

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCION  
DIRECCION DE POSTGRADO  
CONCEPCION-CHILE**



**ANALISIS MATEMATICO Y NUMERICO DE ALGUNOS MODELOS DE  
DINAMICA DE POBLACION CON DIFUSION NO LINEAL**

*Tesis para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática*

**Verónica Julia Anaya Domínguez**

**FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA**

**2011**

# Resumen

El objetivo principal de éste trabajo es el análisis matemático y numérico de ecuaciones diferenciales parciales, específicamente sistemas de ecuaciones parabólicas no lineales y en particular sistemas para modelos con aplicación en Biología. El análisis matemático implica probar existencia y unicidad de solución débil, es decir, solución del problema continuo. En cuanto al análisis numérico se refiere a la implementación, desarrollo y análisis de métodos numéricos para los modelos específicos estudiados.

Inicialmente, se demuestra la existencia y no-negatividad de solución débil de un sistema de reacción-difusión que modela el crecimiento de un tumor temprano, para lo cual se utiliza el método de Faedo-Galerkin, estimaciones a priori y resultados de compacidad (ver [55]). Se construye un esquema de volúmenes finitos basado en los métodos clásicos del Handbook de Eymard - Gallouët - Herbin [27], para dicho esquema se demuestra la existencia de solución y además la convergencia de ésta solución discreta a una solución débil del problema continuo. Finalmente, se obtienen algunos resultados numéricos que ponen en evidencia la formación de patrones. El sistema de reacción-difusión con el que se trabajó se obtuvo a partir de [43], es decir, es una extensión del modelo dado en el artículo mencionado.

Posteriormente, se aborda un sistema de reacción-difusión-convección en un ambiente contaminado, es decir, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas que modelan la interacción entre dos especies, acoplado con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan la concentración del contaminante en el medio ambiente

y en los organismos de las dos especies. Este modelo es una extensión del modelo estudiado por Yang et al. (ver [64]). Se demuestra la existencia de solución débil de dicho sistema, para lo cual se utiliza el Teorema de punto fijo de Schauder. Por otro lado, en el aspecto numérico se construye un esquema numérico el cual combina elementos finitos no conformes y volúmenes finitos basados en el método descrito en la tesis de Vohralik (ver [60]). Se prueba la existencia de solución discreta del esquema y además la convergencia de esta solución a una solución débil del problema continuo. Se realizaron ensayos numéricos.

Finalmente, se considera un sistema de reacción-difusión con difusión no local y difusión cruzada no lineal, dicho modelo describe la interacción entre tres especies. El sistema estudiado está basado en el modelo de la cadena alimenticia de Hastings y Powell. Se construye un esquema de volúmenes finitos basado en los métodos clásicos del Handbook de Eymard - Gallouët - Herbin [27], para el cual se demuestra la existencia y unicidad de solución discreta, además se prueba la convergencia de dicha solución a una solución débil del problema continuo. Se presentan algunos resultados numéricos.

# Contents

<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemas de Reacción-Difusión . . . . .	1
1.1.1 Dinámica del crecimiento de un tumor temprano . . . . .	3
1.1.2 Interacción presa-depredador en un ambiente contaminado . . . . .	3
1.1.3 Modelo de la cadena alimenticia . . . . .	5
1.2 Organización de la tesis . . . . .	7
<b>2 A numerical analysis of a reaction-diffusion system modelling the dynamics of growth tumors</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 Preliminaries, numerical scheme and main theorem . . . . .	15
2.3 Existence of weak solutions . . . . .	18
2.4 Finite volume scheme . . . . .	23
2.4.1 Existence of solutions to the finite volume scheme . . . . .	24
2.4.2 Nonnegativity . . . . .	26
2.4.3 A priori estimates . . . . .	27
2.4.4 Convergence of the finite volume scheme . . . . .	30
2.5 Numerical Examples . . . . .	32
2.5.1 Pattern Formation . . . . .	32
2.5.2 Numerical Simulations . . . . .	35

---

<b>3</b>	<b>Mathematical and numerical analysis for Predator-prey system in a polluted environment</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	Existence of weak solutions . . . . .	51
3.3	Finite volume scheme . . . . .	58
3.3.1	Existence of solutions to the combined finite volume - finite element scheme . . . . .	58
3.3.2	Nonnegativity . . . . .	61
3.3.3	A priori estimates . . . . .	64
3.3.4	Convergence of the combined finite volume - finite element scheme . . . . .	67
3.4	Numerical results . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Numerical analysis for HP food chain system with nonlocal and cross diffusion</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	87
4.2	Finite Volume Approximation . . . . .	92
4.2.1	Formulation of the scheme and the main result . . . . .	94
4.3	A priori estimates and existence . . . . .	98
4.3.1	Nonnegativity . . . . .	98
4.3.2	Discrete a priori estimates . . . . .	99
4.3.3	Existence of a solution for the finite volume scheme . . . . .	101
4.4	Compactness arguments . . . . .	104
4.5	Convergence Analysis . . . . .	108
4.6	Numerical Results . . . . .	110
4.6.1	Example 1 . . . . .	110
4.6.2	Example 2 . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>121</b>
5.1	Conclusiones . . . . .	121
5.2	Trabajo futuro . . . . .	122