UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
ESCUELA DE GRADUADOS
CONCEPCION–CHILE

SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS EXTERIORES EN TEORIA DEL POTENCIAL Y ELASTICIDAD

Tesis para optar al grado de
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática

Mario Eduardo Mellado Sánchez

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
2000

SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS EXTERIORES EN TEORIA DEL POTENCIAL Y ELASTICIDAD

Mario Eduardo Mellado Sánchez

Director de Tesis: Gabriel N. Gatica

Director de Programa: Rodolfo Rodríguez

COMISION EVALUADORA

Dr. Ricardo Durán, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Dr. George C. Hsiao, Universidad de Delaware, USA

Dr. Ernst P. Stephan, Universidad de Hannover, Alemania

COMISION EXAMINADORA

Firma: _____
Dr. Mario M. Durán
Pontificia Universidad Católica, Chile

Firma: _____
Dr. Gabriel N. Gatica
Universidad de Concepción, Chile

Firma: _____
Dra. María C. Rivara
Universidad de Chile, Chile

Fecha Examen de Grado: _____

Calificación: _____

Concepción–Marzo 2000

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi profundo agradecimiento al Profesor Dr. Gabriel Gatica por sugerirme esta área de investigación y por su ayuda a través de estos años. También es para mi un deber agradecerle su constante preocupación por mi desarrollo académico y su importante trabajo en la creación y consolidación de este programa de Doctorado.

A los Profesores Dr. Rodolfo Rodríguez y Dr. George C. Hsiao. Trabajar junto a ellos ha sido una gran oportunidad e importante etapa durante mi formación.

Mis agradecimientos a FONDECYT por su apoyo a través del proyecto 1951143 (como alumno tesista) y al Sub–Programa A de Análisis Numérico del FONDAP en Matemáticas Aplicadas (como ayudante de investigación).

Durante estos años he conocido a muchas personas que han hecho más completa mi vida. A mis amigos de Ingeniería Matemática, a los de Postgrado, a todos en general, muchas gracias.

Muy especialmente a mi hermosa familia. Su apoyo incondicional, cariño y compañia han permitido el desarrollo y culminación de este trabajo. El tenerlos a mi lado es una permanente inspiración y fuente inagotable de energías para vivir.

A mis Padres,
con todo mi amor.

RESUMEN

En esta Tesis se estudia el uso combinado de los Métodos de Elementos Finitos, Elementos de Frontera, aplicaciones Dirichlet–to–Neumann y Descomposición de Dominio para la solución numérica de problemas exteriores lineales y no lineales en Teoría del Potencial y Elasticidad.

Los algoritmos para problemas lineales están basados en el uso de aplicaciones Dirichlet–to–Neumann para transformar el problema exterior en un problema mixto de valores de frontera sobre una región acotada. Este dominio acotado es descompuesto en un número finito de regiones anulares lo cual, mediante el uso de operadores de Steklov–Poincaré, permite la obtención de un problema simétrico sobre las interfases. Luego, este problema es resuelto usando métodos iterativos, basados en precondicionadores tipo Dirichlet–Robin, obteniéndose algoritmos de iteración por subdominios que pueden ser implementados naturalmente en un computador paralelo. En lo que respecta a problemas no lineales, se presenta un esquema de linealización basado en el uso de precondicionadores lineales.

Como modelos en Teoría del Potencial se consideran el problema exterior de Dirichlet para el Laplaciano en el plano y una clase de problemas exteriores no lineales fuertemente monótonos. En Elasticidad se considera el problema exterior para el sistema de Lamé y un problema exterior no lineal en elasto–plasticidad bidimensional.

Gran atención es puesta en los aspectos variacionales de los esquemas de descomposición de dominio, aproximación de los correspondientes operadores de Steklov–Poincaré y análisis de los respectivos esquemas discretos. Además, se presentan algunos experimentos numéricos que confirman nuestros resultados.

ABSTRACT

This Thesis is concerned with the combination of Finite Element, Boundary Element, Dirichlet–to–Neumann mappings and Domain Decomposition Methods for the numerical solving of linear and nonlinear exterior boundary value problems arising in Potential Theory and Elasticity.

The algorithms for linear problems are based on Dirichlet–to–Neumann mappings to transform the exterior problem into a mixed boundary value problem on a bounded domain. This domain is decomposed into a finite number of annular nonoverlapping subdomains which, by means of Steklov–Poincaré operators, allows to obtain a symmetric interface problem. Then, this problem is solved by using iterative methods, based on Dirichlet–Robin preconditioners, leading to iteration–by–subdomains algorithms well suited for parallel computations. In what concerning nonlinear problems, we present a linearization procedure based on linear preconditioners.

As models in Potential Theory, we consider the exterior Dirichlet problem for the Laplacian in the plane and a class of nonlinear exterior strongly monotone problems. In Elasticity we consider the exterior Dirichlet problem for the Lamé system and an exterior problem in bidimensional elasto–plasticity.

We discuss the variational aspects of the presented algorithms, approximation of Steklov–Poincaré operators and provide the corresponding finite dimensional analysis. Also, we give some numerical experiments which confirm our results.

Índice General

1 Introducción **1**

1.1 Introducción 1

1.2 Espacios de Sobolev 3

1.3 Método de Elementos Finitos 9

1.4 Método de Elementos de Frontera 14

2 El Método de Desacoplamiento **19**

2.1 El problema exterior de Laplace 20

2.2 La fórmula de integración 23

2.3 Estimaciones de error 27

2.4 Experimentos numéricos 33

3 DDM en Teoría del Potencial **41**

3.1 El problema exterior lineal 43

3.2 Esquema D–FEM 44

3.2.1 Operadores de Steklov–Poincaré 44

3.2.2 Aproximaciones discretas 51

3.2.3 Algoritmos de iteración por subdominios 57

3.3 Esquema D–BEM–FEM 65

3.3.1 Operadores de Steklov–Poincaré 65

3.3.2 Aproximaciones discretas 79

3.3.3 Algoritmos de iteración por subdominios 88

3.4 Extensión a problemas no lineales 90

3.4.1 El problema exterior no lineal 91

3.4.2 Aproximación discreta del problema no lineal 94

3.4.3 El esquema de linealización 97

3.5 Experimentos numéricos 102

4 DDM en Elasticidad **111**
4.1 El Método de Han y Wu 112
4.2 Esquema D–FEM 115
4.2.1 Operadores de Steklov–Poincaré 115
4.2.2 Aproximaciones discretas 119
4.2.3 Algoritmos de iteración por subdominios 125
4.3 Extensión a problemas no lineales 130
4.3.1 El problema exterior no lineal 130
4.3.2 Aproximación discreta del problema no lineal 136
4.3.3 El esquema de linealización 138

Conclusiones y proyecciones **141**

Publicaciones generadas **143**

Bibliografía **145**

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

En diversas áreas de la Física y la Ingeniería, como son el Electromagnetismo, la Mecánica de Fluidos y la Elasticidad, se encuentran modelos dados en términos de ecuaciones diferenciales parciales en dominios no acotados. Para resolver este tipo de problemas, la combinación del Método de Elementos Finitos (FEM) y el Método de Elementos de Frontera (BEM), conocida como acoplamiento entre BEM y FEM, ha sido aplicada con éxito durante las últimas dos décadas (ver [10], [19], [22], [23], [30], [39], [57], [58]).

Actualmente, la creciente disponibilidad de poderosos computadores paralelos ha llevado a una gran cantidad de investigadores al desarrollo de técnicas numéricas adaptables a este tipo de arquitecturas. Dentro de estas técnicas se destacan los Métodos de Descomposición de Dominio (DDM) (ver [43], [52], [56]). Las técnicas DDM son basadas en la partición del dominio de definición de la ecuación diferencial en un número arbitrario de regiones más pequeñas llamadas subdominios. De acuerdo a esto se distinguen dos métodos. Los llamados métodos de Schwarz hacen uso de una división del dominio en la cual los subdominios se traslapan. Por el contrario, los llamados métodos de subestructuración hacen uso de una partición en la cual los subdominios no se traslapan.

Las técnicas DDM basan su éxito en la posibilidad de reducir el problema diferencial a la solución iterativa de problemas del mismo tipo, pero sobre los subdominios. Además, en general, estos subproblemas son totalmente independientes y pueden ser resueltos en paralelo. Más aún, estos métodos se adaptan de manera natural a geometrías complejas y a ecuaciones con coeficientes discontinuos.

En esta Tesis se propone el uso combinado de los Métodos de Elementos Finitos, Elementos de Frontera, aplicaciones Dirichlet–to–Neumann (DtN) y Descomposición

de Dominio, especificamente los de subestructuración, para la solución numérica de problemas exteriores lineales y no lineales en Teoría del Potencial y Elasticidad. Como consecuencia de lo anterior, es posible obtener algoritmos que toman ventaja de cada una de las buenas características de los métodos considerados. En efecto, es conocida la complementariedad que presentan BEM y FEM. Por un lado, FEM es adecuado para problemas lineales y no lineales sobre dominios acotados. Por otro lado, BEM se adapta fácilmente a problemas lineales sobre dominios no acotados. Más aún, mediante el uso de técnicas DDM es posible obtener paralelismo en la resolución numérica de los problemas bajo consideración.

En este trabajo se presentan dos Métodos de Descomposición de Dominio, tipo Dirichlet–to–Neumann (ver [52]), para problemas exteriores lineales. La diferencia básica entre ambos métodos radica en la forma de aproximar los correspondientes operadores de Steklov–Poincaré (ver [1], [53]). El primer algoritmo realiza esta aproximación mediante FEM (ver [4], [27], [43], [45], [52], [53], [56]). El segundo algoritmo hace uso además de BEM (ver [6], [33], [36], [37], [42], [54], [55]).

Estos algoritmos están basados en el uso de aplicaciones DtN para transformar el correspondiente problema exterior en un problema equivalente sobre una región acotada. Luego, esta región es descompuesta en un número finito de subdominios lo cual, mediante el uso de operadores de Steklov–Poincaré, permite obtener una formulación equivalente sobre la frontera de los subdominios. En general, este problema de interfase es mal condicionado y, por lo tanto, el uso de un precondicionador adecuado es de gran importancia. Entre otras cosas, el precondicionador debe tener buenas propiedades paralelas y ser óptimo en el sentido que la convergencia de los algoritmos resulte independiente de la discretización. Con esto, el uso de métodos iterativos precondicionados sobre el problema de interfase llevará a la obtención de algoritmos paralelos e independientes de la discretización.

Por otro lado, en lo que respecta a problemas no lineales, las técnicas DDM no pueden ser aplicadas en forma directa y, en general, es necesario usar algún método de linealización (ver [12], [43]). Nuestros algoritmos para problemas no lineales están basados, al igual que en el caso lineal, en el uso de aplicaciones DtN para reducir el problema exterior a un problema no lineal sobre una región acotada. De esta forma, el problema puede ser transformado, equivalentemente, en una ecuación de operadores no lineales fuertemente monótonos (ver [2], [15], [16], [17], [19], [21], [22]). Entonces, al utilizar un esquema tipo Richardson, con precondicionamiento lineal, es posible obtener un algoritmo iterativo basado en la resolución de los problemas lineales determinados por el precondicionador. Es justamente en estos problemas donde pueden aplicarse técnicas de descomposición de dominio.

Los modelos que se consideran en Teoría del Potencial son el problema exterior de Dirichlet para el Laplaciano en el Plano y la clase de problemas exteriores no lineales, con una parte lineal homogénea en la región no acotada, tratada en [3]. En Elasticidad se considera el problema exterior de Dirichlet para el sistema de Lamé y un problema exterior no lineal en elasto–plasticidad bidimensional (ver [2]).

La organización de esta Tesis es como sigue. En lo que resta de este capítulo, se revisan los espacios de Sobolev y se presentan algunos resultados e ideas fundamentales sobre FEM y BEM. En el capítulo 2 se introduce el método de desacoplamiento para el problema exterior de Dirichlet para el Laplaciano en el plano. Se desarrolla una fórmula de integración para la aplicación DtN, se presenta el correspondiente análisis de error y algunos ensayos numéricos. El capítulo 3 está dedicado a la obtención de algoritmos paralelos para los problemas modelo en Teoría del Potencial. Para el caso lineal, se presentan las correspondientes formulaciones multidominio, los operadores de Steklov–Poincaré, los algoritmos de iteración por subdominios, aproximaciones en dimensión finita y algunos experimentos numéricos. En el caso no lineal, se establece un esquema de linealización y se desarrolla el correspondiente análisis discreto. Finalmente, en el capítulo 4 se extiende la Teoría desarrollada en el capítulo 3 a los problemas modelo en Elasticidad bidimensional.

1.2 Espacios de Sobolev

Es conocido que el moderno tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales requiere el uso de los espacios de Sobolev. A continuación se presentan algunos resultados y propiedades sobre estos espacios que son de suma utilidad en este trabajo. En lo que sigue, Ω es considerado un abierto de $\mathbf{R}^n$ con frontera $\Gamma := \partial\Omega$ suficientemente regular.

Definición 1.2.1 *El espacio $L^2(\Omega)$ consiste de todas las funciones v, medibles en el sentido de Lebesgue, tales que*

$$\left\{ \int_\Omega v^2 \, dx \right\}^{1/2} < +\infty \, .$$

Teorema 1.2.1 *El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior*

$$< u, v >_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u \, v \, dx \quad \forall \, u, v \in L^2(\Omega) \, .$$

Obsérvese que la norma inducida por $< \cdot, \cdot >_{L^2(\Omega)}$ está dada por

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} := \left\{ \int_\Omega v^2 \, dx \right\}^{1/2} \quad \forall \, v \in L^2(\Omega) \, .$$

Por otro lado, se define $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ como el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω. Más aún, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dotado de una topología especial, proveniente de una familia de seminormas, es denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ y escribimos $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) := \{\varphi|_\Omega : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\}$. El dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ es denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ y es llamado *espacio de distribuciones*. Este espacio es de gran importancia pues, en efecto, los espacios de Sobolev son espacios de distribuciones.

Ahora, denotando por $< v, \varphi >$ a la evaluación de la distribución $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ en la función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, observamos que toda función localmente integrable f se identifica con una distribución mediante

$$< f, \varphi >= \int_\Omega f\,\varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

En otras palabras, $< \cdot, \cdot >$ es una extensión del producto escalar en $L^2(\Omega)$.

Por motivos notacionales, se define el multíndice $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ con módulo asociado $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Con esto, para $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, se escribe

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

La siguiente definición extiende la noción usual de derivada al espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$. Usualmente son referidas como *derivadas débiles* o *derivadas generalizadas*.

Definición 1.2.2 *Dado $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbf{N}^n$, se define $\partial^\alpha v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mediante*

$$< \partial^\alpha v, \varphi >:= (-1)^{|\alpha|} < v, \partial^\alpha \varphi > \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Además, se dice que $\partial^\alpha v \in L^2(\Omega)$ si existe $w \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(-1)^{|\alpha|} < v, \partial^\alpha \varphi >=< w, \varphi > \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Definición 1.2.3 *Dado $m \in \mathbf{N}$, se define el espacio de Sobolev de orden m y exponente 2 como sigue*

$$H^m(\Omega) := \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad \forall\,\alpha\,, |\alpha| \leq m\}\,.$$

Teorema 1.2.2 *$H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior*

$$< u, v >_{H^m(\Omega)}:= \sum_{|\alpha| \leq m} < \partial^\alpha u, \partial^\alpha v >_{L^2(\Omega)} \quad \forall\,u, v \in H^m(\Omega)\,.$$

Nótese que la norma inducida por $< \cdot, \cdot >_{H^m(\Omega)}$ está dada por

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^m(\Omega)$$

y que $H^m(\Omega)$ puede ser provisto de la seminorma

$$|v|_{H^m(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^m(\Omega)\,.$$

De particular interés en lo que sigue es el caso $m = 1$. En tal caso se tiene que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} := \left\{ \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{H^1(\Omega)} \right\}^{1/2},$$

donde

$$|v|^2_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \, dx$$

es una seminorma sobre $H^1(\Omega)$.

Definición 1.2.4 *$H^m_0(\Omega)$ es la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$. Esto es, $v \in H^m_0(\Omega)$ si y sólo si existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \|v - \varphi_n\|_{H^m(\Omega)} = 0\,.$$

Hasta el momento sólo se ha presentado la noción de espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$ con $m \in \mathbf{N}$. El objetivo de lo que sigue es tratar el caso $H^s(\Omega)$ con $s \in \mathbf{R}$.

Definición 1.2.5 *Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$, $m \geq 0$ un entero y $s = m + \sigma \in \mathbf{R}$ con $0 < \sigma < 1$. Se denota por $H^s(\Omega)$ al espacio de distribuciones v definidas sobre Ω tal que $v \in H^m(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|^2}{\|x - y\|^{n+2\sigma}} \, dx \, dy < +\infty \quad \forall\, |\alpha| = m\,.$$

Puede demostrarse que $H^s(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} := \left\{ \|v\|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|^2}{\|x - y\|^{n+2\sigma}} \, dx \, dy \right\}^{1/2}.$$

Es importante mencionar que $H^s(\Omega)$ puede también ser definido usando transformada de Fourier (ver [40]). Ahora, al igual que en el caso entero, se define $H^s_0(\Omega)$

como la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$. Además, se denota por $H^{-s}(\Omega)$ al dual de $H_0^s(\Omega)$.

Por otro lado, dado que utilizaremos algunas formulaciones variacionales cuyas variables están sobre la frontera de un dominio, introducimos los llamados *espacios de trazas*. Comenzamos con una definición que permite definir la regularidad de una frontera Γ.

Definición 1.2.6 *Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ y $k \geq 0$ un entero. Se dice que Γ es de clase $C^{k,1}$ si para cada $x \in \Gamma$ existe una vecindad $\mathcal{O}$ de $x \in \mathbf{R}^n$ y un nuevo sistema ortogonal de coordenadas $y = (y', y_n)$, donde $y' := (y_1, \ldots, y_{n-1})$, tal que*

- *$\mathcal{O}$ es un hipercubo en las nuevas coordenadas, es decir,*

$$\mathcal{O} = \{y : -a_j < y_j < a_j\,,\ 1 \leq j \leq n\}\,.$$

- *Existe una función ϕ de clase $C^{k,1}$, definida en*

$$\mathcal{O}' = \{y' : -a_j < y_j < a_j\,,\ 1 \leq j \leq n-1\}\,,$$

  que satisface

  - $|\phi(y')| \leq \frac{a_n}{2}$ *para todo* $y' \in \mathcal{O}'$,
  - $\Omega \cap \mathcal{O} = \{y : y_n < \phi(y')\}$,
  - $\Gamma \cap \mathcal{O} = \{y : y_n = \phi(y')\}$.

Esta definición muestra que Ω está localmente bajo el gráfico de alguna función ϕ y que Γ es representada por el gráfico de ϕ. Además, la regularidad de Γ está determinada por la de ϕ. Más aún, como consecuencia de esta definición, dominios con cortes no son permitidos. Como ejemplos de dominios de clase $C^{0,1}$ están los polígonos acotados en $\mathbf{R}^2$ y los poliedros acotados en $\mathbf{R}^3$.

Definición 1.2.7 *Sea $0 < s < 1$. Se define $H^s(\Gamma)$ como la clausura de las funciones infinitamente diferenciables sobre Γ con respecto a la norma*

$$\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} := \left\{ \|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{\|x-y\|^{n-1+2s}}\, ds_x\, ds_y \right\}^{1/2},$$

donde

$$\|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} := \left\{ \int_\Gamma \varphi^2\, ds \right\}^{1/2}.$$

Además, se define $H^{-s}(\Gamma)$ como el dual de $H^s(\Gamma)$ con respecto al producto interior en $L^2(\Gamma)$, es decir, la clausura de $L^2(\Gamma)$ con respecto a la norma

$$\|\sigma\|_{H^{-s}(\Omega)} := \sup_{0\neq\varphi\in H^s(\Gamma)} \frac{|<\sigma,\varphi>_{L^2(\Gamma)}|}{\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)}}.$$

A continuación se enuncia un Teorema fundamental para la caracterización de funciones $v \in H^s(\Omega)$ sobre la frontera Γ. Para hacer esto, denotamos $\gamma_0 v := v|_\Gamma$ para todo $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Teorema 1.2.3 (de trazas) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{k,1}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ y $1/2 < s = k+1 \in \mathbf{N}$. Entonces, la aplicación $v \to \gamma_0 v$ se extiende de manera única a un operador lineal y continuo de $H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\Gamma)$.*

Demostración. Ver Teorema 6.2.40 en [29]. ■

A manera de ejemplo, sea Ω un abierto acotado con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Entonces, en virtud del Teorema de trazas, se deduce que existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

Sea $\gamma_1 v := \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\Gamma$ para todo $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, donde ν denota el vector normal unitario exterior a Γ. Entonces, puede demostrarse que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|\gamma_1 v\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{C}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1_\Delta(\Omega)\,,$$

donde $H^1_\Delta(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$. Más aún, se tiene que $Ker(\gamma_0) = H^1_0(\Omega)$ y $Ker(\gamma_0) \cap Ker(\gamma_1) = H^2_0(\Omega)$.

Finalizamos esta sección con algunos importantes resultados que involucran funciones en espacios de Sobolev.

Teorema 1.2.4 (Desigualdad de Poincaré) *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$. Entonces, existe una constante positiva $C = C(\Omega)$ tal que*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,|v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Demostración. Ver Teorema 2.3.4 en [40]. ■

El Teorema anterior muestra que la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ define una norma en $H^1_0(\Omega)$, la cual es equivalente con $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Varias generalizaciones de este importante resultado son posibles. Por ejemplo, el dominio puede ser acotado sólo en una dirección. También este resultado es válido en el caso de funciones que no se anulen

sobre toda Γ. Ciertamente, sólo se necesita que se anulen en $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ con $|\Gamma_D| \neq 0$, en caso contrario, la desigualdad no es válida. La desigualdad tampoco es cierta en el caso de dominios no acotados. Una generalización del resultado anterior está dada por el siguiente Lema.

Lema 1.2.1 (Desigualdad de Poincaré Generalizada) *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Sea $P_{m-1}(\Omega)$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a $m-1$ definidos sobre Ω. Suponga que existe una familia de funcionales lineales continuos $\mathcal{F}$ sobre $H^m(\Omega)$ con la propiedad*

$$v \in P_{m-1}(\Omega) \;\; y \;\; f(v) = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{F} \Longrightarrow v = 0\,.$$

Entonces, la aplicación $\|\cdot\| : H^m(\Omega) \to \mathbf{R}$ dada por

$$\|v\| := \left\{ |v|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{f \in \mathcal{F}} |f(v)|^2 \right\}^{1/2}$$

define una norma en $H^m(\Omega)$, la cual es equivalente a $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

Demostración. Ver Teorema 5.11.2 en [41]. ■

El siguiente Teorema, el cual se basa fuertemente en la *desigualdad de Korn* (ver [8]), es de importancia, por ejemplo, para probar la unicidad de solución de la formulación variacional asociada al problema lineal de Elasticidad.

Teorema 1.2.5 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y sea $\Gamma_D \subseteq \Gamma$. Entonces, $[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 := \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$ es un subespacio cerrado de $[H^1(\Omega)]^2$. Más aún, si $|\Gamma_D| > 0$, existe una constante $c > 0$ tal que*

$$c^{-1}\,\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \|e_{ij}(\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2} \leq c\,\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2}$$

para todo $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$, donde

$$e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} \quad \forall\, i,j = 1,2\,.$$

Demostración. Ver Teorema 6.3.4 en [8]. ■

Como consecuencia del resultado anterior, se deduce que la seminorma

$$|e(\mathbf{v})|_{0,\Omega} := \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \|e_{ij}(\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}$$

define una norma en $[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$, la cual es equivalente a $\|\cdot\|_{[H^1(\Omega)]^2}$.

En lo que resta de esta Tesis, los siguientes dos Lemas serán referidos simplemente como *integración por partes.*

Lema 1.2.2 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal unitario exterior $\nu := (\nu_1, \nu_2)$. Entonces, para todo u, $v \in H^1(\Omega)$, se tiene que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, dx + \int_\Gamma (u\, v)\, \nu_i\, ds\,.$$

Además, si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = -\int_\Omega v\, \Delta u\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, ds\,.$$

Demostración. Ver proposiciones 5.1.5 y 5.1.6 en [5]. ■

Lema 1.2.3 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal unitario exterior ν. Entonces, para todo campo tensorial suficientemente regular $\mathbf{T} \in [H^1(\Omega)]^{2\times 2}$ y para todo campo vectorial $\varphi \in [H^1(\Omega)]^2$, se tiene que*

$$\int_\Omega \mathbf{T} : \nabla\varphi\, dx = -\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \varphi\, dx + \int_\Gamma \mathbf{T}\, \nu \cdot \varphi\, ds\,,$$

donde para tensores $\mathbf{T} := (T_{ij})$ y $\mathbf{S} := (S_{ij})$, $i, j = 1, 2$, se denota

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} := \sum_{i,j=1}^{2} T_{ij}\, S_{ij}\,.$$

Demostración. Se sigue de las identidades de Green (ver [47]). ■

1.3 Método de Elementos Finitos

Muchos fenómenos en Física e Ingeniería son modelados mediante ecuaciones diferenciales parciales. Desde el punto de vista abstracto, una clase muy importante de ecuaciones elípticas pueden escribirse usando *formulaciones variacionales.* Esto es, en vez de buscar la solución del problema diferencial en el sentido clásico, se considera el problema: *Hallar $u \in V$ tal que*

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall\, v \in V\,, \tag{1.1}$$

donde V es un espacio de Hilbert, A es una forma bilineal y F es un funcional lineal sobre V. Con el objeto de enunciar un resultado fundamental sobre existencia y unicidad de solución para una clase de formulaciones variacionales del tipo (1.1), comenzamos con algunas definiciones.

Definición 1.3.1 *Sea V un espacio vectorial. Se dice que $A : V \times V \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal si para todo v, $w \in V$, las aplicaciones $v \to A(v, w)$ y $w \to A(v, w)$ definen formas lineales sobre V. Además, la forma bilineal A se dice simétrica si*

$$A(v, w) = A(w, v) \quad \forall\, v, w \in V\,.$$

Definición 1.3.2 *Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|_V$. Una forma bilineal $A : V \times V \to \mathbf{R}$ se dice acotada (o continua) si existe $0 < M < +\infty$ tal que*

$$|A(u, v)| \leq M\, \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall\, u, v \in V\,.$$

Además, si existe $\alpha > 0$ tal que

$$A(v, v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V\,,$$

la forma bilineal A se dice V–elíptica.

Definición 1.3.3 *Sea V un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|_V$. Un funcional lineal $F : V \to \mathbf{R}$ se dice acotado (o continuo) si existe $0 < \tilde{M} < +\infty$ tal que*

$$|F(v)| \leq \tilde{M}\, \|v\|_V \quad \forall\, v \in V\,.$$

El siguiente resultado abstracto permite establecer la existencia y unicidad de solución para una clase muy importante de formulaciones variacionales del tipo (1.1).

Lema 1.3.1 (Lax–Milgram) *Sea V un espacio de Hilbert y $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal, continua y V–elíptica. Entonces, para todo funcional lineal y acotado $F : V \to \mathbf{R}$, existe un único $u \in V$ tal que*

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall\, v \in V\,.$$

Demostración. Ver Teorema 2.7.7 en [5]. ■

Además, puede demostrarse que si la formulación variacional (1.1) satisface las hipótesis del Lema de Lax–Milgram con A simétrica, entonces su única solución $u \in V$ minimiza el funcional de la energía

$$J(v) := \frac{1}{2}\, A(v, v) - F(v) \quad \forall\, v \in V\,.$$

Por otro lado, desde el punto de vista computacional, se hace necesario *discretizar* el problema variacional (1.1). Para hacer esto, supongamos que el problema (1.1) satisface las hipótesis del Lema de Lax–Milgram. Además, sea $\{V_h\}_{h>0}$ una familia

de subespacios de dimensión finita de V, donde el parámetro h, el cual define a la familia, tendrá un significado natural en lo que sigue.

Con esto, se establece el *esquema de Galerkin*: *Hallar* $u_h \in V_h$ *tal que*

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h\,. \tag{1.2}$$

Claramente, dado que V_h es un subespacio cerrado de V, una aplicación directa del Lema de Lax–Milgram asegura la existencia de una única solución $u_h \in V_h$ de (1.2).

De gran importancia es conocer que tan cerca está la solución $u_h \in V_h$ de $u \in V$. El siguiente resultado, el cual es el punto de partida en la obtención de estimaciones de error para FEM, permite responder esta pregunta.

Lema 1.3.2 (Céa) *Suponga que (1.1) satisface las hipótesis del Lema de Lax–Milgram y que* $V_h \subseteq V$. *Entonces, para la solución* $u_h \in V_h$ *de (1.2) se tiene que*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V\,.$$

Demostración. Ver Teorema 2.8.1 en [5]. ■

El resultado anterior permite reducir el estudio de convergencia de la solución discreta $u_h \in V_h$ a un problema de aproximación. Ciertamente, puede definirse a FEM como el procedimiento de construcción de espacios de dimensión finita que aproximen a V. Frecuentemente en las aplicaciones, V es un subespacio cerrado de $H^m(\Omega)$ con $m = 1$ o $m = 2$.

Ahora, usando la V–*elipticidad* de A y la continuidad del funcional F, se deduce que

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\tilde{M}}{\alpha}\,, \tag{1.3}$$

donde $\tilde{M}$ es la constante de continuidad de F y α es la constante de V–*elipticidad* de A. Obsérvese que (1.3) muestra que las soluciones discretas $u_h \in V_h$ están uniformemente acotadas.

A continuación ejemplificamos el Método de Elementos Finitos. Para esto consideramos una formulación variacional del tipo (1.1) que satisface las hipótesis del Lema de Lax–Milgram con $V = H_0^1(\Omega)$, donde $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$, es un dominio poligonal. Además, introducimos una triangulación *admisible* de $\bar{\Omega}$, es decir, una descomposición finita $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ compuesta de elementos τ, de diámetro h_τ, donde

$$h := \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$$

y tal que

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_h} \tau$.
- Cada τ es un polígono o poliedro de interior $\overset{\circ}{\tau}$ no vacío.
- $\overset{\circ}{\tau}_i \cap \overset{\circ}{\tau}_j = \emptyset$ para todo τ_i, $\tau_j \in \mathcal{T}_h$, $i \neq j$.
- Si $\ell := \tau_i \cap \tau_j \neq \emptyset$, entonces ℓ es un lado común, cara común o vértice de τ_i y τ_j.

Sea ρ_τ el máximo diámetro de una bola contenida en τ. La siguiente definición permite caracterizar un tipo especial de triangulación que será de utilidad en lo que sigue.

Definición 1.3.4 *Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones admisibles de $\bar{\Omega}$. Se dice que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es una familia regular si existe $\sigma \geq 1$ tal que*

$$\frac{h_\tau}{\rho_\tau} \leq \sigma \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h,\, \forall\, h > 0\,.$$

A continuación, introducimos el espacio de elementos finitos

$$V_h := \{v : v \in C(\bar{\Omega})\,,\, v|_\tau \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h\,,\, v|_{\partial\Omega} = 0\}\,,$$

donde $P_1(\tau)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre τ. Además, definimos el operador de interpolación $I_h : H^2(\Omega) \ni v \to I_h v \in V_h$ mediante

$$(I_h v)(P_j) := v(P_j) \quad \forall\, P_j \in \mathcal{V}_h\,,$$

donde $\mathcal{V}_h := \{P_1, \ldots, P_n\}$ es el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$.

Entonces, considerando una triangulación regular $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$, puede demostrarse que el espacio discreto V_h tiene la siguiente propiedad de aproximación (ver [5], [7])

$$\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h\, |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\,, \tag{1.4}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h. Por lo tanto, si $u \in H^2(\Omega)$, y usando el Lema de Céa, se deduce que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha}\, \|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)}$$

y luego, en virtud de (1.4),

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h\, |u|_{H^2(\Omega)}\,.$$

Lo anterior muestra que al considerar el espacio de elementos finitos lineales V_h, se obtiene una reducción del error $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ con $O(h)$ si $u \in H^2(\Omega)$. Más aún, al utilizar el espacio de elementos finitos

$$\tilde{V}_h := \{v : v \in C(\bar{\Omega})\,,\ v|_\tau \in P_r(\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h\,,\ v|_{\partial\Omega} = 0\}\,,$$

donde $P_r(\tau)$ es el espacio de polinomios de grado $\leq r$ definidos sobre τ, se obtiene, si $u \in H^{r+1}(\Omega)$, la estimación (ver [5], [7])

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^r\, |u|_{H^{r+1}(\Omega)}\,.$$

Por otro lado, en cuanto a la obtención de la solución discreta $u_h \in V_h$, supongamos que V_h es generado por funciones φ_j, $j = 1, n$. En el caso que V_h sea compuesto de funciones lineales, las funciones base $\varphi_j \in V_h$ son tales que

$$\varphi_j(P_i) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } i = j \\ 0\,, & \text{si } i \neq j\,, \end{cases}$$

donde n corresponde al número de nodos interiores de $\mathcal{T}_h$. En [7] es dada una completa descripción de las funciones base asociadas a espacios de elementos finitos de mayor orden.

Ahora, dado que el conjunto $\{\varphi_1\,, \ldots\,, \varphi_n\}$ es una base de V_h, la solución discreta $u_h \in V_h$ puede escribirse como sigue

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \varphi_i\,,$$

donde $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, n$, son constantes a determinar. Es evidente que la determinación de las incógnitas α_i, $i = 1, n$, permite caracterizar completamente a la única solución $u_h \in V_h$ de (1.2). Entonces, con $v_h = \varphi_j$ en (1.2), se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, A(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j) \quad \forall\, j = 1, n\,.$$

Usando lo anterior, el problema (1.2) se reduce a: *Hallar* $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ *tal que*

$$K\,\alpha = b\,, \tag{1.5}$$

donde $b := (F(\varphi_1), F(\varphi_2), \ldots, F(\varphi_n)) \in \mathbf{R}^n$ es llamado *vector de carga* y los coeficientes de la matriz K, conocida como *matriz de rigidez*, están dados por $K_{ij} := A(\varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = 1, n$. Claramente, dado que A es *V–elíptica*, se deduce que la matriz K es definida positiva y por lo tanto, no singular.

1.4 Método de Elementos de Frontera

A continuación se presentan algunos fundamentos sobre el Método de Elementos de Frontera (BEM). Para esto se introducen las ecuaciones integrales de frontera para el operador de Laplace y, posteriormente, las correspondientes formulaciones variacionales y su aproximación discreta.

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El Método de Integral de Frontera está basado en el hecho que la solución u del problema

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega\,,$$

puede ser expresada mediante la *fórmula de representación de Green*

$$u(x) = \int_\Gamma E(x,y)\,\sigma(y)\,ds_y - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x,y)\,\lambda(y)\,ds_y \quad \forall\, x \in \Omega\,, \tag{1.6}$$

donde

$$E(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log\|x-y\|$$

es la solución fundamental del operador de Laplace en $\mathbf{R}^2$, ν_y denota el vector normal unitario exterior a Ω en $y \in \Gamma$, $\lambda = u|_\Gamma$ y $\sigma = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma$. Se deduce de (1.6) que el comportamiento de la solución u sobre Ω puede ser determinado a través de integrales sobre Γ.

Ahora, haciendo tender x a Γ desde Ω, y usando las condiciones de salto para las integrales en (1.6) (ver [11]), se tiene que los datos λ y σ están relacionados por la ecuación integral

$$\lambda = (\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K})\lambda + \mathbf{V}\sigma \quad \text{en } \Gamma\,, \tag{1.7}$$

donde $\mathbf{I}$ es el operador identidad y los operadores $\mathbf{V}$ y $\mathbf{K}$ son, respectivamente, el *potencial de capa simple* y *capa doble* definidos por

$$\mathbf{V}\sigma(x) := \int_\Gamma E(x,y)\sigma(y)\,ds_y \quad \forall\, x \in \Gamma$$

y

$$\mathbf{K}\lambda(x) := \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x,y)\,\lambda(y)\,ds_y \quad \forall\, x \in \Gamma\,.$$

Por otro lado, realizando el mismo procedimiento de límite, pero sobre la derivada normal de (1.6), se obtiene una segunda ecuación integral dada por

$$\sigma = \mathbf{W}\lambda + (\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}')\sigma \quad \text{en } \Gamma\,, \tag{1.8}$$

donde $\mathbf{W}$ y $\mathbf{K}'$ son, respectivamente, el *operador integral de frontera hipersingular* y el *adjunto del potencial de capa doble* definidos por

$$\mathbf{W}\lambda(x) := -\frac{\partial}{\partial \nu_x}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x,y)\,\lambda(y)\,ds_y \quad \forall\, x \in \Gamma$$

y

$$\mathbf{K}'\sigma(x) := \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(x,y)\,\sigma(y)\,ds_y \quad \forall\, x \in \Gamma\,.$$

Sea $< \cdot, \cdot >$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$ definida a través del producto interior en $L^2(\Gamma)$. Puede demostrarse que (ver [9], [35])

$$\mathbf{V} : H^{-1/2+\delta}(\Gamma) \to H^{1/2+\delta}(\Gamma)\,,$$

$$\mathbf{K} : H^{1/2+\delta}(\Gamma) \to H^{1/2+\delta}(\Gamma)\,,$$

$$\mathbf{W} : H^{1/2+\delta}(\Gamma) \to H^{-1/2+\delta}(\Gamma)$$

y

$$\mathbf{K}' : H^{-1/2+\delta}(\Gamma) \to H^{-1/2+\delta}(\Gamma)$$

son operadores continuos para todo $|\delta| < \frac{1}{2}$ y que $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son operadores simétricos. Además, el potencial de capa simple $\mathbf{V}$ es $H_0^{-1/2}(\Gamma)$–*elíptico*, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$< \sigma, \mathbf{V}\sigma > \geq C\,\|\sigma\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, \sigma \in H_0^{-1/2}(\Gamma)\,,$$

donde

$$H_0^{-1/2}(\Gamma) := \{\, \sigma \in H^{-1/2}(\Gamma) : < 1, \sigma >= 0 \,\}\,.$$

Más aún, $\mathbf{K}'$ es el adjunto de $\mathbf{K}$ con respecto a $< \cdot, \cdot >$ y existe $C > 0$ tal que

$$< \mathbf{W}\lambda, \lambda > \geq C\,\|\lambda\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, \lambda \in H^{1/2}(\Gamma)/\mathbf{R}\,.$$

Hasta el momento sólo se han presentado las ecuaciones integrales de frontera para la solución de un problema homogéneo. La inclusión de una posible *no–homogeneidad* debe ser realizada incluyendo un nuevo potencial. Esto es, la fórmula de representación de Green para la solución u de

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega\,,$$

toma la forma

$$u(x) = \int_\Gamma E(x,y)\,\sigma(y)\,ds_y - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x,y)\,\lambda(y)\,ds_y + \int_\Omega E(x,y)\,f(y)\,dy \qquad (1.9)$$

para todo $x \in \Omega$, donde el último término en (1.9) es llamado *potencial de Newton* para f en Ω.

Por otro lado, al igual que el Método de Elementos Finitos, BEM requiere el uso de formulaciones variacionales. A manera de ejemplo, si se conoce $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$ en (1.7), la incógnita $\sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ debe satisfacer

$$\mathbf{V}\sigma = (\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K})\lambda \quad \text{en } \Gamma\,. \tag{1.10}$$

Además, usando la paridad dual $< \cdot, \cdot >$, se tiene que la ecuación integral (1.10) es equivalente al siguiente problema variacional: *Hallar* $\sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *tal que*

$$B(\sigma, \xi) = F(\xi) \quad \forall\, \xi \in H^{-1/2}(\Gamma)\,,$$

donde

$$B(\eta, \xi) :=< \xi, \mathbf{V}\eta > \quad \forall\, \eta,\, \xi \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

y

$$F(\xi) :=< \xi, (\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K})\,\lambda > \quad \forall\, \xi \in H^{-1/2}(\Gamma)\,.$$

Ahora, en forma general, consideremos el siguiente problema variacional: *Hallar* $\lambda \in V$ *tal que*

$$B(\lambda, \mu) = F(\mu) \quad \forall\, \mu \in V\,, \tag{1.11}$$

donde V es un espacio de Hilbert, $B : V \times V \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal continua y F es un funcional lineal acotado sobre V.

Desafortunadamente, en la mayoría de las aplicaciones, las formulaciones variacionales de ecuaciones integrales de frontera no son *fuertemente elípticas* en el sentido del Lema de Lax–Milgram. Eso sí, satisfacen la *desigualdad de Gårding*, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que

$$B(\mu, \mu) \geq \alpha\, \|\mu\|_V^2 - C(\mu, \mu) \quad \forall\, \mu \in V\,,$$

donde C es una forma bilineal compacta sobre V. Es importante enfatizar que si la forma bilineal continua B satisface la desigualdad de Gårding, se tiene la alternativa de Fredholm, es decir, la existencia de solución de (1.11) implica la unicidad y viceversa.

Por otro lado, con el fin de discretizar (1.11), consideramos una familia $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios de dimensión finita de V y se establece el *esquema de Galerkin*: *Hallar* $\lambda_h \in V_h$ *tal que*

$$B(\lambda_h, \mu_h) = F(\mu_h) \quad \forall\, \mu_h \in V_h\,. \tag{1.12}$$

Analogamente a FEM, la formulación (1.12) corresponde a un sistema lineal de ecuaciones, donde la incógnita $\lambda_h \in V_h$ está dada en términos de una base de V_h. Sólo resta precisar el estudio de convergencia de las soluciones discretas $\lambda_h \in V_h$. Para hacer esto, introducimos la condición de *consistencia* y la condición discreta de Babuška–Brezzi–Ladyzenskaya (BBL).

Definición 1.4.1 (Consistencia) *Sea $\{V_h\}_{h>0}$ una familia de subespacios de dimensión finita de V. $\{V_h\}_{h>0}$ se dice una familia de aproximación consistente si, cuando $h \to 0$,*

$$\inf_{\mu_h \in V_h} \|\mu - \mu_h\|_V \longrightarrow 0 \quad \forall\, \mu \in V\,.$$

Definición 1.4.2 (Condición discreta BBL) *Existe $\gamma > 0$, independiente de h, tal que*

$$\sup_{0 \neq \mu_h \in V_h} \frac{|B(\lambda_h, \mu_h)|}{\|\mu_h\|_V} \geq \gamma\, \|\lambda_h\|_V \quad \forall\, \lambda_h \in V_h\,.$$

El siguiente Teorema establece la unicidad de solución de (1.12) y reduce el estudio de convergencia de las *soluciones de Galerkin*, a un problema de aproximación.

Teorema 1.4.1 *Sea $\{V_h\}_{h>0}$ una familia de aproximación consistente. Suponga que la forma bilineal continua B satisface la desigualdad de Gårding y que (1.11) admite una única solución $\lambda \in V$. Entonces, existe $h_0 > 0$, tal que la condición discreta BBL se satisface para todo $h \leq h_0$. Más aún, existe una única solución $\lambda_h \in V_h$ de (1.12) y se tiene la estimación*

$$\|\lambda - \lambda_h\|_V \leq C \inf_{\mu_h \in V_h} \|\lambda - \mu_h\|_V \quad \forall\, h \leq h_0\,,$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h y λ.

Demostración. Ver [46], [58]. ■

Capítulo 2

El Método de Desacoplamiento

Los métodos Dirichlet–to–Neumann (DtN) permiten simplificar el tradicional acoplamiento entre el Método de Elementos Finitos (FEM) y el Método de Elementos de Frontera (BEM). Estos métodos, al igual que el de acoplamiento, se basan en la introducción de una curva auxiliar Γ_N, usualmente una circunferencia en $\mathbf{R}^2$ o un casquete esférico en $\mathbf{R}^3$, suficientemente grande, de manera de dividir el dominio original en dos regiones anulares, una acotada y otra no acotada. Con esto, es posible deducir una fórmula explícita que relaciona los datos de Cauchy sobre Γ_N, determinando así la llamada aplicación DtN sobre esta curva.

Este procedimiento ha sido utilizado en algunos operadores elípticos como el Laplaciano y el operador lineal de Elasticidad (ver [14], [24], [25], [26], [31]). La extensión de este procedimiento a una clase de problemas exteriores no lineales en Elasticidad bidimensional ha sido estudiada en [2] y [16].

Por otro lado, y especificamente en lo que respecta al operador de Laplace, la elección de la curva auxiliar Γ_N como una circunferencia permite la obtención de una aplicación DtN sólo en términos del operador integral de frontera hipersingular. Esto conduce a una formulación variacional que incluye sólo un término de frontera, débilmente singular, dado por el potencial de capa simple. La combinación de este método con FEM ha sido denominada desacoplamiento entre BEM y FEM.

Ahora, en lo que respecta a problemas no lineales, el método de desacoplamiento ha sido recientemente extendido por Gatica y Hsiao [21], a una clase de problemas exteriores no lineales usando teoría de operadores monótonos. Es importante mencionar que estos mismos autores, mediante el acoplamiento usual, resolvieron previamente esta clase de problemas pero a través de formulaciones variacionales más complicadas (ver [17], [18], [19], [20], [22]). En efecto, en comparación con el método de acoplamiento, el desacoplamiento permite la obtención de formulaciones variacionales más simples y una reducción en el costo computacional asociado.

En este capítulo se desarrolla una fórmula que combina cálculos analíticos y numéricos para la obtención de la aproximación discreta, a cualquier exactitud, del término de desacoplamiento. Además, se muestra su aplicación a la solución numérica del problema exterior de Dirichlet para el Laplaciano en el plano. Lo anterior es de utilidad, por ejemplo, en la implementación de esquemas de descomposición de dominio para el problema exterior de Laplace y para la clase de problemas exteriores no lineales tratada en [3].

La organización del presente capítulo es como sigue. En la sección 1 se presenta la formulación variacional del problema, se identifica el término de desacoplamiento y se establece el correspondiente esquema de Galerkin. En la sección 2 se presenta la fórmula de integración. Los principales resultados y estimaciones de error se dan en la sección 3. Finalmente, en la sección 4 se presentan experimentos numéricos que confirman la efectividad del método.

2.1 El problema exterior de Laplace

Sea D un dominio acotado y simplemente conexo en $\mathbf{R}^2$ con frontera suficientemente regular Γ_D. Entonces, dado $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $f \in L^2(\mathbf{R}^2 - \bar{D})$ con soporte compacto, el problema es: *Hallar u tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \mathbf{R}^2 - \bar{D}\,, \\ u &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ u(x) &= O(1)\,,\ \|x\| \to +\infty\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

A continuación, introducimos una curva regular Γ_N, contenida en $\mathbf{R}^2 - \bar{D}$, con vector normal unitario exterior ν, y tal que su región interior contenga al soporte de f (ver figura 2.1). Además, denotamos por Ω a la región anular limitada por Γ_D y Γ_N y se define $\Omega_e := \mathbf{R}^2 - (\bar{D} \cup \bar{\Omega})$. Con estas definiciones, el problema exterior (2.1) puede ser reformulado como un acoplamiento entre un problema interior y otro exterior sobre los dominios Ω y Ω_e, respectivamente (ver [22], [32]). Naturalmente, el acoplamiento es sobre Γ_N a través de las condiciones de transmisión

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} \nabla u(y) \cdot \nu_x = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega_e}} \nabla u(y) \cdot \nu_x \quad \forall\, x \in \Gamma_N$$

y

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} u(y) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega_e}} u(y) \quad \forall\, x \in \Gamma_N\,,$$

donde ν_x denota el vector normal unitario exterior a Γ_N en x.

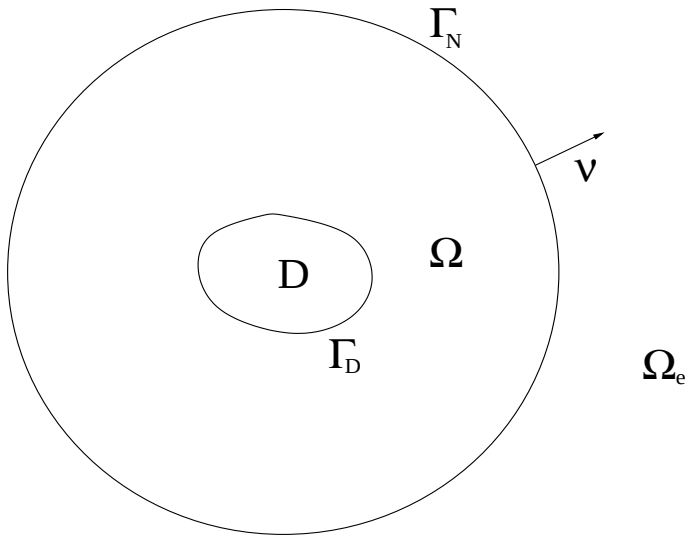

Figura 2.1: *Desacoplamiento para problemas lineales.*

Ahora, siguiendo a [39], se obtiene la siguiente formulación variacional del problema acoplado: *Hallar* $(u, \sigma) \in H^1(\Omega) \times H_0^{-1/2}(\Gamma_N)$ *tal que* $u = g_0$ *en* Γ_D *y*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - < \sigma, v > = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall \, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \tag{2.2}$$

y

$$< \xi, u - 2\,\mathbf{K} u > + 2 \, < \xi, \mathbf{V}\sigma > = 0 \quad \forall \, \xi \in H_0^{-1/2}(\Gamma_N)\,, \tag{2.3}$$

donde $\sigma := \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_N}$, $< \cdot, \cdot >$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ y $H^{1/2}(\Gamma_N)$ y $\mathbf{V} : H^{-1/2}(\Gamma_N) \to H^{1/2}(\Gamma_N)$, $\mathbf{K} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to H^{3/2}(\Gamma_N)$ son, respectivamente, el potencial de capa simple y capa doble definidos en el capítulo 1.

La idea fundamental del método de desacoplamiento, el cual fue introducido en [34], consiste en invertir la ecuación integral (2.3) de manera que σ pueda ser expresada explicitamente en términos de u. Para hacer esto, es suficiente elegir Γ_N como una circunferencia (ver [38]).

Teorema 2.1.1 *Sea* $\Gamma_N \subseteq \mathbf{R}^2 - \bar{D}$ *una circunferencia centrada en el origen. Entonces, para la solución* u *de (2.1) (o (2.2)–(2.3)), se tiene que*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -2\,\mathbf{W} u \quad \text{en } \Gamma_N$$

y

$$< \frac{\partial u}{\partial \nu}, \mu > = -2 < \dot{\mu}, \mathbf{V}\dot{u} > \quad \forall \, \mu \in H^{1/2}(\Gamma_N)\,,$$

donde $\dot{u}$, $\dot{\mu}$ *denotan, respectivamente, las derivadas tangenciales de* u *y* μ *sobre* Γ_N *y* $\mathbf{W} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to H^{-1/2}(\Gamma_N)$ *es el operador integral de frontera hipersingular.*

Demostración. Ver Teorema 2.1 en [21]. ■

El resultado anterior muestra que el problema exterior (2.1) puede ser transformado, equivalentemente, en el siguiente problema mixto de valores de frontera sobre la región acotada $\bar{\Omega}$: *Hallar* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega\,, \\ u &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W}u \quad \text{en } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por otro lado, usando integración por partes, obtenemos la siguiente formulación variacional para (2.4): *Hallar* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que* $u = g_0$ *en* Γ_D *y*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + 2 < \dot{v}, \mathbf{V}\dot{u} > = \int_\Omega f\, v\, dx \quad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,. \tag{2.5}$$

De aquí en adelante, Γ_N será asumida como en el Teorema 2.1.1. En este punto es ya evidente que (2.5) proporciona una formulación variacional más simple para (2.1) que la definida por (2.2)–(2.3). La expresión $< \dot{v}, \mathbf{V}\dot{u} >$ en (2.5) es lo que se denomina *término de desacoplamiento*. La razón para este nombre radica en que el uso de este término permite eliminar σ de la formulación variacional (2.2)–(2.3). Además, usando la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ y $H^{1/2}(\Gamma_N)$, definida a través del producto interior en $L^2(\Gamma_N)$, se tiene que

$$< \psi, \mathbf{V}\varphi >= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_N} \left\{ \int_{\Gamma_N} \log \|x-y\|\, \varphi(y)\, ds_y \right\} \psi(x)\, ds_x \tag{2.6}$$

$$\forall\, \varphi, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_N).$$

Lema 2.1.1 *Existe una única solución* $u \in H^1(\Omega)$ *del problema variacional (2.5).*

Demostración. La continuidad del potencial de capa simple $\mathbf{V}$ y de la aplicación derivada tangencial muestran que el lado izquierdo de (2.5) define una forma bilineal continua en $H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.

Por otro lado, notemos que $\dot{v}|_{\Gamma_N} \in H_0^{-1/2}(\Gamma_N)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$ (ver [48]). Entonces, usando que $\mathbf{V}$ es $H_0^{-1/2}(\Gamma_N)$–*elíptico* y la desigualdad de Poincaré en $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, se concluye que (2.5) satisface las hipótesis del Lema de Lax–Milgram. ■

2.2 La fórmula de integración

Con el objeto de definir el esquema de Galerkin asociado a (2.5) consideramos una familia finita de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$, tal que cada $\mathcal{T}_h$ es compuesta de triángulos. Como es usual, h denota el lado más largo de los triángulos de $\mathcal{T}_h$. Además, se define

$$\bar{\Omega}_h := \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_h} \tau$$

y por $\Gamma_{D,h}$, $\Gamma_{N,h}$, las respectivas aproximaciones poligonales de Γ_D y Γ_N. Más aún, se asume que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es *cuasi–uniforme*, es decir, existe $\rho > 1$, independiente de h, tal que los tamaños de los lados de todos los triángulos de $\mathcal{T}_h$ están en $[\frac{1}{\rho}h, h]$.

A continuación, introducimos el subespacio de elementos finitos

$$H_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}_h) : v_h|_\tau \in P_1(\tau) \quad \forall \tau \subseteq \bar{\Omega}_h\},$$

donde $P_1(\tau)$ denota el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre τ, y se define

$$H_{h,0} := \{v_h \in H_h : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_{D,h}\}.$$

Además, denotamos por $< \cdot, \cdot >_h$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_{N,h})$ y $H^{1/2}(\Gamma_{N,h})$, definida a través del producto interior en $L^2(\Gamma_{N,h})$, y por $\mathcal{V}_h := \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{N_h}\}$ al conjunto de nodos de $\mathcal{T}_h$.

Con estas definiciones, el esquema discreto asociado a (2.5) es el siguiente: *Hallar* $u_h \in H_h$ *tal que* $u_h(\mathbf{X}_j) = g_0(\mathbf{X}_j)$ *para todo* $\mathbf{X}_j \in \Gamma_{D,h}$ *y*

$$\int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx + 2 < \dot{v}_h, \mathbf{V}_h \dot{u}_h >_h = \int_{\Omega_h} f \, v_h \, dx \quad \forall v_h \in H_{h,0}, \tag{2.7}$$

donde

$$< \dot{v}_h, \mathbf{V}_h \dot{u}_h >_h := \int_{\Gamma_{N,h}} (\mathbf{V}_h \dot{u}_h)(x) \, \dot{v}_h(x) \, ds_x \tag{2.8}$$

y

$$(\mathbf{V}_h \dot{u}_h)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{N,h}} \log \|x - y\| \, \dot{u}_h(y) \, ds_y. \tag{2.9}$$

Nótese que la base canónica de H_h, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{N_h}\}$, es tal que $e_j \in H_h$, $e_j(\mathbf{X}_j) = 1$ y $e_j(\mathbf{X}_i) = 0$ para todo $i \neq j$ y que los coeficientes de la matriz de rigidez asociada a (2.7) están dados por

$$K_{ij} := \int_{\Omega_h} \nabla e_i \cdot \nabla e_j \, dx + 2 < \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h . \tag{2.10}$$

El objetivo de lo que sigue es establecer un método de integración para el término de desacoplamiento en (2.10). Para esto se asume, sin pérdida de generalidad, que

hay M nodos sobre $\Gamma_{N,h}$, $M < N_h$, y que ellos están ordenados de $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_M$ en sentido horario con la convención $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_M$.

Primero, dado que $\mathbf{V}_h$ es simétrico y $e_i\,|_{\Gamma_{N,h}} = 0$ para todo $i > M$, se deduce que

$$< \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h = 0 \quad \forall\, i > M\,,\; j = 1, N_h$$

y

$$< \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h = 0 \quad \forall\, j > M\,,\; i = 1, N_h\,.$$

Por otro lado, para cada $j = 1, M$, se define el segmento de línea

$$\Gamma_j \;:=\; \{\, \mathbf{X}_j(t) \;:=\; \mathbf{X}_{j-1} \,+\, t\,(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j-1}) \;:\; t \in [0,1]\,\}$$

y se escribe $|\Gamma_j| := \|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j-1}\|$. Entonces, puesto que $\|\mathbf{X}_j'(t)\| = |\Gamma_j|$ y

$$\dot{e}_j(\mathbf{X}) = \begin{cases} |\Gamma_j|^{-1}\,, & \text{en } \Gamma_j \\[2ex] -|\Gamma_{j+1}|^{-1}\,, & \text{en } \Gamma_{j+1} \\[2ex] 0\,, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} < \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h \;&=\; \sum_{k=1}^{M} \int_{\Gamma_k} (\mathbf{V}_h \dot{e}_i)(\mathbf{X})\, \dot{e}_j(\mathbf{X})\, ds_{\mathbf{X}} \\ &=\; \int_{\Gamma_j} (\mathbf{V}_h \dot{e}_i)(\mathbf{X})\, \dot{e}_j(\mathbf{X})\, ds_{\mathbf{X}} \,+\, \int_{\Gamma_{j+1}} (\mathbf{V}_h \dot{e}_i)(\mathbf{X})\, \dot{e}_j(\mathbf{X})\, ds_{\mathbf{X}} \\ &=\; \int_0^1 \{\, (\mathbf{V}_h \dot{e}_i)(\mathbf{X}_j(t)) \,-\, (\mathbf{V}_h \dot{e}_i)(\mathbf{X}_{j+1}(t))\,\}\; dt\,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde, sobre $\Gamma_{N,h}$, se ha adoptado la notación $\mathbf{X}_{M+1} := \mathbf{X}_1$.

De igual forma, se obtiene que

$$(\mathbf{V}_h \dot{e}_i)(\mathbf{X}) \;=\; -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{M} \int_{\Gamma_k} \log \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|\, \dot{e}_i(\mathbf{Y})\, ds_{\mathbf{Y}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \log \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|\, \dot{e}_i(\mathbf{Y})\, ds_{\mathbf{Y}} \,-\, \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{i+1}} \log \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|\, \dot{e}_i(\mathbf{Y})\, ds_{\mathbf{Y}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \log \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i(s)\|\, ds \,+\, \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \log \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{i+1}(s)\|\, ds\,. \tag{2.12}$$

Entonces, usando (2.11) y (2.12), se sigue que

$$< \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h = -\mathbf{I}_{ij} + \mathbf{I}_{i+1,j} + \mathbf{I}_{i,j+1} - \mathbf{I}_{i+1,j+1}\,, \tag{2.13}$$

donde

$$\mathbf{I}_{ij} := \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \log \|\mathbf{X}_i(s) - \mathbf{X}_j(t)\|\, ds\, dt\,. \tag{2.14}$$

Lo anterior muestra que es necesario calcular cada uno de los sumandos que definen $< \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h$ en (2.13). En efecto, para $i = j$, la integral (2.14) tiene una expresión analítica dada por

$$\mathbf{I}_{jj} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \log |\Gamma_j| - \frac{3}{2} \right\}. \tag{2.15}$$

Además, para todo $i, j = 1, M$, $|i - j| \geq 2$, el término $\mathbf{I}_{ij}$ puede ser calculado usando el método de cuadratura de Gauss (GCM). Finalmente, sólo resta precisar el modo de cálculo para el término $\mathbf{I}_{j+1,j}$ (o $\mathbf{I}_{j,j+1}$) el cual está definido por

$$\mathbf{I}_{j+1,j} := \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \log \|\mathbf{X}_j(t) - \mathbf{X}_{j+1}(s)\|\, ds\, dt\,.$$

Para hacer esto, definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &:= \frac{\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j-1}}{|\Gamma_j|}\,, \\ \mathbf{u}_{j+1} &:= \frac{\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j}{|\Gamma_{j+1}|}\,, \\ a &:= \min\{|\Gamma_j|, |\Gamma_{j+1}|\}\,, \end{aligned}$$

y

$$b := \max\{|\Gamma_j|, |\Gamma_{j+1}|\}\,.$$

Nótese que $\|\mathbf{u}_j\| = \|\mathbf{u}_{j+1}\| = 1$. Más aún, dado que $\mathbf{X}_j \in \Gamma_N$ para todo $j = 1, M$, el ángulo entre $\mathbf{u}_j$ y $\mathbf{u}_{j+1}$ está en $(0, \pi/2)$ y luego, $< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} > \in (0, 1)$.

Por otro lado, haciendo cambio de variables, se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{j+1,j} &= \frac{1}{4\pi ab} \int_0^a \int_0^b \log\{\, s^2 + t^2 + 2\, s\, t < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >\}\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{4\pi ab} \int_0^a \int_0^b \log (s+t)^2\, ds\, dt \\ &\quad + \frac{1}{4\pi ab} \int_0^a \int_0^b \log \left\{ 1 - \frac{2\, s\, t}{(s+t)^2} \left[1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} > \right] \right\} ds\, dt \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{j+1,j} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right]\log(a+b)-\frac{a}{b}\log a-\frac{b}{a}\log b-3\right\}\\ &\quad+\frac{1}{4\pi ab}\int_0^a\int_0^b \log\{1-x_j(s,t)\}\,ds\,dt\,, \end{aligned}\tag{2.16}$$

donde $x_j(s,t) := \frac{2\,s\,t}{(s+t)^2}[1-<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>]$. A continuación, se establece la fórmula analítica para $\mathbf{I}_{j+1,j}$.

Teorema 2.2.1 *Para todo $N \in \mathbf{N}$ se tiene que $\mathbf{I}_{j+1,j} = \mathbf{I}^{(N)}_{j+1,j} - R_N$, donde*

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^{(N)}_{j+1,j} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right]\log(a+b)-\frac{a}{b}\log a-\frac{b}{a}\log b-3\right\}\\ &\quad-\frac{1}{4\pi ab}\sum_{k=1}^{N}\frac{(2\,[1-<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>])^k}{k}\int_0^a\int_0^b\left[\frac{s\,t}{(s+t)^2}\right]^k ds\,dt \end{aligned}\tag{2.17}$$

y

$$R_N = \frac{1}{4\pi ab(N+1)}\int_0^a\int_0^b\left[\frac{1-<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>}{1-\xi_j(s,t)}\right]^{N+1}\left\{\frac{2\,s\,t}{(s+t)^2}\right\}^{N+1} ds\,dt$$

para algún $\xi_j(s,t) \in [0, x_j(s,t)]$. Además, para todo $h \le h_0$, existe $C > 0$ tal que $|R_N| \le C\,h^{2(N+1)}$, es decir, $R_N = O(h^{2(N+1)})$.

Por simplicidad en la exposición, la demostración de este resultado se da en la próxima sección. Ahora, y como casos particulares del Teorema 2.2.1, consideremos $N = 1$ y $N = 2$. Primero, obsérvese que las integrales dobles que dependen de k en (2.17), es decir,

$$\int_0^a\int_0^b\left[\frac{s\,t}{(s+t)^2}\right]^k ds\,dt$$

con $k \in \mathbf{N}$, pueden ser calculadas analíticamente. Entonces, para $N = 1$, se deduce que $\mathbf{I}_{j+1,j} = \mathbf{I}^{(1)}_{j+1,j} + O(h^4)$ donde

$$\begin{aligned}&\mathbf{I}^{(1)}_{j+1,j} =\\ &\frac{1}{4\pi}<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>\left\{\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]\log(a+b)-\frac{a}{b}\log a-\frac{b}{a}\log b-1\right\}\\ &\qquad+\frac{1}{2\pi}\left\{\log(a+b)-1\right\}. \end{aligned}\tag{2.18}$$

De igual manera, para $N = 2$, se tiene que $\mathbf{I}_{j+1,j} = \mathbf{I}^{(2)}_{j+1,j} + O(h^6)$ con

$$\mathbf{I}^{(2)}_{j+1,j} =$$

$$\frac{1}{4\pi} < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} > \left\{ \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] \log(a+b) - \frac{a}{b} \log a - \frac{b}{a} \log b - 1 \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \{ \log(a+b) - 1 \} - \frac{[1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >]^2}{12\pi} \frac{a\,b}{(a+b)^2} . \tag{2.19}$$

Nótese que si la partición inducida por la triangulación sobre Γ_N es uniforme, es decir, si $|\Gamma_j| = |\Gamma_{j+1}|$ para todo $j = 1, M$, entonces (2.18) y (2.19) se simplifican en

$$\mathbf{I}^{(1)}_{j+1,j} = \frac{1}{4\pi} < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} > \{ 2 \log 2 - 1 \} + \frac{1}{2\pi} \{ \log a + \log 2 - 1 \} \tag{2.20}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(2)}_{j+1,j} &= \frac{1}{4\pi} < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} > \{ 2 \log 2 - 1 \} + \frac{1}{2\pi} \{ \log a + \log 2 - 1 \} \\ &\quad - \frac{[1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >]^2}{48\pi} . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Consecuentemente, y de acuerdo al análisis anterior, definimos

$$\tilde{\mathbf{V}}_{h,i,j} := -\tilde{\mathbf{I}}_{ij} + \tilde{\mathbf{I}}_{i+1,j} + \tilde{\mathbf{I}}_{i,j+1} - \tilde{\mathbf{I}}_{i+1,j+1} , \tag{2.22}$$

donde

$$\tilde{\mathbf{I}}_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ \log |\Gamma_j| - \frac{3}{2} \right\} , & \text{si } i = j \\ \text{GCM para } \mathbf{I}_{ij}, & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \mathbf{I}^{(N)}_{j+1,j} , & \text{si } |i-j| = 1. \end{cases} \tag{2.23}$$

Finalmente, es claro que (2.22) constituye una fórmula combinada de integración analítica y numérica para el término de desacoplamiento $< \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h$.

2.3 Estimaciones de error

A continuación precisamos la fórmula de Gauss para $\mathbf{I}_{ij}$, $|i-j| \geq 2$. En efecto, sean $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ y $x_1, x_2, \ldots, x_m$, respectivamente, los pesos y puntos de cuadratura para una función de una variable en $[-1, 1]$.

Entonces, para $f \in C^{2m}([0,1]\times[0,1])$, se tiene que

$$\int_0^1\int_0^1 f(s,t)\,ds\,dt \;=$$

$$\frac{1}{4n^2}\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{m}\gamma_k\,\gamma_l\,f(t_{p-1}+\frac{1}{2n}(x_l+1),t_{q-1}+\frac{1}{2n}(x_k+1)) \;+\; E_{nm}\,, \tag{2.24}$$

donde $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ es una partición uniforme de $[0,1]$ y

$$E_{nm} := C_m\left[\frac{1}{n}\right]^{2m}\left\{\frac{\partial^{2m}}{\partial s^{2m}}f(\xi,\eta)\;+\;\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}f(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right\} \tag{2.25}$$

para algún (ξ,η), $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\in[0,1]\times[0,1]$ y $C_m := \frac{(m!)^4}{[(2\,m)!]^3\,(2m+1)}$. Usando lo anterior, se sigue que

$$|E_{nm}| \;\le\; C_m\left[\frac{1}{n}\right]^{2m}\left\{\max_{(s,t)\in[0,1]^2}\left|\frac{\partial^{2m}}{\partial s^{2m}}f(s,t)\right| \;+\; \max_{(s,t)\in[0,1]^2}\left|\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}f(s,t)\right|\right\}$$

y luego, dado un número de puntos de cuadratura m, el error puede ser arbitrariamente reducido eligiendo n en forma adecuada. Notemos además que para el término $\mathbf{I}_{ij}$, $|i-j|\ge 2$,

$$f(s,t) \;=\; \frac{1}{4\pi}\,\log\,\|\mathbf{X}_i(s)-\mathbf{X}_j(t)\|^2\,.$$

Ahora, puesto que hemos considerado triangulaciones *cuasi–uniformes*, se deduce que $\|\mathbf{X}_i(s)-\mathbf{X}_j(t)\|\ge C\,h$ y $|\Gamma_j|\le h$. Entonces, usando inducción, se concluye que $\left|\frac{\partial^{2m}f}{\partial s^{2m}}\right|$ y $\left|\frac{\partial^{2m}f}{\partial t^{2m}}\right|$ están acotadas en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ por una constante que sólo depende de m. Consecuentemente, la aplicación de la fórmula de cuadratura (2.24) al término $\mathbf{I}_{ij}$, $|i-j|\ge 2$, conduce a una fórmula de integración con $O\left(\left[\frac{1}{n}\right]^{2m}\right)$.

Por otro lado, en lo que respecta a la fórmula (2.16) para $\mathbf{I}_{j+1,j}$, es claro que $|x_j(s,t)|\;\le\;[1-<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>]<1$ y que $[1-<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>]\to 0$ cuando $M\to+\infty$. Ciertamente, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.3.1 *Existen constantes C_0, $h_0>0$ tal que para todo $h\le h_0$,*

$$\frac{1-<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>}{<\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_{j+1}>}\;\le\;C_0\,h^2\quad\forall\,j=1,M\,.$$

Demostración. Primero, la *cuasi–uniformidad* de la familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ implica que existe $\rho>1$ tal que

$$\frac{1}{\rho}\,h\;\le\;\theta_j\;\le\;\rho\,h\quad\forall\,j=1,M, \tag{2.26}$$

donde θ_j es el ángulo entre $\mathbf{X}_{j-1}$ y $\mathbf{X}_j$. Además, puede escribirse que $\mathbf{X}_{j-1} = r\, e^{i\alpha}$, $\mathbf{X}_j = r\, e^{i(\alpha+\theta_j)}$ y $\mathbf{X}_{j+1} = r\, e^{i(\alpha+\theta_j+\theta_{j+1})}$, donde r es el radio de Γ_N.

En virtud de lo anterior, se sigue que

$$\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j-1} = -2\, r \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) e^{i(\alpha+\theta_j/2)}$$

y

$$\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j = -2\, r \sin\left(\frac{\theta_{j+1}}{2}\right) e^{i(\alpha+\theta_j+\theta_{j+1}/2)}\,.$$

Entonces,

$$|\Gamma_j| = 2\, r \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right)$$

y

$$|\Gamma_{j+1}| = 2\, r \sin\left(\frac{\theta_{j+1}}{2}\right).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} > \; &:= \; \frac{< \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j-1}, \mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j >}{|\Gamma_j|\,|\Gamma_{j+1}|} \\ &= \; \cos\left(\frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}\right). \end{aligned}$$

Más aún, usando (2.26), se tiene que

$$\cos(\rho\, h) \;\leq\; < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >$$

y luego,

$$\frac{1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >}{< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >} \;\leq\; \frac{1 - \cos(\rho\, h)}{\cos(\rho\, h)}\,. \tag{2.27}$$

Ahora, usando serie de Taylor, podemos escribir que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R(x)$ con $|R(x)| \leq \frac{x^4}{24}$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(\rho\, h)}{\cos(\rho\, h)} \;&=\; \frac{\frac{(\rho\, h)^2}{2} - R(\rho h)}{1 - \frac{(\rho\, h)^2}{2} + R(\rho h)} \\ &\leq\; \frac{\frac{(\rho\, h)^2}{2} + \frac{(\rho\, h)^4}{24}}{1 - \frac{(\rho\, h)^2}{2} - \frac{(\rho\, h)^4}{24}}\,. \end{aligned}$$

Finalmente, con $h \leq 1$, se concluye que

$$\frac{1 - \cos(\rho\, h)}{\cos(\rho\, h)} \;\leq\; \frac{C_\rho\, h^2}{1 - C_\rho\, h^2}\,,$$

donde $C_\rho := \frac{12\rho^2+\rho^4}{24}$.

Esto muestra que puede elegirse cualquier constante $h_0 > 0$ tal que $h_0^2 < \frac{1}{C_\rho}$. En particular, con $h_0^2 := \frac{1}{2C_\rho}$,

$$\frac{1-\cos(\rho\, h)}{\cos(\rho\, h)} \;\leq\; C_0\, h^2 \quad \forall\, h \leq h_0\,,$$

donde $C_0 = 2\, C_\rho$. Lo anterior junto a (2.27), completa la demostración. ■

A continuación, usando el resultado anterior, se demuestra el Teorema 2.2.1.

Demostración del Teorema 2.2.1. Primero, obsérvese que para analizar (2.16) basta considerar la integral doble

$$\int_0^a \int_0^b \log\{1 - x_j(s,t)\}\; ds\, dt\,,$$

donde $x_j(s,t) := \frac{2\,s\,t}{(s+t)^2}[1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >]$. En efecto, al usar la serie de Taylor de $\log(1-x)$, $|x| < 1$, se tiene que

$$\log\,\{1 - x_j(s,t)\} \;=\; -\sum_{k=1}^{N} \frac{[x_j(s,t)]^k}{k} \;-\; \frac{1}{(N+1)}\left[\frac{x_j(s,t)}{1-\xi_j(s,t)}\right]^{N+1} \tag{2.28}$$

para todo $N \in \mathbf{N}$ y algún $\xi_j(s,t) \in [0, x_j(s,t)]$. Entonces, integrando (2.28) en $[0,a] \times [0,b]$ y reemplazando esto en (2.16), se obtiene la fórmula dada para $\mathbf{I}_{j+1,j}^{(N)}$.

Por otro lado, usando que $\xi_j(s,t) \in [0, x_j(s,t)]$ y

$$|x_j(s,t)| \leq [1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >]\,,$$

se deduce que

$$\frac{1}{1-\xi_j(s,t)} \;\leq\; \frac{1}{< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >}$$

y por lo tanto,

$$|R_N| \;\leq\; \frac{1}{4\pi ab(N+1)}\left[\frac{1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >}{< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >}\right]^{N+1} \int_0^a \int_0^b \left\{\frac{2\,s\,t}{(s+t)^2}\right\}^{N+1} ds\, dt\,.$$

Finalmente, considerando que $\frac{2\,s\,t}{(s+t)^2} \leq 1$, se tiene que

$$|R_N| \;\leq\; \frac{1}{4\pi(N+1)}\left[\frac{1 - < \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >}{< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1} >}\right]^{N+1}$$

y luego, en virtud del Lema 2.3.1, existen constantes C_0, $h_0 > 0$ tal que

$$|R_N| \;\leq\; \frac{C_0^{N+1}}{4\pi(N+1)}\, h^{2(N+1)} \quad \forall\, h \leq h_0\,.$$

Esto completa la demostración. ■

Ahora, tomando en cuenta el resultado anterior, se deduce que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|\, < \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h \; - \tilde{\mathbf{V}}_{h,i,j}\,| \;\leq\; \tilde{C} \max\left\{ \left[\frac{1}{n}\right]^{2m}, h^{2(N+1)} \right\} \tag{2.29}$$

para todo $h \leq h_0$, donde m, n son las constantes en la fórmula de Gauss (2.24) y N es el número de términos considerados en (2.17). Luego, dado $p \in \mathbf{N}$, pueden elegirse m, n y N tal que

$$\max\left\{ \left[\frac{1}{n}\right]^{2m}, h^{2(N+1)} \right\} \;\leq\; h^p\,.$$

Ciertamente, basta considerar $N \geq \frac{p}{2} - 1$ y $n \geq h^{-\frac{p}{2m}}$.

A manera de ejemplo, dado $p = 4$ y $m = 5$, es suficiente tomar $N \geq 1$ y $n \geq h^{-\frac{2}{5}}$. Esto muestra que con un bajo número de puntos de cuadratura m y un N pequeño, se obtiene una alta precisión en la aproximación.

Teorema 2.3.1 *Dado $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 3$, sean m, n y N tal que*

$$|\, < \dot{e}_j, \mathbf{V}_h \dot{e}_i >_h \; - \tilde{\mathbf{V}}_{h,i,j}\,| \;\leq\; \tilde{C}\, h^p \tag{2.30}$$

para todo $h \leq h_0$ y para todo $i, j = 1, M$. Además, sean z_h, $v_h \in H_h$ tales que $z_h|_{\Gamma_{N,h}} = \sum_{i=1}^{M} z_i\, e_i|_{\Gamma_{N,h}}$ y $v_h\,|_{\Gamma_{N,h}} = \sum_{j=1}^{M} v_j\, e_j|_{\Gamma_{N,h}}$. Entonces, existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$|\, < \dot{v}_h, \mathbf{V}_h \dot{z}_h >_h \; - \sum_{i,j=1}^{M} z_i\, v_j\, \tilde{\mathbf{V}}_{h,i,j}\,| \;\leq\; C\, h^{p-2}\, \|z_h\|_{H^1(\Omega_h)}\, \|v_h\|_{H^1(\Omega_h)} \tag{2.31}$$

para todo $h \leq h_0$.

Demostración. Primero, definiendo

$$e(z_h, v_h) \;:=\; < \dot{v}_h, \mathbf{V}_h \dot{z}_h > \; - \sum_{i,j=1}^{M} z_i\, v_j\, \tilde{\mathbf{V}}_{h,i,j}$$

se tiene que

$$e(z_h, v_h) \;=\; \sum_{i,j=1}^{M} z_i\, v_j \left\{ < \mathbf{V}_h \dot{e}_i, \dot{e}_j >_h \; - \tilde{\mathbf{V}}_{h,i,j} \right\} .$$

Entonces, tomando en cuenta (2.30), se deduce que

$$|e(z_h, v_h)| \;\leq\; \tilde{C}\, h^p \sum_{i=1}^{M} |z_i| \sum_{j=1}^{M} |v_j|$$

y luego, usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz y el hecho que $M \;=\; O(\frac{1}{h})$,

$$|e(z_h, v_h)| \;\leq\; C\, h^{p-1} \left\{ \sum_{i=1}^{M} z_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{M} v_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \tag{2.32}$$

En lo que resta de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica independiente de h.

Por otro lado, usando la parametrización de $\mathbf{X}_j(t)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|v_h\|^2_{L^2(\Gamma_{N,h})} \;&=\; \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} [v_h(x)]^2\, ds_x \\ &=\; \sum_{j=1}^{M} |\Gamma_j| \int_0^1 [v_{j-1} \,+\, t(v_j - v_{j-1})]^2\, dt \\ &=\; \sum_{j=1}^{M} \frac{|\Gamma_j|}{3} \left[v_j^2 \,+\, v_j\, v_{j-1} \,+\, v_{j-1}^2 \right] . \end{aligned}$$

Ahora, la *cuasi–uniformidad* de la familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ implica que $|\Gamma_j| \;\geq\; C\, h$ y luego, usando que $v_j\, v_{j-1} \;\geq\; -\frac{1}{2}\,(v_j^2 \,+\, v_{j-1}^2)$,

$$\|v_h\|^2_{L^2(\Gamma_{N,h})} \;\geq\; C\, h \sum_{j=1}^{M} v_j^2$$

o bien,

$$\left\{ \sum_{j=1}^{M} v_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \;\leq\; C\, h^{-\frac{1}{2}}\, \|v_h\|_{L^2(\Gamma_{N,h})} \quad \forall\, v_h \,\in\, H_h\, . \tag{2.33}$$

Además, en virtud del Teorema de trazas en Ω_h (ver [13]),

$$\|v_h\|_{L^2(\Gamma_{N,h})} \;\leq\; C\, \|v_h\|_{H^1(\Omega_h)} \quad \forall\, v_h \in H_h\, ,\, \forall\, h \leq h_0$$

y por lo tanto, usando (2.33), se deduce que

$$\left\{ \sum_{j=1}^{M} v_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\, h^{-\frac{1}{2}} \, \|v_h\|_{H^1(\Omega_h)} \quad \forall\, v_h \in H_h \,,\, \forall\, h \leq h_0 \,,$$

lo que junto a (2.32) completa la demostración. ■

2.4 Experimentos numéricos

Tomando en cuenta los resultados presentados a través de este capítulo, consideramos el siguiente esquema discreto: *Hallar* $\tilde{u}_h := \sum_{i=1}^{N_h} u_i\, e_i \in H_h$ *tal que* $\tilde{u}_h(\mathbf{X}_i) = g_0(\mathbf{X}_i)$ *para todo* $\mathbf{X}_i \in \Gamma_{D,h}$ *y*

$$\int_{\Omega_h} \nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla v_h \, dx \, + \, 2 \sum_{i,j=1}^{M} u_i \, v_j \, \tilde{\mathbf{V}}_{h,i,j} \, = \, \int_{\Omega_h} f \, v_h \, dx \tag{2.34}$$

$$\forall\, v_h \, := \sum_{j=1}^{N_h} v_j \, e_j \in H_{h,0} \,.$$

Es importante mencionar que el Lema de Lax–Milgram junto al Teorema 2.3.1 garantizan la unicidad de solución de (2.34). Más aún, siguiendo a [3] puede demostrarse que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u \, - \, \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega_h)} \, \leq \, C\, h \quad \forall\, h \leq h_0 \,. \tag{2.35}$$

Por otro lado, denotamos por NU al número de nodos en $\mathcal{T}_h$ menos los que pertenecen a $\Gamma_{D,h}$, es decir, NU representa el número real de incógnitas del sistema lineal de ecuaciones asociado a (2.34). Además, se considera D como el cuadrado de vértices $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ y $(1,-1)$. Obsérvese que en este caso, $\Gamma_{D,h}$ coincide con Γ_D. La curva artificial Γ_N es tomada como la circunferencia de radio $r = 3$, centrada en el origen, y se eligen $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $f \in L^2(\Omega)$ tal que la solución exacta de (2.1) esté dada por las siguientes tres funciones de ejemplo:

$$u(x,y) \, = \, \frac{x-y}{x^2+y^2} \,,$$

$$u(x,y) \, = \, \frac{3x-15y}{x^2+y^2} \,,$$

y

$$u(x,y) \, = \, \frac{6x-75y}{x^2+y^2} \,.$$

Claramente estas funciones tienen $O(1)$ cuando $\|x\| \to +\infty$. Para cada función de ejemplo se presentan ensayos en cuatro diferentes triangulaciones con NU = 496 ($h = 0.58831$), NU = 1019 ($h = 0.37783$), NU = 2004 ($h = 0.23369$) y NU = 5073 ($h = 0.17213$). Las figuras 2.2 y 2.3 muestran dos de estas triangulaciones.

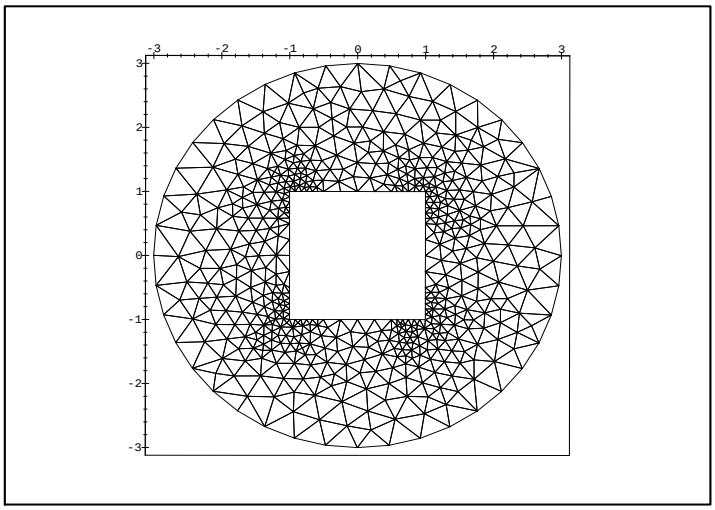

Figura 2.2: *Malla 1, NU=496.*

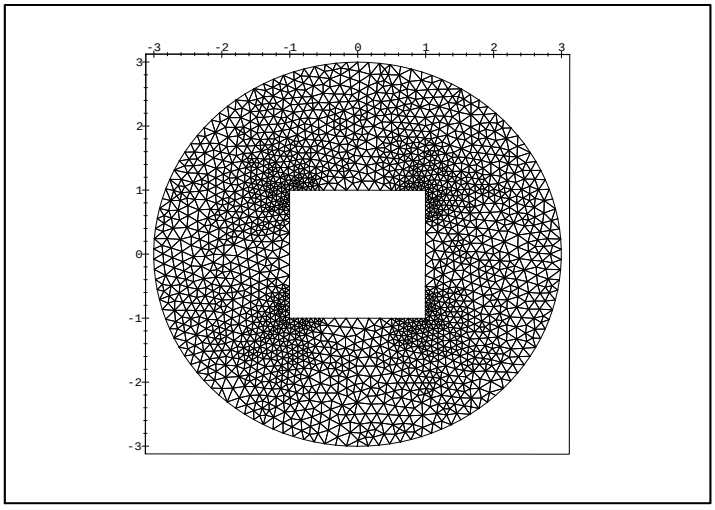

Figura 2.3: *Malla 3, NU=2004.*

En cuanto a la fórmula de integración para el término de desacoplamiento, hemos considerado $\mathbf{I}^{(2)}_{j+1,j}$ y $m = 5$ puntos de cuadratura en (2.23). Además, se ha usado $p = 4$ en (2.30) ($n \geq h^{-2/5}$). En las tablas 2.1, 2.2 y 2.3, donde se ha adoptado la notación

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{\infty,\Omega_h} := \max_{j=1,NU} |u(\mathbf{X}_j) - \tilde{u}_h(\mathbf{X}_j)| ,$$

se presentan los resultados obtenidos al utilizar (2.34).

Malla	NU	$\|u - \tilde{u}_h\|_{\infty,\Omega_h}$	$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega_h)}$	$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega_h)}$
1	496	0.00483	0.01637	0.26725
2	1019	0.00419	0.00909	0.20166
3	2004	0.00261	0.00538	0.15643
4	5073	0.00160	0.00285	0.11247

Tabla 2.1: *Ejemplo 1, solución exacta* $u(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

Malla	NU	$\|u - \tilde{u}_h\|_{\infty,\Omega_h}$	$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega_h)}$	$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega_h)}$
1	496	0.05613	0.17706	2.89234
2	1019	0.04459	0.09845	2.18375
3	2004	0.02795	0.05800	1.68624
4	5073	0.01761	0.03087	1.21747

Tabla 2.2: *Ejemplo 2, solución exacta* $u(x, y) = \frac{3x-15y}{x^2+y^2}$.

Malla	NU	$\|u - \tilde{u}_h\|_{\infty,\Omega_h}$	$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega_h)}$	$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega_h)}$
1	496	0.27834	0.86983	14.23799
2	1019	0.23420	0.48339	10.73389
3	2004	0.13134	0.28509	8.29422
4	5073	0.09103	0.15204	5.99179

Tabla 2.3: *Ejemplo 3, solución exacta* $u(x, y) = \frac{6x-75y}{x^2+y^2}$.

Se observa en estas tablas que las soluciones obtenidas están en perfecto acuerdo con la estimación de error *cuasi–óptima* $O(h)$. En las figuras 2.4–2.9 se muestran las soluciones por FEM para los ejemplos en las mallas 1 y 3.

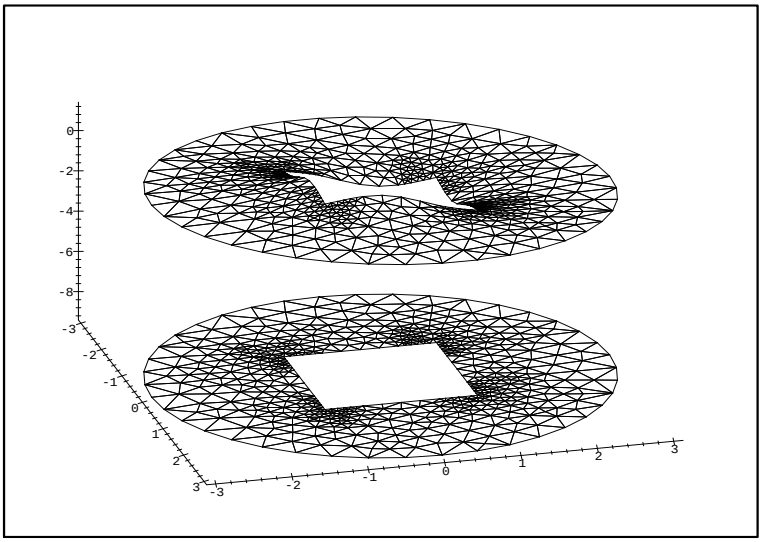

Figura 2.4: *Ejemplo 1, NU=496.*

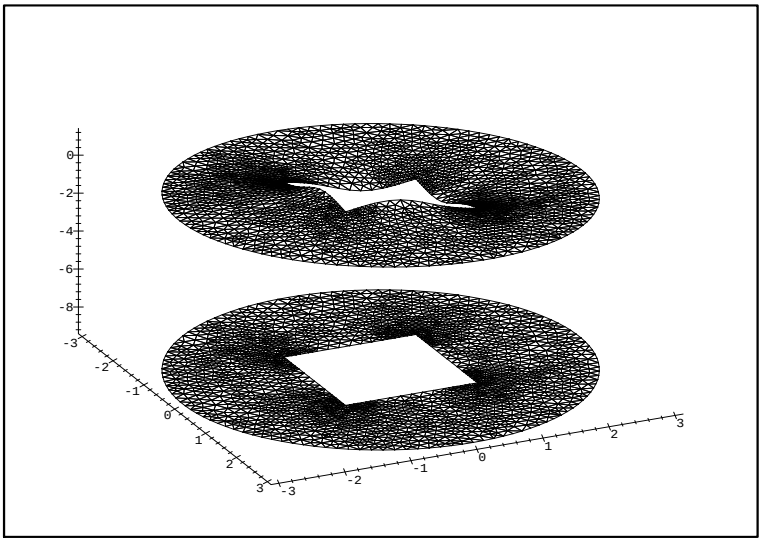

Figura 2.5: *Ejemplo 1, NU=2004.*

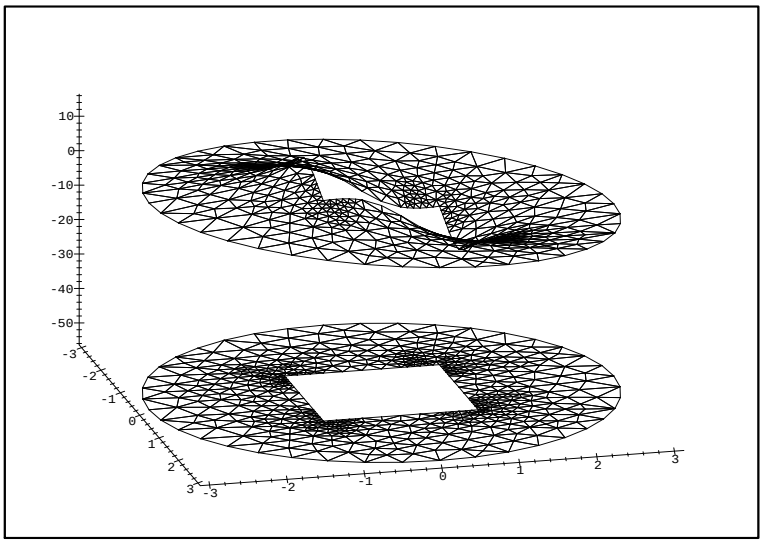

Figura 2.6: *Ejemplo 2, NU=496.*

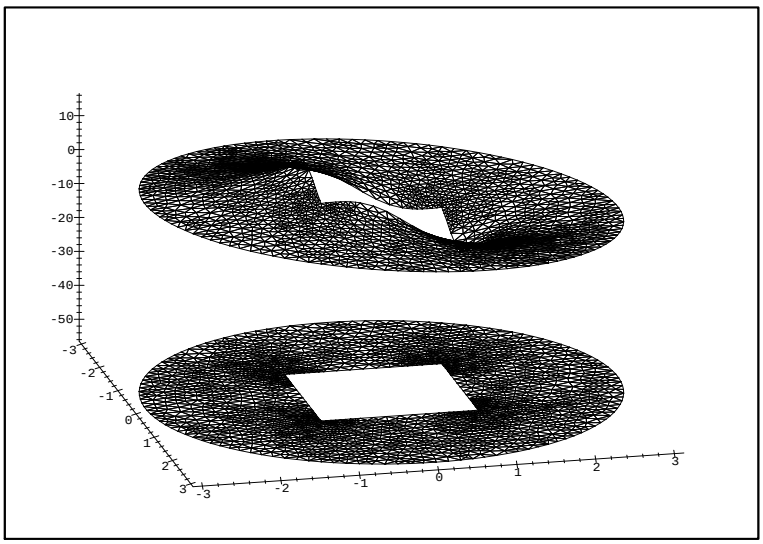

Figura 2.7: *Ejemplo 2, NU=2004.*

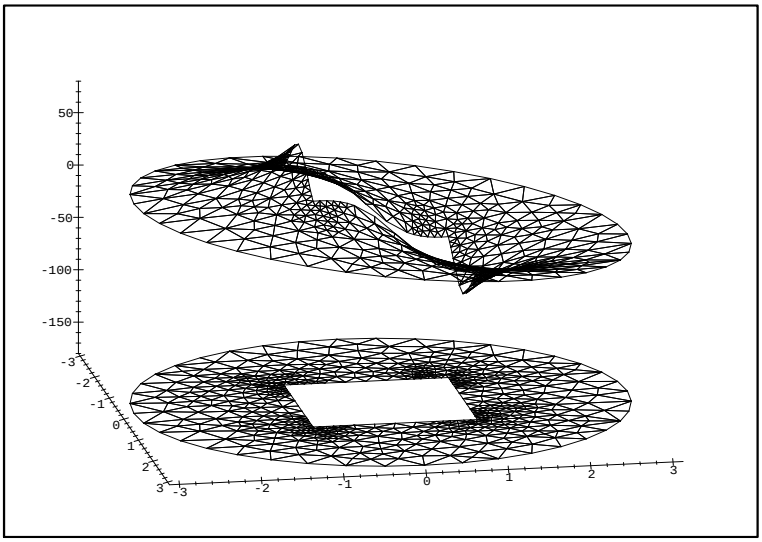

Figura 2.8: *Ejemplo 3, NU=496.*

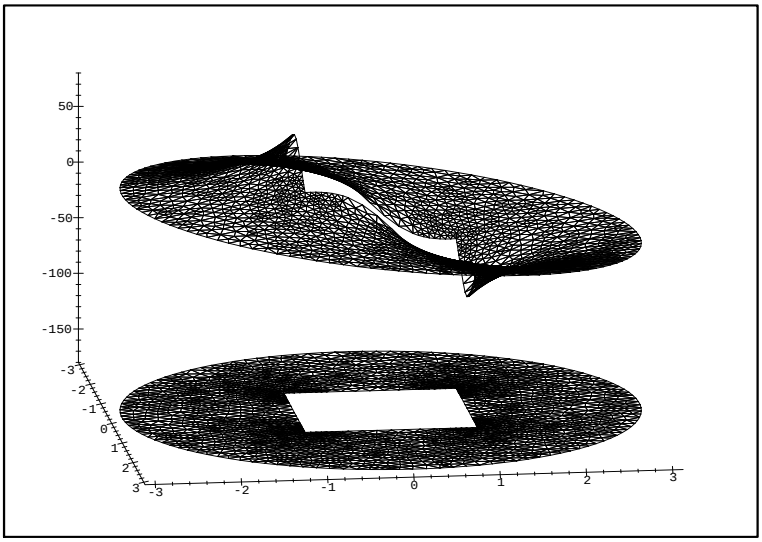

Figura 2.9: *Ejemplo 3, NU=2004.*

A manera de comentarios finales, nótese que las estimaciones de error dadas en este capítulo son más ajustadas que las disponibles para los métodos DtN que usan Expansiones en Series Truncadas de Fourier (TIFE) (ver [24]). En efecto, es suficiente ver las fórmulas (2.18) y (2.19) (o (2.20) y (2.21) para mallas uniformes sobre Γ_N) las cuales, de acuerdo al Teorema 2.2.1, aseguran órdenes de aproximación h^4 y h^6, respectivamente. Estas fórmulas, junto a (2.22) y (2.23), proveen expresiones de cálculo para el término de desacoplamiento con órdenes h^2 y h^4, respectivamente (ver Teorema 2.3.1). Se enfatiza también que estos resultados no dependen del tamaño de Γ_N.

Sin embargo, para minimizar el costo de cálculo del término DtN los métodos TIFE necesitan, en general, aumentar el tamaño de la circunferencia Γ_N. Obviamente esto trae consigo un aumento en el costo de cálculo de la forma bilineal aproximada por FEM. Por otro lado, de manera de minimizar el costo asociado a FEM, debiera elegirse una circunferencia pequeña lo que implica necesariamente el uso de una mayor cantidad de términos en las series de Fourier para alcanzar el mismo orden de aproximación. Eso sí, es importante mencionar la existencia de evidencias numéricas que muestran la obtención de buenas aproximaciones usando un bajo número de términos, lo que indicaría que las estimaciones de error disponibles para TIFE no son tan ajustadas (ver [31] en el caso del sistema lineal de Elasticidad).

Finalmente, a manera de conclusión, se observa que este método, aunque computacionalmente comparable con TIFE, provee estimaciones de error más precisas y luego, desde el punto de vista teórico, es mejor.

Capítulo 3

DDM en Teoría del Potencial

En el proceso de solución numérica de problemas diferenciales de interés práctico, a menudo se obtienen sistemas de ecuaciones de gran tamaño. En general, este es el caso en problemas sobre dominios no acotados.

Actualmente, el rápido avance en el área del procesamiento paralelo ha generado un gran interés en el desarrollo de métodos numéricos adaptables a este tipo de arquitecturas. Dentro de estas técnicas se encuentran los Métodos de Descomposición de Dominio (DDM). Las técnicas DDM se basan en la partición del dominio de definición de la ecuación diferencial en subdominios, los cuales pueden o no traslaparse. En esta Tesis consideramos los llamados métodos de subestructuración, es decir, los que hacen uso de una partición no traslapada del dominio. Siendo este el caso, el problema diferencial puede ser reformulado sobre cada subdominio dando lugar a una familia de problemas de menor tamaño, cuyas soluciones deben cumplir ciertas condiciones de transmisión sobre las interfases.

Desde el punto de vista matemático, los llamados operadores de Steklov–Poincaré (ver [1], [53]) aseguran el cumplimiento de estas condiciones de transmisión. Esto genera un problema de interfase, conocido como de Steklov–Poincaré, cuya solución está dada por las trazas de la solución del problema original sobre las interfases. A menudo, este acoplamiento sobre las interfases es removido introduciendo un proceso iterativo lo que conduce a la obtención de algoritmos basados en la resolución de problemas independientes sobre cada uno de los subdominios. Dado que, en general, el problema de Steklov–Poincaré es mal condicionado, el uso de un precondicionador adecuado es de gran importancia.

Ciertamente, las técnicas DDM pueden visualizarse como un proceso de construcción de precondicionadores para el problema discreto de Steklov–Poincaré. En lo que respecta a problemas no lineales, las técnicas DDM pueden ser vistas como el proceso de construcción de precondicionadores para los problemas lineales

determinados por un método de linealización específico.

Además de sus inherentes características paralelas, las técnicas DDM pueden adaptarse a una gran cantidad de métodos de discretización como son el Método de Elementos Finitos (FEM), el Método de Elementos de Frontera (BEM) y los Métodos de Diferencias Finitas, entre otros. Más aún, se puede tratar una gran variedad de problemas como son las ecuaciones diferenciales elípticas, de advección–difusión, de Stokes para fluidos compresibles e incompresibles, de Maxwell en tiempo armónico, parabólicas, hiperbólicas y algunos acoplamientos entre éstas. Una completa revisión sobre estos métodos es dada en [52] y [56].

Por otro lado, es importante mencionar que casi toda la literatura disponible está confinada a problemas en dominios acotados. Eso sí, algunos avances han sido realizados en la aplicación de técnicas DDM para el acoplamiento entre BEM y FEM (ver [42], [50]). Sin embargo, el uso de aplicaciones Dirichlet–to–Neumann (DtN) sugiere, de manera natural, la aplicación de técnicas DDM sobre el problema resultante. Especificamente, en este capítulo se presentan dos esquemas de descomposición de dominio para problemas exteriores usando como modelo el problema exterior de Dirichlet para el Laplaciano en el plano. El primer enfoque, denominado D–FEM, está basado en la aproximación de los operadores de Steklov–Poincaré mediante FEM. El segundo esquema, denominado D–BEM–FEM, se basa en el uso combinado de BEM y FEM. Más aún, se desarrolla un esquema de linealización para problemas exteriores no lineales que conducen a formulaciones variacionales fuertemente monótonas.

La organización del presente capítulo es como sigue. En la sección 1 se presenta el modelo lineal, se aplica el método de desacoplamiento y se da la correspondiente formulación variacional del problema resultante. En la sección 2 se desarrolla el esquema D–FEM. Aquí se presentan los aspectos variacionales del esquema, los operadores de Steklov–Poincaré, algoritmos de iteración por subdominios y aproximaciones en dimensión finita. El esquema D–BEM–FEM es presentado analogamente en la sección 3. En la sección 4 se desarrolla un esquema de linealización para problemas no lineales fuertemente monótonos y se muestra su aplicabilidad al problema exterior no lineal discutido en [3]. Finalmente, en la sección 5 se presentan algunos experimentos numéricos para el esquema D–FEM.

3.1 El problema exterior lineal

Al igual que en el capítulo anterior, consideramos como modelo lineal al problema exterior de Dirichlet para el Laplaciano en el plano. Eso sí, en lo que sigue, incluimos una condición al infinito más general. Sea D un dominio acotado y simplemente conexo en $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ_D. Entonces, dado $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $f \in L^2(\mathbf{R}^2 - \bar{D})$ con soporte compacto y $b \in \mathbf{R}$, el problema es: *Hallar u tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \mathbf{R}^2 - \bar{D}\,, \\ u &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ u(x) &= O(1) + \frac{b}{\pi} \log \|x\|\,, \ \|x\| \to +\infty\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora, con el fin de aplicar el método de desacoplamiento, introducimos una circunferencia Γ_N de radio r, centrada en el origen, cuya región interior contenga a $\bar{D}$ y tal que el soporte de f esté contenido en la región anular Ω limitada por Γ_D y Γ_N. Con esto, el problema exterior (3.1) puede transformarse, equivalentemente, en el siguiente problema mixto de valores de frontera sobre el dominio acotado $\bar{\Omega}$: *Hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega\,, \\ u &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W}u + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{W} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to H^{-1/2}(\Gamma_N)$ es el operador integral de frontera hipersingular y ν denota el vector normal unitario exterior a Γ_N. Es importante mencionar que esta ligera modificación del Teorema 2.1.1 proviene de utilizar la fórmula de representación de Green sobre el dominio exterior tomando en cuenta esta nueva condición al infinito (ver Teorema 2.1 en [21]).

Por otro lado, usando integración por partes, obtenemos la siguiente formulación variacional de (3.2): *Hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u = g_0$ en Γ_D y*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + 2 < \dot{v}, \mathbf{V}\dot{u} > = \int_\Omega f v \, dx + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_N} v \, ds \tag{3.3}$$

para todo $v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, donde $H^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$. En (3.3), $\dot{u}$ y $\dot{v}$ son, respectivamente, las derivadas tangenciales de u y v sobre Γ_N, $\mathbf{V} : H^{-1/2}(\Gamma_N) \to H^{1/2}(\Gamma_N)$ es el potencial de capa simple y $< \cdot, \cdot >$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ y $H^{1/2}(\Gamma_N)$ definida a través del producto interior en $L^2(\Gamma_N)$. Finalmente, observamos que la unicidad de solución para la formulación variacional (3.3) está garantizada por el Lema 2.1.1.

3.2 Esquema D–FEM

3.2.1 Operadores de Steklov–Poincaré

Sea Γ una curva cerrada y poligonal contenida en Ω, tal que su región interior contenga a $\bar{D}$ y tal que divida a Ω en dos subdominios, Ω_1 y Ω_2. Esto es, Ω_1 es la región anular limitada por Γ_D y Γ, Ω_2 por Γ y Γ_N y $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Además, se denota por ν_i, $i = 1, 2$, a los vectores normales unitarios a $\partial\Omega_i$ en Γ (ver figura 3.1).

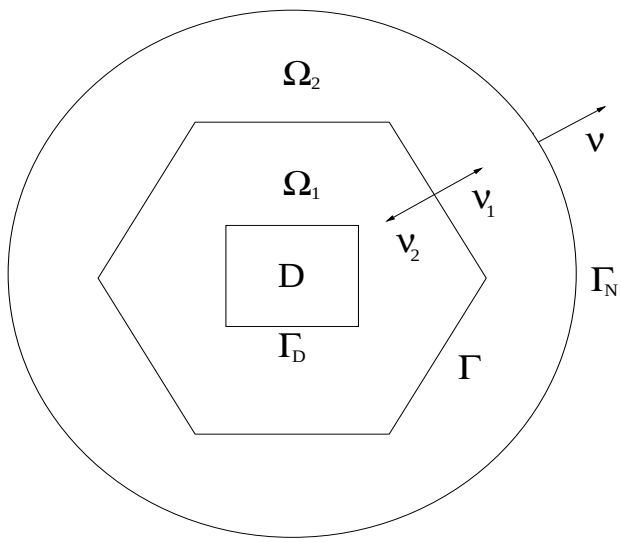

Figura 3.1: *Partición anular de* Ω.

Ahora, con el objeto de desacoplar el problema (3.2), y dado $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, se definen los siguientes problemas de valores de frontera:

- *Hallar* $u_1(\lambda) \in H^1(\Omega_1)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u_1(\lambda) &= f \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ u_1(\lambda) &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ u_1(\lambda) &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

- *Hallar* $u_2(\lambda) \in H^1(\Omega_2)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u_2(\lambda) &= f \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ u_2(\lambda) &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \frac{\partial u_2(\lambda)}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} u_2(\lambda) + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

La razón de considerar una partición anular de Ω radica en el carácter *no–local* de la condición de borde sobre Γ_N. En efecto, lo anterior obliga a que Γ_N deba pertenecer completamente a la frontera de un solo subdominio pues de lo contrario, no sería posible calcular la contribución del término DtN.

Por otro lado, es conocido que la continuidad de derivadas normales sobre Γ es una *condición de compatibilidad* adecuada para que (3.4) y (3.5) constituyan una formulación multidominio de (3.2) (ver [52]). Lo anterior lleva a considerar el siguiente problema sobre Γ: *Hallar* $\bar{\lambda} \in H^{1/2}(\Gamma)$ *tal que*

$$\left[\frac{\partial u_1(\bar{\lambda})}{\partial \nu_1} + \frac{\partial u_2(\bar{\lambda})}{\partial \nu_2}, \mu \right] = 0 \quad \forall\, \mu \in H^{1/2}(\Gamma)\,, \tag{3.6}$$

donde $[\cdot,\cdot]$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$ definida a través del producto interior en $L^2(\Gamma)$. En lo que sigue mostraremos que (3.6) admite solución única y que las soluciones de (3.3) y (3.6) están conectadas a través de las siguientes relaciones: $\bar{\lambda} = u|_\Gamma$, $u|_{\Omega_1} = u_1(\bar{\lambda})$ y $u|_{\Omega_2} = u_2(\bar{\lambda})$.

Ahora, definimos operadores lineales de extensión R_i, $i = 1, 2$, como sigue

- $R_1 : H^{1/2}(\Gamma) \ni \lambda \to R_1\lambda \in H^1(\Omega_1)$ solución de

$$\begin{aligned} -\Delta(R_1\lambda) &= 0 \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ R_1\lambda &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ R_1\lambda &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

- $R_2 : H^{1/2}(\Gamma) \ni \lambda \to R_2\lambda \in H^1(\Omega_2)$ solución de

$$\begin{aligned} -\Delta(R_2\lambda) &= 0 \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ R_2\lambda &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \frac{\partial(R_2\lambda)}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W}(R_2\lambda) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nótese que para cada $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, $R_1\lambda$ y $R_2\lambda$ son, respectivamente, las extensiones armónicas de λ a Ω_1 y Ω_2. Obsérvese también que, dado $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, las extensiones $R_1\lambda$ y $R_2\lambda$ son únicas en virtud del Lema de Lax–Milgram. Definimos además, $\tilde{w}_1 \in H^1(\Omega_1)$ y $w_2 \in H^1(\Omega_2)$ como las únicas soluciones débiles de los siguientes problemas de valores de frontera:

- *Hallar* $\tilde{w}_1 \in H^1(\Omega_1)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{w}_1 &= f \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ \tilde{w}_1 &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \tilde{w}_1 &= 0 \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

- *Hallar* $w_2 \in H^1(\Omega_2)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta w_2 &= f \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ w_2 &= 0 \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \frac{\partial w_2}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} w_2 + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Más aún, se denota por $g \in H^1(\Omega)$ a una extensión regular de g_0 sobre Ω, tal que $g := 0$ en $\Omega_2 \cup \Gamma$, y definimos $w_1 := \tilde{w}_1 - g$. En virtud de lo anterior, es fácil ver que

$$u_1(\lambda) = w_1 + g + R_1\lambda \tag{3.11}$$

y

$$u_2(\lambda) = w_2 + R_2\lambda\,. \tag{3.12}$$

A continuación se introducen las formas bilineales continuas y simétricas $A_1 : H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_1) \to \mathbf{R}$, $A_2 : H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_2) \to \mathbf{R}$ y $A : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbf{R}$, definidas por

$$A_1(z_1, v_1) := \int_{\Omega_1} \nabla z_1 \cdot \nabla v_1 \, dx\,,$$

$$A_2(z_2, v_2) := \int_{\Omega_2} \nabla z_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + 2 < \dot{v}_2, \mathbf{V}\dot{z}_2 >$$

y

$$A(z, v) := \sum_{k=1}^{2} A_k(z_k, v_k) \quad \forall\, z,\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

donde $z_k := z|_{\Omega_k}$ y $v_k := v|_{\Omega_k}$. Con esto, la única solución $u \in H^1(\Omega)$ de (3.3) satisface $u = g_0$ en Γ_D y

$$A(u, v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \;\in\; H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,,$$

donde

$$F(v) \;:=\; \int_{\Omega} f v \, dx + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_N} v \, ds\,.$$

Obsérvese que para cada $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, las extensiones $R_i\lambda$, $i = 1, 2$, satisfacen

$$A_1(R_1\lambda, \varphi_1) = 0 \quad \forall\, \varphi_1 \in H^1_0(\Omega_1) \tag{3.13}$$

y

$$A_2(R_2\lambda, \varphi_2) = 0 \quad \forall\, \varphi_2 \in H^1_\Gamma(\Omega_2)\,, \tag{3.14}$$

donde $H^1_\Gamma(\Omega_2) := \{v \in H^1(\Omega_2) : v = 0 \text{ en } \Gamma\}$.

Lema 3.2.1 *La solución $u \in H^1(\Omega)$ de (3.3) está relacionada con w_1 y w_2 a través de las siguientes identidades:*

$$w_1 = (u-g)\,|_{\Omega_1} - R_1((u-g)\,|_\Gamma)$$

y

$$w_2 = u\,|_{\Omega_2} - R_2(u\,|_\Gamma).$$

Demostración. Sea $\bar{w}_1 := (u-g)\,|_{\Omega_1} - R_1((u-g)\,|_\Gamma)$ y $\bar{w}_2 := u\,|_{\Omega_2} - R_2(u\,|_\Gamma)$. Entonces, puesto que $(u-g) = R_1((u-g)\,|_\Gamma) = 0$ en Γ_D y $R_1((u-g)\,|_\Gamma) = (u-g)$ en Γ, se deduce que $\bar{w}_1 \in H_0^1(\Omega_1)$.

Ahora, dado $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega_1)$, denotamos por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ a la extensión de φ_1 sobre Ω tal que $\varphi\,|_{\Omega_2} = 0$ y $\varphi\,|_{\Omega_1} = \varphi_1$. Por lo tanto, usando que $A_1(R_1\lambda, \varphi_1) = 0$ para todo $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$ y para todo $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega_1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
A_1(\bar{w}_1, \varphi_1) &= A_1((u-g)\,|_{\Omega_1}, \varphi_1) - A_1(R_1((u-g)\,|_\Gamma), \varphi_1) \\
&= A_1((u-g)\,|_{\Omega_1}, \varphi_1) \\
&= A(u, \varphi) - A_1(g\,|_{\Omega_1}, \varphi_1) \\
&= F(\varphi) - \int_{\Omega_1} \nabla g \cdot \nabla \varphi_1 \, dx \\
&= \int_\Omega f\varphi \, dx + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_N} \varphi \, ds - \int_{\Omega_1} \nabla g \cdot \nabla \varphi_1 \, dx \\
&= \int_{\Omega_1} f\varphi_1 \, dx - \int_{\Omega_1} \nabla g \cdot \nabla \varphi_1 \, dx \,,
\end{aligned}$$

lo cual prueba que $\bar{w}_1 + g = \tilde{w}_1$ y luego, $w_1 = \bar{w}_1$.

Por otro lado, puesto que $R_2(u\,|_\Gamma) = u\,|_\Gamma$ en Γ, se tiene que $\bar{w}_2 \in H_\Gamma^1(\Omega_2)$. Más aún, dado $\varphi_2 \in H_\Gamma^1(\Omega_2)$, denotamos por $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ a la extensión de φ_2 sobre Ω tal que $\varphi\,|_{\Omega_1} = 0$ y $\varphi\,|_{\Omega_2} = \varphi_2$. Entonces, usando que $A_2(R_2\lambda, \varphi_2) = 0$ para todo $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$ y para todo $\varphi_2 \in H_\Gamma^1(\Omega_2)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
A_2(\bar{w}_2, \varphi_2) &= A_2(u\,|_{\Omega_2}, \varphi_2) - A_2(R_2(u\,|_\Gamma), \varphi_2) \\
&= A_2(u\,|_{\Omega_2}, \varphi_2) \\
&= A(u, \varphi) \\
&= \int_\Omega f\varphi \, dx + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_N} \varphi \, ds \\
&= \int_{\Omega_2} f\varphi_2 \, dx + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_N} \varphi_2 \, ds
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $w_2 = \bar{w}_2$. Esto completa la demostración. ■

A continuación, definimos las funciones

$$w := \begin{cases} w_1\,, & \text{en } \Omega_1 \cup \Gamma \\ w_2\,, & \text{en } \Omega_2 \cup \Gamma \end{cases}$$

y

$$R\,\lambda := \begin{cases} R_1\lambda\,, & \text{en } \Omega_1 \cup \Gamma \\ R_2\lambda\,, & \text{en } \Omega_2 \cup \Gamma \end{cases}$$

para todo $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$. Nótese que $w \in H^1(\Omega)$, $w = 0$ en $\Gamma_D \cup \Gamma$ y $R\,\lambda \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$. Entonces, reemplazando (3.11) y (3.12) en (3.6), y usando integración por partes, obtenemos el siguiente problema de interfase: *Hallar* $\bar{\lambda} \in H^{1/2}(\Gamma)$ *tal que*

$$\mathbf{S}\,\bar{\lambda} = \chi\,, \tag{3.15}$$

donde $\mathbf{S} : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ es el operador de Steklov–Poincaré dado por

$$[\,\mathbf{S}\,\lambda, \mu\,] := \sum_{k=1}^{2} A_k\,(R_k\lambda, R_k\mu) \quad \forall\,\lambda,\, \mu \in H^{1/2}(\Gamma)$$

y $\chi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ es definido como sigue

$$[\,\chi, \mu\,] := \int_\Omega f\,R\mu\,dx + \frac{b}{\pi r}\int_{\Gamma_N} R\mu\,ds - A(w+g, R\mu) \quad \forall\,\mu \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Obsérvese que $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, donde $\mathbf{S}_k$, $k = 1, 2$, son los operadores locales de Steklov–Poincaré dados por

$$[\,\mathbf{S}_k\,\lambda, \mu\,] := A_k\,(R_k\lambda, R_k\mu) \quad \forall\,\lambda,\, \mu \in H^{1/2}(\Gamma)\,.$$

El siguiente Lema es necesario para probar la existencia y unicidad de solución del *problema de Steklov–Poincaré* (3.15).

Lema 3.2.2 *Existen constantes C_i, $\tilde{C}_i > 0$, $i = 1, 2$, que dependen sólo de Ω_i, tal que*

$$C_i\,\|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le \|R_i\,\lambda\|_{H^1(\Omega_i)} \le \tilde{C}_i\,\|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\,\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)\,.$$

Demostración. En virtud del Teorema de trazas se deduce la existencia de constantes $C_i > 0$, $i = 1, 2$, que dependen sólo de Ω_i, tal que $C_i\,\|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le \|R_i\,\lambda\|_{H^1(\Omega_i)}$ para todo $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$. En lo que sigue de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica.

Por otro lado, para probar la desigualdad de la derecha, analizamos separadamente cada una de las extensiones $R_i\lambda \in H^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$. Comenzamos con $R_1\lambda$.

En efecto, tomando una inversa a derecha y continua del operador de trazas, puede definirse $\tilde{\lambda} \in H^1(\Omega_1)$ como la extensión de λ sobre Ω_1 tal que $\tilde{\lambda} = 0$ en Γ_D y

$$\|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C \, \|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \, \lambda \in H^{1/2}(\Gamma) \, . \tag{3.16}$$

Además, usando la desigualdad de Poincaré, el Lema de Lax–Milgram y el hecho que $v := R_1\lambda - \tilde{\lambda} \in H^1_0(\Omega_1)$ es la única solución del problema variacional

$$\int_{\Omega_1} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega_1} \nabla \tilde{\lambda} \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \, \varphi \in H^1_0(\Omega_1) \, ,$$

se deduce que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C \, \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_1)} \, . \tag{3.17}$$

Entonces, usando la desigualdad triangular, (3.16) y (3.17), se tiene que

$$\begin{aligned} \|R_1\lambda\|_{H^1(\Omega_1)} &\leq \|v\|_{H^1(\Omega_1)} + \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_1)} \\ &\leq C \, \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_1)} \\ &\leq C \, \|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \, . \end{aligned}$$

A continuación consideramos la extensión $R_2\lambda$. Esto es, usando una inversa a derecha y continua del operador de trazas, definimos $\tilde{\lambda} \in H^1(\Omega_2)$ como la extensión de λ sobre Ω_2 tal que

$$\|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \, C \, \|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \, \lambda \in H^{1/2}(\Gamma) \, . \tag{3.18}$$

Más aún, usando la desigualdad de Poincaré, el Lema de Lax–Milgram, las propiedades del potencial de capa simple $\mathbf{V}$ y el hecho que $v := R_2\lambda - \tilde{\lambda} \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$ es la única solución del problema variacional

$$\int_{\Omega_2} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx + 2 \, < \dot{\varphi}, \mathbf{V}\dot{v} > = - \int_{\Omega_2} \nabla \tilde{\lambda} \cdot \nabla \varphi \, dx - 2 \, < \dot{\varphi}, \mathbf{V}\dot{\tilde{\lambda}} >$$

para todo $\varphi \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, se deduce que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_2)} \leq C \, \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_2)} \, . \tag{3.19}$$

Finalmente, usando la desigualdad triangular, (3.18) y (3.19), se concluye que

$$\begin{aligned} \|R_2\lambda\|_{H^1(\Omega_2)} &\leq \|v\|_{H^1(\Omega_2)} + \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_2)} \\ &\leq C \, \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_2)} \\ &\leq C \, \|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \, . \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

Lema 3.2.3 *Existe un único* $\bar{\lambda} \in H^{1/2}(\Gamma)$ *tal que* $\mathbf{S}\,\bar{\lambda} = \chi$.

Demostración. Primero, dado que la formas bilineales A_1 y A_2 son continuas, usando el Lema 3.2.2 se deduce que el operador $\mathbf{S}$ induce una forma bilineal continua en $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$. En lo que sigue de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica.

Ahora, puesto que $R\,\lambda \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, en virtud de la desigualdad de Poincaré y el Lema 3.2.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
[\,\mathbf{S}\lambda, \lambda\,] &\geq \sum_{k=1}^{2} |R_k\lambda|^2_{H^1(\Omega_k)} \\
&= |R\,\lambda|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\geq C\,\|R\,\lambda\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&= C\sum_{k=1}^{2} \|R_k\lambda\|^2_{H^1(\Omega_k)} \\
&\geq C\,\|\lambda\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$. Esto muestra que $\mathbf{S}$ induce una forma bilineal $H^{1/2}(\Gamma)$–*elíptica* y luego, una aplicación directa del Lema de Lax–Milgram completa la demostración. ■

El siguiente resultado establece la equivalencia entre la formulación variacional (3.3) y el problema de Steklov–Poincaré (3.15).

Teorema 3.2.1 *Sean* $u \in H^1(\Omega)$ *y* $\bar{\lambda} \in H^{1/2}(\Gamma)$ *las únicas soluciones de (3.3) y (3.15), respectivamente. Entonces*

$$\bar{\lambda} = u\,|_\Gamma$$

y

$$u = g + w + R\,\bar{\lambda} = \begin{cases} u_1(\bar{\lambda})\,, & en\ \Omega_1 \\ u_2(\bar{\lambda})\,, & en\ \Omega_2. \end{cases}$$

Demostración. Usando el Lema 3.2.1 y el hecho que $g = 0$ en $\Omega_2 \cup \Gamma$, se tiene que

$$\begin{aligned}
[\,\mathbf{S}(u|_\Gamma), \mu\,] &= \sum_{k=1}^{2} A_k(R_k(u|_\Gamma), R_k\mu) \\
&= A_1(u - g - w_1, R_1\mu) + A_2(u - w_2, R_2\mu) \\
&= A(u, R\mu) - A(g + w, R\mu)
\end{aligned}$$

para todo $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$. Entonces, dado que $A(u, R\mu) = F(R\mu)$, se sigue que

$$\begin{aligned} [\,\mathbf{S}(u|_\Gamma), \mu\,] &= \int_\Omega f R\mu \, dx + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_N} R\mu \, ds - A(g + w, R\mu) \\ &= [\,\chi, \mu\,] \end{aligned}$$

para todo $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$. Esto muestra que $u|_\Gamma$ es solución de (3.15) y por lo tanto, $\bar{\lambda} = u|_\Gamma$. Finalmente, la expresión para u se sigue directamente de (3.11), (3.12) y el Lema 3.2.1. ■

3.2.2 Aproximaciones discretas

En lo que sigue nos ocuparemos de la aproximación discreta del problema (3.15) usando FEM. Es importante mencionar que, a nivel discreto, el operador de Steklov–Poincaré es mal condicionado (ver [43], [52], [56]) y por lo tanto, la solución de (3.15) mediante métodos iterativos requiere el uso de un precondicionador adecuado. En efecto, a continuación establecemos un esquema de precondicionamiento tipo *Dirichlet–Robin* para (3.15) (ver [52]). Mostraremos que este esquema es óptimo en el sentido que la convergencia de métodos iterativos como el Método de Iteración de Richardson o el Método de Gradiente Conjugado (PCGM), no se deteriora cuando $h \to 0$.

Para hacer esto, consideramos $\mathcal{T}_h$ una triangulación *cuasi–uniforme* de Ω, compuesta de triángulos τ que no cruzan Γ, y definimos

$$\bar{\Omega}_h := \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_h} \tau \, .$$

También, para $i = 1, 2$, se define

$$\bar{\Omega}_{i,h} := \bigcup_{\tau \cap \Omega_i \neq \emptyset} \tau$$

y denotamos por $\Gamma_{N,h}$ a la aproximación poligonal de Γ_N inducida por $\mathcal{T}_h$. Además, introducimos las formas bilineales $A_{i,h} : H^1(\Omega_{i,h}) \times H^1(\Omega_{i,h}) \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, definidas por

$$A_{1,h}(z_1, v_1) := \int_{\Omega_{1,h}} \nabla z_1 \cdot \nabla v_1 \, dx$$

y

$$A_{2,h}(z_2, v_2) := \int_{\Omega_{2,h}} \nabla z_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + 2 < \dot{v}_2, \mathbf{V}_h \dot{z}_2 >_h$$

para todo z_i, $v_i \in H^1(\Omega_{i,h})$, donde $\mathbf{V}_h : H^{-1/2}(\Gamma_{N,h}) \to H^{1/2}(\Gamma_{N,h})$ es el potencial de capa simple sobre $\Gamma_{N,h}$ y $< \cdot, \cdot >_h$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_{N,h})$

y $H^{1/2}(\Gamma_{N,h})$ definida a través del producto interior en $L^2(\Gamma_{N,h})$. Es importante mencionar que, dado que Γ_D y Γ son poligonales, las formas bilineales A_1 y $A_{1,h}$ coinciden.

A continuación, introducimos los espacios de elementos finitos

$$H_{i,h} := \{v_h \in C(\bar{\Omega}_{i,h}) \,:\, v_h\,|_\tau \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \subseteq \bar{\Omega}_{i,h}\}$$

y

$$\Lambda_h := \{v_h\,|_\Gamma \,:\, v_h \in H_{i,h}\}\,,$$

donde $P_1(\tau)$ denota el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre τ. Más aún, denotamos el dual de Λ_h por Λ_h^* y definimos

$$H_{1,h}^0 := \{\, v_h \in H_{1,h} \,:\, v_h = 0 \text{ en } \Gamma_D \cup \Gamma \,\}$$

y

$$H_{2,h}^0 := \{\, v_h \in H_{2,h} \,:\, v_h = 0 \text{ en } \Gamma \,\}\,.$$

Consecuentemente, en virtud de las relaciones (3.13) y (3.14), se definen, para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$, las extensiones discretas $R_{i,h}$, $i = 1, 2$, como sigue

- $R_{1,h} : \Lambda_h \ni \lambda_h \to R_{1,h}\lambda_h \in H_{1,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_{1,h}\,(R_{1,h}\lambda_h, v_h) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H_{1,h}^0\,, \\ R_{1,h}\lambda_h &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ R_{1,h}\lambda_h &= \lambda_h \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned}$$

- $R_{2,h} : \Lambda_h \ni \lambda_h \to R_{2,h}\lambda_h \in H_{2,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_{2,h}\,(R_{2,h}\lambda_h, v_h) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H_{2,h}^0\,, \\ R_{2,h}\lambda_h &= \lambda_h \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta lo anterior, definimos el operador discreto de Steklov–Poincaré por

$$\mathbf{S}_h := \mathbf{S}_{1,h} + \mathbf{S}_{2,h}\,, \tag{3.20}$$

donde $\mathbf{S}_{i,h} : \Lambda_h \to \Lambda_h^*$, $i = 1, 2$, son los operadores locales discretos dados por

$$[\mathbf{S}_{i,h}\lambda_h, \mu_h] := A_{i,h}(R_{i,h}\lambda_h, R_{i,h}\mu_h) \quad \forall\, \lambda_h, \mu_h \in \Lambda_h\,. \tag{3.21}$$

Como ya fue comentado, utilizaremos precondicionadores tipo *Dirichlet–Robin*. La razón de no utilizar un precondicionador tipo *Neumann–Neumann* o *Dirichlet–Neumann* (ver [52], [56]) radica en que, una vez que se ha particionado el dominio Ω

en $p > 2$ subdominios Ω_i, el uso de estos precondicionadores origina algoritmos de iteración por subdominios en los cuales aparecen problemas no únicamente solubles. Por lo tanto, introducimos los precondicionadores tipo *Dirichlet–Robin*

$$\mathbf{P}_h := \mathbf{S}_{2,h} + \mathbf{T}_h ,$$

donde el operador $\mathbf{T}_h$ tiene alguna de las siguientes dos estructuras:

$$[\mathbf{T}_h \lambda_h, \mu_h] := c\,[1, \lambda_h]\,[1, \mu_h] = c \int_\Gamma \lambda_h \, ds \int_\Gamma \mu_h \, ds \tag{3.22}$$

o

$$[\mathbf{T}_h \lambda_h, \mu_h] := c\,[\lambda_h, \mu_h] = c \int_\Gamma \lambda_h \, \mu_h \, ds \tag{3.23}$$

para todo λ_h, $\mu_h \in \Lambda_h$, con $c > 0$ una constante arbitraria. Más adelante será claro que la elección de (3.22) o (3.23) produce diferentes condiciones de frontera en los subproblemas que integran los algoritmos de iteración por subdominios.

En lo que sigue, probaremos que la convergencia del esquema con estos precondicionadores es independiente de h. La optimalidad en el sentido de asegurar una convergencia independiente del número de subdominios debe necesariamente pasar por esquemas multinivel los que no se discuten en esta Tesis. En [56], se da una discusión detallada acerca de métodos multinivel, sobre todo, en precondicionadores *Neumann–Neumann*.

Observemos primero que $\mathbf{P}_h^{-1}\,\mathbf{S}_h$ es simétrico y definido positivo con respecto al producto interior

$$[\lambda_h, \mu_h]_{\mathbf{P}_h} := [\mathbf{P}_h \lambda_h, \mu_h] \quad \forall\, \lambda_h, \mu_h \in \Lambda_h .$$

Lo anterior se debe a que los operadores $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{S}_h$ son simétricos y definido positivos con respecto a $[\cdot, \cdot]$. Más aún, se tiene que los valores propios de $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$ son números reales positivos $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_m$, donde m es la dimensión de Λ_h.

El siguiente resultado, análogo al conocido *Teorema de extensión para FEM* (ver [4], [45], [59]), es necesario para mostrar que el número de condición espectral de $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$, el cual es dado por $\kappa := \sigma_m\,\sigma_1^{-1}$, está acotado independientemente de h.

Teorema 3.2.2 *Existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tal que*

$$A_{1,h}(R_{1,h}\lambda_h, R_{1,h}\lambda_h) \leq C_1 \, \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h$$

y

$$A_{2,h}(R_{2,h}\lambda_h, R_{2,h}\lambda_h) \leq C_2 \, \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h .$$

Demostración. Notemos primero que

$$A_{1,h}(R_{1,h}\lambda_h, R_{1,h}\lambda_h) \leq \|R_{1,h}\lambda_h\|^2_{H^1(\Omega_1)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h\,. \tag{3.24}$$

En lo que sigue de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica independiente de h.

Ahora, puesto que Ω_1 es un dominio poligonal y $\lambda_h \in H^1(\Gamma)$, se tiene la siguiente estimación de regularidad (ver [44])

$$\|R_1\lambda_h\|_{H^{3/2}(\Omega_1)} \leq C\,\|\lambda_h\|_{H^1(\Gamma)}\,. \tag{3.25}$$

Además, usando el Lema de Céa y estimaciones usuales de interpolación (ver [7]), se sigue que

$$\|R_1\lambda_h - R_{1,h}\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C\,h^{1/2}\,\|R_1\lambda_h\|_{H^{3/2}(\Omega_1)}\,. \tag{3.26}$$

Más aún, se tiene la desigualdad inversa (ver [7]),

$$h^{1/2}\,\|\lambda_h\|_{H^1(\Gamma)} \leq C\,\|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h\,. \tag{3.27}$$

Luego, usando la desigualdad triangular, el Lema 3.2.2, (3.25) y (3.26),

$$\begin{aligned}
\|R_{1,h}\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1)} &\leq \|R_1\lambda_h - R_{1,h}\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1)} + \|R_1\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1)} \\
&\leq C\,h^{1/2}\,\|R_1\lambda_h\|_{H^{3/2}(\Omega_1)} + \|R_1\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1)} \\
&\leq C\,h^{1/2}\,\|\lambda_h\|_{H^1(\Gamma)} + C\,\|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,.
\end{aligned}$$

Entonces, en virtud de (3.27), se deduce que

$$\begin{aligned}
\|R_{1,h}\lambda_h\|_{H^1(\Omega_1)} &\leq C\,h^{1/2}\,h^{-1/2}\,\|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + C\,\|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\
&\leq C\,\|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

lo que junto a (3.24), completa la primera parte de la demostración.

Por otro lado, sea $\mathcal{V}_h$ el conjunto de nodos de $\mathcal{T}_h$ y definamos por $\psi_h : \Gamma_{N,h} \to \Gamma_N$, la aplicación que asocia a cada $y \in \Gamma_{N,h}$, $y \notin \mathcal{V}_h$, el punto de intersección entre Γ_N y la línea recta, perpendicular a $\Gamma_{N,h}$, que pasa a través de y. Además, denotamos $\psi_h(y) = y$ para todo $y \in \mathcal{V}_h \cap \Gamma_N$. Claramente, para h pequeño, ψ_h es una biyección. Con esto, introducimos la aplicación lineal de extensión

$$\mathcal{M} : C(\Omega_{2,h}) \ni \tilde{v} \to \mathcal{M}\,\tilde{v} := v \in C(\bar{\Omega}_2) \quad \forall\, \tilde{v} \in C(\Omega_{2,h})\,,$$

donde $v(x) = \tilde{v}(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}_2 \cap \bar{\Omega}_{2,h}$ y $v(x) = v(y)$ para todo x en el segmento que une $y \in \Gamma_{N,h}$ con $\psi_h(y) \in \Gamma_N$.

Sea $v_h := \mathcal{M}(R_{2,h}\lambda_h)$ y denotemos $V_h := \mathcal{M}(H_{2,h})$. En virtud de lo anterior, se tiene que

$$A_{2,h}(R_{2,h}\lambda_h, R_{2,h}\lambda_h) = \int_{\Omega_{2,h}} \nabla v_h \cdot \nabla v_h \, dx + \mathbf{C}_h(v_h, v_h)\,, \tag{3.28}$$

donde $\mathbf{C}_h : V_h \times V_h \to \mathbf{R}$ es la forma bilineal definida por

$$\mathbf{C}_h(v, z) := \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_N} \int_{\Gamma_N} \log \left\{ \frac{1}{|\psi_h^{-1}(x) - \psi_h^{-1}(y)|} \right\} \dot{v}(x)\, \dot{z}(y)\, ds_x\, ds_y$$

para todo $v,\ z \in V_h$. Por lo tanto, usando (3.28),

$$A_{2,h}(R_{2,h}\lambda_h, R_{2,h}\lambda_h) \leq \int_{\Omega_2} \nabla v_h \cdot \nabla v_h \, dx + \mathbf{C}_h(v_h, v_h)$$

$$= \int_{\Omega_2} \nabla v_h \cdot \nabla v_h \, dx + \mathbf{C}_h(v_h, v_h) \; - 2 \; < \dot{v}_h, \mathbf{V}\dot{v}_h > \; + 2 \; < \dot{v}_h, \mathbf{V}\dot{v}_h >$$

$$= A_2(v_h, v_h) + \mathbf{C}_h(v_h, v_h) - 2 \; < \dot{v}_h, \mathbf{V}\dot{v}_h >$$

para todo $v_h \in V_h$. Además, siguiendo a [39] y usando el Teorema de trazas, se tiene que

$$|\mathbf{C}_h(v_h, v_h) - 2 \; < \dot{v}_h, \mathbf{V}\dot{v}_h > | \leq C\, h\, \|v_h\|^2_{H^1(\Omega_2)} \quad \forall\, v_h \in V_h$$

y luego, usando la continuidad de A_2,

$$\begin{aligned} A_{2,h}(R_{2,h}\lambda_h, R_{2,h}\lambda_h) &\leq C\, \|v_h\|^2_{H^1(\Omega_2)} + C\, h\, \|v_h\|^2_{H^1(\Omega_2)} \\ &\leq C\, \|v_h\|^2_{H^1(\Omega_2)}\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Más aún, siguiendo a [19], se deduce que

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{H^1(\Omega_2)} &\leq \|v_h - R_2\lambda_h\|_{H^1(\Omega_2)} + \|R_2\lambda_h\|_{H^1(\Omega_2)} \\ &\leq C\, h^{1/2}\, \|R_2\lambda_h\|_{H^{3/2}(\Omega_2)} + \|R_2\lambda_h\|_{H^1(\Omega_2)} \end{aligned}$$

y luego, usando la regularidad de R_2, el Lema 3.2.2 y (3.27),

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{H^1(\Omega_2)} &\leq C\, h^{1/2}\, \|\lambda_h\|_{H^1(\Gamma)} + C\, \|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C\, h^{1/2}\, h^{-1/2}\, \|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + C\, \|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &= C\, \|\lambda_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,. \end{aligned}$$

Lo anterior junto a (3.29) completa la demostración. ■

El siguiente resultado muestra que los operadores discretos $\mathbf{S}_{1,h}$ y $\mathbf{S}_{2,h} + \mathbf{T}_h$, son espectralmente equivalentes con cualquiera de las estructuras para $\mathbf{T}_h$ dadas por las relaciones (3.22) y (3.23).

Teorema 3.2.3 *Existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tal que*

$$C_1 \left\{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h]\right\} \leq [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] \leq C_2 \left\{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h]\right\}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$.

Demostración. Usando el Teorema de trazas, la *elipticidad* de $A_{1,h}$ y denotando por $C > 0$ a una constante genérica e independiente de h, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &\leq C\, \|R_{1,h}\lambda_h\|^2_{H^1(\Omega_1)} \\ &\leq C\, A_{1,h}(R_{1,h}\lambda_h, R_{1,h}\lambda_h) \\ &= C\, [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] \end{aligned}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$. Entonces, en virtud del Teorema 3.2.2 se deduce que existen constantes positivas $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$, independientes de h, tal que

$$\hat{C}_1\, \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] \leq \hat{C}_2\, \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h\,. \tag{3.30}$$

Por otro lado, usando el Teorema 3.2.2 y el hecho que $[\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h] \leq C\, \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$ para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$, se sigue que

$$[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h] \leq \tilde{C}_2\, \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h\,, \tag{3.31}$$

donde $\tilde{C}_2 > 0$ es independiente de h. Finalmente, de la desigualdad generalizada de Poincaré y el Teorema de trazas, se deduce que existe $\tilde{C}_1 > 0$, independiente de h, tal que

$$\tilde{C}_1\, \|\lambda_h\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h] \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h\,,$$

lo que junto a (3.30) y (3.31) completa la demostración. ■

El siguiente resultado establece que el número de condición espectral de $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$ está acotado independientemente de h.

Teorema 3.2.4 *Existe $C > 0$, independiente de h, tal que $\kappa \leq C$.*

Demostración. Puesto que $\kappa := \sigma_m\sigma_1^{-1}$, es suficiente mostrar que σ_m y σ_1^{-1} están acotados independientemente de h.

Ahora, dado que $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$ es simétrico y definido positivo con respecto a $[\cdot,\cdot]_{\mathbf{P}_h}$, observamos que σ_m y σ_1^{-1} pueden ser expresados por

$$\sigma_m = \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}}{[\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}}$$

y

$$\frac{1}{\sigma_1} = \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}}{[\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}} .$$

Entonces, en virtud del Teorema 3.2.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_m &= \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}}{[\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}} \\
&= \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{S}_h\lambda_h, \lambda_h]}{[\mathbf{P}_h\lambda_h, \lambda_h]} \\
&= \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h]}{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h]} \\
&\leq \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h]}{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h]} \\
&\leq (1 + C_2) .
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando nuevamente el Teorema 3.2.3, se deduce que

$$[\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h] \leq \frac{1}{C_1}[\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h$$

y luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_1} &= \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}}{[\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h\lambda_h, \lambda_h]_{\mathbf{P}_h}} \\
&= \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{P}_h\lambda_h, \lambda_h]}{[\mathbf{S}_h\lambda_h, \lambda_h]} \\
&= \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}_h\lambda_h, \lambda_h]}{[\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h]} \\
&\leq \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + \frac{1}{C_1}[\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h]}{[\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h]} \\
&\leq \max\{1, \frac{1}{C_1}\} .
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

3.2.3 Algoritmos de iteración por subdominios

Métodos iterativos

El objetivo de lo que sigue es obtener los correspondientes algoritmos de iteración por subdominios asociados al problema de Steklov–Poincaré (3.15). Para hacer esto,

a continuación presentamos el Método de Iteración de Richardson y el Método de Gradiente Conjugado (PCGM). En efecto, consideramos el problema: *Hallar* $\lambda_h \in \Lambda_h$ *tal que*

$$\mathbf{S}_h \lambda_h = \chi_h \,, \tag{3.32}$$

donde $\mathbf{S}_h : \Lambda_h \to \Lambda_h^*$ es el operador discreto de Steklov–Poincaré definido por (3.20) y (3.21), $\chi_h \in \Lambda_h^*$ y Λ_h es el espacio de trazas discreto.

Entonces, dado un precondicionador $\mathbf{P}_h : \Lambda_h \to \Lambda_h^*$, un parámetro $\alpha > 0$ y una estimación inicial $\lambda_h^0 \in \Lambda_h$, el método de Richardson construye la siguiente sucesión para encontrar la solución $\lambda_h \in \Lambda_h$ de (3.32):

$$\lambda_h^{n+1} = \lambda_h^n + \alpha\, \mathbf{P}_h^{-1}(\chi_h - \mathbf{S}_h \lambda_h^n) \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \,. \tag{3.33}$$

Nótese que, dado un parámetro α suficientemente pequeño, la invertibilidad de $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{S}_h$ asegura la convergencia de (3.33). Sin embargo, desde el punto de vista computacional, es necesario mostrar que esta convergencia es independiente de h. Ciertamente, ésto queda garantizado al mostrar que κ, el número de condición espectral de $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$, está acotado independientemente de h (ver [52], p. 126). Por lo tanto, en virtud del Teorema 3.2.4, se deduce que la utilización de (3.33) en la formulación D–FEM permite la obtención de algoritmos independientes de h.

Es importante mencionar que el parámetro óptimo α, es decir, el que minimiza el radio espectral de la matriz iterativa $(\mathbf{I} - \alpha\, \mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h)$, está dado por $\alpha_{opt} := 2/(\sigma_1 + \sigma_m)$ y que en este caso, el radio espectral de $(\mathbf{I} - \alpha_{opt}\, \mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h)$, conocido como factor de reducción del error, es $(\kappa - 1)/(\kappa + 1)$ (ver [52], p. 127).

Por otro lado, y con el fin de acelerar la convergencia, usualmente se utiliza PCGM el cual es aplicable sólo a un sistema simétrico y definido positivo. Siguiendo a Concus, Golub y O'Leary (ver [28], p. 540), PCGM puede ser escrito en la siguiente forma:

(**0**) Elegir $\lambda_h^0 \in \Lambda_h$.

(**1**) Resolver

$$\begin{aligned} r^0 &= \chi_h - \mathbf{S}_h \lambda_h^0 \,, \\ z^0 &= \mathbf{P}_h^{-1} r^0 \,, \\ \alpha_0 &= \frac{[\mathbf{P}_h z^0, z^0]}{[\mathbf{S}_h z^0, z^0]} \,, \\ \lambda_h^1 &= \lambda_h^0 + \alpha_0\, z^0 \,, \\ w_1 &= 1 \,, \\ n &= 1 \,. \end{aligned}$$

(**2**) Resolver

$$\mathbf{P}_h z^n = r^n := \chi_h - \mathbf{S}_h \lambda_h^n \,,$$
$$\alpha_n = \frac{[\mathbf{P}_h z^n, z^n]}{[\mathbf{S}_h z^n, z^n]} \,,$$
$$\frac{1}{w_{n+1}} = 1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \frac{[\mathbf{P}_h z^n, z^n]}{[\mathbf{P}_h z^{n-1}, z^{n-1}]} \frac{1}{w_n} \,,$$
$$\lambda_h^{n+1} = \lambda_h^{n-1} + w_{n+1}(\alpha_n z^n + \lambda_h^n - \lambda_h^{n-1}) \,.$$

(**3**) Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n + 1$ y volver a (**2**).

Con respecto a este método, se tiene la siguiente estimación de error en la norma de la energía (ver [52], p. 127),

$$\|\lambda_h - \lambda_h^n\|_{\mathbf{S}_h} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^n \|\lambda_h - \lambda_h^0\|_{\mathbf{S}_h} \,.$$

La estimación anterior muestra que la aplicación de PCGM a la formulación D–FEM permite obtener un algoritmo cuya convergencia es independiente de h.

En estricto rigor, los algoritmos de iteración por subdominios deben ser escritos en términos de las formas bilineales asociadas a los problemas discretos generados por el método de Richardson o PCGM. Sin embargo, con el objeto de visualizar exactamente que problemas deben resolverse, usaremos la notación continua. Entonces, es importante enfatizar que la discretización de los respectivos problemas de valores de frontera, debe ser consistente con el análisis discreto presentado en la sección 3.2.2.

Algoritmos de iteración por subdominios tipo Richardson

Para obtener los algoritmos de iteración por subdominios usando el método de Richardson, comenzamos con dos subdominios para luego extender este desarrollo a un número arbitrario de subdominios. En efecto, reemplazando $\mathbf{P} = \mathbf{S}_2 + \mathbf{T}$ en el análogo continuo de (3.33), se sigue que

$$\lambda^{n+1} = (1 - \alpha)\, \lambda^n + \alpha\, \beta^n \,,$$

donde β^n satisface

$$\mathbf{P}\, \beta^n \;=\; \chi \;-\; (\mathbf{S}_1 - \mathbf{T})\, \lambda^n \,.$$

Entonces, usando integración por partes, se deduce que

$$\frac{\partial u_2^n}{\partial \nu_2} \;+\; \mathbf{T}\, \beta^n \;=\; -\, \frac{\partial u_1^n}{\partial \nu_1} \;+\; \mathbf{T}\, \lambda^n \quad \text{en } \Gamma \,,$$

donde $u_1^n := u_1(\lambda^n) = \tilde{w}_1 + R_1\lambda^n$ y $u_2^n := u_2(\beta^n) = w_2 + R_2\beta^n$. Lo anterior junto al hecho que $u_1^n|_\Gamma = \lambda^n$ y $u_2^n|_\Gamma = \beta^n$, implica el siguiente esquema iterativo para actualizar λ^n:

(**0**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$ y hacer $n = 0$.

(**1**) Resolver el problema de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\Delta u_1^n &= f \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ u_1^n &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ u_1^n &= \lambda^n \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned}$$

(**2**) Resolver el problema tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\Delta u_2^n &= f \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ \frac{\partial u_2^n}{\partial \nu_2} + \mathbf{T}\, u_2^n &= -\frac{\partial u_1^n}{\partial \nu_1} + \mathbf{T}\,\lambda^n \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \frac{\partial u_2^n}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} u_2^n + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3**) Actualizar λ^n mediante $\lambda^{n+1} = (1-\alpha)\,\lambda^n + \alpha\,\beta^n$, donde $\beta^n := u_2^n\,|_\Gamma$. Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n+1$ y volver a (**1**).

A continuación extendemos este algoritmo a un número arbitrario de subdominios. En efecto, dado un entero $p > 2$, sean Γ_j, $j = 1, p-1$, curvas poligonales contenidas en Ω, tales que la región interior a Γ_j contiene a $\bar{D}$ y a la región interior a Γ_{j-1}, y tal que ellas dividan a Ω en p subdominios Ω_j con vector normal ν_j, $j = 1, p$. En otras palabras, Ω_j es la región anular limitada por Γ_{j-1} y Γ_j. Además, adoptamos la notación $\Gamma_0 := \Gamma_D$, $\Gamma_p := \Gamma_N$, $\lambda_0^n := g_0$, $\lambda_j^n := \lambda^n|_{\Gamma_j}$ y $u_j^n := u^n|_{\Omega_j}$. Más aún, se definen $\tilde{\Omega}_1 := \bigcup_{j\ impar} \Omega_j$, $\tilde{\Omega}_2 := \bigcup_{j\ par} \Omega_j$ y $\tilde{\Gamma} := \bigcup_{j=1}^{p-1} \Gamma_j$.

Entonces, aplicando el esquema anterior sobre $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2$ y $\tilde{\Gamma}$, y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que p es par, se obtiene el siguiente esquema de iteración por subdominios:

(**0**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$ y hacer $n = 0$.

(**1**) Resolver **en paralelo**, para todo j impar, $j \leq p-1$, los problemas de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\Delta u_j^n &= f \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ u_j^n &= \lambda_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ u_j^n &= \lambda_j^n \quad \text{en } \Gamma_j\,. \end{aligned}$$

(**2**) Resolver **en paralelo**, para todo j par, $j \leq p-2$, los problemas tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\Delta u_j^n &= f \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial \nu_j} + \mathbf{T}\, u_j^n &= -\frac{\partial u_{j-1}^n}{\partial \nu_{j-1}} + \mathbf{T}\, \lambda_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial \nu_j} + \mathbf{T}\, u_j^n &= -\frac{\partial u_{j+1}^n}{\partial \nu_{j+1}} + \mathbf{T}\, \lambda_j^n \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta u_p^n &= f \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \frac{\partial u_p^n}{\partial \nu_p} + \mathbf{T}\, u_p^n &= -\frac{\partial u_{p-1}^n}{\partial \nu_{p-1}} + \mathbf{T}\, \lambda_{p-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial u_p^n}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} u_p^n + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3**) Actualizar λ^n mediante $\lambda_i^{n+1} = (1-\alpha)\,\lambda_i^n + \alpha\,\beta_i^n$, $i = 1, p-1$, donde

$$\beta_n := (u_2^n|_{\Gamma_1}, u_2^n|_{\Gamma_2}, u_4^n|_{\Gamma_3}, u_4^n|_{\Gamma_4}, \ldots, u_p^n|_{\Gamma_{p-1}})\,.$$

Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n+1$ y volver a (**1**).

Algoritmos de iteración por subdominios tipo PCGM

A continuación presentamos el algoritmo de iteración por subdominios generado al usar PCGM en un número arbitrario de subdominios. En este algoritmo, las etapas (**0**')–(**6**') corresponden a los pasos (**0**)–(**1**) de PCGM mientras que los pasos (**1**)–(**7**), corresponden a (**2**)–(**3**). Entonces, definiendo $z_0^n := 0$ y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que p es par, se obtiene el siguiente esquema iterativo:

(**0'**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$.

(**1'**) Resolver **en paralelo**, para todo j impar, $j \leq p-1$, los problemas de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\Delta u_j^0 &= f \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ u_j^0 &= \lambda_{j-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ u_j^0 &= \lambda_j^0 \quad \text{en } \Gamma_j\,. \end{aligned}$$

(**2'**) Resolver **en paralelo**, para todo j par, $j \leq p-2$, los problemas tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\Delta u_j^0 &= f \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \frac{\partial u_j^0}{\partial \nu_j} + \mathbf{T}\, u_j^0 &= -\frac{\partial u_{j-1}^0}{\partial \nu_{j-1}} + \mathbf{T}\, \lambda_{j-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \frac{\partial u_j^0}{\partial \nu_j} + \mathbf{T}\, u_j^0 &= -\frac{\partial u_{j+1}^0}{\partial \nu_{j+1}} + \mathbf{T}\, \lambda_j^0 \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta u_p^0 &= f \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \frac{\partial u_p^0}{\partial \nu_p} + \mathbf{T}\, u_p^0 &= -\frac{\partial u_{p-1}^0}{\partial \nu_{p-1}} + \mathbf{T}\, \lambda_{p-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial u_p^0}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} u_p^0 + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3'**) Calcular $z_i^0 = \beta_i^0 - \lambda_i^0$, $i = 1, p-1$, donde

$$\beta^0 := (u_2^0|_{\Gamma_1}, u_2^0|_{\Gamma_2}, u_4^0|_{\Gamma_3}, u_4^0|_{\Gamma_4}, \ldots, u_p^0|_{\Gamma_{p-1}})\,.$$

(**4'**) Resolver **en paralelo**, para todo $j \leq p-1$, los problemas *armónicos*

$$\begin{aligned} -\Delta R_j(z_{j-1}^0, z_j^0) &= 0 \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ R_j(z_{j-1}^0, z_j^0) &= z_{j-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ R_j(z_{j-1}^0, z_j^0) &= z_j^0 \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta\,(R_p z_{p-1}^0) &= 0 \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ R_p z_{p-1}^0 &= z_{p-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial (R_p z_{p-1}^0)}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W}(R_p z_{p-1}^0) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**5'**) Calcular

$$\alpha_0 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^0, \gamma_i^0 >_{L^2(\Gamma_i)} + < \mathbf{T} z_i^0, z_i^0 >_{L^2(\Gamma_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^0, \delta_i^0 >_{L^2(\Gamma_i)} + < z_i^0, \gamma_i^0 >_{L^2(\Gamma_i)}}\,,$$

donde

$$\gamma^0 := \left(\left.\frac{\partial R_2(z_1^0, z_2^0)}{\partial \nu_2}\right|_{\Gamma_1}, \left.\frac{\partial R_2(z_1^0, z_2^0)}{\partial \nu_2}\right|_{\Gamma_2}, \left.\frac{\partial R_4(z_3^0, z_4^0)}{\partial \nu_4}\right|_{\Gamma_3}, \left.\frac{\partial R_4(z_3^0, z_4^0)}{\partial \nu_4}\right|_{\Gamma_4}, \ldots, \left.\frac{\partial R_p(z_{p-1}^0)}{\partial \nu_p}\right|_{\Gamma_{p-1}} \right)$$

y

$$\delta^0 := \left(\left.\frac{\partial R_1(z_0^0, z_1^0)}{\partial \nu_1}\right|_{\Gamma_1}, \left.\frac{\partial R_3(z_2^0, z_3^0)}{\partial \nu_3}\right|_{\Gamma_2}, \left.\frac{\partial R_3(z_2^0, z_3^0)}{\partial \nu_3}\right|_{\Gamma_3}, \ldots, \left.\frac{\partial R_{p-1}(z_{p-2}^0, z_{p-1}^0)}{\partial \nu_{p-1}}\right|_{\Gamma_{p-2}}, \left.\frac{\partial R_{p-1}(z_{p-2}^0, z_{p-1}^0)}{\partial \nu_{p-1}}\right|_{\Gamma_{p-1}} \right) .$$

(**6'**) Actualizar λ^0 mediante $\lambda_i^1 = \lambda_i^0 + \alpha_0\, z_i^0$, $i = 1, p-1$, y hacer $w_1 = 1$, $n = 1$.

(**1**) Resolver **en paralelo**, para todo j impar, $j \leq p-1$, los problemas de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\Delta u_j^n &= f \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ u_j^n &= \lambda_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ u_j^n &= \lambda_j^n \quad \text{en } \Gamma_j\,. \end{aligned}$$

(**2**) Resolver **en paralelo**, para todo j par, $j \leq p-2$, los problemas tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\Delta u_j^n &= f \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial \nu_j} + \mathbf{T}\, u_j^n &= -\frac{\partial u_{j-1}^n}{\partial \nu_{j-1}} + \mathbf{T}\, \lambda_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial \nu_j} + \mathbf{T}\, u_j^n &= -\frac{\partial u_{j+1}^n}{\partial \nu_{j+1}} + \mathbf{T}\, \lambda_j^n \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta u_p^n &= f \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \frac{\partial u_p^n}{\partial \nu_p} + \mathbf{T}\, u_p^n &= -\frac{\partial u_{p-1}^n}{\partial \nu_{p-1}} + \mathbf{T}\, \lambda_{p-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial u_p^n}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} u_p^n + \frac{b}{\pi r} \text{ en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3**) Calcular $z_i^n = \beta_i^n - \lambda_i^n$, $i = 1, p-1$, donde

$$\beta^n := (u_2^n|_{\Gamma_1}, u_2^n|_{\Gamma_2}, u_4^n|_{\Gamma_3}, u_4^n|_{\Gamma_4}, \ldots, u_p^n|_{\Gamma_{p-1}})\,.$$

(**4**) Resolver **en paralelo**, para todo $j \leq p-1$, los problemas *armónicos*

$$\begin{aligned} -\Delta R_j(z_{j-1}^n, z_j^n) &= 0 \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ R_j(z_{j-1}^n, z_j^n) &= z_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ R_j(z_{j-1}^n, z_j^n) &= z_j^n \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta(R_p z_{p-1}^n) &= 0 \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ R_p z_{p-1}^n &= z_{p-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial(R_p z_{p-1}^n)}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W}(R_p z_{p-1}^n) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**5**) Calcular

$$\alpha_0 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^n, \gamma_i^n >_{L^2(\Gamma_i)} + < \mathbf{T} z_i^n, z_i^n >_{L^2(\Gamma_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^n, \delta_i^n >_{L^2(\Gamma_i)} + < z_i^n, \gamma_i^n >_{L^2(\Gamma_i)}}$$

y

$$w_{n+1}^{-1} = 1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^n, \gamma_i^n >_{L^2(\Gamma_i)} + < \mathbf{T} z_i^n, z_i^n >_{L^2(\Gamma_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^{n-1}, \gamma_i^{n-1} >_{L^2(\Gamma_i)} + < \mathbf{T} z_i^{n-1}, z_i^{n-1} >_{L^2(\Gamma_i)}} \frac{1}{w_n}\,,$$

donde

$$\gamma^n := \left(\left.\frac{\partial R_2(z_1^n, z_2^n)}{\partial \nu_2}\right|_{\Gamma_1}, \left.\frac{\partial R_2(z_1^n, z_2^n)}{\partial \nu_2}\right|_{\Gamma_2}, \left.\frac{\partial R_4(z_3^n, z_4^n)}{\partial \nu_4}\right|_{\Gamma_3}, \left.\frac{\partial R_4(z_3^n, z_4^n)}{\partial \nu_4}\right|_{\Gamma_4}, \ldots, \left.\frac{\partial R_p(z_{p-1}^n)}{\partial \nu_p}\right|_{\Gamma_{p-1}} \right)$$

y

$$\delta^n := \left(\left.\frac{\partial R_1(z_0^n, z_1^n)}{\partial \nu_1}\right|_{\Gamma_1}, \left.\frac{\partial R_3(z_2^n, z_3^n)}{\partial \nu_3}\right|_{\Gamma_2}, \left.\frac{\partial R_3(z_2^n, z_3^n)}{\partial \nu_3}\right|_{\Gamma_3}, \ldots, \left.\frac{\partial R_{p-1}(z_{p-2}^n, z_{p-1}^n)}{\partial \nu_{p-1}}\right|_{\Gamma_{p-2}}, \left.\frac{\partial R_{p-1}(z_{p-2}^n, z_{p-1}^n)}{\partial \nu_{p-1}}\right|_{\Gamma_{p-1}} \right).$$

(**6**) Actualizar λ^n mediante $\lambda_i^{n+1} = \lambda_i^{n-1} + w_{n+1}(\alpha_n z_i^n + \lambda_i^n - \lambda_i^{n-1})$, $i = 1, p-1$.

(**7**) Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n+1$ y volver a (**1**).

3.3 Esquema D–BEM–FEM

3.3.1 Operadores de Steklov–Poincaré

En la sección anterior se ha presentado un esquema de descomposición de dominio en el cual la aproximación de los operadores de Steklov–Poincaré es realizada mediante FEM. A diferencia de lo anterior, en esta sección se presenta un esquema basado en el uso combinado de FEM y BEM.

En efecto, y por razones que serán claras en lo que sigue, particionamos desde un principio el dominio Ω en un número arbitrario de subdominios Ω_i. Esto es, dado un entero $p > 2$, sean Γ_j, $j = 1, p-1$, curvas poligonales contenidas en Ω, tal que la región interior a Γ_j contiene a $\bar{D}$ y a la región interior a Γ_{j-1}, y tal que ellas dividan a Ω en p subdominios Ω_j, $j = 1, p$. En otras palabras, Ω_j es la región anular limitada por Γ_{j-1} y Γ_j. En lo que sigue, se adoptará la notación $\Gamma_0 := \Gamma_D$ y $\Gamma_p := \Gamma_N$. Además, denotamos por ν_i, $i = 1, p$, a los vectores normales unitarios exteriores a Ω_i sobre $\partial\Omega_i$.

Entonces, dado $\lambda_i \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, $i = 1, p-1$, definimos los siguientes problemas de valores de frontera:

- *Hallar* $u_1(\lambda_1) \in H^1(\Omega_1)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u_1(\lambda_1) &= f \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ u_1(\lambda_1) &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ u_1(\lambda_1) &= \lambda_1 \quad \text{en } \Gamma_1\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

- *Hallar* $u_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \in H^1(\Omega_i)$, $i = 2,\ p-1$, *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) &= f \quad \text{en } \Omega_i\,, \\ u_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) &= \lambda_{i-1} \quad \text{en } \Gamma_{i-1}\,, \\ u_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) &= \lambda_i \quad \text{en } \Gamma_i\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

- *Hallar* $u_p(\lambda_{p-1}) \in H^1(\Omega_p)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u_p(\lambda_{p-1}) &= f \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ u_p(\lambda_{p-1}) &= \lambda_{p-1} \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial}{\partial\nu} u_p(\lambda_{p-1}) &= -2\,\mathbf{W} u_p(\lambda_{p-1}) + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por otro lado, y de manera que los problemas anteriores constituyan una formulación multidominio para (3.2), consideramos la continuidad de derivadas normales

sobre Γ_i, $i = 1, p-1$. Lo anterior conduce al siguiente problema de interfase: *Hallar* $\bar{\lambda} := (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_{p-1}) \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$ *tal que*

$$\left[\frac{\partial}{\partial \nu_1} u_1(\bar{\lambda}_1) + \frac{\partial}{\partial \nu_2} u_2(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2), \mu_1\right]_1 + \sum_{i=2}^{p-2} \left[\frac{\partial}{\partial \nu_i} u_i(\bar{\lambda}_{i-1}, \bar{\lambda}_i) + \frac{\partial}{\partial \nu_{i+1}} u_{i+1}(\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_{i+1}), \mu_i\right]_i$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial \nu_{p-1}} u_{p-1}(\bar{\lambda}_{p-2}, \bar{\lambda}_{p-1}) + \frac{\partial}{\partial \nu_p} u_p(\bar{\lambda}_{p-1}), \mu_{p-1}\right]_{p-1} = 0 \tag{3.37}$$

para todo $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}) \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$, donde $[\cdot,\cdot]_i$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_i)$ y $H^{1/2}(\Gamma_i)$ definida a través del producto interior de $L^2(\Gamma_i)$.

Ahora, definimos operadores lineales de extensión R_i, $i = 1, p$, como sigue

- $R_1 : H^{1/2}(\Gamma_1) \ni \lambda_1 \to R_1\lambda_1 \in H^1(\Omega_1)$ solución de

$$\begin{aligned} -\Delta(R_1\lambda_1) &= 0 \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ R_1\lambda_1 &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ R_1\lambda_1 &= \lambda_1 \quad \text{en } \Gamma_1\,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

- $R_i : H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i) \ni (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \to R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \in H^1(\Omega_i)$, $i = 2, p-1$, solución de

$$\begin{aligned} -\Delta R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) &= 0 \quad \text{en } \Omega_i\,, \\ R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) &= \lambda_{i-1} \quad \text{en } \Gamma_{i-1}\,, \\ R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) &= \lambda_i \quad \text{en } \Gamma_i\,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

- $R_p : H^{1/2}(\Gamma_{p-1}) \ni \lambda_{p-1} \to R_p\lambda_{p-1} \in H^1(\Omega_p)$ solución de

$$\begin{aligned} -\Delta(R_p\lambda_{p-1}) &= 0 \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ R_p\lambda_{p-1} &= \lambda_{p-1} \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(R_p\lambda_{p-1}) &= -2\,\mathbf{W}(R_p\lambda_{p-1}) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Obsérvese que los operadores lineales de extensión R_i, $i = 1, p$, están bien definidos en virtud del Lema de Lax–Milgram. Definimos además, $\tilde{w}_1 \in H^1(\Omega_1)$, $w_i \in H^1(\Omega_i)$, $i = 2, p-1$, y $w_p \in H^1(\Omega_p)$, como las únicas soluciones débiles de los siguientes problemas de valores de frontera:

- *Hallar* $\tilde{w}_1 \in H^1(\Omega_1)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{w}_1 &= f \quad \text{en } \Omega_1 \,, \\ \tilde{w}_1 &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D \,, \\ \tilde{w}_1 &= 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \,. \end{aligned} \tag{3.41}$$

- *Hallar* $w_i \in H^1(\Omega_i)$, $i = 2, p-1$, *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta w_i &= f \quad \text{en } \Omega_i \,, \\ w_i &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_i \,. \end{aligned} \tag{3.42}$$

- *Hallar* $w_p \in H^1(\Omega_p)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta w_p &= f \quad \text{en } \Omega_p \,, \\ w_p &= 0 \quad \text{en } \Gamma_{p-1} \,, \\ \frac{\partial w_p}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} w_p + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N \,. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Más aún, se denota por $g \in H^1(\Omega)$ a una extensión regular de g_0 sobre Ω tal que $g := 0$ en $\bigcup_{i=2}^{p} \bar{\Omega}_i$ y definimos $w_1 := \tilde{w}_1 - g$. Entonces,

$$u_1(\lambda_1) = w_1 + g + R_1 \lambda_1 \quad \text{en } \Omega_1 \,, \tag{3.44}$$

$$u_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) = w_i + R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \quad \text{en } \Omega_i \,,\ i = 2, p-1 \tag{3.45}$$

y

$$u_p(\lambda_{p-1}) = w_p + R_p \lambda_{p-1} \quad \text{en } \Omega_p \,. \tag{3.46}$$

Ahora, introducimos la formas bilineales continuas y simétricas $A_i : H^1(\Omega_i) \times H^1(\Omega_i) \to \mathbf{R}$, $i = 1, p$, y $A : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbf{R}$, definidas por

$$A_i(z_i, v_i) := \int_{\Omega_i} \nabla z_i \cdot \nabla v_i \, dx \,,\ i = 1, p-1 \,,$$

$$A_p(z_p, v_p) := \int_{\Omega_p} \nabla z_p \cdot \nabla v_p \, dx + 2 \ < \dot{v}_p, \mathbf{V} \dot{z}_p >$$

y

$$A(z, v) := \sum_{k=1}^{p} A_k(z_k, v_k) \quad \forall\, z, v \in H^1(\Omega) \,,$$

donde $z_k := z|_{\Omega_k}$ y $v_k := v|_{\Omega_k}$. Con esta notación, la única solución $u \in H^1(\Omega)$ de (3.3) satisface $u = g_0$ en Γ_D y

$$A(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,,$$

donde

$$F(v) := \int_\Omega f v\, dx + \frac{b}{\pi r}\int_{\Gamma_N} v\, ds\,.$$

Nótese que para todo $\lambda_i \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, $i = 1, p-1$,

$$A_1(R_1\lambda_1, \varphi_1) = 0 \quad \forall\, \varphi_1 \in H^1_0(\Omega_1)\,, \tag{3.47}$$

$$A_i(R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), \varphi_i) = 0 \quad \forall\, \varphi_i \in H^1_0(\Omega_i)\,,\ i = 2, p-1 \tag{3.48}$$

y

$$A_p(R_p\lambda_{p-1}, \varphi_p) = 0 \quad \forall\, \varphi_p \in H^1_{\Gamma_{p-1}}(\Omega_p)\,, \tag{3.49}$$

donde $H^1_{\Gamma_{p-1}}(\Omega_p) := \{v \in H^1(\Omega_p) : v = 0 \text{ en } \Gamma_{p-1}\}$.

Lema 3.3.1 *La solución u de (3.3) está relacionada con w_i, $i = 1, p$, de acuerdo a las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned} w_1 &= (u-g)|_{\Omega_1} - R_1((u-g)|_{\Gamma_1})\,, \\ w_i &= u|_{\Omega_i} - R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i})\,,\ i = 2, p-1 \end{aligned}$$

y

$$w_p = u|_{\Omega_p} - R_p(u|_{\Gamma_{p-1}})\,.$$

Demostración. Sea $\bar{w}_1 := (u-g)|_{\Omega_1} - R_1((u-g)|_{\Gamma_1})$, $\bar{w}_i := u|_{\Omega_i} - R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i})$, $i = 2, p-1$, y $\bar{w}_p := u|_{\Omega_p} - R_p(u|_{\Gamma_{p-1}})$. Entonces, dado que $(u-g) = R_1((u-g)|_{\Gamma_1}) = 0$ en Γ_D y $R_1((u-g)|_{\Gamma_1}) = u - g$ en Γ_1, se deduce que $\bar{w}_1 \in H^1_0(\Omega_1)$. Ahora, dado $\varphi_1 \in H^1_0(\Omega_1)$, denotamos por $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ a la extensión natural de φ_1 sobre Ω. Por lo tanto, usando el hecho que $A_1(R_1\lambda_1, \varphi_1) = 0$ para todo $\lambda_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ y para todo $\varphi_1 \in H^1_0(\Omega_1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} A_1(\bar{w}_1, \varphi_1) &= A_1((u-g)|_{\Omega_1}, \varphi_1) - A_1(R_1((u-g)|_{\Gamma_1}), \varphi_1) \\ &= A_1((u-g)|_{\Omega_1}, \varphi_1) \\ &= A(u, \varphi) - A_1(g|_{\Omega_1}, \varphi_1) \\ &= F(\varphi) - \int_{\Omega_1} \nabla g \cdot \nabla \varphi_1\, dx \\ &= \int_\Omega f\varphi\, dx + \frac{b}{\pi r}\int_{\Gamma_N} \varphi\, ds - \int_{\Omega_1} \nabla g \cdot \nabla \varphi_1\, dx \\ &= \int_{\Omega_1} f\varphi_1\, dx - \int_{\Omega_1} \nabla g \cdot \nabla \varphi_1\, dx\,, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\bar{w}_1 + g = \tilde{w}_1$ y luego, $w_1 = \bar{w}_1$.

Por otro lado, puesto que $u|_{\Gamma_{i-1}} = R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i})|_{\Gamma_{i-1}}$ y $u|_{\Gamma_i} = R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i})|_{\Gamma_i}$, se deduce que $\bar{w}_i \in H_0^1(\Omega_i)$. Además, dado $\varphi_i \in H_0^1(\Omega_i)$, denotamos por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ a la extensión natural de φ_i sobre Ω. Entonces, usando que $A_i(R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), \varphi_i) = 0$ para todo $(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$ y para todo $\varphi_i \in H_0^1(\Omega_i)$, se deduce que

$$\begin{aligned} A_i(\bar{w}_i, \varphi_i) &= A_i(u|_{\Omega_i}, \varphi_i) - A_i(R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i}), \varphi_i) \\ &= A_i(u|_{\Omega_i}, \varphi_i) \\ &= A(u, \varphi) \\ &= \int_\Omega f\varphi\, dx + \frac{b}{\pi r}\int_{\Gamma_N} \varphi\, ds \\ &= \int_{\Omega_i} f\varphi_i\, dx \end{aligned}$$

y luego, $\bar{w}_i = w_i$, $i = 2, p-1$.

Finalmente, dado que $R_p(u|_{\Gamma_{p-1}})|_{\Gamma_{p-1}} = u|_{\Gamma_{p-1}}$, se sigue que $\bar{w}_p \in H^1_{\Gamma_{p-1}}(\Omega_p)$. Además, dado $\varphi_p \in H^1_{\Gamma_{p-1}}(\Omega_p)$, se denota por $\varphi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ a la extensión natural de φ_p sobre Ω. Por lo tanto, usando que $A_p(R_p\lambda_{p-1}, \varphi_p) = 0$ para todo $\lambda_{p-1} \in H^{1/2}(\Gamma_{p-1})$ y para todo $\varphi_p \in H^1_{\Gamma_{p-1}}(\Omega_p)$, se tiene que

$$\begin{aligned} A_p(\bar{w}_p, \varphi_p) &= A_p(u|_{\Omega_p}, \varphi_p) - A_p(R_p(u|_{\Gamma_{p-1}}), \varphi_p) \\ &= A_p(u|_{\Omega_p}, \varphi_p) \\ &= A(u, \varphi) \\ &= \int_\Omega f\varphi\, dx + \frac{b}{\pi r}\int_{\Gamma_N} \varphi\, ds \\ &= \int_{\Omega_p} f\varphi_p\, dx + \frac{b}{\pi r}\int_{\Gamma_N} \varphi_p\, ds\,. \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $\bar{w}_p = w_p$ lo que completa la demostración. ■

En lo que sigue, $[\cdot,\cdot]_{i-1,i}$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{-1/2}(\Gamma_i)$ y $H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$, $i = 2, p-1$, definida por

$$[(\xi_{i-1}, \xi_i), (\mu_{i-1}, \mu_i)]_{i-1,i} := < \xi_{i-1}, \mu_{i-1} >_{L^2(\Gamma_{i-1})} + < \xi_i, \mu_i >_{L^2(\Gamma_i)}$$

para todo $(\xi_{i-1}, \xi_i) \in H^{-1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{-1/2}(\Gamma_i)$ y para todo $(\mu_{i-1}, \mu_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$. Con esto, definimos los operadores locales de Steklov–Poincaré

$$\mathbf{S}_1 : H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{-1/2}(\Gamma_1)\,,$$

$$\mathbf{S}_i : H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i) \to H^{-1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{-1/2}(\Gamma_i)\,,\ i = 2, p-1$$

y

$$\mathbf{S}_p : H^{1/2}(\Gamma_{p-1}) \to H^{-1/2}(\Gamma_{p-1})$$

a través de

$$[\mathbf{S}_1\lambda_1, \mu_1]_1 := \left[\frac{\partial}{\partial\nu_1}(R_1\lambda_1), \mu_1\right]_1 ,$$

$$[\mathbf{S}_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), (\mu_{i-1}, \mu_i)]_{i-1,i} :=$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\nu_i}R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\Big|_{\Gamma_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial\nu_i}R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\Big|_{\Gamma_i}\right), (\mu_{i-1}, \mu_i)\right]_{i-1,i}$$

y

$$[\mathbf{S}_p\lambda_{p-1}, \mu_{p-1}]_{p-1} := \left[\frac{\partial}{\partial\nu_p}(R_p\lambda_{p-1}), \mu_{p-1}\right]_{p-1} .$$

De aquí en adelante, y sin pérdida de generalidad, se asume que p es impar. Ahora, usando FEM, expresamos los operadores locales $\mathbf{S}_i$ con índice impar como sigue

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_1\lambda_1, \mu_1]_1 &:= \int_{\Omega_1} \nabla(R_1\lambda_1)\cdot\nabla(R_1\mu_1)\,dx \\ &= A_1(R_1\lambda_1, R_1\mu_1) \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\forall\, \lambda_1, \mu_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)\,,$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), (\mu_{i-1}, \mu_i)]_{i-1,i} &:= \int_{\Omega_i} \nabla R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\cdot\nabla R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\,dx \\ &= A_i(R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)) \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\forall\, (\lambda_{i-1}, \lambda_i),\ (\mu_{i-1}, \mu_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)\,,\ i = 2, p-1$$

y

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_p\lambda_{p-1}, \mu_{p-1}]_{p-1} &:= \int_{\Omega_p} \nabla(R_p\lambda_{p-1})\cdot\nabla(R_p\mu_{p-1})\,dx \\ &\quad + 2 < (R_p\dot{\mu}_{p-1}), \mathbf{V}(R_p\dot{\lambda}_{p-1}) > \\ &= A_p(R_p\lambda_{p-1}, R_p\mu_{p-1}) \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\forall\, \lambda_{p-1}, \mu_{p-1} \in H^{1/2}(\Gamma_{p-1})\,.$$

Por otro lado, usando la Teoría dada en el capítulo 1 sobre operadores integrales de frontera, podemos escribir, para índice par,

$$\mathbf{S}_i := \mathbf{V}_{\partial\Omega_i}^{-1}(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}_{\partial\Omega_i})\,, \tag{3.53}$$

donde, para cualquier variedad $\tilde{\Gamma} \subseteq \partial\Omega_i$, los operadores integrales de frontera $\mathbf{V}_{\tilde{\Gamma}}$ y $\mathbf{K}_{\tilde{\Gamma}}$ están definidos por

$$\mathbf{V}_{\tilde{\Gamma}}\sigma(x) := \int_{\tilde{\Gamma}} E(x,y)\,\sigma(y)\,ds_y \tag{3.54}$$

y

$$\mathbf{K}_{\tilde{\Gamma}}\lambda(x) := \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial\nu_y} E(x,y)\,\lambda(y)\,ds_y\,.$$

Es importante notar que (3.53) define una aplicación *no–simétrica* en el discreto y por lo tanto, con el objeto de evitar esta dificultad, usaremos la representación *hipersingular simétrica* (ver [37]):

$$\mathbf{S}_i := (\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K'}_{\partial\Omega_i})\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}^{-1}(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}_{\partial\Omega_i}) + \mathbf{W}_{\partial\Omega_i}\,, \tag{3.55}$$

donde

$$\mathbf{W}_{\partial\Omega_i}\lambda(x) := -\frac{\partial}{\partial\nu_x}\int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial}{\partial\nu_y} E(x,y)\,\lambda(y)\,ds_y$$

y

$$\mathbf{K'}_{\partial\Omega_i}\sigma(x) := \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial}{\partial\nu_x} E(x,y)\,\sigma(y)\,ds_y\,.$$

En descomposición de dominio, la expresión (3.55) es preferible a (3.53) pues es simétrica tanto en el continuo como en el discreto. Más aún, para índice par, se define la forma bilineal $\tilde{A}_i : [H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)] \times [H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)] \to \mathbf{R}$ por

$$\tilde{A}_i((\lambda_{i-1},\lambda_i),(\mu_{i-1},\mu_i)) := [\mathbf{S}_i(\lambda_{i-1},\lambda_i),(\mu_{i-1},\mu_i)]_{i-1,i}$$

$$= [\{(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K'}_{\partial\Omega_i})\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}^{-1}(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}_{\partial\Omega_i}) + \mathbf{W}_{\partial\Omega_i}\}(\lambda_{i-1},\lambda_i),(\mu_{i-1},\mu_i)]_{i-1,i} \tag{3.56}$$

$$\forall\,(\lambda_{i-1},\lambda_i),(\mu_{i-1},\mu_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)\,.$$

Entonces, reemplazando (3.44), (3.45) y (3.46) en (3.37), usando integración por partes, tomando en cuenta (3.50), (3.51), (3.52), (3.56) y denotando por $[[\cdot,\cdot]]$ a la paridad dual entre $\prod_{i=1}^{p-1} H^{-1/2}(\Gamma_i)$ y $\prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$, obtenemos el problema de Steklov–Poincaré: *Hallar* $\bar{\lambda} \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$ *tal que*

$$\mathbf{S}\,\bar{\lambda} = \chi\,, \tag{3.57}$$

donde $\mathbf{S} : \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i) \to \prod_{i=1}^{p-1} H^{-1/2}(\Gamma_i)$ es el operador de Steklov–Poincaré definido por

$$[[\mathbf{S}\,\lambda, \mu]] := A_1(R_1\lambda_1, R_1\mu_1) + A_p(R_p\lambda_{p-1}, R_p\mu_{p-1})$$
$$+ \sum_{\substack{3\le i\le p-2\\ i\ impar}} A_i(R_i(\lambda_{i-1},\lambda_i), R_i(\mu_{i-1},\mu_i)) + \sum_{\substack{2\le i\le p-1\\ i\ par}} \tilde{A}_i((\lambda_{i-1},\lambda_i),(\mu_{i-1},\mu_i))$$

para todo $\lambda,\ \mu \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$ y $\chi \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{-1/2}(\Gamma_i)$ está dado por

$$[[\chi, \mu]] := -A_1(\tilde{w}_1, R_1\mu_1) + \int_{\Omega_1} f\,(R_1\mu_1)\,dx - A_p(w_p, R_p\mu_{p-1})$$
$$+ \int_{\Omega_p} f\,(R_p\mu_{p-1})\,dx + \sum_{\substack{3\le i\le p-2\\ i\ impar}} \left[\int_{\Omega_i} f\,R_i(\mu_{i-1},\mu_i)\,dx - A_i(w_i, R_i(\mu_{i-1},\mu_i))\right]$$
$$+ \sum_{\substack{2\le i\le p-1\\ i\ par}} \left[\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i} \int_{\Omega_i} f(y)\,E(x,y)\,dy, (\mu_{i-1},\mu_i)\right]_{i-1,i}$$

para todo $\mu \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$.

A continuación, con el objeto de mostrar la existencia y unicidad de solución del problema de Steklov–Poincaré (3.57), se establecen algunos resultados previos.

Lema 3.3.2 *Los operadores de Steklov–Poincaré con índice impar (FEM) inducen formas bilineales simétricas y continuas.*

Demostración. Notemos primero que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}_1\lambda_1, \mu_1]_1 &= \int_{\Omega_1} \nabla(R_1\lambda_1)\cdot\nabla(R_1\mu_1)\,dx \\
&= \int_{\Omega_1} \nabla(R_1\mu_1)\cdot\nabla(R_1\lambda_1)\,dx \\
&= [\mathbf{S}_1\mu_1, \lambda_1]_1
\end{aligned}$$

para todo $\lambda_1,\ \mu_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ y luego, $\mathbf{S}_1$ induce una forma bilineal simétrica en $H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_1)$. De igual forma, para $i = 3, p-2$, se deduce que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}_i(\lambda_{i-1},\lambda_i), (\mu_{i-1},\mu_i)]_{i-1,i} &= \int_{\Omega_i} \nabla R_i(\lambda_{i-1},\lambda_i)\cdot\nabla R_i(\mu_{i-1},\mu_i)\,dx \\
&= [\mathbf{S}_i(\mu_{i-1},\mu_i), (\lambda_{i-1},\lambda_i)]_{i-1,i}
\end{aligned}$$

para todo $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$, $(\mu_{i-1}, \mu_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$. Esto muestra que $\mathbf{S}_i$ induce una forma bilineal simétrica en $[H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)] \times [H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)]$. Más aún, usando la simetría del potencial de capa simple $\mathbf{V}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}_p \lambda_{p-1}, \mu_{p-1}]_{p-1} &= \int_{\Omega_p} \nabla(R_p \lambda_{p-1}) \cdot \nabla(R_p \mu_{p-1})\, dx \\
&\quad + 2 < (R_p \dot{\mu}_{p-1}), \mathbf{V}(R_p \dot{\lambda}_{p-1}) > \\
&= [\mathbf{S}_p \mu_{p-1}, \lambda_{p-1}]_{p-1}
\end{aligned}$$

para todo $\lambda_{p-1},\ \mu_{p-1} \in H^{1/2}(\Gamma_{p-1})$ lo que prueba que $\mathbf{S}_p$ induce una forma bilineal simétrica en $H^{1/2}(\Gamma_{p-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_{p-1})$.

En lo que sigue se muestra la continuidad de los operadores de Steklov–Poincaré. En efecto, usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$[\mathbf{S}_1 \lambda_1, \mu_1]_1 \leq \|R_1 \lambda_1\|_{H^1(\Omega_1)} \|R_1 \mu_1\|_{H^1(\Omega_1)} \quad \forall\, \lambda_1,\ \mu_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$$

y luego, la continuidad de $\mathbf{S}_1$ es consecuencia directa del Lema 3.2.2.

También, para $i = 3, p-2$, se sigue que

$$[\mathbf{S}_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), (\mu_{i-1}, \mu_i)]_{i-1,i} \leq \|R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\|_{H^1(\Omega_i)} \|R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\|_{H^1(\Omega_i)} \tag{3.58}$$

para todo $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$, $(\mu_{i-1}, \mu_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$. En lo que sigue de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica e independiente de $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$. Ahora, considerando una inversa a derecha y continua del operador de trazas, puede definirse $\tilde{\lambda} \in H^1(\Omega_i)$ como una extensión de $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$ sobre Ω_i tal que

$$\|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C\, \|(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)}\,. \tag{3.59}$$

Además, usando la desigualdad de Poincaré, el Lema de Lax–Milgram y el hecho que $v := R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) - \tilde{\lambda} \in H^1_0(\Omega_i)$ es la única solución del problema variacional

$$\int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla \varphi\, dx = -\int_{\Omega_i} \nabla \tilde{\lambda} \cdot \nabla \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in H^1_0(\Omega_i)\,,$$

se deduce que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C\, \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_i)}\,. \tag{3.60}$$

Por lo tanto, usando la desigualdad triangular, (3.59) y (3.60), se tiene que

$$\begin{aligned}
\|R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\|_{H^1(\Omega_i)} &\leq \|v\|_{H^1(\Omega_i)} + \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_i)} \\
&\leq C\, \|\tilde{\lambda}\|_{H^1(\Omega_i)} \\
&\leq C\, \|(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)}
\end{aligned}$$

lo cual, junto a (3.58), prueba la continuidad de $\mathbf{S}_i$, $i = 3, p-2$.

Finalmente, usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, la continuidad de $\mathbf{V}$ y el Teorema de trazas, se deduce que

$$[\mathbf{S}_p\lambda_{p-1}, \mu_{p-1}]_{p-1} \leq C \, \|R_p\lambda_{p-1}\|_{H^1(\Omega_p)} \, \|R_p\mu_{p-1}\|_{H^1(\Omega_p)}$$

para todo λ_{p-1}, $\mu_{p-1} \in H^{1/2}(\Gamma_{p-1})$ y luego, usando el Lema 3.2.2, se tiene la continuidad de $\mathbf{S}_p$. ■

En lo que sigue, necesitamos recordar el siguiente resultado.

Lema 3.3.3 *Sea H un espacio de Hilbert con dual H^* y $\mathbf{A} : H \to H^*$ un operador lineal y continuo. Suponga que*

(**a**) $\mathbf{A}$ *satisface la desigualdad de Gårding, es decir, existen constantes $\beta, \gamma > 0$ tal que*

$$[\mathbf{A}\lambda, \lambda]_{H^* \times H} \geq \gamma \, \|\lambda\|_H^2 - \beta \, \|\lambda\|_{\tilde{H}}^2 \quad \forall \, \lambda \in H \, ,$$

donde $\tilde{H}$ es un espacio de Hilbert que contiene compactamente a H.

(**b**) $\mathbf{A}$ *es semidefinido positivo, es decir, $[\mathbf{A}\lambda, \lambda]_{H^* \times H} \geq 0$ para todo $\lambda \in H$.*

(**c**) $\mathbf{A}$ *es tal que $[\mathbf{A}\lambda, \lambda]_{H^* \times H} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ en H.*

Entonces, el operador lineal $\mathbf{A}$ es H–elíptico, es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$[\mathbf{A}\lambda, \lambda]_{H^* \times H} \geq \alpha \, \|\lambda\|_H^2 \quad \forall \, \lambda \in H \, .$$

Lema 3.3.4 *Los operadores de Steklov–Poincaré con índice par (BEM), definidos por*

$$\mathbf{S}_i := (\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K'}_{\partial\Omega_i})\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}^{-1}(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}_{\partial\Omega_i}) + \mathbf{W}_{\partial\Omega_i} \, ,$$

inducen formas bilineales $\tilde{A}_i((\lambda_{i-1}, \lambda_i), (\mu_{i-1}, \mu_i)) := [\mathbf{S}_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), (\mu_{i-1}, \mu_i)]_{i-1,i}$ simétricas y continuas en $[H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)] \times [H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)]$. Mas aún, $\tilde{A}_i$ es $\left[H^{1/2}(\Gamma_{i-1})/\mathbf{R}\right] \times \left[H^{1/2}(\Gamma_i)/\mathbf{R}\right]$–elíptica.

Demostración. Primero, dado que $\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}$ y $\mathbf{W}_{\partial\Omega_i}$ son operadores simétricos en $H^{-1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{-1/2}(\Gamma_i)$ y $H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$, respectivamente, y que $\mathbf{K'}_{\partial\Omega_i}$ es el adjunto de $\mathbf{K}_{\partial\Omega_i}$, se sigue que $\tilde{A}_i$ es simétrica en $[H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)] \times [H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)]$. Además, la continuidad de $\tilde{A}_i$ es consecuencia directa de la continuidad de $\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}^{-1}$, $\mathbf{K}_{\partial\Omega_i}$, $\mathbf{K'}_{\partial\Omega_i}$ y $\mathbf{W}_{\partial\Omega_i}$.

Por otro lado, para probar que $\mathbf{S}_i$ induce una forma bilineal $\left[H^{1/2}(\Gamma_{i-1})/\mathbf{R}\right] \times \left[H^{1/2}(\Gamma_i)/\mathbf{R}\right]$–*elíptica*, y dado que $\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}_{\partial\Omega_i}\right)\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = c$, $c \in \mathbf{R}$, es suficiente

mostrar que $\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}$ es $H^{-1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{-1/2}(\Gamma_i)$–*elíptico* y que $\mathbf{W}_{\partial\Omega_i}$ es semidefinido positivo en $H^{1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{1/2}(\Gamma_i)$.

Para hacer esto, usaremos el Lema 3.3.3. En efecto, notemos que (**b**) y (**c**) se siguen fácilmente para $\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}$ y que, usando la fórmula de representación de Green, $\mathbf{W}_{\partial\Omega_i}$ satisface (**b**). En lo que sigue, probaremos que $\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}$ también satisface (**a**). Esto es, si el diámetro de Ω_i es menor que 1 (ver [35]),

$$\begin{aligned}[\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}(\sigma_{i-1},\sigma_i),(\sigma_{i-1},\sigma_i)]_{i-1,i} &\geq \gamma_i \,\|(\sigma_{i-1},\sigma_i)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)} \\ &\quad - \mathbf{C}((\sigma_{i-1},\sigma_i),(\sigma_{i-1},\sigma_i))\,,\end{aligned}$$

donde $\gamma_i > 0$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{C}((\sigma_{i-1},\sigma_i),(\sigma_{i-1},\sigma_i)) &= |<\mathbf{V}_{\Gamma_{i-1}}\sigma_{i-1},\sigma_i>_{L^2(\Gamma_i)}| \\ &\quad + |<\mathbf{V}_{\Gamma_i}\sigma_i,\sigma_{i-1}>_{L^2(\Gamma_{i-1})}|\end{aligned}$$

para todo $(\sigma_{i-1},\sigma_i) \in H^{-1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{-1/2}(\Gamma_i)$. Nótese que los operadores $\mathbf{V}_{\Gamma_{i-1}}$ y $\mathbf{V}_{\Gamma_i}$ están definidos de acuerdo a (3.54). Entonces, dado que $\Gamma_{i-1} \cap \Gamma_i = \emptyset$, se deduce que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{C}((\sigma_{i-1},\sigma_i),(\sigma_{i-1},\sigma_i)) &\leq \|\mathbf{V}_{\Gamma_{i-1}}\sigma_{i-1}\|_{H^{1/2+\epsilon}(\Gamma_i)}\|\sigma_i\|_{H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_i)} \\ &\quad + \|\mathbf{V}_{\Gamma_i}\sigma_i\|_{H^{1/2+\epsilon}(\Gamma_{i-1})}\|\sigma_{i-1}\|_{H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_{i-1})} \\ &\leq \hat{\beta}_i \,\|\sigma_{i-1}\|_{H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_{i-1})}\,\|\sigma_i\|_{H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_i)} \\ &\quad + \tilde{\beta}_i \,\|\sigma_i\|_{H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_i)}\,\|\sigma_{i-1}\|_{H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_{i-1})}\,,\end{aligned}$$

donde

$$\hat{\beta}_i := \|\ \|E(x,\cdot)\|_{H^{1/2+\epsilon}(\Gamma_{i-1})}\|_{H^{1/2+\epsilon}(\Gamma_i)}$$

y

$$\tilde{\beta}_i := \|\ \|E(x,\cdot)\|_{H^{1/2+\epsilon}(\Gamma_i)}\|_{H^{1/2+\epsilon}(\Gamma_{i-1})}\,.$$

Finalmente, denotando $\beta_i := \max\{\hat{\beta}_i, \tilde{\beta}_i\}$ y usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se concluye que

$$\begin{aligned}[\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}(\sigma_{i-1},\sigma_i),(\sigma_{i-1},\sigma_i)]_{i-1,i} &\geq \gamma_i \,\|(\sigma_{i-1},\sigma_i)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)} \\ &\quad - \beta_i \,\|(\sigma_{i-1},\sigma_i)\|^2_{H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2-\epsilon}(\Gamma_i)}\,.\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

Lema 3.3.5 *El operador global de Steklov–Poincaré* **S** *induce una forma bilineal* $\prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$*–elíptica.*

Demostración. Primero, para índice par $i = 2, p-1$, usando integración por partes y el hecho que los operadores R_i definen extensiones armónicas en Ω_i, se tiene que

$$[\tilde{A}_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), (\lambda_{i-1}, \lambda_i)]_{i-1,i} =$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \nu_i} R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \Big|_{\Gamma_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial \nu_i} R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \Big|_{\Gamma_i} \right), (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \right]_{i-1,i}$$

$$= \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \nu_i} R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\, ds$$

$$= \int_{\Omega_i} \nabla R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i) \cdot \nabla R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\, dx$$

$$= A_i(R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i))\,.$$

Luego, en virtud de lo anterior,

$$[[\mathbf{S}\lambda, \lambda]] = A_1(R_1\lambda_1, R_1\lambda_1) + \sum_{i=2}^{p-1} A_i(R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i), R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i))$$

$$+ A_p(R_p\lambda_{p-1}, R_p\lambda_{p-1})$$

$$\geq |R_1\lambda_1|^2_{H^1(\Omega_1)} + \sum_{i=2}^{p-1} |R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)|^2_{H^1(\Omega_i)} + |R_p\lambda_{p-1}|^2_{H^1(\Omega_p)}$$

$$= |\mathcal{R}\lambda|^2_{H^1(\Omega)}\,,$$

donde $\mathcal{R}$ es el operador global de extensión definido por

$$\mathcal{R}\lambda := \begin{cases} R_1\lambda_1\,, & \text{en } \Omega_1 \\ R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\,, & \text{en } \Omega_i\,,\ i = 2, p-1 \\ R_p\lambda_{p-1}\,, & \text{en } \Omega_p \end{cases} \tag{3.61}$$

para todo $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$.

Finalmente, dado que $\mathcal{R}\lambda \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, usando la desigualdad de Poincaré sobre Ω y el Teorema de trazas en cada subdominio Ω_i, $i = 1, p$, se concluye que

$$[[\mathbf{S}\lambda, \lambda]] \geq C\, \|\mathcal{R}\lambda\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$= C \left\{ \|R_1\lambda_1\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \sum_{i=2}^{p-1} \|R_i(\lambda_{i-1}, \lambda_i)\|^2_{H^1(\Omega_i)} + \|R_p\lambda_{p-1}\|^2_{H^1(\Omega_p)} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\geq C \sum_{i=1}^{p-1} \|\lambda_i\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} \\ &= C \, \|\lambda\|^2_{\prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)} \, . \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

El siguiente resultado establece la unicidad de solución para el problema de Steklov–Poincaré (3.57).

Teorema 3.3.1 *Existe un único* $\bar{\lambda} \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$ *tal que* $\mathbf{S}\,\bar{\lambda} = \chi$.

Demostración. Usando los Lemas 3.3.2, 3.3.4 y 3.3.5, una aplicación directa del Lema de Lax–Milgram completa la demostración. ■

Teorema 3.3.2 *Sean* $u \in H^1(\Omega)$ *y* $\bar{\lambda} \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$ *las únicas soluciones de (3.3) y (3.57), respectivamente. Entonces,*

$$\bar{\lambda} := (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_{p-1}) = (u|_{\Gamma_1}, \ldots, u|_{\Gamma_{p-1}})$$

y

$$u = \begin{cases} u_1(\bar{\lambda}_1)\,, & en\ \Omega_1 \\ u_i(\bar{\lambda}_{i-1}, \bar{\lambda}_i)\,, & en\ \Omega_i,\ i = 2, p-1 \\ u_p(\bar{\lambda}_{p-1})\,, & en\ \Omega_p\,. \end{cases}$$

Demostración. Usando el Lema 3.3.1 e integración por partes, para índice par $i = 2, p-1$, se sigue que

$$\begin{aligned} &[\tilde{A}_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i}), (\mu_{i-1}, \mu_i)]_{i-1,i} = \\ &\left[\left(\frac{\partial}{\partial \nu_i} R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i}) \Big|_{\Gamma_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial \nu_i} R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i}) \Big|_{\Gamma_i} \right), (\mu_{i-1}, \mu_i) \right]_{i-1,i} \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \nu_i} (u|_{\Omega_i} - w_i) \Big|_{\Gamma_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial \nu_i} (u|_{\Omega_i} - w_i) \Big|_{\Gamma_i} \right), (\mu_{i-1}, \mu_i) \right]_{i-1,i} \\ &= -\int_{\Omega_i} f\, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx + \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx \\ &\quad + \left[\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i} \int_{\Omega_i} E(x,y) f(y)\, ds_y, (\mu_{i-1}, \mu_i) \right]_{i-1,i} \end{aligned} \tag{3.62}$$

para todo $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}) \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$. Además, para índice impar $i = 3, p-2$,

$$A_i(R_i(u|_{\Gamma_{i-1}}, u|_{\Gamma_i}), R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)) = A_i(u|_{\Omega_i} - w_i, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i))$$

$$= \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx - A_i(w_i, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i))\,. \tag{3.63}$$

Entonces, en virtud de (3.62), (3.63) y el Lema 3.3.1, se deduce que

$$[[\mathbf{S}(u|_\Gamma), \mu]] = A_1(u - g - w_1, R_1\mu_1) + A_p(u - w_p, R_p\mu_{p-1})$$

$$+ \sum_{\substack{3 \le i \le p-2 \\ i\ impar}} \left\{ \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx - A_i(w_i, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)) \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{2 \le i \le p-1 \\ i\ par}} \left\{ - \int_{\Omega_i} f\, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx + \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{2 \le i \le p-1 \\ i\ par}} \left[\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i} \int_{\Omega_i} E(x,y) f(y)\, ds_y, (\mu_{i-1}, \mu_i) \right]_{i-1,i}$$

$$= -A_1(\tilde{w}_1, R_1\mu_1) - A_p(w_p, R_p\mu_{p-1}) + A_1(u, R_1\mu_1)$$

$$+ A_p(u, R_p\mu_{p-1}) + \sum_{i=2}^{p-1} \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx$$

$$- \sum_{\substack{3 \le i \le p-2 \\ i\ impar}} A_i(w_i, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)) - \sum_{\substack{2 \le i \le p-1 \\ i\ par}} \int_{\Omega_i} f\, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx$$

$$+ \sum_{\substack{2 \le i \le p-1 \\ i\ par}} \left[\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i} \int_{\Omega_i} E(x,y) f(y)\, ds_y, (\mu_{i-1}, \mu_i) \right]_{i-1,i}.$$

Ahora, usando el operador global de extensión definido en (3.61), se tiene que

$$A_1(u, R_1\mu_1) + \sum_{i=2}^{p-1} \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx + A_p(u, R_p\mu_{p-1})$$

$$- \sum_{\substack{2 \le i \le p-1 \\ i\ par}} \int_{\Omega_i} f\, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx$$

$$= \int_\Omega f\, \mathcal{R}\mu\, dx - \sum_{\substack{2 \le i \le p-1 \\ i\ par}} \int_{\Omega_i} f\, R_i(\mu_{i-1}, \mu_i)\, dx$$

$$= \int_{\Omega_1} f\, R_1\mu_1\, dx + \int_{\Omega_p} f\, R_p\mu_{p-1}\, dx + \sum_{\substack{3\le i\le p-2\\ i\ impar}} \int_{\Omega_i} f\, R_i(\mu_{i-1},\mu_i)\, dx$$

y por lo tanto,

$$[[\mathbf{S}(u|_\Gamma),\mu]] := -A_1(\tilde{w}_1, R_1\mu_1) + \int_{\Omega_1} f\, R_1\mu_1\, dx - A_p(w_p, R_p\mu_{p-1})$$

$$+ \int_{\Omega_p} f\, R_p\mu_{p-1}\, dx + \sum_{\substack{2\le i\le p-1\\ i\ par}} \left[\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i} \int_{\Omega_i} f(y)\, E(x,y)\, dy, (\mu_{i-1},\mu_i)\right]_{i-1,i}$$

$$+ \sum_{\substack{3\le i\le p-2\\ i\ impar}} \left[\int_{\Omega_i} f\, R_i(\mu_{i-1},\mu_i)\, dx - A_i(w_i, R_i(\mu_{i-1},\mu_i))\right] = [[\chi,\mu]]$$

para todo $\mu \in \prod_{i=1}^{p-1} H^{1/2}(\Gamma_i)$. Esto muestra que $u|_\Gamma := (u|_{\Gamma_1},\ldots,u|_{\Gamma_{p-1}})$ es solución del problema de Steklov–Poincaré y por lo tanto, $\bar{\lambda} = (u|_{\Gamma_1},\ldots,u|_{\Gamma_{p-1}})$. Finalmente, la expresión para u se sigue de (3.44), (3.45), (3.46) y el Lema 3.3.1. ■

3.3.2 Aproximaciones discretas

En lo que sigue nos ocuparemos de la aproximación discreta del problema de Steklov–Poincaré (3.57). En efecto, sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación *cuasi–uniforme* de Ω compuesta de triángulos τ que no cruzan las interfases Γ_i, $i = 1, p-1$, y definimos

$$\bar{\Omega}_h := \bigcup_{\tau\in\mathcal{T}_h} \tau\,.$$

También, para $i = 1, p$, se define

$$\bar{\Omega}_{i,h} := \bigcup_{\tau\cap\Omega_i\neq\emptyset} \tau$$

y denotamos por $\Gamma_{N,h}$ a la aproximación poligonal de Γ_N inducida por $\mathcal{T}_h$.

Ahora, para índice impar $i = 1, p$, introducimos las formas bilineales $A_{i,h} : H^1(\Omega_{i,h}) \times H^1(\Omega_{i,h}) \to \mathbf{R}$, definidas por

$$A_{i,h}(z_i, v_i) := \int_{\Omega_{i,h}} \nabla z_i \cdot \nabla v_i\, dx$$

y

$$A_{p,h}(z_p, v_p) := \int_{\Omega_{p,h}} \nabla z_p \cdot \nabla v_p\, dx \;+\; 2 < \dot{v}_p, \mathbf{V}_h \dot{z}_p >_h$$

para todo z_i, $v_i \in H^1(\Omega_{i,h})$. Es importante mencionar que, dado que Γ_D y Γ_i, $i = 1, p-1$, son poligonales, las formas bilineales $A_{i,h}$ y A_i coinciden para índice impar $i = 1, p-2$.

A continuación, introducimos los espacios de elementos finitos

$$H_{i,h} := \{v_h \in C(\bar{\Omega}_{i,h}) : v_h|_\tau \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \subseteq \bar{\Omega}_{i,h}\}$$

y

$$\Lambda_{i,h} := \{v_h|_{\Gamma_i} : v_h \in H_{i,h}\}\,.$$

Más aún, se definen

$$H^0_{1,h} := \{v_h \in H_{1,h} : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_D \cup \Gamma_1\}\,,$$

$$H^0_{i,h} := \{v_h \in H_{i,h} : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i\}\,,\ i = 2, p-1$$

y

$$H^0_{p,h} := \{v_h \in H_{p,h} : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_{p-1}\}\,.$$

Entonces, en virtud de las relaciones (3.47), (3.48) y (3.49), las extensiones discretas $R_{i,h}$, para índice impar, quedan dadas por

- $R_{1,h} : \Lambda_{1,h} \ni \lambda_h \to R_{1,h}\lambda_h \in H_{1,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_{1,h}(R_{1,h}\lambda_h, v_h) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H^0_{1,h}\,, \\ R_{1,h}\lambda_h &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ R_{1,h}\lambda_h &= \lambda_h \quad \text{en } \Gamma_1\,. \end{aligned}$$

- $R_{i,h} : \Lambda_{i-1,h} \times \Lambda_{i,h} \ni (\lambda_h, \eta_h) \to R_{i,h}(\lambda_h, \eta_h) \in H_{i,h}$, $i = 3, p-2$, solución de

$$\begin{aligned} A_{i,h}(R_{i,h}(\lambda_h, \eta_h), v_h) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H^0_{i,h}\,, \\ R_{i,h}(\lambda_h, \eta_h) &= \lambda_h \quad \text{en } \Gamma_{i-1}\,, \\ R_{i,h}(\lambda_h, \eta_h) &= \eta_h \quad \text{en } \Gamma_i\,. \end{aligned}$$

- $R_{p,h} : \Lambda_{p-1,h} \ni \lambda_h \to R_{p,h}\lambda_h \in H_{p,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_p(R_{p,h}\lambda_h, v_h) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H^0_{p,h}\,, \\ R_{p,h}\lambda_h &= \lambda_h \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,. \end{aligned}$$

En lo que sigue, se define $\Lambda_h := \prod_{i=1}^{p-1} \Lambda_{i,h}$ y por Λ_h^* su correspondiente dual. Con estas definiciones, los operadores discretos de Steklov–Poincaré con índice impar (FEM) quedan dados por

$$[\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \mu_h]_1 := A_{1,h}(R_{1,h}\lambda_h, R_{1,h}\mu_h) \quad \forall\, \lambda_h, \mu_h \in \Lambda_{1,h}\,,$$

$$[\mathbf{S}_{i,h}(\lambda_h, \delta_h), (\eta_h, \mu_h)]_{i-1,i} := A_{i,h}(R_{i,h}(\lambda_h, \delta_h), R_{i,h}(\eta_h, \mu_h))$$
$$\forall\, (\lambda_h, \delta_h), (\eta_h, \mu_h) \in \Lambda_{i-1,h} \times \Lambda_{i,h}$$

y

$$[\mathbf{S}_{p,h}\lambda_h, \mu_h]_{p-1} := A_{p,h}(R_{p,h}\lambda_h, R_{p,h}\mu_h) \quad \forall\, \lambda_h, \mu_h \in \Lambda_{p-1,h}\,.$$

Ahora, con el objeto de definir los operadores de Steklov–Poincaré con índice par, es decir, aquellos aproximados mediante BEM, establecemos algunas definiciones y notaciones. Primero, notemos que el espacio discreto $\Lambda_{i,h}$ es tal que

$$\inf_{\lambda_h \in \Lambda_{i,h}} \|\lambda - \lambda_h\|_{H^p(\Gamma_i)} \leq C\, h^{q-p}\, \|\lambda\|_{H^q(\Gamma_i)} \quad \forall\, \lambda \in H^q(\Gamma_i)$$

y para todo $0 \leq p \leq q \leq 1$. Más aún, para todo $0 \leq p \leq q \leq 1$, se tiene la desigualdad inversa (ver [7])

$$\|\lambda_h\|_{H^q(\Gamma_i)} \leq C\, h^{p-q}\, \|\lambda_h\|_{H^p(\Gamma_i)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_{i,h} \cap H^q(\Gamma_i)\,.$$

Sea $\Lambda_{i-1,\tilde{h}} \times \Lambda_{i,\tilde{h}}$ un subespacio de elementos de frontera de $H^{-1/2}(\Gamma_{i-1}) \times H^{-1/2}(\Gamma_i)$. En lo que sigue suponemos que

$$\inf_{\lambda_{\tilde{h}} \in \Lambda_{i,\tilde{h}}} \|\lambda - \lambda_{\tilde{h}}\|_{H^m(\Gamma_i)} \leq C\, \tilde{h}^{s-m}\, \|\lambda\|_{H^s(\Gamma_i)} \quad \forall\, \lambda \in H^s(\Gamma_i)$$

para todo $-1 \leq m \leq s \leq 0$. Además, se asume que existe $\delta > 0$ tal que $\Lambda_{i,h} \subseteq H^{1/2+\delta}(\Gamma_i)$ y $\Lambda_{i,\tilde{h}} \subseteq H^{-1/2+\delta}(\Gamma_i)$. Nótese que si $\Lambda_{i,\tilde{h}}$ es compuesto por funciones constantes a trozos, lo anterior se satisface con $\delta = \frac{1}{2}$.

Ahora, dado $\lambda_h \in \Lambda_{i-1,h} \times \Lambda_{i,h}$, definimos el operador discreto $\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i,h,\tilde{h}} : \Lambda_{i-1,h} \times \Lambda_{i,h} \to \Lambda_{i-1,\tilde{h}} \times \Lambda_{i,\tilde{h}}$ tal que $\xi_{\tilde{h}} := \mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i,h,\tilde{h}}\lambda_h$, donde $\xi_{\tilde{h}} \in \Lambda_{i-1,\tilde{h}} \times \Lambda_{i,\tilde{h}}$ es la única solución del problema variacional: *Hallar* $\xi_{\tilde{h}} \in \Lambda_{i-1,\tilde{h}} \times \Lambda_{i,\tilde{h}}$ *tal que*

$$[\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}\xi_{\tilde{h}}, \mu_{\tilde{h}}]_{i-1,i} = [\lambda_h, \mu_{\tilde{h}}]_{i-1,i} \quad \forall\, \mu_{\tilde{h}} \in \Lambda_{i-1,\tilde{h}} \times \Lambda_{i,\tilde{h}}\,.$$

En virtud de lo anterior, se definen los operadores discretos de Steklov–Poincaré con índice par (BEM) como sigue

$$[\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}(\lambda_h,\delta_h),(\eta_h,\mu_h)]_{i-1,i} :=$$
$$[\{(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'_{\partial\Omega_i})\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i,h,\tilde{h}}(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}_{\partial\Omega_i}) \;+\; \mathbf{W}_{\partial\Omega_i}\}(\lambda_h,\delta_h),(\eta_h,\mu_h)]_{i-1,i}$$
$$\forall\,(\lambda_h,\delta_h),(\eta_h,\mu_h)\in\Lambda_{i-1,h}\times\Lambda_{i,h}\,.$$

El siguiente Lema muestra que los operadores discretos $\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}$, tiene propiedades de *continuidad* y *elipticidad* análogas a los operadores continuos $\mathbf{S}_i$.

Lema 3.3.6 *Los operadores discretos de Steklov–Poincaré con índice par (BEM), definidos por*

$$\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}} := (\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'_{\partial\Omega_i})\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i,h,\tilde{h}}(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}_{\partial\Omega_i}) \;+\; \mathbf{W}_{\partial\Omega_i}\,,$$

son continuos y elípticos.

Demostración. Primero, dado $(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\in\Lambda_{i-1,h}\times\Lambda_{i,h}$, se define $w_{\tilde{h}}\in\Lambda_{i-1,\tilde{h}}\times\Lambda_{i,\tilde{h}}$ como la única solución del problema variacional: *Hallar* $w_{\tilde{h}}\in\Lambda_{i-1,\tilde{h}}\times\Lambda_{i,\tilde{h}}$ *tal que*

$$[\mathbf{V}_{\partial\Omega_i}w_{\tilde{h}},\mu_{\tilde{h}}]_{i-1,i} = [\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}_{\partial\Omega_i}\right)(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h}),\mu_{\tilde{h}}]_{i-1,i}$$

para todo $\mu_{\tilde{h}}\in\Lambda_{i-1,\tilde{h}}\times\Lambda_{i,\tilde{h}}$. Es claro que $w_{\tilde{h}}$ constituye una aproximación de elementos de frontera para $w := \mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}_{\partial\Omega_i}\right)(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})$. Entonces, después de algunas manipulaciones, y usando la continuidad de $\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'_{\partial\Omega_i}\right)$, se deduce que

$$\|(\mathbf{S}_i-\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}})(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}$$
$$= \|\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'_{\partial\Omega_i}\right)(w-w_{\tilde{h}})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}$$
$$\leq C\,\|w-w_{\tilde{h}}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}$$
$$\leq C\inf_{z_{\tilde{h}}\in\Lambda_{i-1,\tilde{h}}\times\Lambda_{i,\tilde{h}}}\|w-z_{\tilde{h}}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}\,.$$

Ahora, dado que $(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\in H^1(\Gamma_{i-1})\times H^1(\Gamma_i)$, usando las propiedades de regularidad de $\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i}$ se deduce que $w\in L^2(\Gamma_{i-1})\times L^2(\Gamma_i)$. Entonces, de las propiedades de aproximación de los espacios discretos involucrados, las desigualdades inversas, la continuidad de $\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'_{\partial\Omega_i}\right)$ y la regularidad de $\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i}$, se tiene que

$$\|(\mathbf{S}_i-\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}})(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)} \leq C\,\tilde{h}^{1/2}\,\|w\|_{L^2(\Gamma_{i-1})\times L^2(\Gamma_i)}$$
$$\leq C\,\tilde{h}^{1/2}\,\|\mathbf{V}^{-1}_{\partial\Omega_i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'_{\partial\Omega_i}\right)(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\|_{L^2(\Gamma_{i-1})\times L^2(\Gamma_i)}$$

$$\leq C\,\tilde{h}^{1/2}\,\|\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'_{\partial\Omega_i}\right)(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^1(\Gamma_{i-1})\times H^1(\Gamma_i)}$$

$$\leq C\,\tilde{h}^{1/2}\,\|(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^1(\Gamma_{i-1})\times H^1(\Gamma_i)}$$

$$\leq C\left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{1/2}\|(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{1/2}(\Gamma_i)}\,. \tag{3.64}$$

Entonces, en virtud de (3.64), la desigualdad triangular y la continuidad de $\mathbf{S}_i$,

$$\|\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}$$

$$\leq \|(\mathbf{S}_i-\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}})(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}$$

$$+\,\|\mathbf{S}_i(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}$$

$$\leq C\left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{1/2}\|(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{1/2}(\Gamma_i)}$$

$$+\,C\,\|(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{1/2}(\Gamma_i)}\,.$$

De lo anterior se deduce que si $\tilde{h}=O(h)$,

$$\|\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{-1/2}(\Gamma_i)}\leq C\,\|(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{1/2}(\Gamma_i)}\,. \tag{3.65}$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz y (3.65), se concluye que

$$[\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h}),\,(\mu_{i-1,h},\,\mu_{i,h})]_{i-1,i}\leq$$

$$C\,\|(\lambda_{i-1,h},\,\lambda_{i,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{1/2}(\Gamma_i)}\|(\mu_{i-1,h},\,\mu_{i,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{1/2}(\Gamma_i)}\,.$$

Finalmente, y en forma análoga, usando (3.64), se deduce que los operadores $\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}$ preservan las propiedades de *elipticidad* de $\mathbf{S}_i$ con $\tilde{h}=O(h)$. Esto completa la demostración. ■

Es importante enfatizar que la desigualdad (3.64) garantiza que los operadores discretos $\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}$ tienen las mismas propiedades de continuidad y *elipticidad* de los operadores continuos $\mathbf{S}_i$. Esto motiva a escribir el operador global discreto de Steklov–Poincaré $\mathbf{S}_h:\Lambda_h\to\Lambda_h^*$ por

$$\mathbf{S}_h:=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{S}_{i,h}\,,$$

donde, para índice par, el operador $\mathbf{S}_{i,h}$ representa al operador $\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}$. Además, observamos que en aplicaciones prácticas, debe considerarse el operador discreto $\mathbf{S}_{i,h,\tilde{h}}$ dado en el Lema 3.3.6.

Por otro lado, dadas constantes $c_i > 0$, $i = 1, p-1$, consideramos precondicionadores tipo *Dirichlet–Robin*, $\mathbf{P}_h : \Lambda_h \to \Lambda_h^*$, de la forma

$$\mathbf{P}_h := \sum_{i\,par} \mathbf{S}_{i,h} + \mathbf{T}_h \,,$$

donde

$$[[\mathbf{T}_h \lambda_h, \mu_h]] := \sum_{i=1}^{p-1} c_i \, [\lambda_{i,h}, \mu_{i,h}]_i = \sum_{i=1}^{p-1} c_i \int_{\Gamma_i} \lambda_{i,h} \, \mu_{i,h} \, ds \,.$$

A continuación, antes de mostrar que el número de condición espectral de $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$ está acotado independientemente de h, se establecen algunos resultados previos.

Lema 3.3.7 *Sea Γ una curva cerrada de clase $C^{0,1}$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\tilde{\lambda} \in H^{1/2}(\Gamma)/\mathbf{R}$ y $\tilde{r} \in \mathbf{R}$ tales que $\lambda = \tilde{\lambda} + \tilde{r}$. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\tilde{\lambda}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\lambda\|^2_{L^2(\Gamma)} \geq C \, \|\lambda\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \, \lambda \in H^{1/2}(\Gamma) \,.$$

Demostración. Primero, usando la desigualdad triangular, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\lambda\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \|\tilde{\lambda} + \tilde{r}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq 2 \, \{\|\tilde{\lambda}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{r}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\} \end{aligned}$$

y luego, dado que $\|\tilde{r}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\tilde{r}\|_{L^2(\Gamma)}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &\leq 2 \, \{\|\tilde{\lambda}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{r}\|^2_{L^2(\Gamma)}\} \\ &= 2 \, \{\|\tilde{\lambda}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\lambda - \tilde{\lambda}\|^2_{L^2(\Gamma)}\} \\ &\leq 2 \, \{\|\tilde{\lambda}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + 2 \, \|\lambda\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2 \, \|\tilde{\lambda}\|^2_{L^2(\Gamma)}\} \,. \end{aligned}$$

Finalmente, notando que $\|\xi\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\xi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ para todo $\xi \in H^{1/2}(\Gamma)$, se concluye que

$$\|\lambda\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq 6 \, \{\|\tilde{\lambda}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\lambda\|^2_{L^2(\Gamma)}\} \quad \forall \, \lambda \in H^{1/2}(\Gamma) \,.$$

■

Lema 3.3.8 *Existen constantes positivas, α_S, M_S, independientes de h, tal que*

$$\alpha_S \sum_{i=1}^{p-1} \|\lambda_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} \leq [[\mathbf{S}_h \lambda_h, \lambda_h]] \leq M_S \sum_{i=1}^{p-1} \|\lambda_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)}$$

para todo $\lambda_h := (\lambda_{1,h}, \ldots, \lambda_{p-1,h}) \in \Lambda_h$.

Demostración. A continuación probamos la desigualdad de la derecha. En efecto, del Teorema 3.2.2 se deduce que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_{1,h}, \lambda_{1,h}]_1 &= A_{1,h}(R_{1,h}\lambda_{1,h}, R_{1,h}\lambda_{1,h}) \\ &\leq C \, \|\lambda_{1,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \end{aligned} \tag{3.66}$$

para todo $\lambda_{1,h} \in \Lambda_{1,h}$. En lo que sigue de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica independiente de h.

Ahora, para índice impar $i = 3, p-2$, definimos los operadores discretos

- $R^1_{i,h} : \Lambda_{i-1,h} \in \lambda_{i-1,h} \to R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h} \in H_{i,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_{i,h}(R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h}, v_h) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H^0_{i,h}\,, \\ R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h} &= \lambda_{i-1,h} \quad \text{en } \Gamma_{i-1}\,, \\ R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_i\,. \end{aligned}$$

- $R^2_{i,h} : \Lambda_{i,h} \in \lambda_{i,h} \to R^2_{i,h}\lambda_{i,h} \in H_{i,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_{i,h}(R^2_{i,h}\lambda_{i,h}, v_h) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H^0_{i,h}\,, \\ R^2_{i,h}\lambda_{i,h} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_{i-1}\,, \\ R^2_{i,h}\lambda_{i,h} &= \lambda_{i,h} \quad \text{en } \Gamma_i\,. \end{aligned}$$

En virtud de lo anterior, se sigue que

$$R_{i,h}(\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h}) = R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h} + R^2_{i,h}\lambda_{i,h}$$

y luego, usando el Teorema 3.2.2 y la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_{i,h}(\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h}), (\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h})]_{i-1,i} &= A_{i,h}(R_{i,h}(\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h}), R_{i,h}(\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h})) \\ &= |R_{i,h}(\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h})|^2_{H^1(\Omega_i)} \\ &= |R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h} + R^2_{i,h}\lambda_{i,h}|^2_{H^1(\Omega_i)} \\ &\leq \{\, |R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h}|_{H^1(\Omega_i)} + |R^2_{i,h}\lambda_{i,h}|_{H^1(\Omega_i)} \,\}^2 \\ &\leq 2\,\{\, |R^1_{i,h}\lambda_{i-1,h}|^2_{H^1(\Omega_i)} + |R^2_{i,h}\lambda_{i,h}|^2_{H^1(\Omega_i)} \,\} \\ &\leq C\,\{\, \|\lambda_{i-1,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})} + \|\lambda_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} \,\}\,. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Más aún, usando nuevamente el Teorema 3.2.2,

$$[\mathbf{S}_{p,h}\lambda_{p-1,h}, \lambda_{p-1,h}]_{p-1} \leq C \, \|\lambda_{p-1,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_{p-1})}\,. \tag{3.68}$$

Ahora, dado que los mismos resultados son válidos para los operadores discretos con índice par, la desigualdad de la derecha se sigue de (3.66), (3.67), (3.68) y el hecho que

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{S}_h\lambda_h,\lambda_h]] &:= [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_{1,h},\lambda_{1,h}]_1 + [\mathbf{S}_{p,h}\lambda_{p-1,h},\lambda_{p-1,h}]_{p-1} \\
&+ \sum_{\substack{3\le i\le p-2\\ i\ impar}} [\mathbf{S}_{i,h}(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h}),(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})]_{i-1,i} \\
&+ \sum_{\substack{2\le i\le p-1\\ i\ par}} [\mathbf{S}_{i,h}(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h}),(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})]_{i-1,i}
\end{aligned}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$.

Por otro lado, para probar la desigualdad de la izquierda, se define el operador de extensión *semidiscreto*

$$\tilde{\mathcal{R}}\lambda_h := \begin{cases} R_{1,h}\lambda_{1,h}\,, & \text{en } \Omega_1 \\ R_{i,h}(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\,, & \text{en } \Omega_i\,,\ \text{impar } i=3,p-2\,, \\ R_i(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\,, & \text{en } \Omega_i\,,\ \text{par } i=2,p-1\,, \\ R_{p,h}\lambda_{p-1,h}\,, & \text{en } \Omega_{p,h}\,, \end{cases}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$. Obsérvese que $\tilde{\mathcal{R}}\lambda_h \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega_h)$ está definido sobre los subdominios impares como extensiones discretas y sobre los subdominios pares como extensiones continuas. Entonces, usando la desigualdad de Poincaré y el Teorema de trazas, se concluye que

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{S}_h\lambda_h,\lambda_h]] &\ge |R_{1,h}\lambda_{1,h}|^2_{H^1(\Omega_1)} + |R_{p,h}\lambda_{p-1,h}|^2_{H^1(\Omega_{p,h})} \\
&\quad + \sum_{\substack{2\le i\le p-1\\ i\ par}} |R_i(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})|^2_{H^1(\Omega_i)} \\
&\quad + \sum_{\substack{3\le i\le p-2\\ i\ impar}} |R_{i,h}(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})|^2_{H^1(\Omega_i)} \\
&= |\tilde{\mathcal{R}}\lambda_h|^2_{H^1(\Omega_h)} \\
&\ge C\,\|\tilde{\mathcal{R}}\lambda_h\|^2_{H^1(\Omega_h)} \\
&\ge C \sum_{\substack{2\le i\le p-1\\ i\ par}} \|R_i(\lambda_{i-1,h},\lambda_{i,h})\|^2_{H^1(\Omega_i)} \\
&\ge C \sum_{i=1}^{p-1} \|\lambda_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)}\,.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

El siguiente resultado establece que el número de condición espectral de $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$ está acotado independientemente de h.

Teorema 3.3.3 *Existe $C > 0$, independiente de h, tal que $\kappa \leq C$.*

Demostración. De la definición del precondicionador $\mathbf{P}_h$ se tiene que

$$\begin{aligned}[[\mathbf{P}_h\lambda_h, \lambda_h]] &= \sum_{\substack{2\leq i\leq p-1\\ i\ par}} [\mathbf{S}_{i,h}(\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h}), (\lambda_{i-1,h}, \lambda_{i,h})]_{i-1,i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} c_i \, \|\lambda_{i,h}\|^2_{L^2(\Gamma_i)}\end{aligned}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$. Luego, usando el Lema 3.3.6 y el hecho que $\|\lambda_{i,h}\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq \|\lambda_{i,h}\|_{H^{1/2}(\Gamma_i)}$ para todo $\lambda_{i,h} \in H^{1/2}(\Gamma_i)$, se deduce que existe $M_P > 0$, independiente de h, tal que

$$[[\mathbf{P}_h\lambda_h, \lambda_h]] \leq M_P \sum_{i=1}^{p-1} \|\lambda_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h.$$

Por otro lado, usando nuevamente el Lema 3.3.6, se sigue que

$$\begin{aligned}[[\mathbf{P}_h\lambda_h, \lambda_h]] &\geq \sum_{\substack{2\leq i\leq p-1\\ i\ par}} \alpha_i \, \|(\tilde{\lambda}_{i-1,h}, \tilde{\lambda}_{i,h})\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_{i-1})\times H^{1/2}(\Gamma_i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} c_i \, \|\lambda_{i,h}\|^2_{L^2(\Gamma_i)} \\ &\geq \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i \left\{ \|\tilde{\lambda}_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} + \|\lambda_{i,h}\|^2_{L^2(\Gamma_i)} \right\}\end{aligned}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$, donde $\tilde{\lambda}_{i,h} \in H^{1/2}(\Gamma_i)/\mathbf{R}$ se define como en el Lema 3.3.7 y $\gamma_i := \min\{\alpha_i, c_i\}$. Entonces, en virtud del Lema 3.3.7 y definiendo $\gamma := \min\{\gamma_i\}$, se deduce que

$$\begin{aligned}[[\mathbf{P}_h\lambda_h, \lambda_h]]_h &\geq \gamma \sum_{i=1}^{p-1} \left\{ \|\tilde{\lambda}_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} + \|\lambda_{i,h}\|^2_{L^2(\Gamma_i)} \right\} \\ &\geq \alpha_P \sum_{i=1}^{p-1} \|\lambda_{i,h}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)}\end{aligned}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$.

Finalmente, tomando en cuenta las estimaciones para $\mathbf{P}_h$ y el Lema 3.3.8, se concluye que

$$\sigma_m = \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[[\mathbf{S}_h \lambda_h, \lambda_h]]_h}{[[\mathbf{P}_h \lambda_h, \lambda_h]]_h} \leq \frac{M_S}{\alpha_P}$$

y

$$\sigma_1{}^{-1} = \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h} \frac{[[\mathbf{P}_h \lambda_h, \lambda_h]]_h}{[[\mathbf{S}_h \lambda_h, \lambda_h]]_h} \leq \frac{M_P}{\alpha_S}\,.$$

Esto completa la demostración puesto que $\kappa := \sigma_m\, \sigma_1^{-1}$. ■

3.3.3 Algoritmos de iteración por subdominios

Algoritmos de iteración por subdominios tipo Richardson

En lo que sigue se establece el algoritmo de iteración por subdominios generado al usar el método de Richardson (ver sección 3.2.3). Para hacer esto, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $p \geq 3$ es impar y consideramos el precondicionador tipo *Dirichlet–Robin*

$$\mathbf{P} := \sum_{par} \mathbf{S}_i + \mathbf{T}\,.$$

Ahora, analogamente al esquema D–FEM, reemplazando $\mathbf{P}$ en el análogo continuo de (3.33), se deduce que

$$\lambda^{n+1} = (1-\alpha)\lambda^n + \alpha\,\beta^n\,,$$

donde β^n satisface

$$\left\{\sum_{par} \mathbf{S}_i + \mathbf{T}\right\} \beta^n = \left\{\chi - \left[\sum_{impar} \mathbf{S}_i - \mathbf{T}\right] \lambda^n\right\}\,.$$

Entonces, usando integración por partes, se obtiene el siguiente esquema iterativo para actualizar λ^n:

(**0**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$ y hacer $n = 0$.

(**1**) Resolver **en paralelo**, para todo j impar, $1 \leq j \leq p-2$, los problemas de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\Delta u_j^n &= f \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ u_j^n &= \lambda_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ u_j^n &= \lambda_j^n \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y el problema *mixto*

$$\begin{aligned} -\Delta u_p^n &= f \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ u_p^n &= \lambda_{p-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \frac{\partial u_p^n}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} u_p^n + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

Definir d_j, $j = 1, p-1$, por

$$d_1 := -\left.\frac{\partial u_1^n}{\partial \nu_1}\right|_{\Gamma_1}\,,$$

$$(d_{j-1}, d_j) := \left(-\left.\frac{\partial u_j^n}{\partial \nu_j}\right|_{\Gamma_{j-1}}, -\left.\frac{\partial u_j^n}{\partial \nu_j}\right|_{\Gamma_j} \right)\,,\ j \text{ impar}\,, 3 \le j \le p-2$$

y

$$d_{p-1} := -\left.\frac{\partial u_p^n}{\partial \nu_p}\right|_{\Gamma_{p-1}}\,.$$

(**2**) Resolver **en paralelo**, para todo j par, $2 \le j \le p-1$, las ecuaciones integrales de frontera

$$\left[(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}'_{\partial\Omega_j}) \mathbf{V}_{\partial\Omega_j}^{-1} (\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}_{\partial\Omega_j}) \;+\; \mathbf{W}_{\partial\Omega_j} \right] (\beta_{j-1}^n, \beta_j^n) +$$

$$[\mathbf{T}\,\beta_{j-1}^n, \mathbf{T}\beta_j^n] = \left[\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}'_{\partial\Omega_j} \right] \left[\mathbf{V}_{\partial\Omega_j}^{-1} \int_{\Omega_j} f(y)\, E(x,y)\, dy \right]$$

$$+ (d_{j-1}, d_j) - \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Omega_j} f(y)\, E(x,y)\, dy + [\mathbf{T}\,\lambda_{j-1}^n, \mathbf{T}\lambda_j^n]\,.$$

(**3**) Actualizar λ^n mediante $\lambda_i^{n+1} = (1-\alpha)\lambda_i^n + \alpha\,\beta_i^n$, $i = 1, p-1$. Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n+1$ y volver a (**1**).

Algoritmos de iteración por subdominios tipo PCGM

A continuación, considerando los pasos (**1**) y (**2**) del algoritmo obtenido con el método de Richardson, se describe el algoritmo generado al usar PCGM en un número impar $p \ge 3$ de subdominios. En este nuevo algoritmo, las etapas (**0**')–(**3**') corresponden a la etapa de inicialización de PCGM, mientras que los pasos (**1**)–(**3**) pertenecen al lazo iterativo principal (ver sección 3.2.3).

(**0'**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$ y hacer $n = 0$.

(**1'**) Calcular β^0 usando (**1**)–(**2**) y hacer $z_i^0 = \beta_i^0 - \lambda_i^0$, $i = 1, p-1$.

(**2'**) Calcular **en paralelo**

$$\alpha_0 = \frac{\displaystyle\sum_{j\,par} [\mathbf{S}_j(z_{j-1}^0, z_j^0), (z_{j-1}^0, z_j^0)]_{j-1,j} + \sum_{j=1}^{p-1} [\mathbf{T}\, z_j^0, z_j^0]_j}{\displaystyle[\mathbf{S}_1 z_1^0, z_1^0]_1 + \sum_{j=2}^{p-2} [\mathbf{S}_j(z_{j-1}^0, z_j^0), (z_{j-1}^0, z_j^0)]_{j-1,j} + [\mathbf{S}_p z_{p-1}^0, z_{p-1}^0]_{p-1}}.$$

(**3'**) Actualizar λ^0 mediante $\lambda_i^1 = \lambda_i^0 + \alpha_0\, z_i^0$, $i = 1, p-1$, y hacer $w_1 = 1$, $n = 1$.

(**1**) Calcular β^n usando (**1**)–(**2**) y hacer $z_i^n = \beta_i^n - \lambda_i^n$, $i = 1, p-1$.

(**2**) Calcular **en paralelo**

$$\gamma_n := \sum_{j\,par} [\mathbf{S}_j(z_{j-1}^n, z_j^n), (z_{j-1}^n, z_j^n)]_{j-1,j} + \sum_{j=1}^{p-1} [\mathbf{T}\, z_j^n, z_j^n]_j$$

y

$$\alpha_n^{-1} = \frac{1}{\gamma_n} \left\{ [\mathbf{S}_1 z_1^n, z_1^n]_1 + \sum_{j=2}^{p-2} [\mathbf{S}_j(z_{j-1}^n, z_j^n), (z_{j-1}^n, z_j^n)]_{j-1,j} + [\mathbf{S}_p z_{p-1}^n, z_{p-1}^n]_{p-1} \right\}.$$

(**3**) Actualizar w_n y λ^n mediante

$$w_{n+1}^{-1} = 1 - \frac{\alpha_n\, \gamma_n}{\alpha_{n-1}\, \gamma_{n-1}} \frac{1}{w_n}$$

y

$$\lambda^{n+1} = \lambda^{n-1} + w_{n+1}\, (\alpha_n z^n + \lambda^n - \lambda^{n-1}).$$

(**4**) Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n + 1$ y volver a (**1**).

3.4 Extensión a problemas no lineales

Con el fin de aplicar técnicas de descomposición de dominio a problemas no lineales, en esta sección se desarrolla un esquema de linealización para la clase de problemas exteriores analizada en [3] y [21]. En efecto, la combinación de estrategias de linealización con métodos paralelos para problemas lineales constituye una de las posibles alternativas para obtener paralelismo en la resolución de este tipo de problemas. En lo que sigue, se presenta el problema modelo siguiendo a [3].

3.4.1 El problema exterior no lineal

Sea D un dominio acotado y simplemente conexo en $\mathbf{R}^2$ con frontera suficientemente regular Γ_D. Denotemos por Ω_1 a la región anular limitada por Γ_D y otra curva cerrada y regular Γ_1, estrictamente contenida en $\mathbf{R}^2 - \bar{D}$, y se define $\Omega_e := \mathbf{R}^2 - (\bar{D} \cup \bar{\Omega}_1)$. Además, sean $a_i : \bar{\Omega}_1 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, aplicaciones no lineales que satisfacen ciertas condiciones a ser establecidas más adelante.

Entonces, dado $f \in L^2(\Omega_1)$, $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $p \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $q \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ y $b \in \mathbf{R}$, el problema es: *Hallar* $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ *y* $u_2 \in H^1_{loc}(\Omega_e)$ *tal que*

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\cdot, \nabla u_1(\cdot)) &= f \quad \text{en } \Omega_1 \,, \\
u_1 &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D \,, \\
u_1 - u_2 &= p \quad \text{en } \Gamma_1 \,, \\
\sum_{i=1}^{2} a_i(\cdot, \nabla u_1(\cdot))\eta_i - \frac{\partial u_2}{\partial \eta} &= q \quad \text{en } \Gamma_1 \,, \\
-\Delta u_2 &= 0 \quad \text{en } \Omega_e \,, \\
u_2(x) &= \frac{b}{\pi} \log \|x\| + O(1) \,, \ \|x\| \to +\infty \,,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

donde $\eta := (\eta_1, \eta_2)$ denota el vector normal unitario exterior a Γ_1.

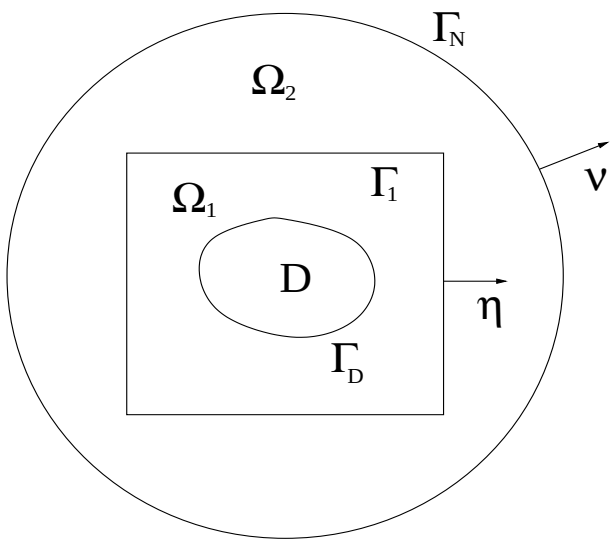

Figura 3.2: *Desacoplamiento para problemas no lineales.*

Ahora, con el fin de aplicar el método de desacoplamiento, introducimos una circunferencia Γ_N de radio r, centrada en el origen, tal que su región interior contenga

a $\bar{D}\cup\bar{\Omega}_1$ y definimos por Ω_2 a la región anular limitada por Γ_1 y Γ_N (ver figura 3.2). De esta forma, el problema exterior (3.69) puede transformarse, equivalentemente, en el siguiente problema de valores de frontera en la región acotada $\bar{\Omega} := \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$: *Hallar* $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ *y* $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ *tal que*

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\cdot, \nabla u_1(\cdot)) &= f \quad \text{en } \Omega_1 \,, \\
u_1 &= g_0 \quad \text{en } \Gamma_D \,, \\
u_1 - u_2 &= p \quad \text{en } \Gamma_1 \,, \\
\sum_{i=1}^{2} a_i(\cdot, \nabla u_1(\cdot))\eta_i - \frac{\partial u_2}{\partial \eta} &= q \quad \text{en } \Gamma_1 \,, \\
-\Delta u_2 &= 0 \quad \text{en } \Omega_2 \,, \\
\frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= -2\,\mathbf{W} u_2 + \frac{b}{\pi r} \quad \text{en } \Gamma_N \,,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

donde ν denota el vector normal unitario exterior a Γ_N.

Además, definimos por $g \in H^1(\Omega_1)$ a una extensión regular de los datos $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $p \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ sobre Ω_1 tal que $g := g_0$ en Γ_D y $g := p$ en Γ_1. Entonces, definiendo $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ por

$$u := \begin{cases} u_1 - g \,, & \text{en } \Omega_1 \\ u_2 \,, & \text{en } \Omega_2 \end{cases}$$

y usando integración por partes, se obtiene la siguiente formulación variacional asociada al problema no lineal (3.70): *Hallar* $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ *tal que*

$$\mathbf{A}(u,v) + \mathbf{B}(u,v) + \mathbf{C}(u,v) = \mathbf{F}(v) \quad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \,, \tag{3.71}$$

donde

$$\mathbf{A}(u,v) := \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} a_i(\cdot, \nabla(u+g)(\cdot)) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \,,$$

$$\mathbf{B}(u,v) := \int_{\Omega_2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \,,$$

$$\mathbf{C}(u,v) := 2 < \dot{v}, \mathbf{V}\dot{u} >$$

y

$$\mathbf{F}(v) := \int_{\Omega_1} f\, v\, dx + \int_{\Gamma_1} q\, v\, ds + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_N} v\, ds \,.$$

Notemos que $\mathbf{F}$ es un funcional lineal acotado sobre $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ y que la forma bilineal $\mathbf{B}$ es continua en $H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$. Más aún, la continuidad de $\mathbf{V}$ y el Teorema de trazas muestran que $\mathbf{C}$ es continua sobre $H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.

En este punto imponemos condiciones sobre las aplicaciones no lineales a_i. En efecto, sea $\tilde{\Omega}_1 \subseteq \mathbf{R}^2$ un dominio acotado con frontera suficientemente regular y tal que $\bar{\Omega}_1$ esté estrictamente contenido en $\tilde{\Omega}_1$. De aquí en adelante, $C > 0$ denota una constante genérica y suponemos que los coeficientes no lineales a_i satisfacen las siguientes condiciones:

(**a**) *Condición de Carathéodory*: Las funciones $a_i(\cdot, \alpha)$, $i = 1, 2$, son medibles en $\tilde{\Omega}_1$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}^2$ y $a_i(x, \cdot)$ es continua en $\mathbf{R}^2$ casi en todas partes (*c.t.p.*) en $\tilde{\Omega}_1$.

(**b**) *Condición de crecimiento*: Existen funciones $\phi_i \in H^1(\tilde{\Omega}_1)$, $i = 1, 2$, y $C > 0$ tal que

$$|a_i(x, \alpha)| \leq C \{1 + \|\alpha\|\} + |\phi_i(x)|$$

para todo $\alpha \in \mathbf{R}^2$ y *c.t.p.* en $\tilde{\Omega}_1$.

(**c**) *Condición de monotonía fuerte*: Las funciones $a_i(x, \cdot)$, $i = 1, 2$, *c.t.p.* en $\tilde{\Omega}_1$ tienen primeras derivadas parciales continuas en $\mathbf{R}^2$. Además, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} a_i(x, \alpha)\, \beta_i\, \beta_j \geq C \sum_{i=1}^{2} \beta_i^2$$

para todo $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta := (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$ y *c.t.p.* en $\tilde{\Omega}_1$.

(**d**) *Condición de Lipschitz–continuidad*: Las funciones $\frac{\partial}{\partial \alpha_j} a_i(x, \alpha)$, $i, j = 1, 2$, satisfacen (**a**) y existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \alpha_j} a_i(x, \alpha) \right| \leq C$$

para todo $\alpha \in \mathbf{R}^2$ y *c.t.p.* en $\tilde{\Omega}_1$.

Ahora, como consecuencia de (**a**) y (**b**), puede deducirse (ver [15]) que los operadores de Nemitsky, $A_i : H^1(\Omega_1) \to L^2(\Omega_1)$, definidos por

$$(A_i v)(x) := a_i(x, \nabla(v + g)(x)) \quad \forall\, x \in \Omega_1, \forall\, v \in H^1(\Omega_1)\,,$$

son acotados, continuos y

$$\|A_i v\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq C \{1 + |v|^2_{H^1(\Omega_1)} + \|\phi_i\|^2_{L^2(\Omega_1)}\} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega_1)\,.$$

Usando lo anterior, se deduce que

$$|\mathbf{A}(u, v) + \mathbf{B}(u, v)| \leq C \left\{1 + \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right\}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,,$$

donde $C > 0$ es una constante que depende de $\|g\|_{H^1(\Omega_1)}$ y $\sum_{i=1}^{2} \|\phi_i\|^2_{L^2(\Omega_1)}$.

Entonces, puede definirse el operador no lineal $\mathbf{N} : H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \to [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^*$ a través de

$$[\mathbf{N}u, v] := \mathbf{A}(u, v) + \mathbf{B}(u, v) + \mathbf{C}(u, v) \quad \forall\, u, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,,$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota la paridad dual entre $[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^*$ y $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$. Con esto, el problema (3.71) puede escribirse en la siguiente forma: *Hallar* $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ *tal que*

$$[\mathbf{N}u, v] = [\mathbf{F}, v] \quad \forall\, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,. \tag{3.72}$$

Teorema 3.4.1 *Sean a_i, $i = 1, 2$, aplicaciones no lineales que satisfacen* (**a**), (**b**) *y* (**c**). *Entonces, existe un único $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ solución de (3.72).*

Demostración. La continuidad de las formas bilineales $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y los operadores de Nemitsky A_i, $i = 1, 2$, garantizan que $\mathbf{N}$ es acotado y continuo. Entonces, es suficiente mostrar que $\mathbf{N}$ es fuertemente monótono (ver [48]).

En efecto, usando (**c**) y el hecho que $\mathbf{C}(v, v) \geq \|\dot{v}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_N)}$ para todo $v \in H^1(\Omega)$, se deduce que (ver Teorema 3.2 en [21])

$$[\mathbf{N}v, v - z] - [\mathbf{N}z, v - z] \geq C\,\|v - z\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v, z \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\,,$$

lo que prueba la monotonía fuerte de $\mathbf{N}$. Esto completa la demostración. ■

3.4.2 Aproximación discreta del problema no lineal

A continuación se establece el problema discreto asociado a (3.72) y se presentan algunas estimaciones de error que son útiles en lo que sigue. Para hacer esto, consideramos $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in(0,h_0)}$, como una familia de triangulaciones *cuasi–uniformes* de Ω, compuestas de triángulos τ, y escribimos

$$\bar{\Omega}_h := \bigcup_{\tau\in\mathcal{T}_h} \tau\,.$$

Además, sean $\Gamma_{D,h}$ y $\Gamma_{N,h}$ las respectivas aproximaciones poligonales de Γ_D y Γ_N con todos sus vértices sobre $\partial\Omega$. De la misma forma, $\Gamma_{1,h}$ denota la aproximación poligonal de Γ_1 con todos sus vértices sobre Γ_1. Nótese que $\bar{\Omega}_h = \bar{\Omega}_{1,h} \cup \bar{\Omega}_{2,h}$, donde $\Omega_{1,h}$ y $\Omega_{2,h}$ son, respectivamente, los dominios limitados por $\Gamma_{D,h}$, $\Gamma_{1,h}$ y $\Gamma_{1,h}$, $\Gamma_{N,h}$.

En lo que sigue se asume que h_0 y $\tilde{\Omega}_1$ son tales que $\Omega_{1,h} \subseteq \tilde{\Omega}_1$ para todo $h < h_0$. También, se supone que $f \in L^2(\tilde{\Omega}_1)$ y que g y q admiten extensiones a Ω tal que

g, $q \in H^{2+\epsilon}(\Omega)$ para algún $\epsilon > 0$. Más aún, introducimos los espacios de elementos finitos

$$H_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}_h) : v_h|_\tau \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h\}$$

y

$$H_h^0 := \{v_h \in H_h : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_{D,h}\}\,.$$

Como es usual, se define el operador de interpolación $I_h : H^2(\Omega_h) \to H_h$ tal que $(I_h v)(P_j) := v(P_j)$ para todo $P_j \in \mathcal{V}_h$, donde $\mathcal{V}_h$ denota el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$ y se define $v^h := I_h v$ para todo $v \in H^2(\Omega_h)$.

Entonces, usando (**a**), (**b**) y el hecho que $g \in H^{2+\epsilon}(\tilde{\Omega}_1)$, puede definirse la forma semilineal continua

$$\mathbf{A}_h(v,z) := \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_{1,h}} a_i(\cdot, \nabla(v+g^h)(\cdot)) \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx \quad \forall\, v, z \in H^1(\Omega_{1,h})\,.$$

Similarmente, los análogos discretos de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ están dados por

$$\mathbf{B}_h(v,z) := \int_{\Omega_{2,h}} \nabla v \cdot \nabla z\, dx \quad \forall\, v, z \in H^1(\Omega_{2,h})$$

y

$$\mathbf{C}_h(v,z) := 2 < \dot{z}, \mathbf{V}_h \dot{v} >_h \quad \forall\, v, z \in H^1(\Omega_{2,h})\,.$$

Ahora, dado que $\mathbf{V}_h$ es continuo sobre $\Gamma_{N,h}$, usando el Teorema de trazas se deduce que la forma bilineal $\mathbf{C}_h$ es continua en $H^1(\Omega_h) \times H^1(\Omega_h)$. Por lo tanto, definimos el operador discreto $\mathbf{N}_h : H^1_{\Gamma_{D,h}}(\Omega_h) \to [H^1_{\Gamma_{D,h}}(\Omega_h)]^*$ por

$$[\mathbf{N}_h v, z]_h := \mathbf{A}_h(v,z) + \mathbf{B}_h(v,z) + \mathbf{C}_h(v,z) \quad \forall\, v, z \in H^1_{\Gamma_{D,h}}(\Omega_h)\,,$$

donde $[\cdot,\cdot]_h$ denota la paridad dual entre $[H^1_{\Gamma_{D,h}}(\Omega_h)]^*$ y $H^1_{\Gamma_{D,h}}(\Omega_h)$. Además, definimos el funcional lineal discreto

$$[\mathbf{F}_h, z]_h := \int_{\Omega_{1,h}} f\, z\, dx + \int_{\Gamma_{1,h}} q^h\, z\, ds + \frac{b}{\pi r} \int_{\Gamma_{N,h}} z\, ds \quad \forall\, z \in H^1_{\Gamma_{D,h}}(\Omega_h)\,.$$

En virtud de lo anterior, el problema discreto asociado a (3.72) queda dado por: *Hallar* $u_h \in H_h^0$ *tal que*

$$[\mathbf{N}_h u_h, v_h]_h = [\mathbf{F}_h, v_h]_h \quad \forall\, v_h \in H_h^0\,. \tag{3.73}$$

Teorema 3.4.2 *Existe un único $u_h \in H_h^0$ solución de (3.73).*

Demostración. Se reduce a verificar que $\mathbf{N}_h$ es fuertemente monótono y *Lipschitz–continuo* (ver [48]). En efecto, usando (**d**) puede probarse que $\mathbf{N}_h$ es *Lipschitz–continuo*, es decir, existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\mathbf{N}_h v_h - \mathbf{N}_h z_h\|_{[H^1(\Omega_h)]^*} \leq C \, \|v_h - z_h\|_{H^1(\Omega_h)} \quad \forall \, v_h, z_h \in H_h^0 \, .$$

Además, usando (**c**) se deduce que $\mathbf{N}_h$ es uniformemente fuertemente monótono, es decir, existe $h_0 > 0$ y $\tilde{C} > 0$, independiente de h, tal que (ver Teorema 4.12 en [3])

$$[\mathbf{N}_h v_h - \mathbf{N}_h z_h, v_h - z_h]_h \geq \tilde{C} \, \|v_h - z_h\|^2_{H^1(\Omega_h)} \quad \forall \, v_h, z_h \in H_h^0 \, , \forall \, h \leq h_0 \, .$$

Esto completa la demostración. ■

Es importante notar que (3.73) corresponde a un sistema de ecuaciones no lineales, cuyas incógnitas son los valores de u en los nodos de $\mathcal{T}_h$. En [3] se desarrolla un esquema de integración con estimaciones de error *cuasi–óptimas* para (3.73) y se presentan algunos ensayos numéricos usando el método de Newton–Raphson.

Por otro lado, en lo que respecta a estimaciones de error, observemos que u y u_h no pueden ser comparadas directamente dado que están definidas en dominios diferentes. En efecto, se hace necesario introducir una extensión de u_h a Ω. Para hacer esto, definimos $\psi_h : \Gamma_{N,h} \to \Gamma_N$ como la aplicación que asocia a cada $y \in \Gamma_{N,h}$, $y \notin \mathcal{V}_h$, el punto de intersección entre Γ_N y la línea recta, perpendicular a $\Gamma_{N,h}$, que pasa a través de y. Además, denotamos $\psi_h(y) = y$ para todo $y \in \mathcal{V}_h \cap \Gamma_N$. Claramente, para h pequeño, ψ_h es una biyección. De la misma forma se definen $\psi_{1,h} : \Gamma_{1,h} \to \Gamma_1$ y $\psi_{D,h} : \Gamma_{D,h} \to \Gamma_D$. Con esto, introducimos la aplicación lineal

$$\mathcal{M} : C(\Omega_h) \ni \tilde{v} \to \mathcal{M} \, \tilde{v} := v \in C(\bar{\Omega}) \quad \forall \, \tilde{v} \in C(\Omega_h) \, ,$$

donde $v(x) = \tilde{v}(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}_h$, $v(x) = v(y)$ para todo x en el segmento que une $y \in \Gamma_{D,h}$ con $\psi_{D,h}(y) \in \Gamma_D$ y $v(x) = v(y)$ para todo x en el segmento que une $y \in \Gamma_{N,h}$ con $\psi_h(y) \in \Gamma_N$.

Lema 3.4.1 *Existe $C > 0$, independiente de h, tal que*

$$\|\mathcal{M}\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \, \|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega_h)} \quad \forall \, \tilde{v} \in H_h^0 \, .$$

Demostración. Sea Ω^h el dominio limitado por Γ_D y $\Gamma_{N,h}$. Entonces, existe $C > 0$, independiente de h, tal que (ver Lema 3.9 en [15])

$$\|\mathcal{M}\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \, |\mathcal{M}\tilde{v}|_{H^1(\Omega^h)} \quad \forall \, \tilde{v} \in H_h^0 \, .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}\tilde{v}\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq C\,|\mathcal{M}\tilde{v}|^2_{H^1(\Omega^h)} \\
&= C\,|\tilde{v}|^2_{H^1(\Omega_h)} - C\,|\tilde{v}|^2_{H^1(\Omega_h-\Omega)} \\
&\leq C\,|\tilde{v}|^2_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq C\,\|\tilde{v}\|^2_{H^1(\Omega_h)}
\end{aligned}$$

para todo $\tilde{v} \in H^0_h$. Esto completa la demostración. ■

Teorema 3.4.3 *Sea $u \in H^{2+\epsilon}(\Omega)$, $\epsilon > 0$. Entonces, existe $C > 0$, independiente de h, tal que*

$$\|u - \mathcal{M}u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,h\,.$$

Demostración. Ver Teorema 3.2 en [3]. ■

3.4.3 El esquema de linealización

En lo que sigue se desarrolla un esquema de linealización tipo Richardson para el problema discreto (3.73). Este método de linealización es descrito de manera abstracta con el objeto de ser utilizado posteriormente en el capítulo 4, en el problema no lineal elasto–plástico estudiado en [2]. Comenzamos con el siguiente resultado clásico.

Teorema 3.4.4 (Punto fijo de Banach) *Sea V un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_V$ y $\mathbf{T} : V \to V$ una contracción, es decir, existe $0 < \mu < 1$ tal que*

$$\|\mathbf{T}v - \mathbf{T}w\|_V \leq \mu\,\|v - w\|_V \quad \forall\, v, w \in V\,.$$

Entonces, existe un único $u \in V$ tal que $u = \mathbf{T}u$. Además, dado cualquier $u^0 \in V$, la sucesión $u^k := \mathbf{T}u^{k-1}$, $k \geq 1$, es tal que

$$\lim_{k\to\infty} u^k = u\,.$$

Más precisamente, para todo $k \in \mathbf{N}$,

$$\|u - u^k\|_V \leq \frac{\mu^k}{1-\mu}\,\|u^1 - u^0\|_V\,.$$

Demostración. Ver Lema 2.7.2 en [5]. ■

A continuación se describe el esquema de linealización para problemas no lineales fuertemente monótonos. En efecto, consideramos el problema discreto: *Hallar* $u_h \in \mathbf{H}_h$ *tal que*

$$[\mathbf{N}u_h, v_h] = [\mathbf{F}, v_h] \quad \forall\, v_h \in \mathbf{H}_h\,, \tag{3.74}$$

donde $\mathbf{H}_h$ es un subespacio de dimensión finita de un Hilbert $\mathbf{H}$ con dual $\mathbf{H}^*$, $[\cdot,\cdot]$ denota la paridad dual entre $\mathbf{H}^*$ y $\mathbf{H}$, $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^*$ y $\mathbf{N} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}^*$ es un operador no lineal fuertemente monótono y *Lipschitz–continuo* en $\mathbf{H}$, esto es, existen constantes positivas α_N y M_N tal que

$$[\mathbf{N}v, v-z] - [\mathbf{N}z, v-z] \geq \alpha_N \|v-z\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall\, v, z \in \mathbf{H}$$

y

$$\|\mathbf{N}v - \mathbf{N}z\|_{\mathbf{H}^*} \leq M_N \|v-z\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\, v, z \in \mathbf{H}\,.$$

Notemos que bajo estas condiciones, el problema discreto (3.74) admite una única solución $u_h \in \mathbf{H}_h$.

Sea $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ una forma bilineal simétrica, continua y $\mathbf{H}$–*elíptica*, con constantes $M_A > 0$ y $\alpha_A > 0$, es decir,

$$|A(u,v)| \leq M_A \|u\|_{\mathbf{H}} \|v\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\, u, v \in \mathbf{H}$$

y

$$A(v,v) \geq \alpha_A \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall\, v \in \mathbf{H}\,.$$

Obsérvese que la forma bilineal A induce un producto interior en $\mathbf{H}$. Con esto, definimos la norma

$$\|v\|_E := A(v,v)^{1/2} \quad \forall\, v \in \mathbf{H}$$

y notamos que ésta es equivalente con $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$. En efecto, usando la continuidad y $\mathbf{H}$–*elipticidad* de A, se tiene que

$$\alpha_A^{1/2} \|v\|_{\mathbf{H}} \leq \|v\|_E \leq M_A^{1/2} \|v\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\, v \in \mathbf{H}\,. \tag{3.75}$$

Por otro lado, definimos el operador discreto $\mathbf{P} : \mathbf{H}_h \to \mathbf{H}_h$ donde, para todo $v_h \in \mathbf{H}_h$, $\mathbf{P}v_h \in \mathbf{H}_h$ se define como la única solución del problema variacional: *Hallar* $\mathbf{P}v_h \in \mathbf{H}_h$ *tal que*

$$A(\mathbf{P}v_h, z_h) = [\mathbf{N}v_h, z_h] - [\mathbf{F}, z_h] \quad \forall\, z_h \in \mathbf{H}_h\,. \tag{3.76}$$

Nótese que el operador $\mathbf{P}$ está bien definido en virtud del Lema de Lax–Milgram.

Lema 3.4.2 *Sea* $\mathbf{P} : \mathbf{H}_h \to \mathbf{H}_h$ *el operador discreto definido en (3.76). Entonces,*

$$\|\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h\|_E \leq \frac{M_N\, M_A^{1/2}}{\alpha_A^{3/2}}\, \|v_h - z_h\|_E$$

y

$$A(\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h, v_h - z_h) \geq \frac{\alpha_N}{M_A}\, \|v_h - z_h\|_E^2$$

para todo v_h, $z_h \in \mathbf{H}_h$.

Demostración. En virtud de (3.76) se tiene que

$$A(\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h, w_h) = [\mathbf{N}v_h - \mathbf{N}z_h, w_h] \quad \forall\, w_h \in \mathbf{H}_h \tag{3.77}$$

y para todo v_h, $z_h \in \mathbf{H}_h$. Ahora, eligiendo $w_h = \mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h$ en (3.77), se deduce que

$$\begin{aligned} A(\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h, \mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h) &= [\mathbf{N}v_h - \mathbf{N}z_h, \mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h] \\ &\leq \|\mathbf{N}v_h - \mathbf{N}z_h\|_{\mathbf{H}^*}\, \|\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h\|_{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

para todo v_h, $z_h \in \mathbf{H}_h$. Entonces, usando la $\mathbf{H}$–*elipticidad* de la forma bilineal A y la *Lipschitz–continuidad* de $\mathbf{N}$, se sigue que

$$\alpha_A\, \|\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h\|_{\mathbf{H}}^2 \leq M_N\, \|v_h - z_h\|_{\mathbf{H}}\, \|\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h\|_{\mathbf{H}}$$

y luego,

$$\|\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h\|_{\mathbf{H}} \leq \frac{M_N}{\alpha_A}\, \|v_h - z_h\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\, v_h, z_h \in \mathbf{H}_h\,,$$

lo cual, junto a (3.75), completa la primera parte de la demostración.

Por otro lado, eligiendo $w_h = v_h - z_h$ en (3.77) y usando la monotonía de $\mathbf{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} A(\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h, v_h - z_h) &= [\mathbf{N}v_h, v_h - z_h] - [\mathbf{N}z_h, v_h - z_h] \\ &\geq \alpha_N\, \|v_h - z_h\|_{\mathbf{H}}^2 \end{aligned}$$

para todo v_h, $z_h \in \mathbf{H}_h$. Lo anterior junto a (3.75) completa la demostración. ■

El siguiente Teorema muestra que es posible definir un operador contractivo cuyo único punto fijo sea la única solución $u_h \in \mathbf{H}_h$ de (3.74).

Teorema 3.4.5 *Sea* $\mathbf{T}_L : \mathbf{H}_h \to \mathbf{H}_h$ *el operador no lineal discreto definido por*

$$\mathbf{T}_L v_h := v_h - \rho\, \mathbf{P}v_h \quad \forall\, v_h \in \mathbf{H}_h\,.$$

Entonces, existe $\rho_0 > 0$ *tal que el operador* $\mathbf{T}_L : (\mathbf{H}_h, \|\cdot\|_E) \to (\mathbf{H}_h, \|\cdot\|_E)$ *es una contracción para todo* $\rho < \rho_0$.

Demostración. Primero, usando la definición del operador $\mathbf{T}_L$, se deduce que

$$\|\mathbf{T}_L v_h - \mathbf{T}_L z_h\|_E^2 = \|(v_h - z_h) - \rho\,(\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h)\|_E^2$$

$$= \|v_h - z_h\|_E^2 - 2\rho\, A(\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h, v_h - z_h) + \rho^2\, \|\mathbf{P}v_h - \mathbf{P}z_h\|_E^2\,.$$

Entonces, en virtud del Lema 3.4.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_L v_h - \mathbf{T}_L z_h\|_E^2 &\leq \left[1 - \frac{2\,\rho\,\alpha_N}{M_A} + \frac{\rho^2 M_N^2 M_A}{\alpha_A^3}\right] \|v_h - z_h\|_E^2 \\ &=: \mu^2\, \|v_h - z_h\|_E^2 \end{aligned}$$

para todo v_h, $z_h \in \mathbf{H}_h$. Finalmente, eligiendo $\rho_0 := \dfrac{2\,\alpha_N \alpha_A^3}{M_N^2 M_A^2}$ se tiene que $0 < \mu < 1$ lo que completa la demostración. ■

Ahora, como consecuencia de los Teoremas 3.4.4 y 3.4.5, se deduce que la aplicación $\mathbf{T}_L$ admite un único punto fijo en $\mathbf{H}_h$. Es importante observar que si $\mathbf{T}_L v_h = v_h$, es decir, si $v_h \in \mathbf{H}_h$ es el único punto fijo de $\mathbf{T}_L$, se tiene que $\mathbf{P}v_h = 0$ en $\mathbf{H}_h$. Entonces, en virtud de (3.76), se deduce que v_h coincide con la única solución $u_h \in \mathbf{H}_h$ de (3.74).

Lo anterior sugiere el uso de la aplicación contractiva $\mathbf{T}_L$ para establecer un esquema iterativo, definido por el Teorema 3.4.4, para encontrar la única solución $u_h \in \mathbf{H}_h$ de (3.74). En efecto, dado cualquier $u_h^0 \in \mathbf{H}_h$, la sucesión

$$u_h^{k+1} := \mathbf{T}_L u_h^k \quad \forall\, k \geq 0\,,$$

es tal que

$$\|u_h - u_h^k\|_E \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \|u_h^1 - u_h^0\|_E\,,$$

donde

$$\mu := \left[1 - \frac{2\,\rho\,\alpha_N}{M_A} + \frac{\rho^2 M_N^2 M_A}{\alpha_A^3}\right]^{1/2}\,.$$

Además, usando (3.75), se tiene la estimación

$$\|u_h - u_h^k\|_{\mathbf{H}} \leq \sqrt{\frac{M_A}{\alpha_A}}\, \frac{\mu^k}{1-\mu}\, \|u_h^1 - u_h^0\|_{\mathbf{H}}\,. \tag{3.78}$$

Consecuentemente, en virtud del Teorema 3.4.5 y (3.78), definimos el siguiente esquema iterativo de tipo lineal asociado a (3.74):

(**0**) Elegir un dato inicial $u_h^0 \in \mathbf{H}_h$, un parámetro $\rho < \rho_0$ y hacer $k = 0$.

(**1**) Resolver el problema: *Hallar* $\beta^k \in \mathbf{H}_h$ *tal que*

$$A(\beta^k, v_h) = [\mathbf{N} u_h^k, v_h] - [\mathbf{F}, v_h] \quad \forall\, v_h \in \mathbf{H}_h\,.$$

(**2**) Actualizar u_h^k mediante $u_h^{k+1} = u_h^k - \rho\,\beta^k$. Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $k = k + 1$ y volver a (**1**).

Notemos que este algoritmo necesita resolver en cada iteración, un problema variacional lineal determinado por la forma bilineal A. Esto muestra que A actúa como un precondicionador lineal para el problema (3.74). Es importante mencionar que una buena elección de esta forma bilineal podría acelerar la convergencia del esquema.

Por otro lado, observemos que, en particular, este esquema de linealización puede ser usado para resolver el problema discreto (3.73). Para esto basta notar que el operador $\mathbf{N}_h$ en (3.73), es uniformemente fuertemente monótono y *Lipschitz–continuo* en $\mathbf{H}_h := H_h^0$ (ver Teorema 3.4.2). Entonces, al elegir una forma bilineal A_h que sea uniformemente $\mathbf{H}_h$*–elíptica* y continua, el esquema lineal convergerá de acuerdo a (3.78), independientemente de h, para un h suficientemente pequeño.

A manera de ejemplo, si se elige la forma bilineal simétrica, uniformemente H_h^0*–elíptica* y continua

$$A_h(u, v) := \int_{\Omega_h} (\nabla u \cdot \nabla v + u\, v)\, dx\,,$$

el esquema de linealización asociado a (3.73) queda dado por

(**0**) Elegir un dato inicial $u_h^0 \in H_h^0$, un parámetro $\rho < \rho_0$ y hacer $k = 0$.

(**1**) Resolver el problema: *Hallar* $\beta^k \in H_h^0$ *tal que*

$$\int_{\Omega_h} (\nabla \beta^k \cdot \nabla v_h + \beta^k\, v_h)\, dx = [\mathbf{N}_h\, u_h^k, v_h]_h - [\mathbf{F}_h, v_h]_h \quad \forall\, v_h \in H_h^0\,.$$

(**2**) Actualizar u_h^k mediante $u_h^{k+1} = u_h^k - \rho\,\beta^k$. Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $k = k + 1$ y volver a (**1**).

Es importante mencionar que cualquier técnica standard en descomposición de dominio puede ser usada para resolver el problema lineal determinado por la forma bilineal A (o A_h). En particular, las desarrolladas para problemas lineales a través de este capítulo. Finalizamos con el siguiente Teorema.

Teorema 3.4.6 *Sea $u \in H^{2+\epsilon}(\Omega)$, $\epsilon > 0$, la única solución de (3.72). Entonces, existe $C > 0$, independiente de h y k, tal que*

$$\|u - \mathcal{M}u_h^k\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch + C\sqrt{\frac{M_A}{\alpha_A}}\frac{\mu^k}{1-\mu}\|u_h^1 - u_h^0\|_{H^1(\Omega_h)}\,.$$

Demostración. Usando la desigualdad triangular se tiene que

$$\|u - \mathcal{M}u_h^k\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - \mathcal{M}u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathcal{M}(u_h - u_h^k)\|_{H^1(\Omega)}$$

y luego, en virtud del Lema 3.4.1,

$$\|u - \mathcal{M}u_h^k\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - \mathcal{M}u_h\|_{H^1(\Omega)} + C\,\|u_h - u_h^k\|_{H^1(\Omega_h)}\,.$$

Finalmente, tomando en cuenta (3.78) y el Teorema 3.4.3 se completa la demostración. ■

3.5 Experimentos numéricos

En esta sección se presenta experimentación numérica para el esquema D–FEM usando como modelo, el problema exterior de Dirichlet para el Laplaciano en el plano. Para esto se considera D como el cuadrado de vértices $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ y se eligen f, g_0 y b tales que la solución exacta de (3.1) esté dada por

$$u(x,y) := \begin{cases} \sin(x+y)\, g(\frac{x^2+y^2}{d^2})\,, & \text{si } x^2+y^2 \leq d^2 \\ 0\,, & \text{si } x^2+y^2 > d^2, \end{cases}$$

donde

$$g(t) := -3\,t^4 + 8\,t^3 - 6\,t^2 + 1$$

y d es un parámetro que controla el soporte de $u(x,y)$.

Ahora, dado que se presentan ensayos en varias geometrías, en forma general denotamos por Γ_i, $i = 1,p$, a la circunferencia centrada en el origen, de radio $r = i+1$, donde p denota el número de subdominios. Esto es, cada subdominio anular Ω_i, $i = 1,p$, está limitado por Γ_{i-1} y Γ_i, donde se ha adoptado la notación $\Gamma_0 := \Gamma_D$ y $\Gamma_p := \Gamma_N$. Para cada uno de los experimentos se utilizan triangulaciones *cuasi–uniformes* de $\bar{\Omega}$ tales que

$$\bar{\Omega}_h := \bigcup_{i=1}^{p} \bar{\Omega}_{i,h}\,.$$

En las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 se presentan las distribuciones de nodos para las mallas usadas en los experimentos. Nótese que en la tabla 3.1 se describen dos triangulaciones con diferente grado de refinamiento mientras que en las tablas 3.2 y 3.3, se considera un mayor número de subdominios.

Nodos	Γ_D	$\bar{\Omega}_1$	Γ	$\bar{\Omega}_2$	Γ_N	Total
Malla 1	80	751	80	589	80	1340
Malla 2	160	2807	160	2223	160	5030

Tabla 3.1: *Partición de Ω en dos subdominios.*

Nodos	Γ_D	$\bar{\Omega}_1$	Γ_1	$\bar{\Omega}_2$	Γ_2	$\bar{\Omega}_3$	Γ_3	$\bar{\Omega}_4$	Γ_N	Total
Malla 3	80	755	80	591	80	429	80	331	80	2106

Tabla 3.2: *Partición de Ω en cuatro subdominios.*

Nodos	Γ_D	$\bar{\Omega}_1$	Γ_1	$\bar{\Omega}_2$	Γ_2	$\bar{\Omega}_3$	Γ_3	$\bar{\Omega}_4$	Γ_4	Total
Malla 4	160	2815	160	2195	160	1598	160	1293	160	
	$\bar{\Omega}_5$	Γ_5	$\bar{\Omega}_6$	Γ_6	$\bar{\Omega}_7$	Γ_7	$\bar{\Omega}_8$	Γ_N		
	1043	160	914	160	816	160	783	160		11457

Tabla 3.3: *Partición de Ω en ocho subdominios.*

Por otro lado, y como ha sido advertido a través de este capítulo, distintos precondicionadores llevan a la obtención de diferentes algoritmos de iteración por subdominios. La diferencia radica en el operador $\mathbf{T}$. En lo que sigue, se denota por $\mathbf{P}_1$ al precondicionador generado al usar $[\mathbf{T}\lambda_i, \mu_i]_i = c_i < 1, \lambda_i >_{L^2(\Gamma_i)} < 1, \mu_i >_{L^2(\Gamma_i)}$ en Γ_i, $i = 1, p-1$, y por $\mathbf{P}_2$ al precondicionador basado en el uso de $[\mathbf{T}\lambda_i, \mu_i]_i = c_i < \lambda_i, \mu_i >_{L^2(\Gamma_i)}$ en Γ_i, $i = 1, p-1$.

Los gráficos que se presentan a continuación, muestran el comportamiento de $\log \|u - u_h\|_{H^1(\Omega_h)}$ en función del número de iteraciones, donde u_h denota la solución discreta obtenida con el algoritmo. Más especificamente, cada uno de estos gráficos muestra la respuesta de un precondicionador dado con dos posibles elecciones para las constantes $c_i > 0$. Se distingue el uso de una constante menor con una línea punteada y una mayor con una línea continua. En todos los experimentos se ha considerado $c_i = c > 0$, $i = 1, p-1$, y los vectores iniciales

$$\lambda_{i,h}^0 = (\sin(1), \sin(2), \ldots, \sin(n_i)) \,,$$

donde n_i denota el número de nodos sobre la interfase Γ_i. Además, la aproximación discreta del término de desacoplamiento es realizada mediante la fórmula de integración desarrollada en el capítulo 2. Todos los experimentos fueron realizados en un computador paralelo Silicon–Graphics Origin 2000 del *Departamento de Ingeniería Matemática.*

En lo que sigue se confirma numericamente que los algoritmos D–FEM poseen una convergencia independiente de h. Para hacer esto, consideramos los algoritmos obtenidos con el método de Richardson y presentados en la sección 3.2.3. Las figuras 3.3 y 3.4 presentan la respuesta del algoritmo, usando respectivamente $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, con $d = 2.5$ y $\alpha = 0.2$ sobre la malla 1.

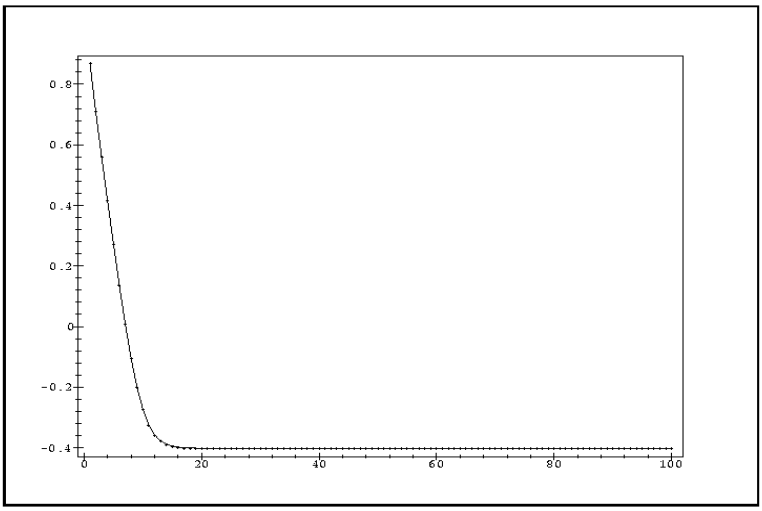

Figura 3.3: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$, *c=1.0, c=0.1.*

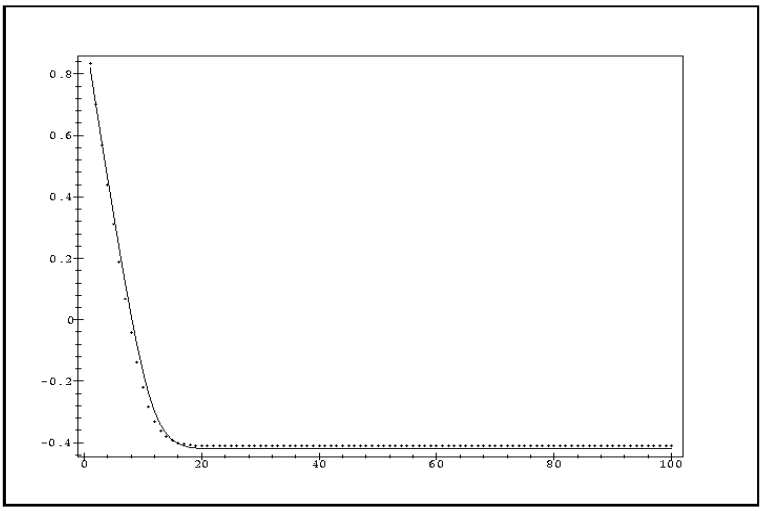

Figura 3.4: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$, *c=0.1, c=0.05.*

Las siguientes dos figuras presentan la misma situación sobre la malla 2. Esto es, al considerar una malla más fina, puede estudiarse la influencia de h en la convergencia del esquema.

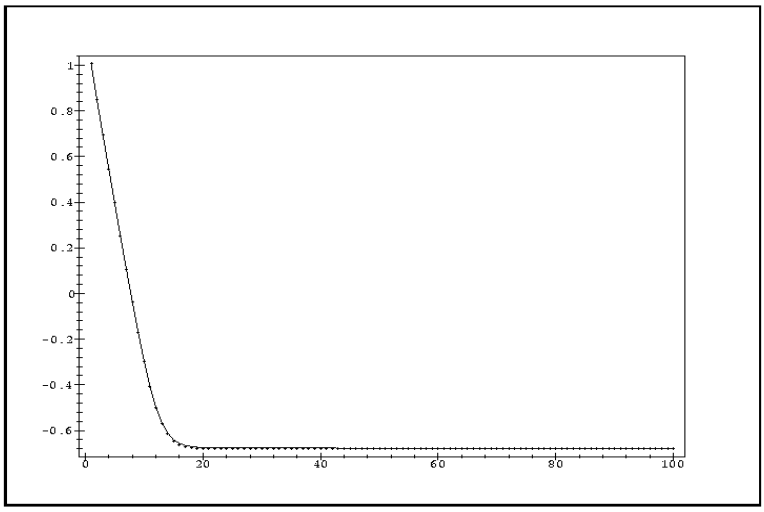

Figura 3.5: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$, *c=1.0, c=0.1.*

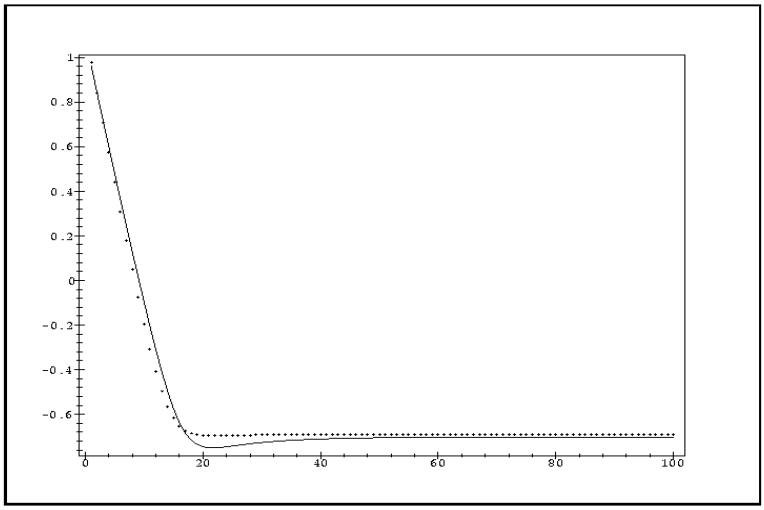

Figura 3.6: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$, *c=0.1, c=0.05.*

Al comparar las figuras 3.3 y 3.5, donde se usa $\mathbf{P}_1$, es claro que el mismo número de iteraciones es necesario para alcanzar la *solución de elementos finitos*. Exactamente lo mismo se observa para $\mathbf{P}_2$, al comparar las figuras 3.4 y 3.6. A manera de conclusión, notamos que el esquema D–FEM, con cualquiera de los precondicionadores utilizados, posee una convergencia independiente de h, lo que está de acuerdo con la Teoría desarrollada a través de este capítulo.

A continuación se presentan algunas experiencias numéricas sobre las mallas con un mayor número de subdominios. En efecto, las siguientes dos figuras presentan al esquema D–FEM (Richardson) en la malla 3, con $d = 3.5$ y $\alpha = 0.05$.

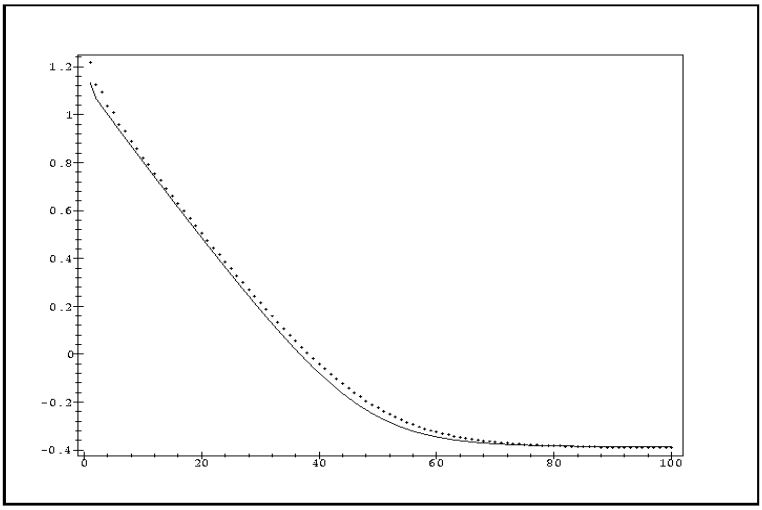

Figura 3.7: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$, $p = 4$, *c=1.0, c=0.05.*

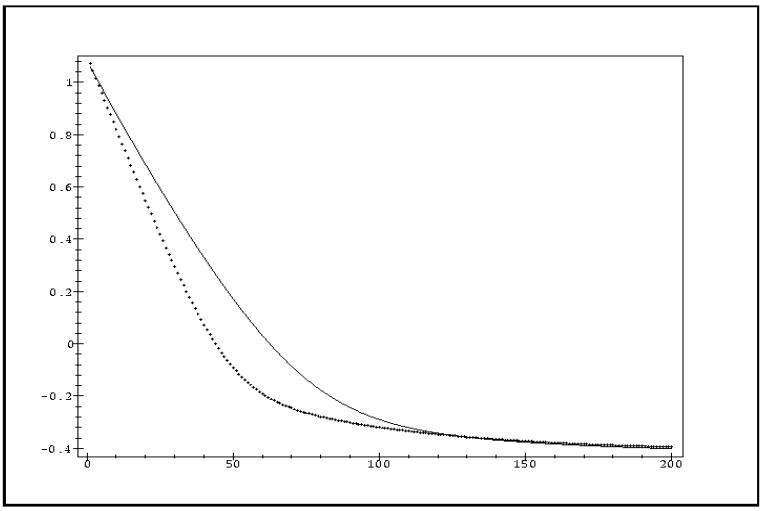

Figura 3.8: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$, $p = 4$, *c=0.2, c=0.05.*

Las siguientes dos figuras presentan al esquema D–FEM (Richardson) sobre la malla 4, con $d = 4.5$ y $\alpha = 0.015$.

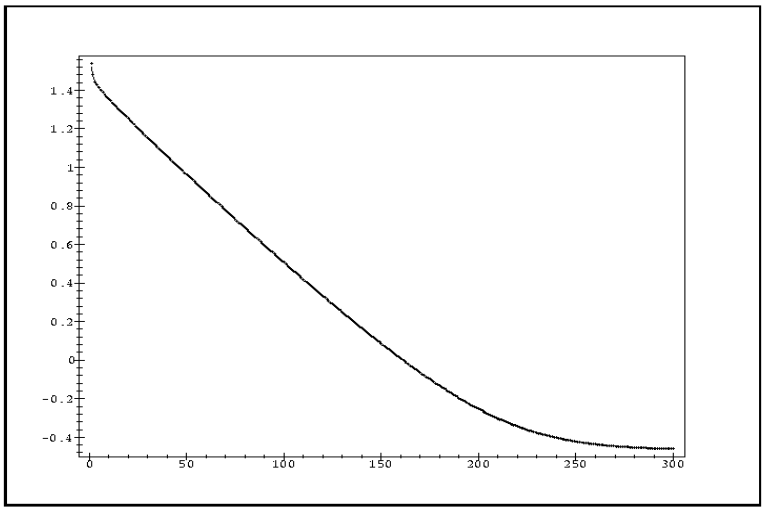

Figura 3.9: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$, $p = 8$, *c=0.2, c=0.05.*

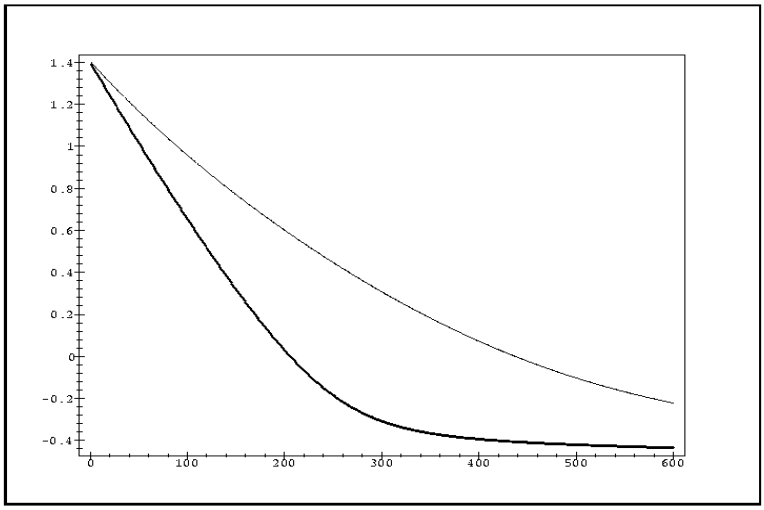

Figura 3.10: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$, $p = 8$, *c=1.0, c=0.05.*

Las figuras 3.3–3.10 muestran un correcto comportamiento del esquema, en cuanto a la convergencia hacia la solución de elementos finitos, en las distintas situaciones consideradas y usando el método de Richardson. Además, aunque en el contexto de problemas interiores, algunos experimentos numéricos con esquemas tipo *Dirichlet–to–Neumann* son presentados en [51].

Por otro lado, y como ha sido mencionado, el uso de PCGM permite acelerar la convergencia a la solución discreta en comparación con el método de Richardson. Lo anterior es confirmado en las próximas dos figuras, donde se muestra el esquema usando PCGM, en las mallas 1 y 4, respectivamente.

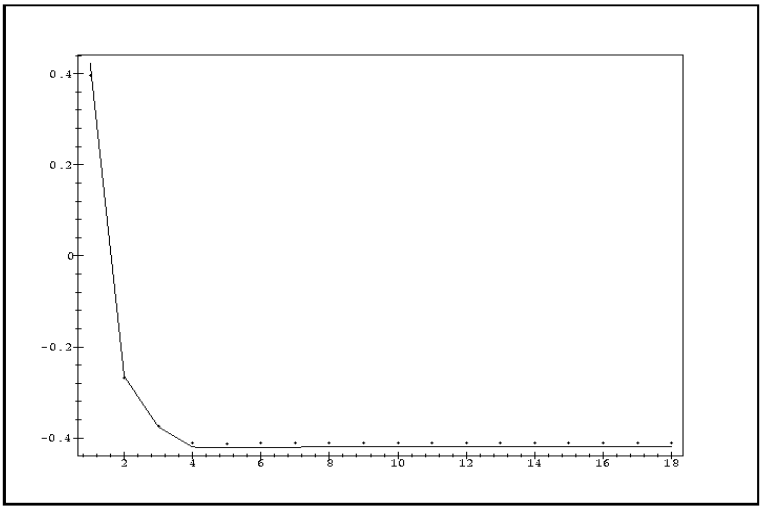

Figura 3.11: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$, $p = 2$, *c=0.1, c=0.05.*

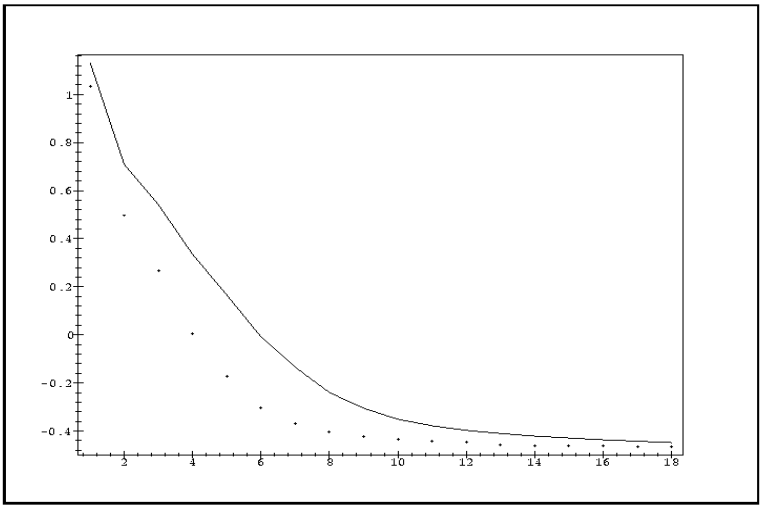

Figura 3.12: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$, $p = 8$, *c=0.2, c=0.1.*

Las figuras 3.11 y 3.12 permiten observar una mejoría significativa en la rapidez de convergencia mediante el uso de PCGM. Eso sí, enfatizamos que los algoritmos tipo PCGM son más complejos y necesitan la resolución de problemas armónicos adicionales.

Finalmente, a manera de ilustración, las siguientes tres figuras muestran la evolución de la solución de elementos finitos para el esquema D–FEM (Richardson) en la malla 3, con $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$, $c = 0.05$, $\alpha = 0.05$ y $n = 40$, 70, 100, donde n denota el número de iteraciones.

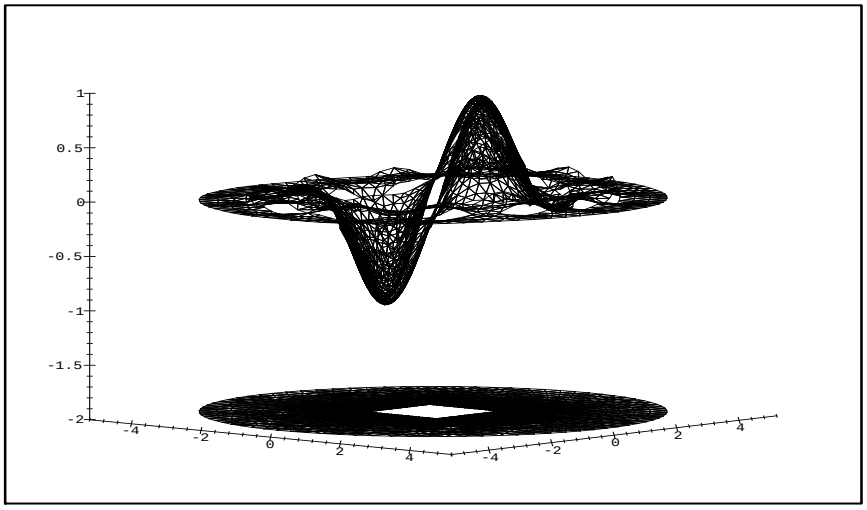

Figura 3.13: *D–FEM, n=40.*

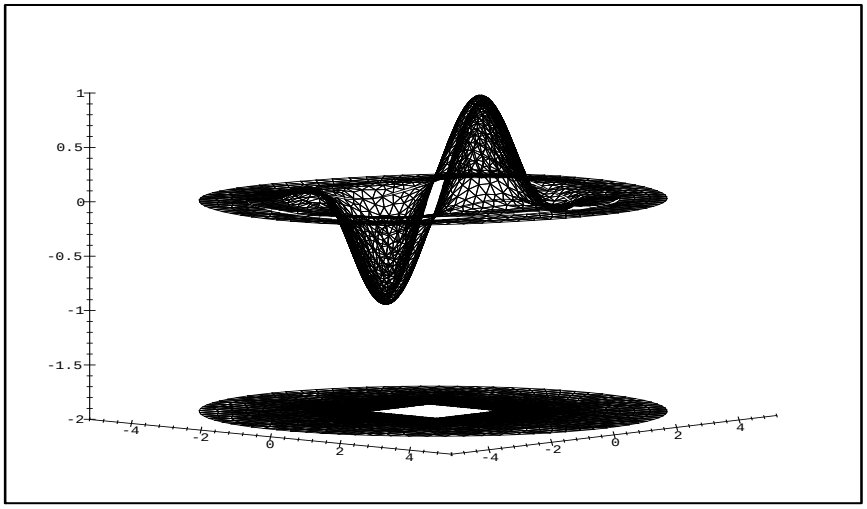

Figura 3.14: *D–FEM, n=70.*

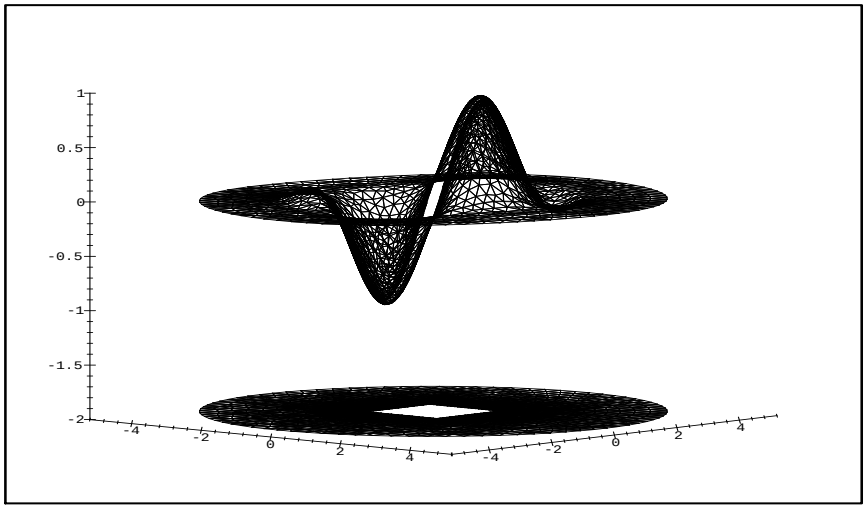

Figura 3.15: *D–FEM, n=100.*

Capítulo 4

DDM en Elasticidad

En este capítulo se muestra la aplicabilidad de las ideas expuestas en el capítulo anterior, a la solución numérica de problemas exteriores en Elasticidad bidimensional. Para esto se consideran como modelos, el problema exterior para el sistema de Lamé y un problema no lineal en elasto–plasticidad bidimensional (ver [2]).

Una de las principales características de los esquemas de descomposición de dominio presentados anteriormente, es la utilización de una aplicación Dirichlet–to–Neumann (DtN) para transformar el correspondiente problema exterior en un problema equivalente sobre una región acotada. En el caso del operador de Laplace puede usarse la aplicación DtN obtenida con el método de desacoplamiento y dada en términos del operador integral de frontera hipersingular. Para problemas en Elasticidad, sin embargo, el método de desacoplamiento debe ser reemplazado por una clase más general de aplicaciones DtN (ver [24], [25], [26]). Especificamente, utilizamos la aplicación basada en series infinitas de Fourier presentada por Han y Wu en [31]. Además, como ha sido expuesto en [2], la utilización de esta aplicación DtN en el problema modelo elasto–plástico permite la obtención de una formulación variacional en la cual la Teoría de operadores monótonos es aplicable. Es importante mencionar que la idea de usar series de Fourier fue introducida en [14].

La organización del presente capítulo es como sigue. En la sección 1 se presenta el Método de Han y Wu para la solución numérica del problema exterior para el sistema de Lamé. Aquí se presenta la aplicación DtN, la formulación variacional resultante y se discute el error inducido al truncar las series de Fourier. En la sección 2 se muestra la aplicabilidad del esquema D–FEM al problema modelo lineal. Esto es, se presentan los operadores de Steklov–Poincaré, aproximaciones en dimensión finita y los correspondientes algoritmos de iteración por subdominios. Finalmente, en la sección 3 se aplica el esquema de linealización para problemas fuertemente monótonos, desarrollado en el capítulo anterior, al problema modelo no lineal.

4.1 El Método de Han y Wu

Sea D un dominio acotado y simplemente conexo en $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ_D. Entonces, dado $\mathbf{f} := (f_1, f_2) \in [L^2(\mathbf{R}^2 - \bar{D})]^2$ con soporte compacto, $\mathbf{g}_0 \in [H^{1/2}(\Gamma_D)]^2$, el problema exterior lineal es: *Hallar* $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \mathbf{R}^2 - \bar{D}\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \mathbf{u} &= \mathrm{O}(1)\,,\ \|x\| \to +\infty\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\sigma(\mathbf{u}) := \lambda\,\mathbf{tr}\,e(\mathbf{u})\,\mathbf{I} + 2\,\mu\,e(\mathbf{u})$ es el *tensor de esfuerzo*, $e(\mathbf{u})$ es el *tensor de deformación* dado por $e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\}$, $i, j = 1, 2$, $\mathbf{tr}$ denota la traza de un tensor, $\mathbf{I}$ denota el tensor identidad y λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé.

Ahora, con el objeto de reformular (4.1), introducimos una circunferencia Γ_N de radio R, centrada en el origen, tal que su región interior contenga a $\bar{D}$ y tal que el soporte de $\mathbf{f}$ esté contenido en la región anular Ω limitada por Γ_D y Γ_N. Entonces, siguiendo a Han y Wu [31], el problema exterior (4.1) puede ser transformado, equivalentemente, en el siguiente problema de valores de frontera sobre el dominio acotado $\bar{\Omega}$: *Hallar* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \sigma(\mathbf{u})\nu &= \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) \quad \text{en } \Gamma_N\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $\tilde{\mathbf{T}} := (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2) : [H^{1/2}(\Gamma_N)]^2 \to [H^{-1/2}(\Gamma_N)]^2$ es el operador DtN definido por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(\mathbf{v}) \;:=\; & \frac{2+2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi \\ & -\frac{2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(\mathbf{v}) \;:=\; & \frac{2+2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi \\ & +\frac{2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi \end{aligned}$$

para todo $x \in \Gamma_N$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2)$, $v_i = v_i(r, \theta)$, $i = 1, 2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $k := \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ y ν denota el vector normal unitario exterior a Γ_N.

Es importante observar que la aplicación $\tilde{\mathbf{T}}$ determina la condición de borde exacta para el problema exterior y por lo tanto, en la práctica, el tomar en cuenta sólo un número finito de términos introduce un error que debe ser considerado. Además, al igual que la aplicación DtN utilizada para el operador de Laplace, el operador $\tilde{\mathbf{T}}$ genera una condición de borde de carácter *no–local*.

A continuación, consideramos aproximaciones del operador $\tilde{\mathbf{T}}$. Esto es, definimos la sucesión $\tilde{\mathbf{T}}^N := (\tilde{T}_1^N, \tilde{T}_2^N) : [H^{1/2}(\Gamma_N)]^2 \to [H^{-1/2}(\Gamma_N)]^2$, $N \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, por

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1^N(\mathbf{v}) \;:=\; & \frac{2+2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi \\
& -\frac{2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_2^N(\mathbf{v}) \;:=\; & \frac{2+2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_2}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi \\
& +\frac{2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\phi^2}(R,\phi)\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi\,.
\end{aligned}$$

Lo anterior conduce a definir, para $N \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, los siguientes problemas de valores de frontera: *Hallar* $\mathbf{u}_N \in [H^1(\Omega)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}_N) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega\,, \\
\mathbf{u}_N &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\
\sigma(\mathbf{u}_N)\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{u}_N) \quad \text{en } \Gamma_N\,.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Por otro lado, usando integración por partes, obtenemos la siguiente formulación variacional de (4.2): *Hallar* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *tal que* $\mathbf{u} = \mathbf{g}_0$ *en* Γ_D *y*

$$\tilde{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx \quad \forall\,\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2\,, \tag{4.4}$$

donde

$$\tilde{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v})\,dx\,,$$

$$\sigma(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v}) := \sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{v})$$

y

$$
\begin{aligned}
B(\mathbf{u},\mathbf{v}) \;:=\; & \frac{2+2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_1}{\partial\theta}(R,\theta)+\frac{\partial u_2}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_2}{\partial\theta}(R,\theta)\right\}\\
& \times\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi\,d\theta\\
+\; & \frac{2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_2}{\partial\theta}(R,\theta)-\frac{\partial u_2}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_1}{\partial\theta}(R,\theta)\right\}\\
& \times\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi\,d\theta\,. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Analogamente, usando integración por partes, se obtiene la siguiente formulación variacional de (4.3): *Hallar* $\mathbf{u}_N \in [H^1(\Omega)]^2$ *tal que* $\mathbf{u}_N = \mathbf{g}_0$ *en* Γ_D *y*

$$
\tilde{A}(\mathbf{u}_N,\mathbf{v}) + B_N(\mathbf{u}_N,\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx \quad \forall\,\mathbf{v}\in[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2\,, \qquad (4.6)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
B_N(\mathbf{u},\mathbf{v}) \;:=\; & \frac{2+2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_1}{\partial\theta}(R,\theta)+\frac{\partial u_2}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_2}{\partial\theta}(R,\theta)\right\}\\
& \times\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi\,d\theta\\
+\; & \frac{2k}{1+2k}\,\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_2}{\partial\theta}(R,\theta)-\frac{\partial u_2}{\partial\phi}(R,\phi)\frac{\partial v_1}{\partial\theta}(R,\theta)\right\}\\
& \times\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\,d\phi\,d\theta\,. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

El siguiente resultado es necesario para establecer la unicidad de solución para las formulaciones variacionales (4.4) y (4.6).

Lema 4.1.1 *Las formas bilineales B y B_N son simétricas y continuas en $[H^1(\Omega)]^2\times[H^1(\Omega)]^2$. Más aún, $B(\mathbf{u},\mathbf{v})\geq 0$ para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ y $B_N(\mathbf{u},\mathbf{v})\geq 0$ para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$.*

Demostración. Ver Lema 2 en [31]. ■

Ahora, notemos que $\tilde{A}$ es una forma bilineal continua en $[H^1(\Omega)]^2\times[H^1(\Omega)]^2$. Además, y como consecuencia del Teorema 1.2.5, se tiene que $\tilde{A}$ es $[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$–*elíptica*. Entonces, usando el Lema 4.1.1, se deduce que las formulaciones variacionales (4.4) y (4.6) satisfacen las hipótesis del Lema de Lax–Milgram.

El siguiente resultado permite controlar el error generado al usar un número finito de términos en las series de Fourier que definen la aplicación $\tilde{\mathbf{T}}$.

Teorema 4.1.1 *Existe $C > 0$, independiente de N, tal que para todo $l \geq 2$,*

$$|B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B_N(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \frac{C}{N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma_N)]^2}$$

$$\forall\, \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$$

y

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq \frac{C}{\beta_0 N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2}\,,$$

donde β_0 es la constante de elipticidad de $\tilde{A}$.

Demostración. Ver Lema 3 y Teorema 1 en [31]. ■

El resultado anterior muestra que para resolver (4.4), es suficiente considerar el problema (4.6) puesto que el error $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{[H^1(\Omega)]^2}$ está controlado por el número de términos usados en las series de Fourier. En efecto, en lo que sigue se estudia la aplicabilidad del esquema D–FEM al problema exterior (4.1) aproximado por (4.6).

4.2 Esquema D–FEM

4.2.1 Operadores de Steklov–Poincaré

Sea Γ una curva cerrada y poligonal contenida en Ω, cuya región interior contenga a $\bar{D}$ y tal que divida a Ω en dos subdominios, Ω_1 y Ω_2. Esto es, Ω_1 es la región anular limitada por Γ_D y Γ, Ω_2 por Γ y Γ_N y $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Además, se denota por ν_i, $i = 1, 2$, al vector normal unitario exterior a $\partial\Omega_i$ sobre Γ. Con esto, y dado $\lambda \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, se definen los siguientes problemas de valores de frontera:

- *Hallar* $\mathbf{u}_{N,1}(\lambda) \in [H^1(\Omega_1)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}_{N,1}(\lambda)) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ \mathbf{u}_{N,1}(\lambda) &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \mathbf{u}_{N,1}(\lambda) &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

- *Hallar* $\mathbf{u}_{N,2}(\lambda) \in [H^1(\Omega_2)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}_{N,2}(\lambda)) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ \mathbf{u}_{N,2}(\lambda) &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,2}(\lambda))\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{u}_{N,2}(\lambda)) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por otro lado, la continuidad de esfuerzos normales sobre Γ lleva al siguiente problema de interfase: *Hallar* $\bar{\lambda} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ *tal que*

$$[\sigma(\mathbf{u}_{N,1}(\bar{\lambda}))\nu_1 + \sigma(\mathbf{u}_{N,2}(\bar{\lambda}))\nu_2, \mu] = 0 \quad \forall\, \mu \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2\,, \tag{4.10}$$

donde $[\cdot,\cdot]$ denota la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$ definida a través del producto interior de $[L^2(\Gamma)]^2$.

Ahora, definimos operadores lineales de extensión $\mathbf{R}_i$, $i = 1, 2$, como sigue

- $\mathbf{R}_1 : [H^{1/2}(\Gamma)]^2 \ni \lambda \to \mathbf{R}_1\lambda \in [H^1(\Omega_1)]^2$ solución de

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{R}_1\lambda) &= 0 \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ \mathbf{R}_1\lambda &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \mathbf{R}_1\lambda &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

- $\mathbf{R}_2 : [H^{1/2}(\Gamma)]^2 \ni \lambda \to \mathbf{R}_2\lambda \in [H^1(\Omega_2)]^2$ solución de

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{R}_2\lambda) &= 0 \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ \mathbf{R}_2\lambda &= \lambda \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \sigma(\mathbf{R}_2\lambda)\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{R}_2\lambda) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Obsérvese que para cada $\lambda \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, $\mathbf{R}_1\lambda$ y $\mathbf{R}_2\lambda$ son, respectivamente, las extensiones armónicas de λ a Ω_1 y Ω_2. Definimos además $\tilde{\mathbf{w}}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2$ y $\mathbf{w}_2 \in [H^1(\Omega_2)]^2$ como las únicas soluciones débiles de los siguientes problemas de valores de frontera:

- *Hallar* $\tilde{\mathbf{w}}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\tilde{\mathbf{w}}_1) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ \tilde{\mathbf{w}}_1 &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \tilde{\mathbf{w}}_1 &= 0 \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

- *Hallar* $\mathbf{w}_2 \in [H^1(\Omega_2)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{w}_2) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ \mathbf{w}_2 &= 0 \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \sigma(\mathbf{w}_2)\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{w}_2) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Más aún, denotamos por $\mathbf{g} \in [H^1(\Omega)]^2$ a una extensión regular de $\mathbf{g}_0$ sobre Ω, tal que $\mathbf{g} := 0$ en $\Omega_2 \cup \Gamma$, y se define $\mathbf{w}_1 := \tilde{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{g}$. En virtud de lo anterior, se tiene que

$$\mathbf{u}_{N,1}(\lambda) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{g} + \mathbf{R}_1\lambda \tag{4.15}$$

y

$$\mathbf{u}_{N,2}(\lambda) = \mathbf{w}_2 + \mathbf{R}_2\lambda\,. \tag{4.16}$$

A continuación, se introducen las formas bilineales continuas y simétricas $A_1 : [H^1(\Omega_1)]^2 \times [H^1(\Omega_1)]^2 \to \mathbf{R}$, $A_2 : [H^1(\Omega_2)]^2 \times [H^1(\Omega_2)]^2 \to \mathbf{R}$ y $A : [H^1(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega)]^2 \to \mathbf{R}$, definidas por

$$A_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}_1) := \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{z}_1) : e(\mathbf{v}_1)\, dx\,,$$

$$A_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{v}_2) := \int_{\Omega_2} \sigma(\mathbf{z}_2) : e(\mathbf{v}_2)\, dx \;+\; B_N(\mathbf{z}_2, \mathbf{v}_2)$$

y

$$A(\mathbf{z}, \mathbf{v}) := \sum_{k=1}^{2} A_k(\mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k) \quad \forall\, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2\,,$$

donde $\mathbf{z}_k := \mathbf{z}|_{\Omega_k}$ y $\mathbf{v}_k := \mathbf{v}|_{\Omega_k}$. Tomando en cuenta lo anterior, la única solución $\mathbf{u}_N \in [H^1(\Omega)]^2$ de (4.6) satisface $\mathbf{u}_N = \mathbf{g}_0$ en Γ_D y

$$A(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2\,,$$

donde

$$F(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx\,.$$

Nótese que para cada $\lambda \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, las extensiones $\mathbf{R}_i$, $i = 1, 2$, satisfacen

$$A_1(\mathbf{R}_1\lambda, \varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in [H^1_0(\Omega_1)]^2 \tag{4.17}$$

y

$$A_2(\mathbf{R}_2\lambda, \varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in [H^1_\Gamma(\Omega_2)]^2\,, \tag{4.18}$$

donde $H^1_\Gamma(\Omega_2) := \{v \in H^1(\Omega_2) : v = 0 \text{ en } \Gamma\}$.

Lema 4.2.1 *La solución $\mathbf{u}_N$ de (4.6) está relacionada con $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ a través de las siguientes identidades:*

$$\mathbf{w}_1 = (\mathbf{u}_N - \mathbf{g})|_{\Omega_1} - \mathbf{R}_1((\mathbf{u}_N - \mathbf{g})|_\Gamma)$$

y

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_N|_{\Omega_2} - \mathbf{R}_2(\mathbf{u}_N|_\Gamma)\,.$$

Demostración. Es análoga a la demostración del Lema 3.2.1. ■

A continuación, definimos las funciones

$$\mathbf{w} := \begin{cases} \mathbf{w}_1\,, & \text{en } \Omega_1 \cup \Gamma \\ \mathbf{w}_2\,, & \text{en } \Omega_2 \cup \Gamma \end{cases}$$

y

$$\mathbf{R}\lambda := \begin{cases} \mathbf{R}_1\lambda\,, & \text{en } \Omega_1 \cup \Gamma \\ \mathbf{R}_2\lambda\,, & \text{en } \Omega_2 \cup \Gamma \end{cases}$$

para todo $\lambda \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$. Nótese que $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^2$, $\mathbf{w} = 0$ en $\Gamma_D \cup \Gamma$ y $\mathbf{R}\lambda \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$. Entonces, reemplazando (4.15) y (4.16) en (4.10), y usando integración por partes, obtenemos el problema de *Steklov–Poincaré*: *Hallar* $\bar{\lambda} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ *tal que*

$$\mathbf{S}\,\bar{\lambda} = \chi\,, \tag{4.19}$$

donde $\mathbf{S} : [H^{1/2}(\Gamma)]^2 \to [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ es el operador de Steklov–Poincaré dado por

$$[\,\mathbf{S}\,\lambda, \mu\,] := \sum_{k=1}^{2} A_k\,(\mathbf{R}_k\lambda, \mathbf{R}_k\mu) \quad \forall\,\lambda,\ \mu \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$$

y $\chi \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ es definido como sigue

$$[\,\chi, \mu\,] := \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{R}\mu\, dx \;-\; A(\mathbf{w} + \mathbf{g}, \mathbf{R}\mu) \quad \forall\,\mu \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2\,.$$

El siguiente resultado es necesario para probar la existencia y unicidad de solución para el problema de Steklov–Poincaré (4.19).

Lema 4.2.2 *Existen constantes* C_i, $\tilde{C}_i > 0$, $i = 1, 2$, *que dependen sólo de* Ω_i, *tal que*

$$C_i\,\|\lambda\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \le \|\mathbf{R}_i\lambda\|_{[H^1(\Omega_i)]^2} \le \tilde{C}_i\,\|\lambda\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \quad \forall\,\lambda \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2\,.$$

Demostración. Se sigue de argumentos usuales para problemas elípticos y las propiedades de la forma bilineal B_N. ■

Lema 4.2.3 *Existe un único* $\bar{\lambda} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ *tal que* $\mathbf{S}\,\bar{\lambda} = \chi$.

Demostración. Dado que A_1 y A_2 son formas bilineales continuas, usando el Lema 4.2.2, se deduce que $\mathbf{S}$ induce una forma bilineal continua en $[H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$. En lo que sigue de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica.

Ahora, en virtud del Lema 4.1.1, Teorema 1.2.5 y el Lema 4.2.2, se sigue que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}\,\lambda,\lambda] &\geq C\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k} e(\mathbf{R}_k\lambda):e(\mathbf{R}_k\lambda)\,dx \\
&= C\int_{\Omega} e(\mathbf{R}\lambda):e(\mathbf{R}\lambda)\,dx \\
&\geq C\,\|\mathbf{R}\lambda\|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \\
&= C\sum_{k=1}^{2}\|\mathbf{R}_k\lambda\|^2_{[H^1(\Omega_k)]^2} \\
&\geq C\,\|\lambda\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2}
\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$. Esto muestra que $\mathbf{S}$ induce una forma bilineal $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$–*elíptica* y luego, una aplicación directa del Lema de Lax–Milgram completa la demostración. ■

El siguiente resultado establece la equivalencia entre la formulación variacional (4.6) y el problema de Steklov–Poincaré (4.19).

Teorema 4.2.1 *Sean* $\mathbf{u}_N \in [H^1(\Omega)]^2$ *y* $\bar{\lambda} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ *las únicas soluciones de (4.6) y (4.19), respectivamente. Entonces,*

$$\bar{\lambda} = \mathbf{u}_N|_{\Gamma}$$

y

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{g} + \mathbf{w} + \mathbf{R}\bar{\lambda} = \begin{cases} \mathbf{u}_{N,1}(\bar{\lambda})\,, & \text{en } \Omega_1 \\ \mathbf{u}_{N,2}(\bar{\lambda})\,, & \text{en } \Omega_2\,. \end{cases}$$

Demostración. Es análoga a la demostración del Teorema 3.2.1. ■

4.2.2 Aproximaciones discretas

Comenzamos definiendo una triangulación de $\bar{\Omega}$ compuesta de triángulos rectos y curvos con el objeto de describir exactamente a la circunferencia Γ_N. En efecto, dado $N \in \mathbf{N}$, sea $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_N = 2\pi$ una partición uniforme de $[0, 2\pi]$ con $t_{j+1} - t_j = \frac{2\pi}{N}$ para todo $j = 0, N-1$. Además, consideramos $z : [0, 2\pi] \to \Gamma_N$ como la parametrización de Γ_N definida por $z(t) := R\,(\cos t, \sin t)^T$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y denotamos por $\Omega_{\tilde{h}}$ a la región anular limitada por Γ_D y la poligonal $\Gamma_{N,\tilde{h}}$, cuyos vértices son $z(t_1), z(t_2), \ldots, z(t_n)$. Más aún, sea $\mathcal{T}_{\tilde{h}}$ una triangulación regular de $\Omega_{\tilde{h}}$, compuesta de triángulos $\tilde{\tau}$ de diámetro $h_{\tilde{\tau}}$, y se define

$$\tilde{h} := \sup_{\tilde{\tau}\in\mathcal{T}_{\tilde{h}}} h_{\tilde{\tau}}\,.$$

Entonces, reemplazando cada triángulo $\tilde{\tau} \in \mathcal{T}_{\tilde{h}}$ con un lado sobre $\Gamma_{N,\tilde{h}}$, por el correspondiente triángulo curvo sobre Γ_N, obtenemos a partir de $\mathcal{T}_{\tilde{h}}$, una triangulación $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ compuesta de triángulos rectos y curvos.

Sea $\hat{\tau}$ el triángulo de referencia con vértices $\hat{P}_1 := (0,0)^T$, $\hat{P}_2 := (1,0)^T$ y $\hat{P}_3 := (0,1)^T$ y consideremos la familia de aplicaciones biyectivas $\{F_\tau\}_{\tau \in \mathcal{T}_h}$ tal que $F_\tau(\hat{\tau}) = \tau$. Esto es, si τ es un triángulo recto de $\mathcal{T}_h$, la aplicación F_τ está dada por

$$F_\tau(\hat{x}) := B_\tau \hat{x} + b_\tau \,, \tag{4.20}$$

donde B_τ es una matriz cuadrada de orden 2 y $b_\tau \in \mathbf{R}^2$. Ahora, si τ es un triángulo curvo con vértices P_1, P_2, P_3, tal que $P_2 = z(t_{j-1}) \in \Gamma_N$ y $P_3 = z(t_j) \in \Gamma_N$, la aplicación F_τ es como sigue

$$F_\tau(\hat{x}) := B_\tau \hat{x} + b_\tau + G_\tau(\hat{x}) \quad \forall\, \hat{x} := (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{\tau} \,, \tag{4.21}$$

donde

$$G_T(\hat{x}) :=$$

$$\frac{\hat{x}_1}{1-\hat{x}_2} \left\{ z(t_{j-1} + \hat{x}_2(t_j - t_{j-1})) - [z(t_{j-1}) + \hat{x}_2(z(t_j) - z(t_{j-1}))] \right\} .$$

Puede demostrarse que (4.21) es un *difeomorfismo* de clase C^∞ que aplica el triángulo $\hat{\tau}$ sobre el triángulo curvo τ de forma tal que $F_\tau(\hat{P}_i) = P_i$, $i = 1,3$ (ver [60]). Además, la imagen del lado $\hat{P}_2\hat{P}_3$ es el lado curvo de τ y los otros dos lados de $\hat{\tau}$ son transformados linealmente por (4.21) a los lados rectos de τ.

Sea $P_1(\hat{\tau})$ el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre $\hat{\tau}$. Entonces, para cada triángulo $\tau \in \mathcal{T}_h$, se define

$$P_1(\tau) := \{ v : v = (JF_\tau)^{-1}(DF_\tau)\, \hat{v} \circ F_\tau^{-1} \quad \forall\, \hat{v} \in P_1(\hat{\tau}) \} \,,$$

donde JF_τ y DF_τ denotan, respectivamente, el Jacobiano y la diferencial de Frêchet de la aplicación F_τ. En virtud de lo anterior, definimos los subespacios de elementos finitos

$$\tilde{H}_{i,h} := \{ v_h \in C(\bar{\Omega}_i) : v_h|_\tau \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \subseteq \bar{\Omega}_i \}$$

y

$$\tilde{\Lambda}_h := \{ v_h|_\Gamma : v_h \in \tilde{H}_{i,h} \} \,.$$

Más aún, se define

$$\tilde{H}^0_{1,h} := \{ v_h \in \tilde{H}_{1,h} : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_D \cup \Gamma \} \,,$$

$$\tilde{H}^0_{2,h} := \{ v_h \in \tilde{H}_{2,h} : v_h = 0 \text{ en } \Gamma \}$$

y

$$H_{i,h} := \tilde{H}_{i,h} \times \tilde{H}_{i,h}\,,$$
$$\Lambda_h := \tilde{\Lambda}_h \times \tilde{\Lambda}_h\,,$$
$$H^0_{i,h} := \tilde{H}^0_{i,h} \times \tilde{H}^0_{i,h}\,.$$

Consecuentemente, en virtud de las relaciones (4.17) y (4.18), se definen, para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$, las extensiones discretas $\mathbf{R}_{i,h}$, $i = 1, 2$, como sigue

- $\mathbf{R}_{1,h} : \Lambda_h \ni \lambda_h \to \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h \in H_{1,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_1\left(\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h, v_h\right) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H^0_{1,h}\,, \\ \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h &= 0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h &= \lambda_h \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned}$$

- $\mathbf{R}_{2,h} : \Lambda_h \ni \lambda_h \to \mathbf{R}_{2,h}\lambda_h \in H_{2,h}$ solución de

$$\begin{aligned} A_2\left(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h, v_h\right) &= 0 \quad \forall\, v_h \in H^0_{2,h}\,, \\ \mathbf{R}_{2,h}\lambda_h &= \lambda_h \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned}$$

Con esto, definimos el operador discreto de Steklov–Poincaré por

$$\mathbf{S}_h := \mathbf{S}_{1,h} + \mathbf{S}_{2,h}\,,$$

donde $\mathbf{S}_{i,h} : \Lambda_h \to \Lambda_h^*$, $i = 1, 2$, son los operadores locales discretos dados por

$$[\mathbf{S}_{i,h}\lambda_h, \mu_h] := A_i(\mathbf{R}_{i,h}\lambda_h, \mathbf{R}_{i,h}\mu_h) \quad \forall\, \lambda_h, \mu_h \in \Lambda_h\,,$$

donde Λ_h^* denota el dual de Λ_h.

Por otro lado, y como ha sido mencionado, la resolución de (4.19) a través de métodos iterativos requiere el uso de un precondicionador adecuado. Este precondicionador debe garantizar que la convergencia de los algoritmos de iteración por subdominios sea independiente de h. Para hacer esto, consideramos el precondicionador tipo *Dirichlet–Robin* $\mathbf{P}_h := \mathbf{S}_{2,h} + \mathbf{T}$, donde

$$[\mathbf{T}\lambda_h, \mu_h] := c\,[\lambda_h, \mu_h] = c \int_\Gamma \lambda_h \cdot \mu_h\, ds \quad \forall\, \lambda_h, \mu_h \in \Lambda_h$$

y $c > 0$ es una constante arbitraria. En lo que sigue se muestra que κ, el número de condición espectral de $\mathbf{P}_h^{-1}\,\mathbf{S}_h$, está acotado independientemente de h. Para hacer esto, establecemos algunos resultados previos.

Teorema 4.2.2 *Existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tal que*

$$A_1(\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h, \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h) \leq C_1 \, \|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \quad \forall \, \lambda_h \in \Lambda_h$$

y

$$A_2(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h, \mathbf{R}_{2,h}\lambda_h) \leq C_2 \, \|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \quad \forall \, \lambda_h \in \Lambda_h \, .$$

Demostración. Notemos primero que

$$A_1(\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h, \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h) \leq C \, \|\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h\|^2_{[H^1(\Omega_1)]^2} \quad \forall \, \lambda_h \in \Lambda_h \, , \tag{4.22}$$

donde $C > 0$ sólo depende de las constantes de Lamé. En lo que sigue de la demostración, $C > 0$ denota una constante genérica independiente de h. Ahora, dado que Ω_1 es un dominio poligonal y $\lambda_h \in [H^1(\Gamma)]^2$, se tiene la siguiente estimación de regularidad (ver [44])

$$\|\mathbf{R}_1\lambda_h\|_{[H^{3/2}(\Omega_1)]^2} \leq C \, \|\lambda_h\|_{[H^1(\Gamma)]^2} \, . \tag{4.23}$$

Además, usando estimaciones usuales de interpolación (ver [7]), se tiene que

$$\|\mathbf{R}_1\lambda_h - \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} \leq C \, h^{1/2} \, \|\mathbf{R}_1\lambda_h\|_{[H^{3/2}(\Omega_1)]^2} \, . \tag{4.24}$$

Más aún, se tiene la desigualdad inversa (ver [7]),

$$h^{1/2} \, \|\lambda_h\|_{[H^1(\Gamma)]^2} \leq C \, \|\lambda_h\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \quad \forall \, \lambda_h \in \Lambda_h \, . \tag{4.25}$$

Luego, usando la desigualdad triangular, el Lema 4.2.2, (4.23) y (4.24),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} &\leq \|\mathbf{R}_1\lambda_h - \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} + \|\mathbf{R}_1\lambda_h\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} \\ &\leq C \, h^{1/2} \, \|\mathbf{R}_1\lambda_h\|_{[H^{3/2}(\Omega_1)]^2} + \|\mathbf{R}_1\lambda_h\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} \\ &\leq C \, h^{1/2} \, \|\lambda_h\|_{[H^1(\Gamma)]^2} + C \, \|\lambda_h\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \, . \end{aligned}$$

Por lo tanto, en virtud de (4.25), se deduce que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h\|_{[H^1(\Omega_1)]^2} &\leq C \, h^{1/2} \, h^{-1/2} \, \|\lambda_h\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} + C \, \|\lambda_h\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \\ &\leq C \, \|\lambda_h\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \end{aligned}$$

lo cual, junto a (4.22), completa la primera parte de la demostración.

Por otro lado, usando el Lema 4.1.1, se tiene que

$$A_2(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h, \mathbf{R}_{2,h}\lambda_h) \leq C \, \|\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h\|^2_{[H^1(\Omega_2)]^2} \quad \forall \, \lambda_h \in \Lambda_h \tag{4.26}$$

y luego, procediendo analogamente a lo anterior, se completa la demostración. ■

Teorema 4.2.3 *Existen constantes C_1, $C_2 > 0$, independientes de h, tal que*

$$C_1 \, \{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}\lambda_h, \lambda_h]\} \leq [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] \leq C_2 \, \{[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}\lambda_h, \lambda_h]\}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$.

Demostración. En virtud del Teorema de trazas, la *elipticidad* de A_1, y denotando por $C > 0$ a una constante genérica independiente de h, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} &\leq \|\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h\|^2_{[H^1(\Omega_1)]^2} \\ &\leq C\, A_1(\mathbf{R}_{1,h}\lambda_h, \mathbf{R}_{1,h}\lambda_h) \\ &= C\, [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] \end{aligned}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$. Entonces, usando el Teorema 4.2.2, se tiene la existencia de constantes $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2 > 0$, independientes de h, tal que

$$\hat{C}_1 \, \|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \leq [\mathbf{S}_{1,h}\lambda_h, \lambda_h] \leq \hat{C}_2 \, \|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h \,. \tag{4.27}$$

Por otro lado, usando el Lema 4.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}\lambda_h, \lambda_h] &= \int_{\Omega_2} \sigma(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h) : e(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h)\, dx \\ &\quad + B_N(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h, \mathbf{R}_{2,h}\lambda_h) + [\mathbf{T}(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h), \mathbf{R}_{2,h}\lambda_h] \\ &\geq C \left\{ |e(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h)|^2_{0,\Omega_2} + \|\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h\|^2_{[L^2(\Gamma)]^2} \right\}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde

$$|e(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h)|^2_{0,\Omega_2} := \sum_{i,j=1}^{2} \|e_{ij}(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h)\|^2_{L^2(\Omega_2)} \,.$$

Esto induce a definir el operador lineal y continuo $\mathbf{C} : [H^1(\Omega_2)]^2 \to [[H^1(\Omega_2)]^2]^*$ dado por

$$[[\mathbf{C}\,\mathbf{u}, \mathbf{v}]] := \int_{\Omega_2} e(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v})\, dx + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, ds \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega_2)]^2 \,,$$

donde $[[\cdot,\cdot]]$ denota la paridad dual entre $[[H^1(\Omega_2)]^2]^*$ y $[H^1(\Omega_2)]^2$. A continuación, usando el Lema 3.3.3, mostramos que el operador $\mathbf{C}$ es $[H^1(\Omega_2)]^2$–*elíptico.*

En efecto, notemos primero que $[[\mathbf{C}\,\mathbf{v}, \mathbf{v}]] \geq 0$ para todo $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega_2)]^2$. Además, $[[\mathbf{C}\,\mathbf{v}, \mathbf{v}]] = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = 0$. Ciertamente,

$$[[\mathbf{C}\,\mathbf{v}, \mathbf{v}]] = |e(\mathbf{v})|^2_{0,\Omega_2} + \|\mathbf{v}\|^2_{[L^2(\Gamma)]^2} = 0$$

muestra que $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega_2)]^2$ es un movimiento rígido con $\mathbf{v} = 0$ en Γ. Más aún, usando la *desigualdad de Korn* (ver [8]), se tiene que

$$\begin{aligned} [[\mathbf{C}\,\mathbf{v}, \mathbf{v}]] &\geq |e(\mathbf{v})|^2_{0,\Omega_2} \\ &\geq C\,\|\mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega_2)]^2} - \|\mathbf{v}\|^2_{[L^2(\Omega_2)]^2} \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega_2)]^2$, lo que muestra que $\mathbf{C}$ satisface la *desigualdad de Gårding*.

El análisis anterior muestra que $\mathbf{C}$ satisface las hipótesis del Lema 3.3.3 y luego, $\mathbf{C}$ es $[H^1(\Omega_2)]^2$*–elíptico*. Por lo tanto, usando (4.28), la *elipticidad* de $\mathbf{C}$ y el Teorema de trazas, se sigue que

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}\lambda_h, \lambda_h] &\geq C\left\{|e(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h)|^2_{0,\Omega_2} + \|\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h\|^2_{L^2(\Gamma)}\right\} \\ &= C\,[[\mathbf{C}(\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h), \mathbf{R}_{2,h}\lambda_h]] \\ &\geq C\,\|\mathbf{R}_{2,h}\lambda_h\|^2_{[H^1(\Omega_2)]^2} \\ &\geq C\,\|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \end{aligned} \tag{4.29}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$.

Ahora, usando el Teorema 4.2.2 y el hecho que $[\mathbf{T}\lambda_h, \lambda_h] = c\,\|\lambda_h\|^2_{[L^2(\Gamma)]^2} \leq c\,\|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2}$, se deduce que

$$[\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}\lambda_h, \lambda_h] \leq C\,\|\lambda_h\|^2_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \quad \forall\, \lambda_h \in \Lambda_h\,. \tag{4.30}$$

Entonces, en virtud de (4.29) y (4.30), se tiene la existencia de constantes $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$, independientes de h, tal que

$$\tilde{C}_1\,\|\lambda_h\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \leq [\mathbf{S}_{2,h}\lambda_h, \lambda_h] + [\mathbf{T}\lambda_h, \lambda_h] \leq \tilde{C}_2\,\|\lambda_h\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \tag{4.31}$$

para todo $\lambda_h \in \Lambda_h$. Finalmente, combinando (4.27) y (4.31) se completa la demostración. ■

El siguiente Teorema muestra que el número de condición espectral de $\mathbf{P}_h^{-1}\mathbf{S}_h$ está acotado independientemente de h.

Teorema 4.2.4 *Existe $C > 0$, independiente de h, tal que $\kappa \leq C$.*

Demostración. Usando el Teorema 4.2.3, la demostración es idéntica a la del Teorema 3.2.4. ■

4.2.3 Algoritmos de iteración por subdominios

Algoritmos de iteración por subdominios tipo Richardson

Para deducir los algoritmos de iteración por subdominios generados con el método de Richardson, comenzamos con dos subdominios para luego extender este desarrollo a un número arbitrario de subdominios. En efecto, analogamente a la sección 3.2.3, reemplazando $\mathbf{P} = \mathbf{S}_2 + \mathbf{T}$ en el análogo continuo de (3.33), se deduce que

$$\lambda^{n+1} = (1-\alpha)\,\lambda^n + \alpha\,\beta^n\,,$$

donde β^n satisface

$$\mathbf{P}\,\beta^n \;=\; \chi \;-\; (\mathbf{S}_1 - \mathbf{T})\,\lambda^n\,.$$

Entonces, usando integración por partes, se sigue que

$$\sigma(\mathbf{u}^n_{N,2})\nu_2 \;+\; \mathbf{T}\,\beta^n \;=\; -\sigma(\mathbf{u}^n_{N,1})\nu_1 \;+\; \mathbf{T}\,\lambda^n \quad \text{en } \Gamma\,,$$

donde $\mathbf{u}^n_{N,1} := \mathbf{u}_{N,1}(\lambda^n) = \tilde{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{R}_1\lambda^n$ y $\mathbf{u}^n_{N,2} := \mathbf{u}_{N,2}(\beta^n) = \mathbf{w}_2 + \mathbf{R}_2\beta^n$. Lo anterior junto al hecho que $\mathbf{u}^n_{N,1}|_\Gamma = \lambda^n$ y $\mathbf{u}^n_{N,2}|_\Gamma = \beta^n$, implica el siguiente esquema iterativo para actualizar λ^n:

(**0**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$ y hacer $n = 0$.

(**1**) Resolver el problema de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}^n_{N,1}) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_1\,, \\ \mathbf{u}^n_{N,1} &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,, \\ \mathbf{u}^n_{N,1} &= \lambda^n \quad \text{en } \Gamma\,. \end{aligned}$$

(**2**) Resolver el problema tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}^n_{N,2}) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_2\,, \\ \sigma(\mathbf{u}^n_{N,2})\nu_2 \;+\; \mathbf{T}\,\mathbf{u}^n_{N,2} &= -\sigma(\mathbf{u}^n_{N,1})\nu_1 \;+\; \mathbf{T}\,\lambda^n \quad \text{en } \Gamma\,, \\ \sigma(\mathbf{u}^n_{N,2})\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{u}^n_{N,2}) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3**) Actualizar λ^n mediante $\lambda^{n+1} = (1-\alpha)\,\lambda^n + \alpha\,\beta^n$ donde $\beta^n := \mathbf{u}^n_{N,2}\,|_\Gamma$. Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n+1$ y volver a (**1**).

A continuación extendemos este algoritmo a un número arbitrario de subdominios. En efecto, dado un entero $p > 2$, sean Γ_j, $j = 1, p-1$, curvas poligonales contenidas en Ω, tales que la región interior a Γ_j contenga a $\bar{D}$ y a la región interior a Γ_{j-1}, y tal que ellas dividan a Ω en p subdominios Ω_j, $j = 1, p$. En otras palabras, Ω_j es la región anular limitada por Γ_{j-1} y Γ_j. Además, adoptaremos la notación $\Gamma_0 := \Gamma_D$, $\Gamma_p := \Gamma_N$, $\lambda_0^n := \mathbf{g}_0$, $\lambda_j^n := \lambda^n|_{\Gamma_j}$ y $\mathbf{u}_{N,j}^n := \mathbf{u}_N^n|_{\Omega_j}$. Más aún, se definen $\tilde{\Omega}_1 := \bigcup_{j\ impar} \Omega_j$, $\tilde{\Omega}_2 := \bigcup_{j\ par} \Omega_j$ y $\tilde{\Gamma} := \bigcup_{j=1}^{p-1} \Gamma_j$.

Entonces, aplicando el algoritmo en dos subdominios a $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2$ y $\tilde{\Gamma}$, y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que p es par, obtenemos el siguiente esquema iterativo:

(**0**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$ y hacer $n = 0$.

(**1**) Resolver **en paralelo**, para todo j impar, $j \leq p-1$, los problemas de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}_{N,j}^n) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \mathbf{u}_{N,j}^n &= \lambda_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \mathbf{u}_{N,j}^n &= \lambda_j^n \quad \text{en } \Gamma_j\,. \end{aligned}$$

(**2**) Resolver **en paralelo**, para todo j par, $j \leq p-2$, los problemas tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}_{N,j}^n) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,j}^n)\nu_j + \mathbf{T}\,\mathbf{u}_{N,j}^n &= -\sigma(\mathbf{u}_{N,j-1}^n)\nu_{j-1} + \mathbf{T}\,\lambda_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,j}^n)\nu_j + \mathbf{T}\,\mathbf{u}_{N,j}^n &= -\sigma(\mathbf{u}_{N,j+1}^n)\nu_{j+1} + \mathbf{T}\,\lambda_j^n \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}_{N,p}^n) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,p}^n)\nu_p + \mathbf{T}\,\mathbf{u}_{N,p}^n &= -\sigma(\mathbf{u}_{N,p-1}^n)\nu_{p-1} + \mathbf{T}\,\lambda_{p-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,p}^n)\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{u}_{N,p}^n) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3**) Actualizar λ^n mediante $\lambda_i^{n+1} = (1-\alpha)\,\lambda_i^n + \alpha\,\beta_i^n$, $i = 1, p-1$, donde

$$\beta^n := (\mathbf{u}_{N,2}^n|_{\Gamma_1}, \mathbf{u}_{N,2}^n|_{\Gamma_2}, \mathbf{u}_{N,4}^n|_{\Gamma_3}, \mathbf{u}_{N,4}^n|_{\Gamma_4}, \ldots, \mathbf{u}_{N,p}^n|_{\Gamma_{p-1}})\,.$$

Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n+1$ y volver a (**1**).

Algoritmos de iteración por subdominios tipo PCGM

A continuación se presenta el algoritmo de iteración por subdominios obtenido al usar PCGM (ver sección 3.2.3) en un número arbitrario de subdominios. Para hacer esto, se procede de la misma forma que con el método de Richardson. En este nuevo algoritmo, los pasos (**0'**)–(**6'**) corresponden a la etapa de inicialización de PCGM mientras que los pasos (**1**)–(**6**), corresponden al lazo iterativo principal.

Entonces, definiendo $z_0^n := 0$, y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $p > 2$ es par, el algoritmo es el siguiente:

(**0'**) Elegir $\lambda^0 \in \Lambda_h$.

(**1'**) Resolver **en paralelo**, para todo j impar, $j \leq p-1$, los problemas de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}_{N,j}^0) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \mathbf{u}_{N,j}^0 &= \lambda_{j-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \mathbf{u}_{N,j}^0 &= \lambda_j^0 \quad \text{en } \Gamma_j\,. \end{aligned}$$

(**2'**) Resolver **en paralelo**, para todo j par, $j \leq p-2$, los problemas tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}_{N,j}^0) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,j}^0)\nu_j + \mathbf{T}\,\mathbf{u}_{N,j}^0 &= -\sigma(\mathbf{u}_{N,j-1}^0)\nu_{j-1} + \mathbf{T}\,\lambda_{j-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,j}^0)\nu_j + \mathbf{T}\,\mathbf{u}_{N,j}^0 &= -\sigma(\mathbf{u}_{N,j+1}^0)\nu_{j+1} + \mathbf{T}\,\lambda_j^0 \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}_{N,p}^0) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,p}^0)\nu_p + \mathbf{T}\,\mathbf{u}_{N,p}^0 &= -\sigma(\mathbf{u}_{N,p-1}^0)\nu_{p-1} + \mathbf{T}\,\lambda_{p-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{u}_{N,p}^0)\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{u}_{N,p}^0) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3'**) Calcular $z_i^0 = \beta_i^0 - \lambda_i^0$, $i = 1, p-1$, donde

$$\beta^0 := (\mathbf{u}_{N,2}^0|_{\Gamma_1}, \mathbf{u}_{N,2}^0|_{\Gamma_2}, \mathbf{u}_{N,4}^0|_{\Gamma_3}, \mathbf{u}_{N,4}^0|_{\Gamma_4}, \ldots, \mathbf{u}_{N,p}^0|_{\Gamma_{p-1}})\,.$$

(**4'**) Resolver **en paralelo**, para todo $j \leq p-1$, los problemas *armónicos*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{R}_j(z_{j-1}^0, z_j^0)) &= 0 \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \mathbf{R}_j(z_{j-1}^0, z_j^0) &= z_{j-1}^0 \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \mathbf{R}_j(z_{j-1}^0, z_j^0) &= z_j^0 \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{R}_p z^0_{p-1}) &= 0 \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \mathbf{R}_p z^0_{p-1} &= z^0_{p-1} \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{R}_p z^0_{p-1})\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{R}_p z^0_{p-1}) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**5'**) Calcular

$$\alpha_0 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z^0_i, \gamma^0_i >_{[L^2(\Gamma_i)]^2} + < \mathbf{T} z^0_i, z^0_i >_{[L^2(\Gamma_i)]^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z^0_i, \delta^0_i >_{[L^2(\Gamma_i)]^2} + < z^0_i, \gamma^0_i >_{[L^2(\Gamma_i)]^2}}\,,$$

donde

$$\gamma^0 := \big(\sigma(\mathbf{R}_2(z^0_1, z^0_2))\nu_2|_{\Gamma_1}, \sigma(\mathbf{R}_2(z^0_1, z^0_2))\nu_2|_{\Gamma_2}, \sigma(\mathbf{R}_4(z^0_3, z^0_4))\nu_4|_{\Gamma_3},$$
$$\sigma(\mathbf{R}_4(z^0_3, z^0_4))\nu_4|_{\Gamma_4}, \ldots, \sigma(\mathbf{R}_p(z^0_{p-1}))\nu_p|_{\Gamma_{p-1}}\big)$$

y

$$\delta^0 := \big(\sigma(\mathbf{R}_1(z^0_0, z^0_1))\nu_1|_{\Gamma_1}, \sigma(\mathbf{R}_3(z^0_2, z^0_3))\nu_3|_{\Gamma_2}, \sigma(\mathbf{R}_3(z^0_2, z^0_3))\nu_3|_{\Gamma_3}, \ldots,$$
$$\sigma(\mathbf{R}_{p-1}(z^0_{p-2}, z^0_{p-1}))\nu_{p-1}|_{\Gamma_{p-2}}, \sigma(\mathbf{R}_{p-1}(z^0_{p-2}, z^0_{p-1}))\nu_{p-1}|_{\Gamma_{p-1}}\big)\ .$$

(**6'**) Actualizar λ^0 mediante $\lambda^1_i = \lambda^0_i + \alpha_0\, z^0_i$, $i = 1, p-1$, y hacer $w_1 = 1$, $n = 1$.

(**1**) Resolver **en paralelo**, para todo j impar, $j \leq p-1$, los problemas de *Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}^n_{N,j}) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \mathbf{u}^n_{N,j} &= \lambda^n_{j-1} \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \mathbf{u}^n_{N,j} &= \lambda^n_j \quad \text{en } \Gamma_j\,. \end{aligned}$$

(**2**) Resolver **en paralelo**, para todo j par, $j \leq p-2$, los problemas tipo *Robin*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}^n_{N,j}) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \sigma(\mathbf{u}^n_{N,j})\nu_j + \mathbf{T}\,\mathbf{u}^n_{N,j} &= -\sigma(\mathbf{u}^n_{N,j-1})\nu_{j-1} + \mathbf{T}\,\lambda^n_{j-1} \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{u}^n_{N,j})\nu_j + \mathbf{T}\,\mathbf{u}^n_{N,j} &= -\sigma(\mathbf{u}^n_{N,j+1})\nu_{j+1} + \mathbf{T}\,\lambda^n_j \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{u}^n_{N,p}) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \sigma(\mathbf{u}^n_{N,p})\nu_p + \mathbf{T}\,\mathbf{u}^n_{N,p} &= -\sigma(\mathbf{u}^n_{N,p-1})\nu_{p-1} + \mathbf{T}\,\lambda^n_{p-1} \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{u}^n_{N,p})\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{u}^n_{N,p}) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**3**) Calcular $z_i^n = \beta_i^n - \lambda_i^n$, $i = 1, p-1$, donde

$$\beta^n := (\mathbf{u}_{N,2}^n|_{\Gamma_1}, \mathbf{u}_{N,2}^n|_{\Gamma_2}, \mathbf{u}_{N,4}^n|_{\Gamma_3}, \mathbf{u}_{N,4}^n|_{\Gamma_4}, \ldots, \mathbf{u}_{N,p}^n|_{\Gamma_{p-1}}) .$$

(**4**) Resolver **en paralelo**, para todo $j \leq p-1$, los problemas *armónicos*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{R}_j(z_{j-1}^n, z_j^n)) &= 0 \quad \text{en } \Omega_j\,, \\ \mathbf{R}_j(z_{j-1}^n, z_j^n) &= z_{j-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{j-1}\,, \\ \mathbf{R}_j(z_{j-1}^n, z_j^n) &= z_j^n \quad \text{en } \Gamma_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,\sigma\,(\mathbf{R}_p z_{p-1}^n) &= 0 \quad \text{en } \Omega_p\,, \\ \mathbf{R}_p z_{p-1}^n &= z_{p-1}^n \quad \text{en } \Gamma_{p-1}\,, \\ \sigma(\mathbf{R}_p z_{p-1}^n)\nu &= \tilde{\mathbf{T}}^N(\mathbf{R}_p z_{p-1}^n) \quad \text{en } \Gamma_N\,. \end{aligned}$$

(**5**) Calcular

$$\alpha_0 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^n, \gamma_i^n >_{[L^2(\Gamma_i)]^2} + < \mathbf{T} z_i^n, z_i^n >_{[L^2(\Gamma_i)]^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^n, \delta_i^n >_{[L^2(\Gamma_i)]^2} + < z_i^n, \gamma_i^n >_{[L^2(\Gamma_i)]^2}}$$

y

$$w_{n+1}^{-1} = 1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^n, \gamma_i^n >_{[L^2(\Gamma_i)]^2} + < \mathbf{T} z_i^n, z_i^n >_{[L^2(\Gamma_i)]^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} < z_i^{n-1}, \gamma_i^{n-1} >_{[L^2(\Gamma_i)]^2} + < \mathbf{T} z_i^{n-1}, z_i^{n-1} >_{[L^2(\Gamma_i)]^2}} \frac{1}{w_n}\,,$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma^n := (&\sigma(\mathbf{R}_2(z_1^n, z_2^n))\nu_2|_{\Gamma_1}, \sigma(\mathbf{R}_2(z_1^n, z_2^n))\nu_2|_{\Gamma_2}, \sigma(\mathbf{R}_4(z_3^n, z_4^n))\nu_4|_{\Gamma_3}, \\ &\sigma(\mathbf{R}_4(z_3^n, z_4^n))\nu_4|_{\Gamma_4}, \ldots, \sigma(\mathbf{R}_p(z_{p-1}^n))\nu_p|_{\Gamma_{p-1}}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \delta^n := (&\sigma(\mathbf{R}_1(z_0^n, z_1^n))\nu_1|_{\Gamma_1}, \sigma(\mathbf{R}_3(z_2^n, z_3^n))\nu_3|_{\Gamma_2}, \sigma(\mathbf{R}_3(z_2^n, z_3^n))\nu_3|_{\Gamma_3}, \ldots, \\ &\sigma(\mathbf{R}_{p-1}(z_{p-2}^n, z_{p-1}^n))\nu_{p-1}|_{\Gamma_{p-2}}, \sigma(\mathbf{R}_{p-1}(z_{p-2}^n, z_{p-1}^n))\nu_{p-1}|_{\Gamma_{p-1}}) \ . \end{aligned}$$

(**6**) Actualizar λ^n mediante $\lambda_i^{n+1} = \lambda_i^{n-1} + w_{n+1}(\alpha_n z_i^n + \lambda_i^n - \lambda_i^{n-1})$, $i = 1, p-1$.

(**7**) Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $n = n+1$ y volver a (**1**).

4.3 Extensión a problemas no lineales

4.3.1 El problema exterior no lineal

Sea D un dominio acotado y simplemente conexo en $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ_D. Denotemos por Ω_1 a la región anular limitada por Γ_D y otra curva cerrada y poligonal Γ_1. En lo que sigue se considera el problema exterior que consiste de un material elasto–plástico en Ω_1 y elástico lineal en la región no acotada $\Omega_e := \mathbf{R}^2 - \{\bar{D} \cup \bar{\Omega}_1\}$.

Como descripción del material en Ω_1, se considera la ecuación constitutiva de Hencky–Mises dada por (ver [48], [49])

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})(x) := [\kappa(x) - \frac{1}{2}\,\tilde{\mu}(x, G(\mathbf{u})(x))]\,\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(x) + \tilde{\mu}(x, G(\mathbf{u})(x))e_{ij}(\mathbf{u})(x)$$

para todo $x \in \Omega_1$, donde $\kappa : \Omega_1 \to \mathbf{R}$ es el *bulk modulus*, $\tilde{\mu} : \Omega_1 \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ es la función de Lamé y $G(\mathbf{u}) := \sum_{i,j=1}^{2} [e^*_{ij}(\mathbf{u})]^2$, con $e^*_{ij}(\mathbf{u}) := e_{ij}(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$. Además, se supone que κ y $\tilde{\mu}$ son continuas y que $\tilde{\mu}(x, \cdot)$ es continuamente diferenciable en $\mathbf{R}^+$ para todo $x \in \Omega_1$. Más aún, se asume que existen constantes positivas k_0, k_1, μ_0, μ_1 y μ_2 tales que

$$k_0 \le \kappa(x) \le k_1 \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}_1\,,$$

$$\mu_0 \le \tilde{\mu}(x, \eta) \le 2\,\kappa(x) \quad \forall\,(x, \eta) \in \bar{\Omega}_1 \times \mathbf{R}^+$$

y

$$\mu_1 \le \tilde{\mu}(x, \eta) + 2\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\tilde{\mu}(x, \eta)\right\}\eta \le \mu_2 \quad \forall\,(x, \eta) \in \bar{\Omega}_1 \times \mathbf{R}^+\,.$$

Por otro lado, como descripción del material en Ω_e, se considera la ecuación constitutiva

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})(x) := 2\mu\, e_{ij}(\mathbf{u})(x) + \lambda\,\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(x) \quad \forall\, x \in \Omega_e\,,$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé, las cuales satisfacen $\mu > 0$ y $3\lambda + 2\mu > 0$.

Entonces, dado $\mathbf{f} := (f_1, f_2) \in [L^2(\Omega_1)]^2$, $\mathbf{g}_0 \in [H^{1/2}(\Gamma_D)]^2$ y $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2 \in [H^{1/2}(\Gamma_1)]^2$, el problema exterior no lineal es: *Hallar* $\mathbf{u}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2$ *y* $\mathbf{u}_2 \in [H^1_{loc}(\Omega_e)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_1\,,\\
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,,\\
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 &= \mathbf{g}_1 \quad \text{en } \Gamma_1\,,\\
\mathbf{t}^-[\mathbf{u}_1] - \mathbf{t}^+[\mathbf{u}_2] &= \mathbf{g}_2 \quad \text{en } \Gamma_1\,,\\
-\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}_2) &= 0 \quad \text{en } \Omega_e\,,\\
\mathbf{u}_2(x) &= O(\|x\|^{-1})\,,\ \|x\| \to +\infty\,,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

donde $\mathbf{N} := (N_1, N_2)$ es el operador no lineal definido por

$$N_i(\mathbf{u}) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{[\kappa - \frac{1}{2}\,\tilde{\mu}(\cdot, G(\mathbf{u}))]\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right\} + \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\tilde{\mu}(\cdot, G(\mathbf{u}))e_{ij}(\mathbf{u})\right\}\,.$$

Además, las tracciones sobre Γ_1,

$$\mathbf{t}^-[\mathbf{u}] := (t_1^-(\mathbf{u}), t_2^-(\mathbf{u}))$$

y

$$\mathbf{t}^+[\mathbf{u}] := (t_1^+(\mathbf{u}), t_2^+(\mathbf{u}))$$

están definidas por

$$t_i^-[\mathbf{u}] := [\kappa - \frac{1}{2}\,\tilde{\mu}(\cdot, G(\mathbf{u}))](\mathrm{div}\,\mathbf{u})\,\nu_1^i + \frac{1}{2}\,\tilde{\mu}(\cdot, G(\mathbf{u}))\frac{\partial u_i}{\partial \nu_1} + \frac{1}{2}\,\tilde{\mu}(\cdot, G(\mathbf{u}))\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\cdot\nu$$

y

$$t_i^+(\mathbf{u}) := \lambda\,(\mathrm{div}\,\mathbf{u})\nu_1^i + \mu\,\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mu\,\frac{\partial u_i}{\partial \nu}\,,$$

donde $\nu_1 := (\nu_1^1, \nu_1^2)$ es el vector normal unitario exterior a Γ_1.

Ahora, con el objeto de aplicar el Método de Han y Wu, introducimos una circunferencia Γ_N de radio R, centrada en el origen, tal que su región interior contenga a $\bar{D} \cup \bar{\Omega}_1$ y definimos por Ω_2 a la región anular limitada por Γ_1 y Γ_N. Entonces, el problema exterior (4.32) se reduce al siguiente problema mixto sobre la región acotada $\bar{\Omega} := \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$: *Hallar* $\mathbf{u}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2$ *y* $\mathbf{u}_2 \in [H^1(\Omega_2)]^2$ *tal que*

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega_1\,,\\
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{g}_0 \quad \text{en } \Gamma_D\,,\\
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 &= \mathbf{g}_1 \quad \text{en } \Gamma_1\,,\\
\mathbf{t}^-[\mathbf{u}_1] - \mathbf{t}^+[\mathbf{u}_2] &= \mathbf{g}_2 \quad \text{en } \Gamma_1\,,\\
-\mathrm{div}\,\sigma(\mathbf{u}_2) &= 0 \quad \text{en } \Omega_2\,,\\
\sigma(\mathbf{u}_2)\nu &= \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{u}_2) \quad \text{en } \Gamma_N\,,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

donde ν denota el vector normal unitario exterior a Γ_N y $\tilde{\mathbf{T}}$ es el operador DtN basado en series de Fourier y descrito en la sección 4.1.

Por otro lado, usando integración por partes, obtenemos la siguiente formulación variacional de (4.33): *Hallar* $\mathbf{u}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2$ *tal que* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_0$ *en* Γ_D *y* $\mathbf{u}_2 \in [H^1(\Omega_2)]^2$ *tal que*

$$A_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_1}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx + \int_{\Gamma_1}\mathbf{t}^-[\mathbf{u}_1]\cdot\mathbf{v}\,ds \quad \forall\,\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega_1)]^2 \tag{4.34}$$

y

$$A_2(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}) + B(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}) = -\int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^+[\mathbf{u}_2]\cdot\mathbf{v}\,ds \quad \forall\,\mathbf{v}\in[H^1(\Omega_2)]^2\,, \tag{4.35}$$

donde B es como en (4.5) y las formas bilineales $A_1 : [H^1(\Omega_1)]^2 \times [H^1(\Omega_1)]^2 \to \mathbf{R}$ y $A_2 : [H^1(\Omega_2)]^2 \times [H^1(\Omega_2)]^2 \to \mathbf{R}$, están definidas por

$$A_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}) := \int_{\Omega_1} [\kappa(x) - \frac{1}{2}\,\tilde{\mu}(x, G(\mathbf{u}_1)(x))]\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_1\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dx$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega_1} \tilde{\mu}(x, G(\mathbf{u}_1)(x))\,e_{ij}(\mathbf{u}_1)\,e_{ij}(\mathbf{v})\,dx$$

y

$$\begin{aligned} A_2(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}) &:= \int_{\Omega_2} [\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + 2\mu\sum_{i,j=1}^{2} e_{ij}(\mathbf{u}_2)\,e_{ij}(\mathbf{v})]\,dx \\ &= \int_{\Omega_2} \sigma(\mathbf{u}_2) : e(\mathbf{v})\,dx\,. \end{aligned}$$

Sean $\tilde{\mathbf{g}}_0 \in [H^1(\Omega)]^2$ y $\tilde{\mathbf{g}}_1 \in [H^1_0(\Omega)]^2$ extensiones regulares tales que $\tilde{\mathbf{g}}_0|_{\Gamma_D} := \mathbf{g}_0$, $\tilde{\mathbf{g}}_0|_{\bar{\Omega}_2} := 0$ y $\tilde{\mathbf{g}}_1|_{\Gamma_1} := \mathbf{g}_1$. Por lo tanto, usando (4.34), (4.35) y definiendo la incógnita global $\mathbf{u} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ por

$$\mathbf{u} := \begin{cases} \mathbf{u}_1 - \tilde{\mathbf{g}}_0\,, & \text{en } \Omega_1 \\ \mathbf{u}_2 - \tilde{\mathbf{g}}_1\,, & \text{en } \Omega_2\,, \end{cases}$$

se obtiene la siguiente formulación de (4.33): *Hallar* $\mathbf{u} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ *tal que*

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \tilde{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall\,\mathbf{v}\in[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2\,, \tag{4.36}$$

donde

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) := A_1(\mathbf{u}+\tilde{\mathbf{g}}_0,\mathbf{v})\,,$$

$$\tilde{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := A_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

y

$$F(\mathbf{v}) := \int_{\Omega_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_2\cdot\mathbf{v}\,ds - A_2(\tilde{\mathbf{g}}_1,\mathbf{v})\,.$$

Sea $[\cdot,\cdot]$ la paridad dual entre $[[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2]^*$ y $[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$. Entonces, tomando en cuenta (4.36), se define el siguiente problema no lineal: *Hallar* $\mathbf{u} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ *tal que*

$$[\mathbf{T}\,\mathbf{u},\mathbf{v}] = [\mathbf{F},\mathbf{v}] \quad \forall\,\mathbf{v}\in[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2\,, \tag{4.37}$$

donde $\mathbf{T} : [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 \to [[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2]^*$ es el operador no lineal definido por

$$[\mathbf{T}\,\mathbf{u}, \mathbf{v}] := A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$$

y $\mathbf{F} \in [[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2]^*$ es dado como sigue

$$[\mathbf{F}, \mathbf{v}] := \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{v}\, ds - A_2(\tilde{\mathbf{g}}_1, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 .$$

Naturalmente, utilizando la forma bilineal B_N dada en (4.7), en lugar de B, definimos el operador no lineal $\mathbf{T}_N : [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 \to [[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2]^*$ por

$$[\mathbf{T}_N \mathbf{u}, \mathbf{v}] := A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{B}_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 ,$$

donde

$$\tilde{B}_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := A_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$$

y se establece la sucesión de problemas aproximados: *Hallar* $\mathbf{u}_N \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ *tal que*

$$[\mathbf{T}_N \mathbf{u}_N, \mathbf{v}] = [\mathbf{F}, \mathbf{v}] \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 . \tag{4.38}$$

Por otro lado, puede escribirse que

$$A_1(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega_1} a_{ij}(x, e(\mathbf{v})(x))\, e_{ij}(\mathbf{z})(x)\, dx \quad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2 ,$$

donde $a_{ij} : \Omega_1 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $i, j = 1, 2$, son las aplicaciones no lineales dadas por

$$a_{ij}(x, \alpha) := [\kappa(x) - \frac{1}{2}\, \tilde{\mu}(x, \eta(\alpha))]\, \delta_{ij} \sum_{k=1}^{2} \alpha_{kk} + \tilde{\mu}(x, \eta(\alpha))\, \alpha_{ij}$$

para todo $(x, \alpha) \in \Omega_1 \times \mathbf{R}^4$ y

$$\eta(\alpha) := \sum_{i,j=1}^{2} \left\{ \alpha_{ij} - \frac{1}{2}\, \delta_{ij} \sum_{k=1}^{2} \alpha_{kk} \right\}^2 .$$

Ahora, para cada índice $i, j = 1, 2$, definimos los operadores de Nemytsky $A_{ij} : [H^1(\Omega)]^2 \to L^2(\Omega)$ por

$$A_{ij}(\mathbf{v})(x) := a_{ij}(x, e(\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{g}}_0)(x)) .$$

Además, extendemos los coeficientes a_{ij} sobre todo Ω, haciendo $a_{ij}(x, \cdot) = 0$ para todo $x \in \Omega - \Omega_1$, y observamos que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A_1(\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{g}}_0, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} A_{ij}(\mathbf{u})(x)\, e_{ij}(\mathbf{v})(x)\, dx .$$

A continuación presentamos algunos resultados expuestos en [2], los cuales serán de utilidad en lo que sigue. En efecto, el siguiente Lema es necesario para verificar la continuidad de los operadores de Nemitsky A_{ij}.

Lema 4.3.1 *La función $a_{ij}(\cdot,\alpha)$ es medible en Ω para todo $\alpha \in \mathbf{R}^4$ y $a_{ij}(x,\cdot)$ es continua en $\mathbf{R}^4$ c.t.p. en Ω. Además, existe $C > 0$ tal que $|a_{ij}(x,\alpha)| \leq C\,\|\alpha\|$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}^4$ y c.t.p. en Ω.*

Demostración. Ver Lema 4.1 en [2]. ■

Los siguientes dos Lemas permiten establecer, respectivamente, la monotonía y *Lipschitz–continuidad* de los operadores no lineales $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_N$.

Lema 4.3.2 *Las aplicaciones no lineales $a_{ij}(x,\cdot)$ tienen primeras derivadas parciales en $\mathbf{R}^4$ c.t.p. en Ω. Además, existe $C > 0$ tal que*

$$\sum_{i,k=1}^{2}\sum_{j,l=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_{kl}}a_{ij}(x,\alpha)\,\beta_{kl}\,\beta_{ij} \geq C\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}^2$$

para todo $\beta := (\beta_{ij}) \in \mathbf{R}^4$, $\alpha := (\alpha_{ij}) \in \mathbf{R}^4$ y c.t.p. en Ω_1.

Demostración. Ver Lema 4.2 en [2]. ■

Lema 4.3.3 *Las aplicaciones no lineales $a_{ij}(x,\cdot)$ tienen primeras derivadas parciales en $\mathbf{R}^4$ c.t.p. en Ω. Las funciones $\frac{\partial}{\partial\alpha_{kl}}a_{ij}(\cdot,\alpha)$ son medibles en Ω para todo $\alpha \in \mathbf{R}^4$ y las funciones $\frac{\partial}{\partial\alpha_{kl}}a_{ij}(x,\cdot)$ son continuas en $\mathbf{R}^4$ c.t.p. en Ω. Además, para cada $i,j,k,l = 1,2$, existe $C > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha_{kl}}a_{ij}(x,\alpha)\right| \leq C \quad \forall\,\alpha \in \mathbf{R}^4\,,\ \forall\,x \in \Omega\,.$$

Demostración. Ver Lema 4.3 en [2]. ■

El siguiente resultado establece que las formas bilineales $\tilde{B}$ y $\tilde{B}_N$ son $[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$–*elípticas*. Además, permite controlar el error generado al usar un número finito de términos en las series de Fourier que definen la aplicación $\tilde{\mathbf{T}}$.

Lema 4.3.4 *Existen constantes C_1, $C_2 > 0$ tal que*

$$\tilde{B}(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq C_1\,\|\mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \quad \forall\,\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2\,,$$

$$\tilde{B}_N(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq C_1\,\|\mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \quad \forall\,\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$$

y

$$|\tilde{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \tilde{B}_N(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \frac{C_2}{N^{l-1}}\|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2}\|\mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma_N)]^2}$$

para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ y para todo $l \geq 2$.

Demostración. Usando el Lema 4.1.1 y el hecho que A_2 es $[H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$–*elíptica*, se deduce que

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= A_2(\mathbf{v},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{v}) \\ &\geq A_2(\mathbf{v},\mathbf{v}) \\ &\geq C_1 \|\mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega)]^2}\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$. Claramente el mismo argumento es aplicable a $\tilde{B}_N$.

Finalmente, usando el Teorema 4.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned}|\tilde{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \tilde{B}_N(\mathbf{u},\mathbf{v})| &= |A_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - A_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B_N(\mathbf{u},\mathbf{v})| \\ &= |B(\mathbf{u},\mathbf{v}) - B_N(\mathbf{u},\mathbf{v})| \\ &\leq \frac{C_2}{N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[H^{1/2}(\Gamma_N)]^2}\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ y para todo $l \geq 2$. Esto completa la demostración. ■

Los siguientes dos Teoremas establecen, respectivamente, la monotonía fuerte y *Lipschitz–continuidad* de los operadores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_N$.

Teorema 4.3.1 *Existe $C > 0$ tal que*

$$[\mathbf{T}\,\mathbf{u} - \mathbf{T}\,\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}] \geq C \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega)]^2}$$

y

$$[\mathbf{T}_N\mathbf{u} - \mathbf{T}_N\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}] \geq C \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega)]^2}$$

para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$.

Demostración. Se sigue de la desigualdad de Korn y los Lemas 4.3.2 y 4.3.4. Detalles son dados en la demostración del Teorema 5.1 en [2]. ■

Teorema 4.3.2 *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{T}\,\mathbf{u} - \mathbf{T}\,\mathbf{v}\|_{[[H^1(\Omega)]^2]^*} \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2}$$

y

$$\|\mathbf{T}_N\mathbf{u} - \mathbf{T}_N\mathbf{v}\|_{[[H^1(\Omega)]^2]^*} \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2}$$

para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$.

Demostración. Se sigue del Lema 4.3.3 y la desigualdad de Korn. Detalles son dados en la demostración del Teorema 5.2 en [2]. ■

Teorema 4.3.3 *Existe un único* $\mathbf{u} \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ *solución de (4.37). Más aún, existe un único* $\mathbf{u}_N \in [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$ *solución de (4.38).*

Demostración. Es consecuencia directa de los Teoremas 4.3.1, 4.3.2 y un resultado clásico en [48]. ■

4.3.2 Aproximación discreta del problema no lineal

Al igual que en el caso lineal, definimos una triangulación de $\bar{\Omega}$ compuesta de triángulos rectos y curvos con el objeto de describir exactamente a la circunferencia Γ_N. En efecto, dado $N \in \mathbf{N}$, sea $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_N = 2\pi$ una partición uniforme de $[0, 2\pi]$ con $t_{j+1} - t_j = \frac{2\pi}{N}$ para todo $j = 0, N-1$. Además, consideramos $z : [0, 2\pi] \to \Gamma_N$ como la parametrización de Γ_N definida por $z(t) := R\,(\cos t, \sin t)^T$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y denotamos por $\Omega_{\tilde{h}}$ a la región anular limitada por Γ_D y la poligonal $\Gamma_{N,\tilde{h}}$, cuyos vértices son $z(t_1)$, $z(t_2), \ldots, z(t_n)$. Más aún, sea $\mathcal{T}_{\tilde{h}}$ una triangulación regular de $\Omega_{\tilde{h}}$, compuesta de triángulos $\tilde{\tau}$ de diámetro $h_{\tilde{\tau}}$, y se define

$$\tilde{h} := \sup_{\tilde{\tau} \in \mathcal{T}_{\tilde{h}}} h_{\tilde{\tau}}\,.$$

Entonces, reemplazando cada triángulo $\tilde{\tau} \in \mathcal{T}_{\tilde{h}}$ con un lado sobre $\Gamma_{N,\tilde{h}}$, por el correspondiente triángulo curvo sobre Γ_N, obtenemos a partir de $\mathcal{T}_{\tilde{h}}$, una triangulación $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ compuesta de triángulos rectos y curvos.

Sea $\hat{\tau}$ el triángulo de referencia con vértices $\hat{P}_1 := (0,0)^T$, $\hat{P}_2 := (1,0)^T$ y $\hat{P}_3 := (0,1)^T$ y consideremos la familia de aplicaciones $\{F_\tau\}_{\tau \in \mathcal{T}_h}$ tal que $F_\tau(\hat{\tau}) = \tau$. Es decir, si τ es un triángulo recto de $\mathcal{T}_h$, entonces F_τ es como en (4.20). Ahora, si τ es un triángulo curvo con vértices P_1, P_2, P_3, tal que $P_2 = z(t_{j-1}) \in \Gamma_N$ y $P_3 = z(t_j) \in \Gamma_N$, entonces F_τ está dada en (4.21).

A continuación, denotamos por $P_1(\hat{\tau})$ al espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre $\hat{\tau}$. Entonces, para cada triángulo $\tau \in \mathcal{T}_h$, se define

$$P_1(\tau) := \{v : v = (JF_\tau)^{-1}(DF_\tau)\,\hat{v} \circ F_\tau^{-1} \quad \forall\, \hat{v} \in P_1(\hat{\tau})\}\,,$$

donde JF_τ y DF_τ denotan, respectivamente, el Jacobiano y la diferencial de Frêchet de la aplicación F_τ. En virtud de lo anterior, definimos los subespacios de elementos finitos

$$\tilde{H}_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_\tau \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \subseteq \bar{\Omega}\}$$

y

$$\tilde{H}_h^0 := \{v_h \in \tilde{H}_h : v_h = 0 \text{ en } \Gamma_D\}\,.$$

Más aún, se define

$$H_h := \tilde{H}_h \times \tilde{H}_h$$

y

$$H_h^0 := \tilde{H}_h^0 \times \tilde{H}_h^0\,.$$

Usando lo anterior, consideramos el siguiente esquema discreto asociado a (4.38): *Hallar* $\mathbf{u}_{N,h} \in H_h^0$ *tal que*

$$[\mathbf{T}_N \mathbf{u}_{N,h}, \mathbf{v}_h] = [\mathbf{F}, \mathbf{v}_h] \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in H_h^0\,. \tag{4.39}$$

Es claro que el problema discreto (4.39) admite solución única $\mathbf{u}_{N,h} \in H_h^0$. Ahora, previo a estimar el error $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N,h}\|_{[H^1(\Omega)]^2}$, se necesita el siguiente Teorema.

Teorema 4.3.4 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{u}_N$ *las únicas soluciones de (4.37) y (4.38), respectivamente. Entonces, para todo* $l \geq 2$*, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq \frac{C}{N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} .$$

Demostración. Usando la monotonía de $\mathbf{T}_N$, el Lema 4.3.4 y el Teorema de trazas, se deduce que

$$\begin{aligned}
C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|^2_{[H^1(\Omega)]^2} &\leq [\mathbf{T}_N\mathbf{u} - \mathbf{T}_N\mathbf{u}_N, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N] \\
&= A(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N) + \tilde{B}_N(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N) \\
&\quad -A(\mathbf{u}_N, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N) - \tilde{B}_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N) \\
&= F(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N) - \tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N) \\
&\quad + \tilde{B}_N(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N) - F(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N) \\
&\leq |\tilde{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N) - \tilde{B}_N(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_N)| \\
&\leq \frac{C}{N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{[H^{1/2}(\Gamma_N)]^2} \\
&\leq \frac{C}{N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{[H^1(\Omega)]^2} .
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ■

Teorema 4.3.5 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{u}_{N,h}$ *las únicas soluciones de (4.37) y (4.39), respectivamente. Entonces, para todo* $l \geq 2$*, existe* $C > 0$*, independiente de* h*, tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N,h}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq C \left\{ \text{dist}\,(\mathbf{u}, H_h^0) + \frac{1}{N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} \right\} .$$

Demostración. Se sigue del Teorema 4.3.4. Detalles son dados en la demostración del Teorema 5.5 en [2]. ■

Teorema 4.3.6 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{u}_{N,h}$ *las únicas soluciones de (4.37) y (4.39), respectivamente. Entonces, para todo* $l \geq 2$*, existe* $C > 0$*, independiente de* h*, tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N,h}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq C\, h\, \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \frac{C}{N^{l-1}} \|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} .$$

Demostración. Se sigue del Teorema 4.3.5 y la estimación $\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h\, \|v\|_{H^2(\Omega)}$ para todo $v \in H^2(\Omega)$, donde $I_h : H^2(\Omega) \to \tilde{H}_h$ es el operador usual de interpolación (ver [7]). ■

4.3.3 El esquema de linealización

En lo que sigue se muestra la aplicabilidad del esquema de linealización para problemas fuertemente monótonos, presentado en la sección 3.4.3, al problema no lineal discreto (4.39).

Sea $\mathbf{H} := [H^1_{\Gamma_D}(\Omega)]^2$. Entonces, en virtud de los Teoremas 4.3.1 y 4.3.2, observamos nuevamente que el operador no lineal $\mathbf{T}_N : \mathbf{H} \to \mathbf{H}^*$ es fuertemente monótono y *Lipschitz–continuo*, es decir, existen constantes positivas α_N y M_N tal que

$$[\mathbf{T}_N\,\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{z}] - [\mathbf{T}_N\,\mathbf{z}, \mathbf{v} - \mathbf{z}] \geq \alpha_N \,\|\mathbf{v} - \mathbf{z}\|^2_{\mathbf{H}} \quad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbf{H}$$

y

$$\|\mathbf{T}_N\,\mathbf{v} - \mathbf{T}_N\,\mathbf{z}\|_{\mathbf{H}^*} \leq M_N \,\|\mathbf{v} - \mathbf{z}\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbf{H}\,.$$

Notemos que, en particular, lo anterior es válido para todo $\mathbf{v}_h$, $\mathbf{z}_h \in H^0_h \subset \mathbf{H}$.

Sea $\hat{A} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ una forma bilineal, simétrica, continua y $\mathbf{H}$–*elíptica*, con constantes $M_A > 0$ y $\alpha_A > 0$, esto es,

$$|\hat{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M_A \,\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$$

y

$$\hat{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha_A \,\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}\,.$$

Usando lo anterior, puede definirse la norma

$$\|\mathbf{v}\|_E := \hat{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$$

y observamos que

$$\alpha_A^{1/2} \,\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{v}\|_E \leq M_A^{1/2} \,\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}\,. \tag{4.40}$$

A continuación, definimos el operador discreto $\mathbf{P} : H^0_h \to H^0_h$ donde, para todo $\mathbf{v}_h \in H^0_h$, $\mathbf{P}\mathbf{v}_h \in H^0_h$ se define como la única solución del problema variacional: *Hallar* $\mathbf{P}\mathbf{v}_h \in H^0_h$ *tal que*

$$\hat{A}(\mathbf{P}\mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h) = [\mathbf{T}_N \mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h] - [\mathbf{F}, \mathbf{z}_h] \quad \forall\, \mathbf{z}_h \in H^0_h\,. \tag{4.41}$$

Nótese que $\mathbf{P}$ está bien definido en virtud del Lema de Lax–Milgram. Con esto, introducimos el operador discreto $\mathbf{T}_L : H^0_h \to H^0_h$ dado por

$$\mathbf{T}_L\,\mathbf{v}_h := \mathbf{v}_h - \rho\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}_h \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in H^0_h\,,$$

donde $\rho > 0$ es un parámetro fijo.

Por otro lado, como consecuencia de los Teoremas 3.4.4 y 3.4.5, se deduce que el operador $\mathbf{T}_L$ admite un único punto fijo en H_h^0 para todo $\rho < \rho_0 := \dfrac{2\,\alpha_N\,\alpha_A^3}{M_N^2 M_A^2}$. Además, dado cualquier $\mathbf{u}_{N,h}^0 \in H_h^0$, la sucesión

$$\mathbf{u}_{N,h}^{k+1} := \mathbf{T}_L\,\mathbf{u}_{N,h}^k \quad \forall\, k \geq 0\,,$$

es tal que

$$\|\mathbf{u}_{N,h} - \mathbf{u}_{N,h}^k\|_E \leq \frac{\mu^k}{1-\mu}\|\mathbf{u}_{N,h}^1 - \mathbf{u}_{N,h}^0\|_E\,,$$

donde

$$\mu := \left[1 - \frac{2\,\rho\,\alpha_N}{M_A} + \frac{\rho^2 M_N^2 M_A}{\alpha_A^3}\right]^{1/2}.$$

Más aún, en virtud de (4.40), se tiene la estimación

$$\|\mathbf{u}_{N,h} - \mathbf{u}_{N,h}^k\|_{\mathbf{H}} \leq \sqrt{\frac{M_A}{\alpha_A}}\frac{\mu^k}{1-\mu}\,\|\mathbf{u}_{N,h}^1 - \mathbf{u}_{N,h}^0\|_{\mathbf{H}}\,. \tag{4.42}$$

Entonces, como consecuencia del Teorema 3.4.5 y (4.42), se define el siguiente esquema iterativo de tipo lineal asociado a (4.39):

(**0**) Elegir un dato inicial $\mathbf{u}_{N,h}^0 \in H_h^0$, un parámetro $\rho < \rho_0$ y hacer $k = 0$.

(**1**) Resolver el problema: *Hallar* $\beta^k \in H_h^0$ *tal que*

$$\hat{A}(\beta^k, \mathbf{v}_h) = [\mathbf{T}_N \mathbf{u}_{N,h}^k, \mathbf{v}_h] - [\mathbf{F}, \mathbf{v}_h] \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in H_h^0\,.$$

(**2**) Actualizar $\mathbf{u}_{N,h}^k$ mediante $\mathbf{u}_{N,h}^{k+1} = \mathbf{u}_{N,h}^k - \rho\,\beta^k$. Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $k = k+1$ y volver a (**1**).

A manera de ejemplo, si se elige la forma bilineal simétrica, continua y $\mathbf{H}$–*elíptica*

$$\hat{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v})\,dx \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}\,,$$

el esquema de linealización queda dado por

(**0**) Elegir un dato inicial $\mathbf{u}_{N,h}^0 \in H_h^0$, un parámetro $\rho < \rho_0$ y hacer $k = 0$.

(**1**) Resolver el problema: *Hallar* $\beta^k \in H_h^0$ *tal que*

$$\int_\Omega \sigma(\beta^k) : e(\mathbf{v}_h)\,dx = [\mathbf{T}_N \mathbf{u}_{N,h}^k, \mathbf{v}_h] - [\mathbf{F}, \mathbf{v}_h] \quad \forall\, \mathbf{v} \in H_h^0\,.$$

(**2**) Actualizar $\mathbf{u}_{N,h}^k$ mediante $\mathbf{u}_{N,h}^{k+1} = \mathbf{u}_{N,h}^k - \rho\,\beta^k$. Si algún criterio de convergencia especificado no se cumple, hacer $k = k+1$ y volver a (**1**).

Finalizamos con el siguiente Teorema.

Teorema 4.3.7 *Sea* $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2$ *la única solución de (4.37). Entonces, para todo* $l \geq 2$, *existe* $C > 0$, *independiente de* h *y* k, *tal que*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N,h}^k\|_{[H^1(\Omega)]^2} &\leq C\,h\,\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \frac{C}{N^{l-1}}\|\mathbf{u}\|_{[H^{l-1/2}(\Gamma_N)]^2} \\ &\quad + \sqrt{\frac{M_A}{\alpha_A}}\frac{\mu^k}{1-\mu}\|\mathbf{u}_{N,h}^1 - \mathbf{u}_{N,h}^0\|_{[H^1(\Omega)]^2}\,.\end{aligned}$$

Demostración. Usando la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N,h}^k\|_{[H^1(\Omega)]^2} &= \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N,h} + \mathbf{u}_{N,h} - \mathbf{u}_{N,h}^k\|_{[H^1(\Omega)]^2} \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N,h}\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|\mathbf{u}_{N,h} - \mathbf{u}_{N,h}^k\|_{[H^1(\Omega)]^2}\,.\end{aligned}$$

Entonces, usando el Teorema 4.3.6 y (4.42) se completa la demostración. ■

Conclusiones y proyecciones

En esta Tesis se han presentado nuevos métodos para la solución numérica de problemas exteriores lineales y no lineales en Teoría del Potencial y Elasticidad. Para problemas lineales, dos Métodos de Descomposición de Dominio (DDM), basados en el uso de aplicaciones Dirichlet–to–Neumann (DtN), han sido establecidos. El esquema D–FEM hace uso del Método de Elementos Finitos (FEM) para la aproximación discreta de los correspondientes operadores de Steklov–Poincaré. El segundo esquema, denominado D–BEM–FEM, realiza esta aproximación mediante el uso combinado de FEM y el Método de Elementos de Frontera (BEM). En lo que respecta a problemas no lineales, se ha presentado un esquema de linealización basado en el uso de precondicionadores lineales.

Lo anterior muestra la posibilidad cierta de aplicar estrategias DDM a problemas exteriores lineales y no lineales. En efecto, es posible definir precondicionadores apropiados que permiten la obtención de algoritmos paralelos de iteración por subdominios, con una convergencia independiente de h. También, se ha establecido la factibilidad del uso combinado de aplicaciones DtN, FEM, BEM y DDM para la solución numérica de este tipo de problemas.

Como posible investigación futura, se considera la extensión del esquema D–BEM–FEM a problemas exteriores en Elasticidad bidimensional. Junto a lo anterior, se contempla la realización de experimentos numéricos para los algoritmos tipo D–BEM–FEM y los esquemas de linealización propuestos. Además, puede estudiarse el diseño de precondicionadores alternativos, la utilización de métodos multinivel y la extensión de los algoritmos a otros modelos, tales como las ecuaciones de Stokes y de Maxwell. Finalmente, se pueden ensayar otras técnicas de discretización como la versión p o h–p de BEM y FEM.

Publicaciones generadas

[1] G. N. Gatica and M. E. Mellado, On the numerical solution of linear exterior problems via the uncoupling method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **41**, 233–251, (1998).

[2] G. N. Gatica, E. C. Hernández and M. E. Mellado, A domain decomposition method for linear exterior boundary value problems. *Applied Mathematics Letters* **11**, 6, 1–9, (1998).

[3] G. N. Gatica and M. E. Mellado, Nonoverlapping domain decomposition methods for linear and nonlinear exterior boundary value problems. In: *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*, edited by S. Idelsohn and E. Oñate, CIMNE, Barcelona, (1998).

[4] G. N. Gatica, G. C. Hsiao and M. E. Mellado, A domain decomposition method based on BEM and FEM for linear exterior boundary value problems. **I**: The Steklov–Poincaré problem. *Submitted.*

[5] G. N. Gatica, G. C. Hsiao and M. E. Mellado, A domain decomposition method based on BEM and FEM for linear exterior boundary value problems. **II**: Finite dimensional approximations. *Submitted.*

Relación con la Tesis

Capítulo 1: Resultados preliminares.

Capítulo 2: [1].

Capítulo 3: [2], [3], [4], [5].

Capítulo 4: Por enviar.

Bibliografía

[1] V. I. Agoshkov, Poincaré–Steklov operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces. In: *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, edited by R. Glowinski *et al.*, SIAM, Philadelphia, 73–112, (1988).

[2] R. A. Araya, G. N. Gatica and H. Mennickent, A boundary–field equation method for a nonlinear exterior elasticity problem in the plane. *Journal of Elasticity* **43**, 1, 45–68, (1996).

[3] G. R. Barrenechea, M. A. Barrientos and G. N. Gatica, On the numerical analysis of finite element and Dirichlet–to–Neumann methods for nonlinear exterior transmission problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization* **19**, 7&8, 705–735, (1998).

[4] J. H. Bramble, J. E. Pasciak and A. H. Schatz, The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, I. *Mathematics of Computation* **47**, 103–134, (1986).

[5] S. C. Brenner and L. R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods. *Springer–Verlag*, (1994).

[6] C. Carstensen, M. Kuhn and U. Langer, Fast parallel solvers for symmetric boundary element domain decomposition equations. *Numerische Mathematik* **79**, 321–347, (1998).

[7] P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems. *North Holland*, (1978).

[8] P. G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, Volume I: Three–Dimensional Elasticity. *North Holland*, (1988).

[9] M. Costabel, Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **19**, 613–626, (1988).

[10] M. Costabel, Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements. In: *Boundary Elements IX*, edited by C. A. Brebbia et al., **1**, 411–420, Springer-Verlag, Berlin, (1987).

[11] R. Dautray and J. L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume I. *Springer–Verlag*, (1990).

[12] Y. H. De Roeck, P. Le Tallec and M. Vidrascu, A domain–decomposed solver for nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **99**, 187–207, (1992).

[13] M. Feistauer and A. Zenisek, Finite element solution of nonlinear elliptic problems. *Numerische Mathematik* **50**, 451–475, (1987).

[14] K. Feng, Finite element method and natural boundary reduction. In: *International Congress of Mathematicians*, Warsaw, Poland, 1439–1453, (1983).

[15] G. N. Gatica, On the Coupling of Boundary Integral and Finite Element Methods for Nonlinear Boundary Value Problems. *Ph. D. dissertation*, University of Delaware, (1989).

[16] G. N. Gatica, Combination of mixed finite element and Dirichlet–to–Neumann methods in nonlinear plane elasticity. *Applied Mathematical Letters* **10**, 6, 29–35, (1996).

[17] G. N. Gatica and G. C. Hsiao, The coupling of boundary element and finite element methods for a nonlinear exterior boundary value problem. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen* (ZAA) **8**, 4, 377–387, (1989).

[18] G. N. Gatica and G. C. Hsiao, On a class of variational formulations for some nonlinear interface problems. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazione* **10**, 4, 681–715, (1990).

[19] G. N. Gatica and G. C. Hsiao, On the coupled BEM and FEM for a nonlinear exterior Dirichlet problem in $\mathbf{R}^2$. *Numerische Mathematik* **61**, 2, 171–214, (1992).

[20] G. N. Gatica and G. C. Hsiao, The coupling of boundary integral and finite element methods for nonmonotone nonlinear problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization* **13**, 5&6, 431–447, (1992).

[21] G. N. Gatica and G. C. Hsiao, The uncoupling of boundary integral and finite element methods for nonlinear boundary value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **189**, 2, 442–461, (1995).

[22] G. N. Gatica and G. C. Hsiao, Boundary–Field Equation Methods for a Class of Nonlinear Problems. *Pitman Research Notes in Mathematics Series* **331**, *Longman*, (1995).

[23] G. N. Gatica and W. L. Wendland, Coupling of mixed finite elements and boundary elements for a hyperelastic interface problem. SIAM *Journal on Numerical Analysis* **34**, 6, 2335–2356, (1997).

[24] D. Givoli, Numerical Methods for Problems in Infinite Domains. *Studies in Applied Mechanics* **33**, *Elsevier*, (1992).

[25] D. Givoli and J. Keller, Exact non–reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics* **82**, 172–192, (1989).

[26] D. Givoli and J. Keller, A finite element method for large domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **76**, 41–66, (1989).

[27] R. Glowinski and M. F. Wheeler, Domain decomposition and mixed finite elements for elliptic problems. In: *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, edited by R. Glowinski *et al.*, SIAM, Philadelphia, 144–172, (1988).

[28] G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix Computations. *Johns Hopkins University Press*, (1983).

[29] W. Hackbusch, Elliptic Differential Equations. *Springer–Verlag*, (1992).

[30] H. Han, A new class of variational formulations for the coupling of finite and boundary element methods. *Journal of Computational Mathematics* **8**, 3, 223–232, (1990).

[31] H. Han and X. Wu, The approximation of the exact boundary conditions at an artificial boundary for linear elastic equations and its applications. *Mathematics of Computation* **59**, 21–37, (1992).

[32] G. C. Hsiao, The coupling of boundary element and finite element methods. A plenary lecture at the GAMM–Tagung 1989. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanics* (ZAMM) **70**, 6, 493–503, (1990).

[33] G. C. Hsiao, B. N. Khoromskij and W. L. Wendland, Boundary integral operators and domain decomposition. *Preprint* 94–11, Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart, (1994).

[34] G. C. Hsiao, M. D. Marcozzi and S. Zhang, An efficient computational method for flow past an airfoil. *Contemporary Mathematics* **180**, 497–502, (1994).

[35] G. C. Hsiao and W. L. Wendland, A finite element method for some integral equations of the first kind. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **58**, 449–481, (1977).

[36] G. C. Hsiao and W. L. Wendland, Domain decomposition in boundary element methods. In: *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, edited by R. Glowinski *et al.*, SIAM, Philadelphia, 41–49, (1991).

[37] G. C. Hsiao and W. L. Wendland, Domain decomposition via boundary element methods. In: *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, edited by H. Alder *et al.*, CIMNE, Barcelona, 198–207, (1992).

[38] G. C. Hsiao and S. Zhang, Optimal order multigrid methods for solving exterior boundary value problems. SIAM *Journal on Numerical Analysis* **31**, 3, 680–694, (1994).

[39] C. Johnson and J. C. Nedelec, On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Mathematics of Computation* **35**, 1063–1079, (1980).

[40] S. Kesavan, Topics on Functional Analysis and Applications. *John Wiley and Sons*, (1989).

[41] A. Kufner, O. John and S. Fucik, Function Spaces. *Academia, Prague*, (1977).

[42] U. Langer, Parallel iterative solution of symmetric coupled FE/BE–equations via domain decomposition. *Contemporary Mathematics* **157**, 335–344, (1994).

[43] P. Le Tallec, Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics. *Computational Mechanics Advances* **1**, 121–220, (1994).

[44] J. L. Lions and E. Magenes, Non–homogeneous Boundary Value Problems and Applications 1. *Springer–Verlag, Berlin*, (1972).

[45] L. D. Marini and A. Quarteroni, A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. *Numerische Mathematik* **55**, 575–598, (1989).

[46] S. G. Mikhlin, The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional. *Holden Day Inc., San Francisco*, (1965).

[47] J. Necas, Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. *Academia, Prague, Masson, Paris*, (1967).

[48] J. Necas, Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations. *John Wiley and Sons*, (1986).

[49] J. Necas and I. Hlavacek, Mathematical Theory of Elastic and Elasto–Plastic Bodies: An Introduction. *Amsterdam–Oxford–New York: Elsevier Scientific Publishing Company, Studies in Applied Mechanics 3*, (1981).

[50] P. Pérez, Resolución Numérica de Problemas en Dominios no Acotados mediante el Acoplamiento de Elementos Finitos y Elementos de Contorno. *Tesis Doctoral*, Universidad de Oviedo, (1995).

[51] A. Quarteroni, Domain decomposition method for the numerical solution of partial differential equations. *Research Report 90–246*, Supercomputer Institute, University of Minnesota, (1990).

[52] A. Quarteroni and A. Valli, Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. *Clarendon Press–Oxford*, (1999).

[53] A. Quarteroni and A. Valli, Theory and application of Steklov–Poincaré operators for boundary value problems. In: *Applied and Industrial Mathematics*, edited by R. Spigler, 179–203, Kluwer Academic Publishers, (1991).

[54] G. Schmidt, Boundary element discretization of Poincaré–Steklov operators. *Numerische Mathematik* **69**, 83–101, (1994).

[55] E. Schnack and K. Türke, Domain decomposition with BEM and FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**, 2593–2610, (1997).

[56] B. Smith, P. Bjørstad and W. Gropp, Domain Decomposition, Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations. *Cambridge University Press*, (1996).

[57] E. P. Stephan, Coupling of finite elements and boundary elements for some nonlinear interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **101**, 61–72, (1992).

[58] W. L. Wendland, On asymptotic error estimates for the combined BEM and FEM. In: *CISM Lecture Notes 301, Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering point of view*, edited by E. Stein and W. L. Wendland, 273–333, Udine, Springer–Verlag (Wien–New York), (1988).

[59] O. B. Widlund, An extension theorem for finite element spaces with three applications. In: *Numerical Techniques in continuum mechaniques*, edited by W. Hackbush and K. Witsch, Braunschweig/Wiesbaden, (1987).

[60] A. Zenizek, Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and their Finite Element Applications. *Academic Press, London*, (1990).