más al eje del hidrociclón.

5) La aproximación de orden cero conduce a una distribución de velocidad en la que las velocidades tangencial y radial dependen sólo de la coordenada radial y la velocidad axial depende de la coordenada radial y es linealmente dependiente de la coordenada axial.

6) El orden de aproximación uno, comparado con el orden de aproximación cero, produce una ligera mejora en la distribución de velocidades, lo que se observa en la comparación con los datos experimentales.

7) La función de corriente en la interfase de las zonas I y II, es decir  $j(\eta)$ ,

es simulada convenientemente por cualquiera de las dos funciones siguientes:

$$j(\eta) = \lambda \left( 1 - \exp \left( -\frac{\delta}{\eta_d} \eta \right) \right) + c\eta(\eta - 1) \quad (4.6)$$

$$j(\eta) = \lambda \left( 1 - \exp \left( -\frac{\delta}{\eta_d} \eta \right) \right) - d \sin(\pi\eta) \quad (4.7)$$

donde  $c$  y  $d$  son apropiadas constantes que se toman de acuerdo a la operación desarrollada por el hidrociclón.

8) En los hidrociclones de fondo plano la velocidad radial depende directamente de la forma de la velocidad axial. Se puede obtener distribuciones de velocidad radial completamente diferentes al elegir apropiados flujos axiales. Sin embargo, la forma de la velocidad tangencial, como combinación de un vórtice libre y de un movimiento rígido es insensible a la forma de estas velocidades radial y axial.

9) Para que la velocidad axial sea consecuencia de la velocidad radial, o viceversa, debe ser una función de  $r$  y por lo menos una función lineal de  $z$ .

10) Finalmente, se puede indicar que, en la modelación de hidrociclones, la selección entre las diversas soluciones de las ecuaciones de campo sólo comparando los valores experimentales del tamaño del máximo de la velocidad tangencial, no es el apropiado camino. Al menos dos componentes de velocidad deben ser comparadas y especialmente la velocidad axial debe ser razonable.

# Bibliografía

- [1] Amrouche C., Bernardini C., Dauge M. and Girault V., 'Vector Potentials in three-dimensional Non-Smooth Domains', *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21**, 823 (1998).
- [2] Antunes M. e Medronho R. A., *Modelos que prevêm o desempenho de hidrociclones: uma avaliação crítica*, Anais do XV ENEMP 353, 1987.
- [3] Arterburn R. A., *Design and installation of comminution circuits*, ed. A. Mular and G. Jergensen, SME, New York, 1982.
- [4] Barrientos A., Saez E. y Concha F., *Modelación fenomenológica de hidrociclones*, Serie Monografías en Conminución 3, Departamento de Ingeniería Metalúrgica, Universidad de Concepción, Chile, 1991.
- [5] Bloor M. I. G. and Ingham D. B., 'The fluid mechanics of the hydrocyclone', *Trans. Instn Chem. Engrs*, **51**, 36 (1973).
- [6] Bloor M. I. G. and Ingham D. B., 'Turbulent spin in a hydrocyclone', *Trans. Instn Chem. Engrs*, **53**, 1 (1975).
- [7] Bloor M. I. G. and Ingham D. B., 'Boundary layer flows on the side walls of conical cyclones', *Trans. Instn Chem. Engrs*, **54**, 276 (1976).
- [8] Bloor M. I. G., *On axially symmetric flow models for hydrocyclones*, 3rd. International Conference on HYDROCYCLONES, Oxford, England, 30 September-2 October 1982.
- [9] Bloor M. I. G. and Ingham D. B., 'Theoretical aspects of hydrocyclones flow', In progress in filtration and separation, Ed. by R.J. Wakeman, **3**, 57 (1983).
- [10] Bloor M. I. G. and Ingham D. B., 'The flow in industrial cyclones', *Jl. of Fluid Mech.*, **178**, 507 (1987).
- [11] Collantes J. and Concha F., 'Vortex flow in flat bottom hydrocyclones: zero order approximation', Technical Report 98-12, Department of Mathematical Engineering, University of Concepcion, Chile, 1998.

- [12] Collantes J., Barrientos A. and Concha F., 'Existence and uniqueness of solution of the stationary Stokes equations in  $C^{0,1}$  domains', Technical Report 99-01, Department of Mathematical Engineering, University of Concepcion, Chile, 1999.
- [13] Collantes J. and Concha F., 'Existence and uniqueness of solution of the stationary Navier-Stokes equations in  $C^{0,1}$  domains. Application to hydrocyclones', Technical Report 99-02, Department of Mathematical Engineering, University of Concepcion, Chile, 1999.
- [14] Collantes J., Concha F. and Chiné B., 'Axial symmetric flow model for a flat bottom hydrocyclone', Jl. of Separation and Purification Technology, accepted for publication (1999).
- [15] Concha F., *Phenomenological Modeling of hydrocyclones*, Plenary Lecture, Eng. Foundation Conference on solid-liquid separation, Hawaii, 18-23 April 1999.
- [16] Chiné B., *Estudio experimental del flujo con vórtice en hidrociclones*, M.Sc. Thesis, Metallurgical Engineering, University of Concepción-Chile, 1999.
- [17] Donaldson C. P. and Sullivan R. D., *Behavior of solutions of the Navier-Stokes Equations for a complete class of three-dimensional viscous vortices*, Proc. of Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., 16 (1960).
- [18] Deny J. and Lions J., 'Les espaces du type de BEPPO LEVI', Ann. Inst. Fourier, **5**, 305 (1954).
- [19] De Rham G., *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
- [20] Girault V. and Raviart P. A., *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics 749, Springer-Verlag Berlin, 1979.
- [21] Hsieh K. T. and Rajamani K., 'Phenomenological model of the Hydrocyclone', Int. J. Mineral Proc., **22**, 223 (1988).
- [22] Kelsall D. F., 'A study of the motion of solid particles in a hydraulic cyclone', Trans. Instn Chem. Engrs, **30**, 87 (1952).
- [23] Ladyzhenskaya O., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [24] Lewellen W. S., 'A solution for three-dimensional vortex flow with strong circulation', J. Fluid Mech., **14**, 420 (1962).

- [25] Lynch A. J. and Rao T. C., *Modelling and Scale-Up of hydrocyclone classifiers*, Proc. of 11th. Int. Mineral Processing Congress, Paper 9, 9 (1975).
- [26] Malhotra A., Branion R. M. R. and Hauptmann E. G., 'Modelling the flow in a hydrocyclone', *Can. J. Chem. Eng.*, **72**, 953 (1994).
- [27] Nečas J., *Equations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, 1965.
- [28] Plitt L. R., *A mathematical model of the hydrocyclone classifier*, CIM Bulletin 114 (1976).
- [29] Rietema K., 'Performance and design of hydrocyclones: I. General considerations', *Chem. Eng. Sci.*, **15**, 298 (1961).
- [30] Rietema K. and Krajenbrink H. J., 'Theoretical derivation of tangential velocity profiles in a flat vortex chamber. Influence of turbulence and wall friction', *Appl. Sci. Res., Section A*, **8**, 177 (1958).
- [31] Rietema K., *Liquid-solids separation in a cyclone: The effect of turbulence on separation*, Symposium on the interaction between fluids and particles, London, Instn Chem. Engrs, p.275, 1962.
- [32] Temam R., *Navier-Stokes Equations*, Studies in Mathematics and its Applications, North Holland, 1977.
- [33] Temam R., *Navier-Stokes Equations and Non-linear Functional Analysis*, Philadelphia, 1993.
- [34] Upadrashta K. R., Ketchman V. J. and Miller J. D., 'Tangential velocity profile for pseudoplastic power-law fluids in the hydrocyclone - a theoretical derivation', *Int. J. Mineral Proc.*, **20**, 309 (1987).
- [35] Van Duijn G. and Rietema K., 'Performance of a large-cone angle hydrocyclone, I. Hydrodynamics', *Chem. Eng. Sci.*, **10**, 1651 (1983).
- [36] Wloka J., *Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 1987.