



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL MATEMÁTICA

---

# Puntos fijos polarizados y de consenso en redes Booleanas

TESIS PRESENTADA A LA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS DE  
LA UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

---

Autor: Catalina Opazo  
Profesor Guía: Julio Arcena  
Marzo, 2024

# Agradecimientos

En primer lugar me gustaría expresar mi profundo agradecimiento a mis padres por impulsarme a estudiar una carrera universitaria y enseñarme a dar siempre lo mejor de mí. Agradezco a mi madre y a mi abuela por su constante apoyo y por cuidar mi salud diariamente; sin su ayuda, no habría sido posible.

En segundo lugar, deseo expresar mi gratitud a mis compañeros de carrera por crear un ambiente donde me he sentido sumamente cómoda y libre para crecer tanto a nivel académico como personal. Espero mantengamos la amistad por muchos años. Quiero agradecer, en particular, a mis compañeros de generación entregarme tanto cariño y estar siempre cerca, tanto para estudiar como para carretear; sin ustedes, no habría logrado pasar todos los ramos. Agradezco especialmente a las mujeres de la carrera, por entregarme su amistad y compañerismo en este ambiente tan masculinizado. Nos hemos enfrentado a muchos obstáculos, pero vamos a salir adelante. Mi reconocimiento especial a Ivette, Fran, Tefa, Isi y todas las demás compañeras de carrera. Asimismo, me gustaría agradecerle a también a mi padrino postizo, Jorge Ávila, por guiarme todos estos años, a pesar de la distancia. También agradecer a mi clase de equivalencia Raúl y Pato, por su compañía y apoyo durante todos estos años, los quiero un montón.

En tercer lugar, pero no menos importante, deseo agradecer a los profesores del departamento, quienes han dejado una huella significativa en mi vida. A la Profesora Mónica, a la Profesora Anahí, al Profesor Christopher, al Profesor Nicolás y, especialmente, a mi guía académico, el Profesor Julio Aracena, quien ha sido como un padre académico para mí. Agradezco su orientación en este difícil mundo de la investigación, así como las conversaciones que fueron más allá de lo académico y se convirtieron en verdaderas sesiones terapéuticas. Agradezco también su disposición para recibirme en su oficina, a pesar de estar ocupado, y su pasión por las matemáticas, que me contagió desde mi primer año. Agradezco a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) y al Centro de Modelamiento Matemático (CMM) por su apoyo financiero a través del proyecto Basal FB 210005.

Además, quiero agradecerle a mis queridas mascotas, Forti y Candy, por su incondicional compañía

y amor, que me han dado fuerzas en los momentos más difíciles. Por último, agradezco a Joaquín por acompañarme durante los seis años de carrera, por apoyarme en mis peores momentos y por escucharme hablar sobre mi tesis tantas veces.

# Índice general

Capítulos	Página
<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Motivación . . . . .	6
1.2. Uso de redes Booleanas . . . . .	7
1.3. Contenido del documento . . . . .	7
<b>2. Definiciones</b>	<b>9</b>
2.1. Conceptos de matemática discreta . . . . .	9
2.2. Conceptos de redes Booleanas . . . . .	11
<b>3. Puntos Fijos en Redes Booleanas</b>	<b>16</b>
<b>4. Fijando familia de redes según tipo de interacción</b>	<b>19</b>
4.1. Función minoría . . . . .	19
4.1.1. Puntos fijos polarizados en minoría . . . . .	19
4.1.2. Puntos fijos de consenso en minoría . . . . .	29
4.2. Función mayoría . . . . .	30

**5. Fijando Familias Según Grafo de Interacción** **32**

5.1. Digrafo con signos positivos en los arcos . . . . . 33

**6. Conclusiones** **48**

Referencias . . . . . 50

**A. Códigos de los algoritmos desarrollados** **52**

A.1. Código para encontrar puntos fijos polarizados red minoría sin sesgo . . . . 52

A.2. Código para encontrar puntos fijos polarizados red minoría con sesgo . . . . 53

A.3. Código para encontrar partición válida balanceada . . . . . 55

# Índice de figuras

2.1. Ejemplo de digrafo con bucle. . . . .	9
2.2. Grafo de interacción $G(f)$ . . . . .	12
4.1. Ejemplo de grafos y puntos fijos de sus redes minoría con sesgo asociadas. . . . .	20
4.2. Ejemplo de vértice con $s_U(i) = 3$ . . . . .	21
4.3. Grafo con 6 vértices y grado mínimo 4. . . . .	22
4.4. Grafo compuesto por dos $C_3$ . . . . .	25
4.5. Árboles con 6 vértices. . . . .	25
4.6. Grafo 3-regular y 4-regular. . . . .	26
4.7. Particiones satisfactorias para $C_6$ y $K_{4,2}$ . . . . .	31
5.1. Grafo estrella con 7 vértices. . . . .	36
5.2. Cambio de $u_2$ de partición. . . . .	39
5.3. Cambio de $u_1$ de partición. . . . .	39
5.4. Grafo $G$ de 8 vértices. . . . .	41
5.5. Un árbol DFS de $G$ . . . . .	42
5.6. Primera cadena encontrada en $G$ . . . . .	42
5.7. Descomposición por cadenas de $G$ . . . . .	43

# Introducción

## 1.1. Motivación

El proceso de formación de opiniones e influencia en redes sociales es de gran relevancia, ya que está presente en muchos aspectos de la vida, como en la política, el marketing y la toma de decisiones en grupo, entre otros. Existen factores claves que influyen en este proceso, como por ejemplo, la estructura de la red, es decir, cómo están conectados los individuos, y el tipo de influencia que ejercen entre sí, ya sea positiva o negativa.

La formación de opiniones en redes sociales se puede modelar matemáticamente de distintas formas, dependiendo de las suposiciones previas y el nivel de detalle que se quiera obtener de cada proceso. Las redes sociales pueden ser modeladas mediante el uso de grafos dirigidos, donde cada nodo representa una persona y existe una arista entre dos nodos si las personas están relacionadas de alguna forma. En el contexto de la formación de opiniones, diremos que existe una arista de un nodo  $u$  a un nodo  $v$  si la opinión de  $u$  influye en la opinión de  $v$ .

Si imponemos la condición fuerte de que cada agente debe escoger entre sólo dos opciones, nos encontramos con el proceso de formación de **opiniones binarias**. Este último ha sido estudiado en (Grabisch y Rusinowska, 2013), (Förster, Grabisch, y Rusinowska, 2013), y (Poindron, 2021) desde un punto de vista no determinista, es decir, se considera que cada agente considera las opiniones del resto de miembros de la sociedad con cierta probabilidad. En estos trabajos se estudia cómo la forma de la red influye en las clases terminales o estados estables del proceso. Además, en los estudios de (Goles, Medina, Montealegre, y Santivañez, 2022) y (Goles, Medina, y Santivañez, 2023), se emplean autómatas celulares para analizar los estados de consenso en el proceso de formación de opiniones binarias en una sociedad donde todos siguen una regla de mayoría y que se estructura como una grilla 2-dimensional.

## 1.2. Uso de redes Booleanas

Si consideramos procesos donde cada agente puede escoger entre sólo dos opiniones, encontraremos que las redes Booleanas son una herramienta clave para poder entender la dinámica y la evolución de la red a largo plazo.

En el estudio de (Green, Leishman, y Sadedin, 2007), se usan redes Booleanas para modelar cuatro tipos de sociedades y analizar cómo el tamaño y la topología de una red influyen en su capacidad para alcanzar estados de consenso. Las funciones Booleanas que se utilizan son probabilistas y la actualización ocurre de forma asíncrona en orden aleatorio. Se concluye que, para un tipo de interacción fija entre agentes, existe un tamaño máximo de red que permite mantener un consenso. Mientras que para obtener consenso en más grupos grandes se necesita refuerzo externo. Siguiendo esta línea, en el trabajo de (Ruz y Goles, 2022) se estudia el consenso en redes Booleanas donde las funciones de activación local son umbrales y se utiliza un enfoque de ingeniería inversa para construir redes que tengan puntos fijos de consenso.

Estudiar la dinámica de una red resulta ser una tarea complicada debido al crecimiento exponencial de los posibles estados conforme aumenta la cantidad de agentes, esto último se evidencia en los trabajos de (Moore, 1997)(Goles y Montealegre, 2015). Por esta razón, la pregunta que motiva el estudio es la posibilidad de caracterizar los estados de consenso o polarización de las opiniones de una sociedad a largo plazo, a través de la estructura del grafo que representa su interacción y las funciones que describen las reglas de actualización de opinión de cada agente. Para ello, consideramos un modelo simplificado del proceso de formación de opiniones binarias que utiliza redes Booleanas. Nos interesa conocer los estados estables que puede alcanzar un sistema de agentes con una red fija, es decir, cuando las conexiones y el tipo de influencia ya está decidido. En particular, buscaremos condiciones suficientes y necesarias para poder obtener estados estables de consenso, es decir, en los que todos comparten la misma opinión o estados estables de polarización, en donde la mitad de los agentes tiene una opinión y la otra mitad tiene la opinión contraria.

Veremos más adelante que encontrar estados estables en el sistema bajo este modelo es equivalente a encontrar los puntos fijos de la red, lo cual es un problema difícil a priori, ya que el número de configuraciones aumenta exponencialmente al aumentar el número de agentes.

## 1.3. Contenido del documento

La estructura de la memoria es la siguiente: en el Capítulo 2 se presenta la mayoría de la notación que se utiliza, junto con definiciones básicas de grafos, digrafos y redes Booleanas. En el Capítulo 3 se exponen algunos resultados relevantes sobre puntos fijos en redes Booleanas y se demuestra



que la complejidad del problema general de la existencia de puntos fijos polarizados en estas redes es NP-completo. El Capítulo 4 presenta los resultados obtenidos al fijar el tipo de interacción entre los agentes y buscar qué estructura del grafo de interacción nos permite asegurar la existencia de puntos fijos polarizados y de consenso; en particular, se revisa la familia de funciones de minoría y mayoría con y sin sesgo.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos al fijar la estructura de la interacción de la red y estudiar si podemos definir funciones de activación local para cada nodo de forma que la red resultante tenga puntos fijos polarizados y de consenso. Se hace énfasis en el análisis para digrafos con signos en sus arcos. Finalmente, en el Capítulo 6 se relacionan los resultados obtenidos con la motivación inicial del problema y se plantean las preguntas que quedan abiertas en este trabajo.

## Definiciones

### 2.1. Conceptos de matemática discreta

Un grafo dirigido o **digrafo**  $D$  es un par  $(V, A)$ , donde  $V$  es un conjunto finito no vacío de vértices y  $A$  es una familia finita de pares de elementos ordenados de  $V$ , llamados arcos. Dado un digrafo  $D$ , denotaremos como  $V(D)$  a su conjunto de vértices y  $A(D)$  a su conjunto de arcos, además, un arco  $(u, v)$  lo denotaremos simplemente como  $uv$  y si existe el arco  $(u, u)$  para algún  $u \in V$  lo llamaremos bucle.

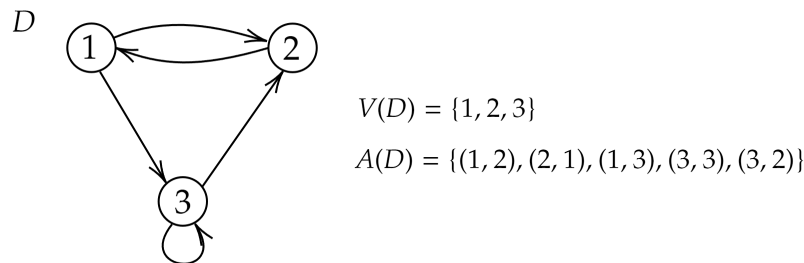


Figura 2.1: Ejemplo de digrafo con bucle.

Si no consideramos dirección en los arcos podemos definir un **grafo simple**  $G$  como un par  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito no vacío de elementos llamados **vértices** o **nodos**, y  $E$  es un conjunto finito de pares no ordenados de elementos de  $V$ , llamados aristas. Dado un grafo  $G$  su conjunto de vértices es denotado como  $V(G)$  y su conjunto de aristas es denotado como  $E(G)$ , dada una arista  $\{u, v\}$  denotaremos como  $uv$  o  $vu$ .

Notemos que un grafo simple puede ser considerado como un digrafo sin bucles tal que si existe un arco  $uv$  también existe el arco  $vu$ .

Dado un digrafo  $D = (V, A)$ , diremos que los vértices  $u$  y  $v$  son **adyacentes** o **vecinos** si existe un arco que los una y en el caso de grafo simple si es que existe una arista que los una. De aquí, dado un vértice  $v \in V$  definimos su **vecindad de salida**  $N^+(v)$  y su **vecindad de entrada**  $N^-(v)$  como:

$$N^+(v) = \{u \in V : vu \in A\} \quad N^-(v) = \{u \in V : uv \in A\}.$$

En el caso de un grafo simple, dado un vértice  $v$ , definimos su vecindad  $N(v)$  como  $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ .

La cardinalidad de la vecindad un vértice es llamado su **grado**, para un digrafo  $D$  y un vértice  $v \in V$ , denotaremos el grado de entrada y salida de  $v$  como  $d^+(v)$  y  $d^-(v)$  respectivamente y se definen como

$$d^+(v) = |N^+(v)| \quad \text{y} \quad d^-(v) = |N^-(v)|.$$

En el caso de un grafo simple y un vértice  $v$  su grado es  $d(v) = |N(v)|$ . El concepto de grado nos permite definir para un digrafo  $D = (V, A)$ :

- Su **grado mínimo de entrada** como  $\delta^-(D) = \min_{v \in V} d^-(v)$
- Su **grado mínimo de salida** como  $\delta^+(D) = \min_{v \in V} d^+(v)$
- Su **grado máximo de entrada** como  $\Delta^-(D) = \max_{v \in V} d^-(v)$
- Su **grado máximo de salida** como  $\Delta^+(D) = \max_{v \in V} d^+(v)$

Asimismo en el caso de un grafo simple  $G$ , definimos su grado mínimo como  $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$  y su grado máximo como  $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$ .

Dado un digrafo  $D = (V, A)$  y un subconjunto de vértices  $S \subseteq V$ , denotamos  $D[S]$  al **sub-digrafo inducido** por los vértices en  $S$ . Donde su conjunto de vértices es  $S$  y su conjunto de arcos está dado por aquellos que tengan ambos componentes en  $S$ , formalmente:

$$V(D[S]) = S \quad \text{y} \quad E(D[S]) = \{\{u, v\} \in E : u \in S \wedge v \in S\}$$

También definimos una **partición** de sus vértices  $\{V_1, V_2\}$  tal que  $V_1 \cup V_2 = V$  y  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Además, diremos que una **partición es balanceada** si  $||V_1| - |V_2|| \leq 1$ , es decir, si  $|V|$  es par sus tamaños son iguales y si  $|V|$  es impar sus tamaños difieren en uno. Asimismo, diremos que una **partición es válida** si  $\delta(G[V_1]) \geq 1$  y  $\delta(G[V_2]) \geq 1$ .

Dado un digrafo  $D = (V, A)$  definimos:

- Un **camino dirigido** de largo  $m$  entre los vértices  $u$  y  $v$  como una secuencia de vértices  $u, u_1, \dots, u_m = v$  tal que no hay repeticiones y  $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}, u_i, u_{i+1} \in A$ .
- Un **ciclo dirigido** de largo  $m$  como una secuencia de vértices  $u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1} = u_1$  tal que no hay repeticiones excepto el primer y último vértice, y además  $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}, u_i, u_{i+1} \in A$ .

En el caso de un grafo simple  $G = (V, E)$  las definiciones son iguales, excepto que solo necesitamos tener aristas entre cada vértice de la secuencia.

Además definimos  $C_n$  como un grafo que consiste en solo un ciclo de largo  $n$  y definimos  $K_n$  como un grafo completo, es decir, que tiene todas las aristas posibles y  $n$  vértices.

## 2.2. Conceptos de redes Booleanas

Una red Booleana  $f$  es un sistema dinámico discreto con un número finito de agentes que interactúan entre sí. Formalmente tenemos un sistema de  $n \in N$  agentes, donde cada agente  $i \in \{1, \dots, n\}$  está asociado a una variable Booleana  $x_i \in \{0, 1\}$ , así  $x = (x_1, \dots, x_n)$  es llamado una configuración o estado del sistema.

Cada agente actualiza el valor de esta variable en intervalos discretos de tiempo de acuerdo a una función Booleana  $f_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  llamada **función de activación local**.

De esta manera definimos la **función de activación global**  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ . Esta función es llamada red Booleana, notemos que la dinámica del sistema esta completamente caracterizada por ella. Diremos que una función de activación local  $f_i$  depende de la variable  $x_j$  si existe  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que:

$$f_i(x_1, \dots, x_j = 0, \dots, x_n) \neq f_i(x_1, \dots, x_j = 1, \dots, x_n)$$

La interacción entre los agentes puede ser representada por un digrafo, llamado grafo de interacción.

**Definición 1** Dada una red Booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ , su **grafo de interacción**  $G(f)$  es un digrafo con  $n$  vértices tal que el arco  $(i, j)$  existe si  $f_i$  depende de  $x_j$ .

A modo de ejemplo, consideremos la red Booleana  $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}^3$  tal que  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3, \neg x_3, \neg x_2)$ . En términos del proceso de formación de opinión, esta red representa un sistema donde el primer agente escoge el valor 1 si algún agente del sistema opina 1. Mientras que

el segundo y tercer agente opinan de forma contraria en cada paso. El grafo de interacción de la red se presenta en la fig. 2.2.

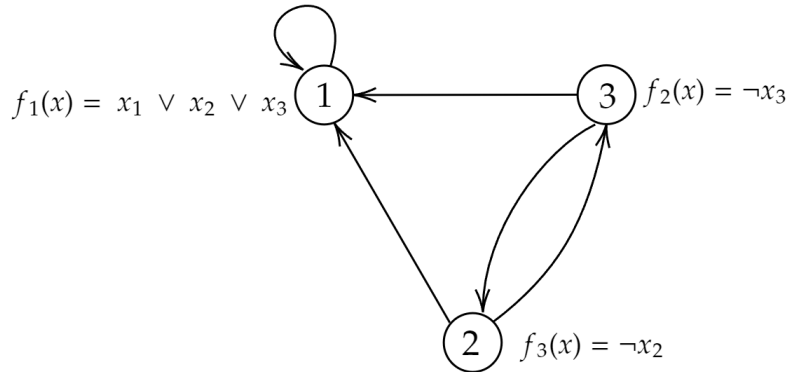


Figura 2.2: Grafo de interacción  $G(f)$ .

Para poder definir los puntos fijos de interés en las redes Booleanas, primero definimos el peso de Hamming de un vector Booleano  $x \in \{0, 1\}^n$  como la suma de todas sus componentes.

$$h(x) = \sum_{i=1}^n x_i$$

Dada  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$

- Un **punto fijo** de  $f$  es una configuración  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que  $f(x) = x$ .
- Un **punto fijo polarizado** es un punto fijo tal que  $|h(x) - n/2| \leq 1$
- Un **punto fijo de consenso** es un punto fijo tal que los estados de sus agentes son iguales, es decir  $h(x) = n$  o  $h(x) = 0$ .

En otras palabras, un punto fijo polarizado es una configuración tal que la cantidad de componentes iguales a 0 y la cantidad de componentes iguales a 1 difieren a lo más en uno. Un punto fijo de consenso es una configuración de solo unos o solo ceros. Es fácil chequear que, en el ejemplo de la fig. 2.2 la configuración 101 es un punto fijo polarizado.

Dentro del proceso de formación de opiniones binarias, las reglas de actualización que siguen a la minoría o a la mayoría de agentes aparecen de forma natural. Es por ello que trabajaremos con dos tipos de función minoría y mayoría, solo se diferencian en el caso en que el agente se enfrente a un empate en las opiniones de sus vecinos.

**Definición 2** Dado un digrafo  $D$  con  $n$  vértices, definimos

- La red de minoría con sesgo asociada a  $D$  como  $\min_D : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que

$$\min_D(x)_i = H\left(-\sum_{j \in N^-(i)} x_j + n/2\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i)} x_j > |N^-(i)|/2 \\ 1 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i)} x_j \leq |N^-(i)|/2 \end{cases}$$

- La red de mayoría con sesgo asociada a  $D$  como  $\text{may}_D : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que

$$\text{may}_D(x)_i = H\left(\sum_{j \in N^-(i)} x_j - n/2\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i)} x_j < |N^-(i)|/2 \\ 1 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i)} x_j \geq |N^-(i)|/2 \end{cases}$$

Donde  $\forall u \in \mathbb{R}$ ,  $H(u) = 1$  si  $u \geq 0$  y  $H(u) = 0$  si  $u < 0$ .

Se dice que tienen sesgo ya que, en caso de que un agente vea empate en la opinión de sus vecinos, este decide 1. Para evitar esto, definimos las redes sin sesgo que, sólo en caso de empate, cada agente considera su propia opinión en el tiempo anterior. Esto implica que bajo ciertas condiciones, cada agente se influencia a sí mismo, agregando un bucle al grafo de interacción.

**Definición 3** Dado un digrafo  $D$  en  $n$  vértices y bucles en cada vértice, definimos:

- La red minoría sin sesgo o simplemente **red minoría** asociada a  $D$  como  $\text{MIN}_D : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que

$$\text{MIN}_D(x)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i) \setminus \{i\}} x_j > |N^-(i)|/2 \\ x_i & \text{si } \sum_{j \in N^-(i) \setminus \{i\}} x_j = |N^-(i)|/2 \vee N^-(i) \setminus \{i\} = \emptyset \\ 1 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i) \setminus \{i\}} x_j < |N^-(i)|/2 \end{cases}$$

- La red mayoría sin sesgo o simplemente **red mayoría** asociada a  $D$  como  $\text{MAY}_D : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que

$$MAY_D(x)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i) \setminus \{i\}} x_j < |N^-(i)|/2 \\ x_i & \text{si } \sum_{j \in N^-(i) \setminus \{i\}} x_j = |N^-(i)|/2 \vee N^-(i) \setminus \{i\} = \emptyset \\ 1 & \text{si } \sum_{j \in N^-(i) \setminus \{i\}} x_j > |N^-(i)|/2 \end{cases}$$

Podemos pensar que en las redes de mayoría los agentes se influncian positivamente y en las redes minoría los agentes se influncian negativamente. Más generalmente, dada una función de activación local  $f_i(x)$  decimos que:

- $f_i$  es monótona creciente en la entrada  $j$  si

$$\forall x \in \{0, 1\}^n, x_j = 0 \implies f(x) \leq f(x + e_j)$$

- $f_i$  es monótona decreciente en la entrada  $j$  si

$$\forall x \in \{0, 1\}^n, x_j = 0 \implies f(x) \geq f(x + e_j)$$

Donde  $e_j$  es el vector canónico  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que  $x_j = 1$  y todas las demás componentes son 0.

En el primer caso, decimos que el agente  $j$  tiene influencia positiva en el agente  $i$  y en el segundo caso influencia negativa. Asimismo, decimos que los arcos que unen a los vértices son positivos o negativos respectivamente.

Si todas las funciones de activación local de una red  $f$  son monótonas crecientes o decrecientes, entonces al grafo de interacción  $G(f) = (V, A)$  se le puede asignar una función signo  $\sigma_f : A \rightarrow \{-1, +1\}$  tal que  $\forall (i, j) \in A$ ,  $\sigma_f(i, j) = +1$  si y solo si  $f_j$  es monótona creciente en la entrada  $i$ . Llamamos **grafo de interacción con signos** a  $(G(f), \sigma_f)$ .

De manera general, consideramos un digrafo con signos  $(G, \sigma)$  como un digrafo que tiene asociada una función  $\sigma : A \rightarrow \{-1, +1\}$  con signos para cada uno de sus arcos. Una red Booleana donde todos los arcos de su grafo de interacción son positivos es llamada **monótona**, más precisamente:

**Definición 4** Una red Booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  es llamada **monótona** si

$$\forall x, y \in \{0, 1\}^n : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Donde  $x \leq y$  si y solo si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i \leq y_i$ .

Se puede probar que una red Booleana  $f$  es monótona si y solo si cada función de activación local  $f_i$  se puede escribir en su forma normal conjuntiva o disyuntiva sin usar ninguna variable negativa. (Anthony, 2001)

La dinámica de una red Booleana  $f$  es descrita por las iteraciones sucesivas a una configuración formando la sucesión:

$$\forall t \in \mathbb{N}_0, \forall x(t) \in \{0, 1\}^n, x(t+1) = f(x(t))$$

El comportamiento dinámico de esta red puede ser representada por un digrafo llamado grafo de iteración  $G_I(f)$ , su conjunto de vértices son todas las posibles configuraciones de  $\{0, 1\}^n$  y su conjunto de arcos es  $\{(x, f(x)) : x \in \{0, 1\}^n\}$ .



## Puntos Fijos en Redes Booleanas

Este capítulo tiene como objetivo explicar qué es lo que se sabe acerca de puntos fijos en redes Booleanas. Notemos una red de tamaño  $n$  tiene  $2^n$  posibles configuraciones en su dinámica, lo que dificulta su análisis usando técnicas de búsqueda completa. Es por esto que, usualmente, en la literatura se busca entender la dinámica de una red a partir de la estructura de su grafo de interacción y sus funciones de activación. Dentro de este estudio, se ha dado un especial interés a los puntos fijos de la red, ya que son atractores de la dinámica invariantes al esquema de actualización que se utilice. Por ejemplo, en Biología estos representan patrones estables en la expresión de fenotipos. (Kauffman, 1969)

En los trabajos de (Aracena, Demongeot, y Goles, 2004), (Aracena, 2008), (Aracena, Richard, y Salinas, 2014) y (Aracena, Richard, y Salinas, 2017) se estudia el número máximo de puntos fijos de distintas familias de redes Booleanas, como aquellas que tienen funciones de activación local AND-OR y AND-OR-NOT, así como las familias de redes regulatorias y monótonas. En todos estos trabajos se encuentran relaciones entre la estructura del grafo de interacción y la cantidad máxima de puntos fijos.

**Definición 5** *Dado un digrafo con signos  $(G, \sigma)$ , se define su número transversal positivo  $\tau^+(G)$  como la mínima cantidad de vértices que debemos remover del grafo para que este no tenga ningún ciclo positivo.*

Entre los resultados más relevantes destacamos el siguiente teorema.

**Teorema 1** (Aracena, 2008) *Sea una red Booleana regulatoria  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  cuyo grafo de interacción con signos es  $G$  y es tal que  $|N^-(i)| \geq 1$  para todo  $i \in V(G)$ . El máximo número de puntos fijos de la red es a lo más  $2^{\tau^+(G)}$ .*

En cuanto al estudio de la dificultad computacional del problema, en (Kosub, 2008) y (Bridoux, Durbec, Perrot, y Richard, 2019) se estudia la complejidad del problema de existencia de puntos fijos en redes Booleanas y se concluye que el problema de determinar si una red Booleana dada tiene puntos fijos es NP-Completo.

En el estudio de redes monótonas, es sabido que, siempre y cuando no haya funciones de activación constantes, existe al menos un punto fijo de consenso (Aracena, 2008). Por lo tanto, resulta interesante preguntarse si existen puntos fijos que no sean de consenso. Se plantea el problema:

**MONFIX:** Dada una función Booleana monótona  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ . ¿Existe un punto fijo  $x \in \{0, 1\}^n \setminus \{0^n, 1^n\}$  de  $f$ ?

Donde  $1^n$  y  $0^n$  son configuraciones con solo unos y ceros en sus componentes respectivamente.

En (Yang y Zhao, 2004) se demuestra que MONFIX es NP-Completo. Más adelante, presentaremos una condición suficiente sobre el grado mínimo del grafo de interacción de la red que permite asegurar la existencia de un punto fijo no trivial.

Dada una red Booleana cualquiera  $f$  para saber si existen puntos fijos de consenso basta verificar que  $f(\vec{1}) = \vec{1}$  o  $f(\vec{0}) = \vec{0}$ , mientras que saber si tiene puntos fijos polarizados es más complejo dado que existen  $\binom{n}{n/2}$  configuraciones polarizadas si  $n$  es par y  $2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  si  $n$  es impar. Para estudiar la complejidad del problema general de encontrar puntos fijos polarizados de una red presentamos el siguiente problema de decisión:

**POLFP:** Dada una red Booleana  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  con  $n$  par. ¿Existe algún punto fijo polarizado de  $f$ ?

**Proposición 2** *POLFP es NP-completo.*

**Dem:** Para demostrar que el problema es NP consideramos el certificado  $x \in \{0, 1\}^n$  que es punto fijo polarizado de  $f$ . Su tamaño es lineal con respecto al tamaño de la red y para comprobar es punto fijo, debemos aplicar la función  $f$ .

Para probar que el problema es NP-hard consideremos el siguiente problema de decisión:

**HALF-SAT:** Dada una fórmula en forma normal conjuntiva  $\phi$  con  $n$  variables y  $n$  par. ¿Existe alguna asignación que satisface  $\phi$  donde la mitad de las variables son verdad y la otra mitad son falsas?

Probaremos que HALF-SAT puede ser reducido al problema PFP. Dada una formula  $\phi(x)$  en su forma normal conjuntiva definimos la red  $f : \{0, 1\}^{n+2} \rightarrow \{0, 1\}^{n+2}$  tal que:

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f_i(x) = x_i$
- $f_{n+1}(x) = \phi(x) \vee x_{n+2}$

- $f_{n+2}(x) = \neg x_{n+1}$

Supongamos que existe  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que  $\phi(x)$  es verdad y  $h(x) = n/2$ . Demostraremos que  $\tilde{x} = (x, 1, 0)$  es un punto fijo polarizado de  $f$ . En efecto,  $h(\tilde{x}) = (n + 2)/2$  y  $f_i(\tilde{x}) = \tilde{x}_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y además,  $f_{n+1}(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x}) \vee \tilde{x}_{n+2} = 1 = \tilde{x}_n + 1$  y  $f_{n+2}(\tilde{x}) = \neg \tilde{x}_{n+1} = 0 = x_{n+2}$ .

Por otro lado, supongamos que existe  $x \in \{0, 1\}^{n+2}$  punto polarizado de  $f$ . De la definición de  $f_{n+2}$  se sigue que  $x_{n+1} \neq x_{n+2}$ . Ahora definimos  $\tilde{x} \in \{0, 1\}^n$  cuyas primeras  $n$  componentes son  $x$ , y entonces  $h(\tilde{x}) = n/2$ .

Si  $x_{n+2} = 1$ , entonces  $x_{n+1} = 0$  y  $f_{n+1} = 1$  que es una contradicción con que  $x$  es punto fijo. Entonces  $x_{n+2} = 0$  y  $x_{n+1} = 1 = f_{n+2}(x) = \phi(x) \vee x_{n+2}$  que implica que  $\phi(x) = 1$ , es decir, que  $\phi$  se puede satisfacer. □

En resumen, el objetivo de este trabajo es estudiar la relación entre la estructura del grafo de interacción de una red Booleana, sus funciones de activación local  $f_i$  y la presencia de puntos fijos polarizados y de consenso en su dinámica. Dado que queremos relacionar dos propiedades de la red con la existencia de puntos fijos polarizados y de consenso, dividiremos el trabajo en dos grandes secciones. La primera consiste en fijar funciones de activación local comunes para cada vértice y estudiar qué estructuras de grafo nos permiten asegurar la existencia de puntos fijos polarizados y de consenso. La segunda parte consiste en fijar la estructura de la red y encontrar qué funciones de activación local nos permiten asegurar la existencia de estos puntos fijos.

# Fijando familia de redes según tipo de interacción

Este primer enfoque consiste en fijar la familia de redes según el tipo de funciones de activación local común para cada vértice y ver qué estructuras del grafo de interacción nos permiten asegurar la existencia de puntos fijos polarizados y de consenso.

Dado que el problema de existencia de puntos fijos polarizados es NP-Completo en el caso general, mostrado en la proposición 2, nos restringiremos a familias de redes que aparecen usualmente en la literatura en problemas de formación de opinión, como son las redes de minoría y mayoría.

## 4.1. Función minoría

Para poder experimentar con ejemplos de redes de minoría con sesgo se utilizó el software BNSimulator<sup>1</sup> y un programa de Python que dado un grafo de interacción nos indica si la red minoría con sesgo asociada tiene un punto fijo. Este algoritmo no es óptimo ya que utiliza fuerza bruta para probar con todas las posibles configuraciones polarizadas. (Ver anexo A.1) En el caso de redes de minoría sin sesgo se utilizó otro programa de Python que hace lo mismo. (Ver anexo A.2)

### 4.1.1. Puntos fijos polarizados en minoría

En la figura 4.1, nos encontramos con dos grafos de seis vértices que se diferencian solo en la arista marcada. Los puntos fijos de la red minoría con sesgo asociada al primer grafo no son polarizados,

<sup>1</sup>El archivo ejecutable se encuentra en el siguiente link <http://www.inf.udec.cl/~lilian/BNSimulator/>

mientras que los puntos fijos de la red minoría con sesgo asociada al segundo grafo contienen tres puntos fijos polarizados.

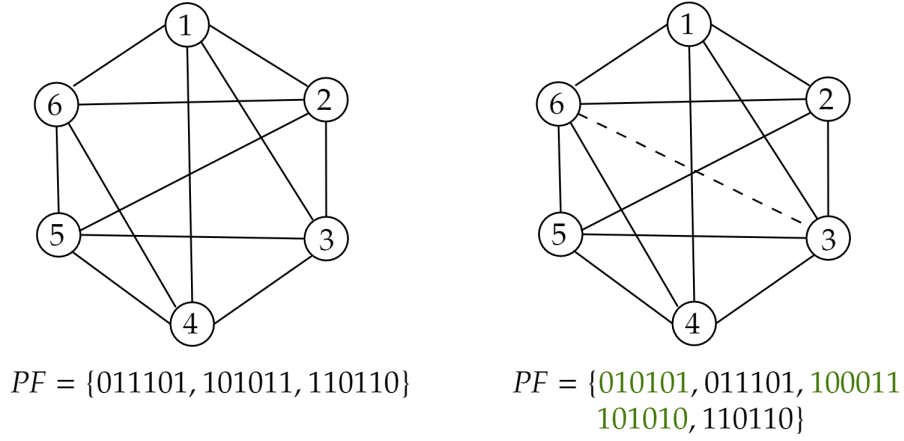


Figura 4.1: Ejemplo de grafos y puntos fijos de sus redes minoría con sesgo asociadas.

Esto evidencia que los estados estables de las redes de minoría son sensibles a la estructura del grafo de interacción. Comenzamos el estudio con una caracterización de los puntos fijos de la red minoría con sesgo asociada a grafos de ciclo.

**Proposición 3** *Dado un ciclo en  $n$  vértices  $C_n$ . Hay una biyección entre sus conjuntos independientes maximales y los puntos fijos de la red minoría con sesgo  $\min_{C_n}$  asociada.*

**Dem:** Dado  $M \subseteq V(C_n)$ , se construye una configuración  $x^M$  tal que

$$x_i^M = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in M \\ 1 & \text{si } i \notin M \end{cases}$$

Sea  $M \subseteq V(C_n)$  un conjunto independiente maximal. Sea  $v$  un vértice del ciclo. Si  $v \in M$ , entonces sus dos vecinos no son parte de  $M$ , por lo que  $\min_{C_n}(x^M)_v = 0 = x_v^M$ . Si  $v \notin M$ , entonces al menos uno de sus vecinos pertenece a  $M$ , ya que si no,  $M$  no sería maximal. Luego

$$\forall i \in \{0, 1\}, \quad \min_{C_n}(x^M)_v = H(0 - i + 1) = 1 = x_v^M \quad (4.1)$$

De aquí  $x^M$  es punto fijo de la red.

Por otro lado, sea  $x$  un punto fijo de  $\min_{C_n}$ . Probaremos que  $M = \{v \in V(C_n) : x_v = 0\}$  es un conjunto independiente maximal de  $C_n$ . Supongamos por contradicción que  $i, j \in M$  son vecinos, por lo que  $x_i = x_j = 0$  y por la ecuación 4.1 tenemos que  $\min_{C_n}(x)_i = \min_{C_n}(x)_j = 1$  que es una

contradicción con que  $x$  es punto fijo, por tanto,  $M$  es independiente. Además,  $M$  es maximal ya que si existiera  $v \notin M$  tal que  $M \cup \{v\}$  es independiente entonces  $x_v = 1$  y  $\min_{C_n}(x)_v = H(-1-1+1) = 0$ , pero  $x$  es punto fijo.  $\square$

**Corolario 4** La red minoría con sesgo  $\min_{C_n}$  asociada al ciclo  $C_n$  siempre tiene un punto fijo polarizado.

**Dem:** Si enumeramos los vértices de  $C_n$  de manera consecutiva en  $\mathbb{Z}_m$ , el conjunto  $M = \{i \in V : i \text{ es par}\}$  es un conjunto independiente maximal y  $||M| - n/2| \leq 1$ , por lo que el grafo de ciclo tiene al menos un punto fijo polarizado.  $\square$

En lo que sigue, nos enfocamos en acotar el grado mínimo y máximo de los grafos de interacción de la red minoría. Para poder demostrar los resultados de esta sección presentamos la siguiente definición y observación:

**Definición 6** Dado un digrafo  $D = (V, A)$  y  $U \subset V$ , se define el valor  $s_U(v)$  para cada  $v \in V$  como la diferencia entre la cantidad de vecinos de entrada, distintos de sí mismo, que tiene  $v$  en el conjunto al que pertenece menos la cantidad de vecinos que tiene en el otro. Más precisamente,

$$s_U(v) = \begin{cases} |N^-(v) \setminus \{v\} \cap U| - |N^-(v) \cap U^c| & \text{si } v \in U \\ |N^-(v) \cap U^c| - |N^-(v) \setminus \{v\} \cap U| & \text{si } v \notin U \end{cases}$$

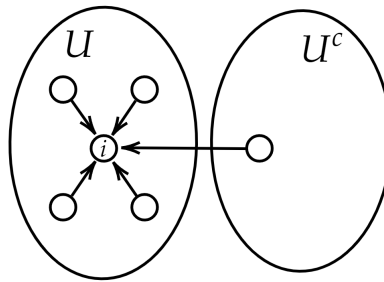


Figura 4.2: Ejemplo de vértice con  $s_U(i) = 3$

**Observación 5** Sea  $x \in \{0, 1\}^n$ , definimos  $U = \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i = 1\}$

- $x$  es un punto fijo de  $\min$  si y solo si  $\forall i \in U, s_U(i) \geq 0$  y  $\forall i \in U^c, s_U(i) > 0$ .
- $x$  es un punto fijo de  $\text{MIN}$  si y solo si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, s_U(i) \geq 0$

A continuación, presentamos los resultados encontrados a partir de acotar el grado mínimo de los grafos de interacción.

**Proposición 6** Dado un digrafo simétrico  $D$  con  $n$  vértices y bucles en cada uno tal que  $n$  es par y  $\delta^-(D) \geq n - 1$ , la red minoría sin sesgo asociada  $MIN_D$  tiene  $\binom{n}{n/2}$  puntos fijos polarizados.

**Dem:** Sea  $D = (V, A)$  un digrafo simétrico con bucles en todos sus vértices. Sea  $U \subset V$  un conjunto de sus vértices tal que  $|U| = n/2$ . Definimos  $x^U \in \{0, 1\}^n$  tal que  $\forall i \in V := \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i^U = 1$  si y solo si  $i \in U$ .

Sea  $v \in V$ , si  $d(v) = n$  el vértice está conectado con todos los vértices del grafo, luego  $s_U(v) = n/2 - (n/2 - 1) = 1$ . Si  $d(i) = n - 1$ , entonces  $v$  es vecino de todos los vértices menos uno que llamaremos  $k$ . Si  $v$  y  $k$  están en la misma partición definida por  $U$  y  $U^c$ , entonces  $s_P(v) = n/2 - (n/2 - 2) = 2$  y si  $v$  y  $k$  están en particiones distintas entonces  $s_P(v) = (n/2 - 1) + (n/2 - 1) = 0$ . Finalmente, de la observación 5 tenemos que  $x^U$  es punto fijo polarizado.

Dado que el número de subconjuntos de  $V$  que tienen tamaño  $|V|/2$  es  $\binom{n}{n/2}$  concluimos que este es el tamaño del conjunto de puntos fijos polarizados de  $MIN_D$ .  $\square$

Hay un resultado similar si consideramos la red minoría que sí tiene sesgo, pero tenemos que añadir la condición extra que al menos la mitad de los vértices tiene grado  $n - 2$ . Sin embargo, esta condición no es necesaria ya que, por ejemplo, en la figura 4.3 tenemos 6 vértices donde más de la mitad de sus vértices tienen el grado mínimo  $n - 2$ . Sin embargo, este grafo tiene como punto fijo polarizado a  $x = 010101$  por ejemplo:

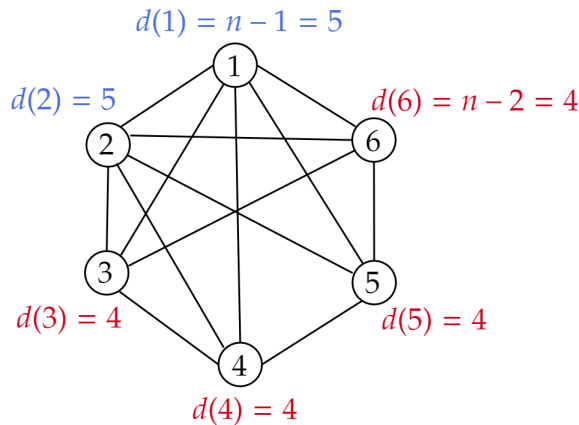


Figura 4.3: Grafo con 6 vértices y grado mínimo 4.

**Proposición 7** Dado un grafo  $G$  con  $n$  vértices tal que  $n$  es par,  $\delta(G) \geq n - 2$  y  $|\{i \in \{1, \dots, n\} : d(i) = n - 1\}| \geq n/2$ , la red minoría con sesgo asociada tiene al menos un punto fijo polarizado.

**Dem:** Sea  $G = (V, E)$  y  $U \subset V$  tal que  $|U| = n/2$  y además que  $\forall v \in U \ d(v) = n - 1$ . Definimos  $x^U \in \{0, 1\}^n$  tal que  $x_i^U = 1$  si y solo si  $i \in U \ \forall i \in V := \{1, \dots, n\}$ .

Sea un vértice  $v \in V$ . Si  $d(v) = n - 1$  entonces es vecino de todos los demás vértices y  $s_U(v) = n/2 - (n/2 - 1) = 1$ . Si  $d(i) = n - 2$ , entonces es vecino de todos los otros vértices menos el mismo y otro vértice que llamaremos  $k$ . Como el grafo es simétrico  $k \in U^c$  por lo que  $s_U(i) = (n/2) - (n/2 - 2) = 2$ .

Finalmente, de la observación 5 vemos que  $x^U$  es un punto fijo polarizado de min. □

Notemos que las dos proposiciones anteriores implican que las redes minorías asociadas a los grafos completos  $K_n$  siempre tienen puntos fijos polarizados. Demostraremos además que, si el grafo de interacción es completo, la red minoría con sesgo asociada solo tiene puntos fijos polarizados.

**Proposición 8** *Sea el grafo  $K_n$ , todos los puntos fijos de la red minoría con sesgo  $\min_{K_n}$  son polarizados.*

**Dem:** Sea el grafo completo  $K_n$ , supongamos por contradicción que existe  $x \in \{0, 1\}^n$  un punto fijo tal que  $|h(x) - n/2| > 1$ .

Supongamos primero que  $h(x) > n/2 + 1$  y sea  $v \in V$  tal que  $x_v = 1$ , entonces:

$$\sum_{j \in N(v)} x_j > (n - 1)/2 = d(v),$$

por lo tanto,  $\min_{K_n}(x)_v = 0 \neq x_v$ , que es una contradicción con que  $x$  es punto fijo. Si es que  $h(x) < n/2 + 1$ , consideramos un vértice  $v \in V$  tal que  $x_v = 0$ , luego  $\sum_{j \in N(v)} x_j < (n - 1)/2 = d(v)$ , por lo que  $\min_{K_n}(x)_v = 1 \neq x_v$  que también contradice que  $x$  es punto fijo. □

De la misma forma, presentamos los resultados obtenidos de acotar el grado máximo del grafo de interacción.

**Proposición 9** *Dado un digrafo simétrico  $D$  con  $n$  vértices y bucles en cada uno tal que  $n$  es par y  $\Delta^-(D) \leq 3$ , la red minoría sin sesgo  $\text{MIN}_D$  asociada tiene al menos un punto fijo polarizado.*

**Dem:** Sea  $D$  un digrafo simétrico tal que  $\Delta^-(D) \leq 3$ . Si no consideramos los bucles, este es equivalente a un grafo de grado máximo menor o igual a 2.

Primero demostraremos por inducción que un grafo simétrico con más de dos vértices tal que su grado máximo es menor o igual que 2, debe estar compuesto por vértices aislados, ciclos y caminos disjuntos por vértices.

El caso base es un grafo con 2 vértices el grafo es un camino de largo 2 o dos vértices aislados por lo que se cumple la proposición. Supongamos que cualquier grafo de  $n$  vértices y grado máximo



menor o igual que 2 está compuesto por vértices aislados, caminos y ciclos disjuntos por vértices. Sea un grafo  $G$  de  $n + 1$  vértices tal que  $\Delta(G) \leq 2$ , veremos los siguientes casos:

- Si  $\Delta(G) = 0$ , entonces todos los vértices son aislados y se cumple lo que pedimos.
- Si  $\Delta(G) = 1$ , entonces el grafo está compuesto por vértices aislados y caminos de largo 2.
- Si  $\Delta(G) = 2$ , tomamos  $v \in V$  tal que  $d(v) = 2$  y definimos  $G' := G \setminus \{v\}$  tiene  $n$  vértices y cumple que  $\Delta(G') \leq 2$ . Luego, por la hipótesis de inducción, se tiene que  $G'$  está compuesto por vértices aislados, caminos y ciclos disjuntos.

Sean  $u_1$  y  $u_2$  los vecinos de  $v$  en  $G$ , entonces  $d(u_1) = d(u_2) \leq 1$  ya que si no, en  $G$  tendrían grado 3. Esto implica que o son vértices aislados o finales de algún camino en  $G'$ . Si ambos son finales del mismo camino entonces  $u_1, v$  y  $u_2$  forman parte de un ciclo disjunto por vértices al resto de ciclos y caminos en  $G$ , en cualquier otro caso  $u_1, v$  y  $u_2$  forman parte de un camino disjunto por vértices al resto de caminos y ciclos en  $G$ .

De los casos anteriores, se concluye que  $G$  está compuesto de vértices aislados, ciclos y caminos disjuntos por vértices. Con esta consideración, presentamos el siguiente algoritmo que construye un punto fijo polarizado de esta red. Primero enumeramos los vértices de 1 a  $n$  tal que cada camino y ciclo tiene vértices consecutivos. Luego, definimos  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que  $x_i = 1$  si y solo si  $i$  es par y definimos  $U = \{v \in V : x_v = 1\}$ . Sea  $C$  una componente conexa de  $D$ ,

- Si  $C = v$  es un vértice aislado, entonces  $N(v) = \emptyset$  y por definición  $\text{MIN}(x)_v = x_v$ .
- Si  $C = \{i_1, \dots, i_l\}$  es un camino de largo  $l$ , entonces  $s_U(i_j) = 2$  para todo  $j \in \{2, \dots, l - 1\}$  y  $s_U(i_1) = s_U(i_l) = 1$ .
- Si  $C$  es un ciclo de largo par, entonces  $\forall i \in C$   $s_U(i) = 2$ .
- Si  $C$  es un ciclo de largo impar, entonces  $\forall j \in \{2, \dots, l - 1\}$ ,  $s_U(i_j) = 2$  y  $s_U(i_1) = s_U(i_l) = 0$ .

Como  $h(x) = |\{i : i \text{ es par}\}| = n/2$ , de la observación 5 tenemos que  $x$  es punto fijo polarizado de la red. □

Ahora, si consideramos la red minoría sin sesgo asociada no es necesario que el grafo de interacción sea conexo.

**Proposición 10** *Dado un grafo conexo  $G$  con  $n$  vértices tal que  $n$  es par y  $\Delta(G) \leq 2$ , la red minoría sin sesgo asociada tiene al menos un punto fijo polarizado.*

**Dem:** Sea  $G$  un grafo como en el enunciado, entonces  $G$  puede ser un ciclo o un camino de largo  $n$ . Luego se repite el mismo argumento que en la demostración anterior.  $\square$

La hipótesis de que  $G$  sea conexo es necesaria para asegurar la existencia de un punto fijo polarizado debido a la existencia de ciclos de largo par. Revisamos el siguiente ejemplo:

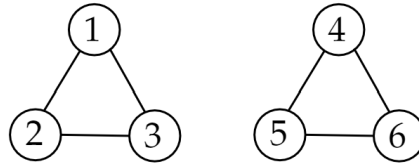


Figura 4.4: Grafo compuesto por dos  $C_3$ .

La red minoría con sesgo asociada al grafo no conexo de la figura 4.4 tiene el siguiente conjunto de puntos fijos:

$$\{011011, 011101, 011110, 101011, 101101, 101110, 110011, 110101, 110110\}$$

Como observación, también podemos ver que ser un árbol no es una condición suficiente para asegurar la existencia de puntos fijos polarizados en una red de minoría con sesgo.

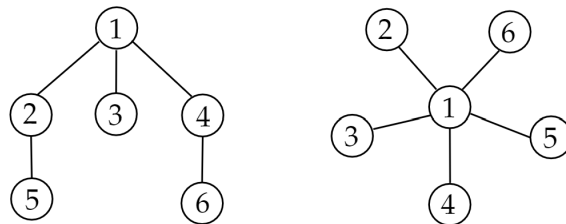


Figura 4.5: Árboles con 6 vértices.

El conjunto de puntos fijos del primer árbol de la figura 4.5 es  $\{011100, 100011, 100110, 110001\}$ , donde son todos polarizados mientras que el conjunto de puntos fijos del segundo árbol es  $\{10000, 011111\}$ .

Continuando con la idea de hacer variar los grados de la red, notamos que ser regular no es una condición suficiente para asegurar la existencia de puntos fijos polarizados.

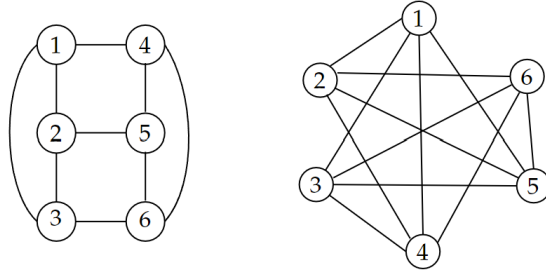


Figura 4.6: Grafo 3-regular y 4-regular.

La red minoría con sesgo asociada al primer grafo de la figura 4.6 tiene todos sus puntos fijos polarizados:

$$\{001011, 010101, 011001, 100110, 101010, 110100\}$$

Mientras que los puntos fijos de la segunda red no son polarizados, estos son:

$$\{011110, 100111, 111001\}$$

Sin embargo, si además de ser regular el grafo es bipartito podemos asegurar la existencia de puntos fijos polarizados. Ejemplos de grafos regulares bipartitos son caminos, ciclos, grillas regulares, entre otros.

**Lema 11** Sea  $G$  un grafo  $k$ -regular bipartito con  $k \geq 1$ . Si la bipartición es  $\{U, W\}$ , luego  $|U| = |W|$ .

**Dem:** Dado que  $G$  es bipartito, todos los arcos del grafo pueden ser contados sumando los grados de una sola partición de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sum_{v \in U} d(v) &= \sum_{v \in W} d(v) = |E| \\ \implies \sum_{v \in U} k &= \sum_{v \in W} k \\ \implies k|U| &= k|W| \\ \implies |U| &= |W| \end{aligned}$$

□

Llamamos balanceados a los grafos bipartitos que tienen partición  $\{U, W\}$  tal que  $|U| = |W|$ .

**Lema 12** Sea  $G$  un grafo conexo y bipartito balanceado, entonces la red minoría asociada y la red minoría con sesgo asociada tienen al menos un punto fijo polarizado.

**Dem:** Sea  $G = (V, E)$  un grafo bipartito balanceado con partición  $U, U^c$ . Demostraremos que la configuración  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que  $x_i = 1$  si y solo si  $i \in U$  es un punto fijo polarizado de la red minoría asociada y la red minoría con sesgo asociada. De hecho, dado que los vecinos de cada vértice están en la partición diferente a la que pertenecen tenemos que  $\forall v \in V, s_U(v) > 0$  y de la observación 5 tenemos que  $x$  es punto fijo polarizado de ambas redes.  $\square$

Usando ambos lemas se sigue que las redes minoría con y sin sesgo asociadas a un grafo regular bipartito tienen al menos un punto fijo polarizado.

**Teorema 13** Sea  $G$  un grafo bipartito  $k$ -regular, entonces las redes minoría sin sesgo y minoría con sesgo asociadas tienen al menos un punto fijo polarizado.

Para estudiar la complejidad computacional del problema de encontrar que grafos de interacción aseguran la existencia de puntos fijos polarizados en funciones de minoría asociadas, consideremos el problema de coloración en digrafos, *coloración de mayoría* o majority coloring. Un digrafo  $D = (V, A)$  tiene una coloración de mayoría si es que sus vértices pueden ser coloreados con dos colores tal que para cada  $v \in V$ , el número de vértices en su vecindad de salida que están coloreados con el mismo color son a lo más la mitad de ellos. Es decir,  $\phi : V \rightarrow \{0, 1\}$  es una coloración de mayoría si:

$$\forall v \in V, |\{u \in N^+(v) : \phi(u) = \phi(v)\}| \leq |N^+(v)|/2$$

Un digrafo tiene una **coloración de mayoría balanceada** si es que la partición que induce el coloreo es balanceada.

**Proposición 14** Dado un digrafo  $D = (V, A)$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La red minoría sin sesgo asociada tiene al menos un punto fijo polarizado.
2.  $D^r$  tiene una coloración de mayoría balanceada  $\phi : V \rightarrow \{0, 1\}$ .

Donde  $D^r = (V, A^r)$  es el digrafo reverso de  $D$ , es decir,  $\forall u, v \in V, (u, v) \in A^r \iff (v, u) \in A$ .

**Dem:** Dado un digrafo  $D = (V, A)$  con  $n$  vértices. Si la red minoría asociada MIN tiene un punto fijo polarizado  $x$  entonces definimos  $\phi : V \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $\phi(i) = x_i$ .

Probemos que  $\phi$  es una coloración balanceada de  $G^r$ . Sea  $v \in V$ , denotaremos  $N_G^-(v)$  a la vecindad de entrada de  $v$  en  $G$  y  $N_{G^r}^+(i)$  a la vecindad de salida de  $v$  en  $G^r$ . Es claro que  $N_{G^r}^+(i) = N_G^-(i)$ .

$$\begin{aligned} \text{MIN}_v(x) = x_v &\implies |\{u \in N_G^-(v) : x_v = x_u\}| \leq |N_G^-(v)|/2 \\ &\implies |\{u \in N_{G^r}^+(v) : x_v = x_u\}| \leq |N_{G^r}^+(v)|/2 \\ &\implies |\{u \in N_{G^r}^+(v) : \phi(v) = \phi(u)\}| \leq |N_{G^r}^+(v)|/2 \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que  $G^r$  tiene una coloración de mayoría balanceada  $\phi : V \rightarrow \{0, 1\}$ , entonces probaremos que  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que  $\forall i \in V, x_i = \phi(i)$  es un punto fijo polarizado de la red minoría sin sesgo asociada a  $G$ ,  $\text{MIN}_G$ .

Sea  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned} |\{u \in N_{G^r}^+(v) : \phi(v) = \phi(u)\}| \leq |N_{G^r}^+(v)|/2 &\implies |\{u \in N_{G^r}^+(v) : x_u = x_v\}| \leq |N_{G^r}^+(v)|/2 \\ &\implies |\{u \in N_G^-(v) : x_u = x_v\}| \leq |N_G^-(v)|/2 \\ &\implies \text{MIN}_v(x) = x_v \end{aligned}$$

□

Dado un digrafo  $D$ , el problema de decidir si tiene una coloración de mayoría es NP-completo (Anastos, Lamaison, Steiner, y Szabó, 2019) y ahora probamos que el problema de decidir si un digrafo tiene una coloración de mayoría balanceada es NP-Completo, así, el problema de decidir si la red minoría asociada a  $D$  tiene un punto fijo polarizado también es NP-Completo.

- **Coloración de mayoría (CM)** Dado un digrafo  $D$ . ¿Tiene  $D$  una coloración de mayoría?
- **Coloración de mayoría balanceada (CMB)** Dado un digrafo  $D$ . ¿Tiene  $D$  una coloración de mayoría balanceada?
- **Punto fijo polarizado en red minoría (PFPRM)** Dado un digrafo  $D$ . La red minoría asociada a  $D$ , ¿Tiene un punto fijo polarizado?

**Proposición 15** *CMB es NP-Completo.*

**Proof:** Para probar que *CMB* es NP podemos considerar el certificado  $\phi : V(D) \rightarrow \{0, 1\}$  que es una coloración de mayoría balanceada, chequear que lo es tomaría revisar cada vértice y todos sus vecinos por lo que tomaría a tiempo lineal respecto al tamaño de la red.

Ahora probaremos que  $CM \leq_p CMB$ . Sea  $D = (V, A)$  una instancia de  $CM$ , y sea  $D' = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$  dos copias de  $D$ . Probaremos que  $D$  tiene una coloración de mayoría si y solo si  $D'$  tiene una coloración de mayoría balanceada.

Supongamos que  $G$  tiene una coloración de mayoría  $\phi : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Sea  $v \in V$ , la cantidad de vecinos que tiene el mismo color que  $v$  no cambia si invertimos los colores de la coloración, por lo que la coloración  $\bar{\phi} : V \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $\bar{\phi}(i) = 1 \iff \phi(i) = 0$  para cada  $i \in V$  también es una coloración de mayoría.

Ahora consideremos la coloración  $\phi' : V' \rightarrow \{0, 1\}$  donde  $\phi'(i) = \phi(i)$  para cada  $i \in V_1$  y  $\phi'(i) = \bar{\phi}(i)$  para cada  $i \in V_2$ . Usando el argumento anterior podemos ver que  $\phi'$  es una coloración de mayoría y es claro que  $|\{u \in V' : \phi(u) = 1\}| = |\{u \in V' : \phi(u) = 0\}| = n = |V'|/2$ .

Por otro lado, supongamos que  $D'$  tiene una coloración de mayoría  $\phi' : V' \rightarrow \{0, 1\}$ , la función restringida solo a  $D$  nos entrega una coloración de mayoría para este digrafo.  $\square$

Notemos que la complejidad en el caso de grafos es un problema abierto.

#### 4.1.2. Puntos fijos de consenso en minoría

En cuanto al estudio de puntos fijos de consenso en redes de minoría notemos primero que si alguna función de activación local  $f_j$  es constante significa que el agente  $j$  no es influenciado por ningún otro vértice, o en otras palabras,  $N^-(j) = \emptyset$ .

**Proposición 16** *Dado un digrafo  $D$  tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ , entonces las redes minoría con sesgo  $\min_D$  y minoría sin sesgo  $\text{MIN}_D$  asociadas **no** tienen puntos fijos de consenso.*

**Dem:** Sea  $D = (V, A)$  un digrafo tal que  $|V| = n$ . Sea  $v \in V$ , dado que  $\delta^-(D) \geq 1$ , entonces  $|N^-(v)| > 0$ . Si  $x = \vec{0}$ , entonces:

$$- \sum_{j \in N^-(v)} x_j + |N(v)|/2 = |N(v)|/2 > 0$$

pero  $x_v = 0$  y  $\min_D(x)_v = \text{MIN}_D(x)_v = 1$ , por lo que  $\vec{0}$  no es punto fijo de la red.

Si es que  $x = \vec{1}$ , entonces se tiene que:

$$- \sum_{j \in N^-(v)} x_j + |N(v)|/2 = -|N(v)|/2 < 0,$$

pero  $x_v = 1$  y  $\min_D(x)_v = \text{MIN}_D(x)_v = 0$ , concluyendo que  $\vec{1}$  tampoco es punto fijo de la red.  $\square$

## 4.2. Función mayoría

Primero notemos que si todas las funciones de activación local del grafo son de mayoría entonces la red es del tipo monótona. Un resultado conocido y presentado en (Aracena, 2008) es que dada una red Booleana, si ningún agente tiene función de activación local constante entonces  $\vec{1}$  y  $\vec{0}$  son siempre puntos fijos de consenso de la red. En términos del grafo de interacción esto se traduce a la siguiente proposición:

**Proposición 17** *Dado el digrafo  $D$ , si  $\delta^-(D) \geq 1$  entonces la red mayoría asociada tiene los puntos fijos de consenso  $\vec{1}$  y  $\vec{0}$ .*

De manera similar al estudio de la red minoría podemos relacionar el problema de encontrar un grafo de interacción que permita asegurar la existencia de puntos fijos polarizados en una red mayoría es equivalente a un problema en grafos. El problema de *partición satisfactoria* consiste en decidir si un grafo dado  $G$  tiene una partición  $\{V_1, V_2\}$ , tal que cada vértice tenga al menos tantos vecinos en su conjunto de partición como en el conjunto contrario, es decir:

$$\forall v \in V_i : |N(v) \cap V_i| \geq |N(v) \cap V_{3-i}| \quad i \in \{1, 2\}.$$

Si además imponemos la condición que la partición sea balanceada, el problema es llamado *Partición Satisfactoria Balanceada*.

**Proposición 18** *Dado un grafo  $G$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Existe una red mayoría sin sesgo  $MAY_G$  asociada que tiene al menos un punto fijo polarizado.*
- (ii)  *$G$  tiene una partición satisfactoria balanceada.*

**Dem:** Sea  $G = (V, E)$  un grafo tal que la red mayoría sin sesgo asociada  $MAY_G$  tiene un punto fijo polarizado  $x \in \{0, 1\}^n$ . Luego  $V_1 = \{v \in V : x_v = 1\}$ ,  $V_2 = V \setminus V_1$  es una partición balanceada y satisfactoria de  $G$ . En efecto, es balanceada porque  $x$  es una configuración polarizada y es satisfactoria ya que dado  $v \in V_1$ , como  $MAY_G(x)_v = x_v = 1$  entonces  $\sum_{j \in N(v)} x_j \geq |N(v)|/2$  o  $N(v) = \emptyset$ . En cualquier caso esto implica que  $|N(v) \cap V_1| \geq |N(v)|/2$  y de aquí se tiene que

$$|N(v) \cap V_1| \geq |N(v) \cap V_2|.$$

Con el mismo razonamiento tenemos que si  $v \in V_2$ , entonces  $MAY_G(x)_v = x_v = 0$  y luego  $\sum_{j \in N(v)} x_j \leq |N(v)|/2$  o  $N(v) = \emptyset$ . Por esto  $|N(v) \cap V_1| \leq |N(v)|/2$  y entonces:

$$|N(v) \cap V_2| \geq |N(v) \cap V_1|$$

Por otro lado, si tenemos una partición satisfactoria balanceada  $\{V_1, V_2\}$  de  $G$ , entonces la configuración  $x \in \{0, 1\}^n$  tal que  $x_i = 1$  si y solo si  $i \in V_1$  es punto fijo polarizado. Como la partición es balanceada,  $x$  es una configuración polarizada. Sea  $v \in V_1$ , entonces  $x_v = 1$  y  $|N(v) \cap V_1| \geq |N(v) \cap V_2|$ , luego  $|N(v) \cap V_1| \geq |N(v)|/2$  y entonces:

$$\sum_{j \in N(v)} x_j \geq |N(v)|/2 \implies \text{MAY}_G(x)_v = 1 = x_v.$$

Asimismo, si  $v \in V_2$ , entonces  $x_v = 0$  y  $|N(v) \cap V_2| \geq |N(v) \cap V_1|$ , luego  $|N(v) \cap V_1| \leq |N(v)|/2$  y entonces:

$$\sum_{j \in N(v)} x_j \leq |N(v)|/2 \implies \text{MAY}_G(x)_v = 0 = x_v.$$

□

En (Bazgan, Tuza, y Vanderpooten, 2006) se prueba que el problema de saber si dado un grafo  $G$  existe una partición satisfactoria balanceada es NP-Completo.

**Corolario 19** *PFPRM es NP-Completo.*

Existen familias para las cuales siempre se puede encontrar esta partición y por lo tanto, asegurar la existencia de un punto fijo polarizado. Por ejemplo, los ciclos de largo par y grafos bipartitos completos cuyas particiones tengan una cantidad par de vértices. En la figura 4.7 se muestra un ejemplo de como serían las particiones satisfactorias balanceadas en estos casos.

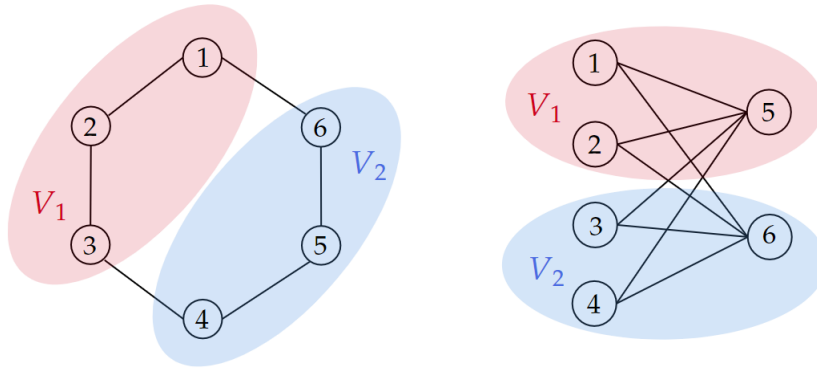


Figura 4.7: Particiones satisfactorias para  $C_6$  y  $K_{4,2}$ .

Además, podemos ver que hay familias para las cuales no existe una partición satisfactoria balanceada, como por ejemplo los grafos completos.



## Fijando Familias Según Grafo de Interacción

El segundo enfoque es fijar la estructura del grafo de interacción y buscar funciones de activación local que permitan asegurar la existencia de puntos fijos polarizados y de consenso de la red resultante.

En cuanto al estudio de los puntos de fijos de consenso, dado un digrafo  $D$  tal que  $\delta^-(D) \geq 1$  siempre podemos definir una función monótona, como por ejemplo, una mayoría con sesgo  $\text{may}_D$ , que tiene puntos fijos de consenso. Este resultado esta demostrado en la proposición 17.

En el caso de puntos fijos polarizados, notemos que dado un digrafo y una configuración polarizada  $x \in \{0, 1\}^n$ , podemos definir la red  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que:

$$f_i(z) = \bigwedge_{\{j \in N^-(i) : x_j = x_i\}} z_j \wedge \bigwedge_{\{k \in N^-(i) : x_k \neq x_i\}} \neg z_k$$

para  $i \in V$  tal que  $x_i = 1$ . Y:

$$f_i(z) = \bigwedge_{\{j \in N^-(i) \cap U_x\}} \neg z_j \wedge \bigwedge_{\{k \in N^-(i) \cap U_x^c\}} z_k$$

para  $i \in V$  tal que  $x_i = 0$ . Luego, es fácil ver que  $f_i(x) = x_i$  para cada  $i \in V$  por lo que  $x$  es un punto fijo polarizado de  $f$ .

De las construcciones anteriores podemos concluir el siguiente resultado.

**Proposición 20** *Dado un digrafo  $D$  tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ , existe una red que tiene al menos un punto*

fijo polarizado y existe una red que tiene al menos un punto fijo de consenso.

Para continuar el estudio de esta sección consideremos que, además de saber como es la estructura de la red, también conocemos el tipo de influencia que tienen los agentes entre sí. Para ello, consideramos un digrafo con signos en los arcos y nos preguntamos si existe una red que tenga este digrafo como grafo de interacción y que además tenga un punto fijo polarizado o de consenso.

## 5.1. Digrafo con signos positivos en los arcos

Consideramos el caso donde cada agente recibe influencia positiva por parte de su entorno, intuitivamente podríamos pensar que los estados estables que encontramos en este caso son solo de consenso.

Como mencionamos al comienzo, si el digrafo presentado tiene grado mínimo de entrada mayor a uno, entonces la red mayoría con sesgo asociada es monótona creciente en cada entrada y tiene puntos fijos de consenso, demostrado en la proposición 17. Por lo que nos enfocaremos en el estudio de puntos fijos polarizados de las posibles redes asociadas al grafo. Formalmente, definimos el problema como sigue:

**Red monótona(RM)** Dado un digrafo  $D = (V, A)$  tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ . ¿Existe una red monótona  $f$  tal que su grafo de interacción  $G(f) = D$  y que tenga al menos un punto fijo polarizado?

Primero probaremos que resolver este problema es equivalente a resolver el siguiente problema de decisión:

**Partición balanceada con grado mínimo acotado (PBGMA):** Dado un digrafo  $D = (V, A)$  tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ . Existe una partición balanceada de  $V$  tal que  $\delta^-(D[V_1]) \geq 1$  y  $\delta^-(D[V_2]) \geq 1$ ?

**Proposición 21** *RM y PBGMA son problemas equivalentes.*

**Dem:** Dado un digrafo  $D$  con  $n$  vértices tal que  $\delta^-(D) \geq 1$ , supongamos que existe una partición balanceada de sus vértices  $(V_0, V_1)$  tal que el grado mínimo de entrada de los grafos inducidos por ambas particiones es al menos 1.

Definimos la red  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que

$$f_i(x) = \begin{cases} \bigvee_{j \in N^-(i)} x_j & \text{si } i \in V_1 \\ \bigwedge_{j \in N^-(i)} x_j & \text{si } i \in V_0 \end{cases}$$

Probamos que  $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$  tal que  $\bar{x}_i = 1$  si y solo si  $i \in V_1$  es un punto fijo polarizado de  $f$ .

- Si  $i \in V_1$  entonces existe otro vértice  $k \in N^-(i)$  tal que  $j \in V_1$ , luego  $x_k = 1$  y

$$f_i(\bar{x}) = \bigvee_{j \in N^-(i)} \bar{x}_j = 1 = \bar{x}_i.$$

- Si  $i \in V_0$  entonces existe  $j \in N^-(i)$  tal que  $j \in V_0$ , luego  $x_j = 0$  y

$$f_i(\bar{x}) = \bigwedge_{j \in N^-(i)} \bar{x}_j = 0 = \bar{x}_i.$$

Ahora supongamos que existen funciones monótonas  $f_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  asociadas a cada vértice de forma que la red  $f = (f_1, \dots, f_n)$  tiene un punto fijo polarizado  $\bar{x}$ . Probaremos que  $(V_0, V_1)$  donde  $V_0 = \{i \in V : \bar{x}_i = 0\}$  y  $V_1 = \{i \in V : \bar{x}_i = 1\}$  es una partición balanceada de  $V$  tal que el grado mínimo de entrada de  $D[V_0]$  y  $D[V_1]$  son al menos uno.

Dado que el grado mínimo de entrada de  $D$  es al menos 1, entonces  $f$  no tiene vértices constantes y entonces  $\vec{1}$  y  $\vec{0}$  son puntos fijos de  $f$ . Sea  $v \in V_0$ , por contradicción podemos suponer que  $N^-(v) \cap V_0 = \emptyset$ , i.e.  $N^-(v) \subseteq V_1$ . Como  $f_i$  solo depende de los  $x_j$  tal que  $j \in N^-(v)$  tenemos, por la monotonía de  $f_v$ , que  $f_v(x) = f_v(\vec{1}) = 1$ , que es una contradicción. Usamos el mismo argumento para demostrar que si  $v \in V_1$ ,  $N^-(v) \cap V_1 \neq \emptyset$ , ya que si no  $f_v(x) = f_v(\vec{0}) = 0$  y es contradicción. Así, concluimos que el grado mínimo de entrada de cada grafo inducido por  $V_0$  y  $V_1$  es mayor o igual que uno. Finalmente, como  $x$  es polarizado tenemos que  $||V_0| - |V_1|| \leq 1$  por lo que la partición es balanceada.  $\square$

**Corolario 22** Dado un digrafo  $D$ , si existe una red monótona  $f$  tal que  $G(f) = D$  que tiene al menos un punto fijo polarizado, entonces  $D$  tiene al menos dos ciclos dirigidos disjuntos por vértices.

**Dem:** Sea  $D$  un digrafo con  $n$  vértices, supongamos que existe una red monótona  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$  tal que  $G(f) = D$  que tiene un punto fijo polarizado  $x \in \{0, 1\}^n$ .

Para cada  $i \in V$ , si  $x_i = 0$  entonces debe existir  $j \in N^-(i)$  tal que  $x_j = 0$ , ya que si no,  $f_i(x) = f_i(\vec{1}) = 1 \neq x_i$ . Esto implica que existe un ciclo  $C_0$  tal que  $\forall j \in C_0, x_j = 0$ . Podemos usar el mismo argumento para probar que debe existir un ciclo  $C_1$  vértice disjunto con  $C_0$  tal que  $\forall j \in C_1, x_j = 1$ .  $\square$

Ahora, si consideramos el de caso digrafos simétricos sin bucles o grafos. De la proposición 21 vemos que para asegurar la existencia de un punto fijo polarizado en la red monótona asociada

debemos encontrar una partición balanceada de los vértices del grafo de forma que en el grafo inducido por ambos conjuntos no tenga vértices aislados. Más formalmente definimos:

**Partición balanceada con grado mínimo acotado simétrico (PBGMS):** Dado un grafo  $G = (V, E)$  tal que  $\delta(G) \geq 1$ . ¿Existe una partición balanceada de  $V$  tal que  $\delta(G[V_1]) \geq 1$  y  $\delta(G[V_2]) \geq 1$ ?

Probaremos que este problema es NP-Completo utilizando la siguiente variación del problema de Partición (Hayes, 2002) que es NP-Completo.

**Partición:** Dado un multiconjunto  $S$  de enteros positivos. ¿Puede  $S$  ser dividido en dos conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  de forma que  $\sum_{i \in S_1} i = \sum_{i \in S_2} i$ ?

Donde un multiconjunto es un conjunto que permite repeticiones.

**Definición 7 Partición de grado mínimo mayor que uno (PGM1):** Dado un multiconjunto  $S$  de enteros positivos mayores estricto que 1. ¿Puede  $S$  ser dividido en dos conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  de forma que  $\sum_{i \in S_1} i = \sum_{i \in S_2} i$ ?

**Proposición 23** PGM1 es NP-Completo.

**Dem:** Para probar que el problema es NP podemos usar como certificado la partición  $S_1, S_2$ . Se puede verificar en tiempo polinomial si las sumas son iguales.

Para probar que el problema es NP-hard, mostramos que Partición  $\leq_P$  PGM1. Dado un multiconjunto  $S$ , obtenemos el conjunto  $S'$  multiplicando por dos cada elemento de  $S$ , luego todos los enteros en  $S'$  son mayores estricto que 1.

Si hay una partición  $S_1, S_2$  de  $S$  tal que la suma de los enteros es la misma, entonces multiplicando cada uno por dos obtenemos la partición  $S'_1, S'_2$  de  $S'$  tal que

$$\sum_{i \in S'_1} i = \sum_{i \in S_1} 2i = \sum_{i \in S_2} 2i = \sum_{i \in S'_2} i$$

Por otro lado, si tenemos una partición  $S'_1, S'_2$  de  $S'$  entonces obtenemos la partición  $S_1, S_2$  de  $S$  usando los mismos dígitos divididos por 2, luego

$$\sum_{i \in S_1} i = \sum_{i \in S'_1} i/2 = \sum_{i \in S'_2} i/2 = \sum_{i \in S_2} i.$$

□

**Proposición 24** *PBGMS es NP-Completo.*

**Dem:** Para probar que el problema es NP podemos presentar una partición balanceada tal que los subgrafos inducidos por cada partición tienen grado mínimo al menos uno, donde ambas condiciones pueden ser verificadas en tiempo lineal con respecto a su tamaño.

Para probar que el problema es NP-hard probamos que  $\text{PGM1} \leq_P \text{PBGMS}$ . Dado un multiconjunto  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  tal que  $a_i > 1$ , para cada  $a_i$  creamos un grafo estrella  $S_i$  con centro  $v_i$ , es decir, un nodo  $v_i$  con  $a_i - 1$  vértices colgantes como el de la figura 5.1. Luego añadimos una arista entre  $v_i$  y  $v_{i+1}$  para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . El grafo resultante tiene  $|V| = \sum_{i \in A} a_i$  vértices y tiene  $\delta(G) = 1$ .

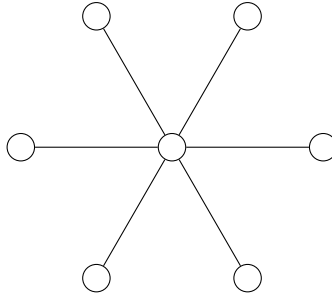


Figura 5.1: Grafo estrella con 7 vértices.

Supongamos que existe una partición  $A_1, A_2$  de  $A$  tal que la suma de sus componentes es igual. En el grafo  $G$  definimos la partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V$  tal que  $V_j = \{v \in S_i : a_i \in A_j\}$  para  $j \in \{1, 2\}$ .

Cada  $S_i$  tiene  $a_i$  vértices, luego:

$$|V_1| = \sum_{i: a_i \in A_1} |S_i| = \sum_{j \in A_1} a_j = \sum_{j \in A_2} a_j = \sum_{i: a_i \in A_2} |S_i| = |V_2|.$$

Dado que cada estrella está completamente contenida en algún conjunto de la partición, es claro que  $\delta(G[V_1]) \geq 1$  y  $\delta(G[V_2]) \geq 1$ .

Por otro lado, supongamos que existe una partición balanceada  $\{V_1, V_2\}$  tal que  $\delta(G[V_1]) \geq 1$  y  $\delta(G[V_2]) \geq 1$ . Para obtener lo último es necesario que todos los vértices de cada estrella estén en el mismo conjunto  $V_1$  o  $V_2$ , si no, los nodos colgantes estarían aislados en el otro conjunto. Definimos la partición  $\{S_1, S_2\}$  del conjunto  $S$  como sigue,  $S_j = \{a_i \in A : v_i \in V_j\}$  para  $i \in \{1, 2\}$ .

Usamos el nuevamente que  $|S_i| = a_i$ , luego:

$$\sum_{a_j \in A_1} a_j = \sum_{i: v_i \in V_1} |S_i| = \sum_{v_i \in V_1} 1 = |V_1| = |V_2| = \sum_{v_i \in V_2} 1 = \sum_{i: v_i \in V_2} |S_i| = \sum_{a_j \in A_2} a_j.$$

□

Como comentario, en el contexto de formación de opinión donde hay solo interacciones positivas podemos pensar que cada estrella es como un culto, donde el centro de la estrella es el líder y el resto de nodos colgantes son sus seguidores. Si el líder del culto tiene una opinión, entonces todos sus seguidores tienen la misma opinión.

Si consideramos un grafo que no tiene estrellas, entonces siempre podemos encontrar una partición balanceada que no tiene vértices aislados en los subgrafos que induce.

**Proposición 25** Dado un grafo conexo  $G = (V, E)$  tal que  $|V|$  es par y  $\delta(G) \geq 2$ , existe una partición balanceada y válida  $\{V_1, V_2\}$  de  $V$ .

**Dem:** Dado un grafo conexo  $G = (V, E)$  con una cantidad par de vértices y tal que  $\delta(G) \geq 2$ .

Existe un conjunto de aristas  $A \subseteq E(G)$  tal que  $G' = (V, E \setminus A)$  es conexo y  $\delta(G') = 2$ , podemos encontrar tal conjunto usando el siguiente algoritmo:

---

#### Algoritmo 1

---

**Input:**  $G = (V, E)$  grafo conexo tal que  $\delta(G) \geq 2$ .

```

1:  $\delta = \delta(G)$ 
2:  $A \leftarrow []$ 
3: if  $\delta = 2$  then
4:   return  $A$ 
5: end if
6: while  $\delta > 2$  do
7:   Detecta un ciclo  $C$  de  $G$ 
8:   Escoge una arista  $a \in E(C)$ 
9:    $A \leftarrow A \cup \{a\}$ 
10:   $G \leftarrow (V, E \setminus \{a\})$ 
11:   $\delta \leftarrow \delta(G)$ 
12: end while
13: return  $A$ 

```

---

La entrada del algoritmo es un grafo conexo  $G = (V, E)$ . Si tiene grado mínimo 2, entonces  $A$  es vacío; esto se verifica en tiempo  $O(|E|)$ . En cualquier otro caso, el grafo debe contener un ciclo. Podemos encontrarlo utilizando un recorrido  $DFS$  (Depth First Search) en tiempo  $O(|V| + |E|)$  y cualquier arista del grafo que no esté en el árbol  $DFS$  forma un ciclo. Luego escogemos al azar un arco  $a$  de este ciclo para remover del grafo y agregar a  $A$ . El grafo resultante  $G' = (V, E \setminus \{a\})$  sigue estando conectado porque  $a$  es parte de un ciclo y, por lo tanto, no es una arista de corte. Además  $\delta(G) - \delta(G') \leq 1$ , por lo que en cada iteración  $\delta$  disminuye su valor en a lo más 1. Dado que el

grafo tiene una cantidad finita de arcos y en cada iteración no queda desconectado, el algoritmo debe detenerse después de a lo más  $|E| - (|V| + 1)$  pasos y devolver  $A$  tal que  $G - A$  tiene grado mínimo 2.

En el trabajo de (Sheehan, 1992) se prueba que cualquier grafo  $G$  conexo con  $\delta(G) = 2$  y una cantidad par de vértices tiene una partición balanceada tal que  $\delta(G[V_1]) \geq 1$  y  $\delta(G[V_2]) \geq 1$ . Agregar arcos al grafo no disminuye su grado mínimo por lo que el grafo original también tiene la partición balanceada que se busca.  $\square$

Dado un grafo conexo  $G$  con grado mínimo al menos 2, presentamos otra prueba de que siempre existe una partición balanceada que induce grafos de grado mínimo mayor que 1 y que no requiere paridad en los vértices.

**Definición 8** Dado un grafo  $G = (V, E)$ , una partición válida  $\{V_1, V_2\}$  y un vértice  $v \in V_2$ , definimos la acción de **cambiar  $v$  de partición** como definir una nueva partición  $V'_1 = V_1 \cup \{v\}$   $V'_2 = V_2 \setminus \{v\}$ .

**Lema 26** Dado un grafo conexo  $G = (V, E)$  tal que  $\delta(G) \geq 2$  y  $\{V_1, V_2\}$  es una partición válida de  $V$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) No existe un vértice  $v \in V_2$  tal que la partición obtenida de cambiar  $v$  de partición es válida.
- II) Cada vértice en  $v \in V_2$  tiene **al menos un** vecino en  $V_1$  y **exactamente un** vecino en  $V_2$ .

**Dem:** Sea  $G$  conexo tal que  $\delta(G) \geq 2$  y sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición válida de  $V$ .

Primero demostramos que II) implica I). Supongamos que  $\forall v \in V_2, |N(v) \cap V_1| \geq 1$  y  $|N(v) \cap V_2| = 1$ . Sea  $v \in V_2$ , entonces existe solo un vértice  $w \in V_2$  tal que  $N(w) \cap V_2 = \{v\}$ . Si cambiamos a  $v$  de partición, entonces  $N(w) \cap V_2 = \emptyset$  y  $\delta(G[V_2]) = 0$ , luego la partición obtenida no es válida. Es decir, si cambiamos cualquier vértice de partición obtenemos una partición no válida.

Ahora demostramos que I) implica II). Supongamos que no existe ningún vértice que se pueda cambiar de partición para obtener una partición válida. Sea  $v \in V_2$ , supongamos que  $v$  no tiene vecinos en  $V_1$ , como  $\delta(G) \geq 2$  todos sus vecinos están en  $V_2$ . Dado que  $G$  es conexo debe existir  $u_1 \in V_1$  tal que existe un camino entre  $v$  y  $u_1$  en  $G$ , sea  $u_2$  el vértice del camino que tiene un vecino en  $V_1$  y un vecino en  $V_2$ , entonces podemos cambiar a  $u_2$  de partición y obtener una partición válida como en la figura 5.2, y esto es una contradicción. Por lo tanto  $\forall v_2 \in V_2 : |N(v) \cap V_1| \geq 1$ .

Sea  $v \in V_2$ . Dado que  $\{V_1, V_2\}$  es válida,  $v$  debe tener al menos un vecino en  $V_2$ , supongamos que tiene más de uno. Si existen  $u_1, u_2 \in N(v) \cap V_2$ , entonces como cada uno debe tener algún vecino en  $V_1$  podemos cambiar cualquiera de partición y obtener una partición válida, como en la figura 5.3, lo que es contradicción. Por lo tanto  $\forall v_2 \in V_2 : |N(v) \cap V_2| = 1$ .  $\square$

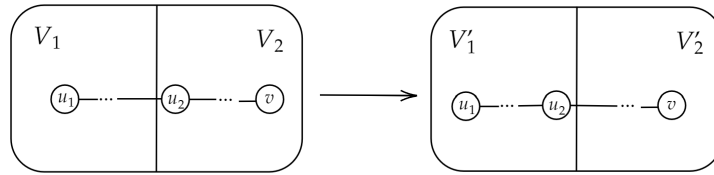


Figura 5.2: Cambio de  $u_2$  de partición.

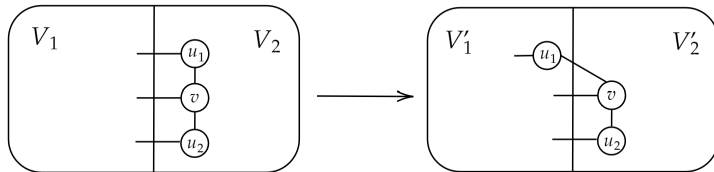


Figura 5.3: Cambio de  $u_1$  de partición.

**Teorema 27** Dado un grafo conexo  $G = (V, E)$  tal que  $|V| \geq 4$  y  $\delta(G) \geq 2$ , existe una partición balanceada válida de  $V$ .

Para probar este teorema presentamos un algoritmo polinomial que encuentra una partición balanceada y válida de un grafo de grado mínimo al menos 2. Este está inspirado en la descomposición en cadenas presentada en (Schmidt, 2013), con la diferencia que en el algoritmo de la referencia las cadenas pueden ser caminos o ciclos, pero en este una cadena puede ser un camino, un ciclo o ciclo pegado a un camino.



---

**Algoritmo 2** Descomposición en cadenas

---

**Input:**  $G = (V, E)$  conexo.

```
1: Obtener un árbol  $T$  de  $G$  obtenido por DFS desde un vértice que sea parte de un ciclo.
2:  $Cadenas \leftarrow []$ 
3: Marcamos todos los vértices como no visitados.
4: for  $v \in V$  en orden DFS do
5:   Marcamos  $v$  como visitado
6:   for  $u \in N(v)$  do
7:     if  $u$  no ha sido visitado y no es hijo de  $v$  en  $T$  then
8:       Marcamos  $u$  como visitado
9:        $C \leftarrow [u, v]$ 
10:       $w \leftarrow$  padre de  $u$  en  $T$ 
11:      while  $w$  no ha sido visitado do
12:        Marcar  $w$  como visitado
13:        Agregar  $w$  al final de  $C$ 
14:         $w \leftarrow$  padre de  $w$  en  $T$ 
15:      end while
16:      Agregar  $w$  al final de  $C$ 
17:      if  $w$  no es raíz de  $T$  y  $w$  no es parte de alguna cadena then
18:         $w \leftarrow$  padre de  $w$  en  $T$ 
19:        while  $w$  no es parte de ninguna cadena do
20:          Agregar  $w$  al final de  $C$ 
21:           $w \leftarrow$  padre de  $w$  en  $T$ 
22:        end while
23:        Agregar  $w$  al final de  $C$ 
24:      end if
25:       $Cadenas \leftarrow Cadenas \cup \{C\}$ 
26:    end if
27:  end for
28: end for
29: return  $Cadenas$ 
```

---

La entrada del algoritmo es un grafo  $G$  de tamaño  $O(|V| + |E|)$ . En el primer paso, debemos obtener un árbol  $T$  a partir de  $G$  usando DFS a partir de un vértice que sea parte de un ciclo. Para ello podemos modificar DFS de forma que cuando encuentre un vértice ya visitado lo entregue, pues este sería parte de un ciclo. Esto se hace en el peor de los casos en  $O(|V|(|V| + |E|))$ , luego marcamos todos los vértices como no visitados, que se hace en  $O(|V|)$ , después recorremos los vértices del grafo en el orden inducido por el algoritmo DFS, que toma  $O(|V|)$ . Marcamos el vértice

como visitado y revisamos todos sus vecinos, que en el peor de los casos son  $O(|V|)$ .

Los pasos 7 – 16 detectan un ciclo en el grafo, si un vértice  $v$  tiene un vecino  $u$  distinto a su hijo en  $T$ , crea la cadena que incluye a ambos y todo el camino en  $T$  desde  $u$  a  $v$ , esto lo hace en el peor de los casos en tiempo  $O(|V|)$  si el ciclo contiene a todos los vértices.

Si el último vértice agregado no pertenecía a ninguna otra cadena ya encontrada, entonces se sigue agregando vértices hasta que esto último ocurra, en el peor caso recorriendo todos los vértices del grafo. Para saber si no pertenece a ninguna otra cadena ya encontrada hay que revisar las otras cadenas, por lo que en total este paso toma, en el peor de los casos, tiempo  $O(|V|^2)$ . Los pasos 17 – 23 detectan caminos entre ciclos encontrados en el árbol y aristas de corte.

Finalmente, se incluye la cadena a la lista de cadenas del grafo en tiempo constante. En resumen el algoritmo toma  $O(|V|)O(|V|)(O(|V| + O(|V|^2))) = O(|V|^4)$ . Que es cuadrático con respecto al orden de entrada  $O(|V| + |E|) \approx O(|V|^2)$ .

El algoritmo presentado entrega el conjunto de cadenas que denotamos  $C^1, C^2, \dots, C^m$  donde cada cadena es una lista o multiconjunto que representan los vértices del grafo. Hay a lo más tantas cadenas como aristas en  $G$  que no pertenezcan al árbol  $DFS$ , por lo que  $m \leq |E| - |V| + 1$ .

Presentamos un ejemplo del algoritmo con el grafo  $G$  de  $n = 8$  vértices de la figura 5.4.

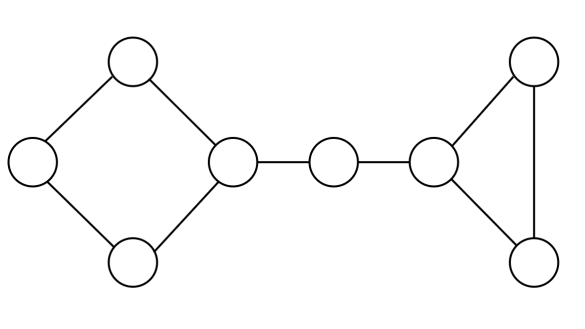


Figura 5.4: Grafo  $G$  de 8 vértices.

Realizamos DFS desde un vértice que pertenezca a un ciclo y obtenemos un árbol DFS  $T$  como el de la figura 5.5.

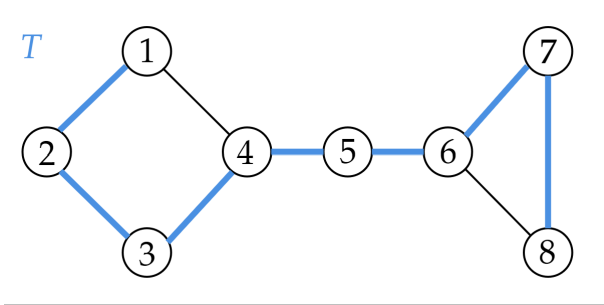


Figura 5.5: Un árbol DFS de  $G$ .

Comenzamos con todos los vértices como no marcados y revisamos el vértice 1, encontramos que 4 es su único vecino que no es su hijo en el árbol por lo que creamos la cadena  $C^1 = [1, 4]$ , marcamos como visitado a 4 y recorremos el único camino entre 4 y 1 en  $T$  marcando cada vértice e incluyéndolos al final de la cadena. Cuando llegamos a 1 nos detenemos, lo añadimos a la cadena y obtenemos  $C^1 = [1, 4, 3, 2, 1]$  que incluimos en la lista de cadenas.

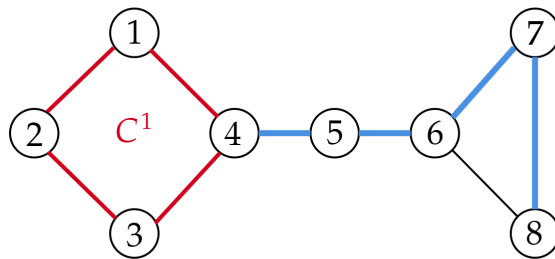


Figura 5.6: Primera cadena encontrada en  $G$ .

Continuamos revisando y marcando como visitados a los vértices en orden DFS hasta que llegamos a 6 que tiene a 8 como vecino, que no ha sido visitado y que no es su hijo en  $T$ , así comenzamos la cadena  $C^2 = [6, 8]$ , luego añadimos 7 y se acaba el while de la línea 11, añadimos 6 y nos damos cuenta que el padre de 6, 5 no pertenece a ninguna cadena aún por lo que también se añade a la cadena y finalmente añadimos 4 que es parte de la cadena anterior. Obtenemos de esta forma  $C^2 = [6, 8, 7, 6, 5, 4]$ .

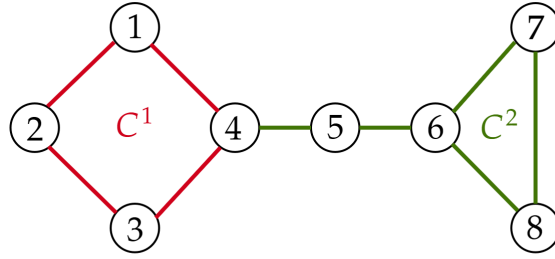


Figura 5.7: Descomposición por cadenas de  $G$ .

Finalmente, el algoritmo devuelve la descomposición  $C^1 = [1, 4, 3, 2, 1]$ ,  $C^2 = [6, 8, 7, 6, 5, 4]$ .

Algunas observaciones sobre el algoritmo son que la primera cadena siempre es un ciclo por lo que el primer y último vértice son el mismo. El resto de las cadenas comparten al menos un vértice con una cadena anterior, a estos vértices los llamaremos raíces y denotamos  $r_1$  y  $r_2$ . Sin contar las raíces las cadenas son disjuntas por vértices entre sí.

Si  $i \neq 1$ , entonces:

- La cadena  $C^i$  es un camino si el último y primer vértice son distintos y no hay más repeticiones entre los elementos. En este caso las raíces  $r_1$  y  $r_2$  son el primer y último elemento.
- La cadena  $C^i$  es un ciclo si el último y primer vértice son el mismo, en este caso este mismo elemento representa la raíz, es decir  $r_1 = r_2$ .
- La cadena  $C^i$  es un ciclo conectado a un camino si es que el primer vértice se repite antes del último elemento, en este caso el último elemento es la raíz y  $r_1 = r_2$ .

**Definición 9** Los elementos de  $C^i$  que no son raíces los llamamos vértices internos y los denotaremos por  $int(C^i) = c_1^i, \dots, c_j^i$ . Decimos que el largo de la cadena es la cantidad de vértices internos y denotamos  $len(C^i) = |int(C^i)|$ .

Con todas estas herramientas presentamos la demostración del teorema 27.

**Dem:** Procedemos a demostrar por inducción sobre el número de vértices  $|V| = n$ .

Para el caso base consideramos un grafo conexo con cuatro vértices y grado mínimo 2. Del teorema de Dirac (Bang-Jensen y Gutin, 2008), sabemos que existe un camino Hamiltoniano  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , y entonces la partición  $V_1 = \{v_1, v_2\}$ ,  $V_2 = \{v_3, v_4\}$  es balanceada y válida.

Supongamos que para cualquier grafo conexo con  $n$  vértices y grado mínimo al menos 2, existe una partición válida balanceada de sus vértices.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo conexo con  $n + 1$  vértices y grado mínimo al menos 2, obtenemos su descomposición en cadenas  $C^1, C^2, \dots, C^m$ . Consideramos la última cadena  $C^m$  y definimos el grafo  $G' = G \setminus \text{int}(C^m)$ .

Dado que las cadenas son disjuntas en sus vértices internos,  $G'$  es conexo. Además  $|V(G')| \leq n$  y  $\delta(G') \geq 2$  ya que el grafo resultante está compuesto de cadenas con raíces en otras cadenas y  $C^1$  es un ciclo. Por la hipótesis de inducción, sabemos que existe una partición válida balanceada  $(V'_1, V'_2)$  de los vértices de  $G'$ .

Si alguna de las raíces de  $C^m$  está en  $V'_i$  entonces la partición  $V_1 = V'_i \cup \text{int}(C^m)$  y  $V_2 = V \setminus V_1$  es válida en  $G$ , pero no necesariamente balanceada. Para balancear la partición debemos cambiar de partición a lo más  $\lceil |C^m|/2 \rceil$  vértices. Podemos pensar en cambiar un vértice a la vez, para cambiar  $v$  de  $V_1$  a  $V_2$  tiene que tener al menos un vecino en  $V_2$  y, dado que, cada cadena es un ciclo o ciclo y camino, al cambiar menos de la mitad de sus vértices seguimos teniendo al menos un vértice con grado 2 o mayor. Luego, en cada paso existe un vértice que podemos cambiar de partición debido al lema 26. De esta forma encontramos una partición válida y balanceada de  $G$ .  $\square$

Como observación, para encontrar un vértice  $w$  que podemos cambiar de partición  $V_1$  a  $V_2$  y seguir obteniendo una partición válida podemos seleccionar un vértice  $v$  en  $N(V_2)$  que debe tener un vecino  $w$  en  $V_1$  que tiene más de dos vecinos en  $V_2$  incluyendo a  $v$ . Como se muestra en el siguiente algoritmo:

---

**Algoritmo 3** Balanceo  $\{V_1, V_2\}$ 

---

**Input:** Grafo  $G$  y  $\{V_1, V_2\}$  partición de  $V(G)$ .

```
1: if  $|V_1| - |V_2| > 1$  then
2:    $V_1' \leftarrow V_2$ 
3:    $V_2 \leftarrow V_1$ 
4:    $V_1 \leftarrow V_1'$ 
5: end if
6: while  $\|V_2\| - \|V_1\| > 1$  do
7:    $A \leftarrow \{v \in V_2 : \exists w \in V_1 : w \in N(v)\}$ 
8:   for  $v \in A$  do
9:      $flag = 0$ 
10:    for  $w \in N(v) \cap V_2$  do
11:      if  $|N(w) \cap V_2| == 1$  then
12:         $flag = 1$ 
13:      end if
14:    end for
15:    if  $flag == 0$  then
16:       $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{w\}, V_2 \leftarrow V_2 \setminus \{w\}$ 
17:      Break
18:    end if
19:  end for
20: end while
21: return  $\{V_1, V_2\}$ 
```

---

Este algoritmo recibe un grafo  $G$  y una partición válida de sus vértices. En el caso en que  $|V_2| + 1 < |V_1|$  se intercambia la etiqueta de los conjuntos en tiempo constante de forma que  $|V_1| + 1 < |V_2|$ . Se repiten los pasos 6-20 hasta que la diferencia entre las cardinalidades de las particiones es menor o igual a 1, primero se define el conjunto  $A$  que representa a los vértices de  $V$  que tienen algún vecino en  $V_1$ , luego para cada vértice  $v$  en este conjunto revisamos si es que todos sus vecinos  $w$  tienen algún otro vecino en  $V_2$  aparte de  $v$ , si encontramos uno que sí, entonces lo cambiamos de partición y repetimos. En el peor de los casos  $A$  contiene a todos los vértices del grafo menos uno, por lo que el for de la línea 8 se hace  $O(|V|)$  veces. Luego, en el peor de los casos es vecino de todos los otros vértices en  $V_2$ , por lo que el for de la línea 10 se hace  $O(|V|)$  veces también, así esta parte del algoritmo toma  $O(|V|^2)$ .

A continuación presentamos el pseudocódigo de un algoritmo polinomial basado en la demostración que entrega una partición válida y balanceada de un grafo de grado mínimo 2 dado.

---

**Algoritmo 4** Partición válida balanceada

---

**Input:**  $G = (V, E)$  conexo tal que  $\delta(G) \geq 2$ .

```
1: Obtenemos descomposición en cadenas de  $C^1, \dots, C^m$  de  $G$ .
2:  $V_1 \leftarrow [ , ], V_2 \leftarrow [ , ]$ 
3: if  $\text{len}(C^1) \geq 4$  then
4:   for  $i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{\text{len}(C^1)}{2} \rfloor\}$  do
5:      $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{c_i^1\}$ 
6:   end for
7:   for  $i \in \{\lfloor \frac{\text{len}(C^1)}{2} \rfloor + 1, \dots, \text{len}(C^1)\}$  do
8:      $V_2 \leftarrow V_2 \cup \{c_i^1\}$ 
9:   end for
10: else
11:   for  $i \in \{1, 2, 3\}$  do
12:     if  $c_1^i$  es raíz de otra cadena then
13:        $r \leftarrow i$ 
14:       Break
15:     end if
16:   end for
17:    $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{r\}$ 
18:    $V_2 \leftarrow V_2 \cup (\text{int}(C^1) \setminus \{r\})$ 
19: end if
20: for  $i \in \{2, \dots, m\}$  do
21:   if  $r_1^i \in V_1$  o  $r_2^i \in V_1$  then
22:      $V_1 \leftarrow V_1 \cup \text{int}(C_i)$ 
23:   else
24:      $V_2 \leftarrow V_2 \cup \text{int}(C_i)$ 
25:   end if
26: end for
27: Balancear  $\{V_1, V_2\}$ 
28: return  $\{V_1, V_2\}$ 
```

---

La entrada es un grafo conexo de grado mínimo al menos dos que tiene tamaño  $O(|V| + |E|)$ . En el primer paso obtenemos la descomposición en cadenas que se hace en tiempo  $O(|V|^4)$ . En los pasos 3-19 separamos el primer ciclo de la cadena, que sabemos que existe pues el grafo tiene grado mínimo 2. El primer ciclo no tiene raíces en ningún otro, si tiene más de 4 elementos incluimos la mitad en  $V_1$  y la otra mitad en  $V_2$  de forma consecutiva, en el peor de los casos el grafo es un ciclo Hamiltoniano y este paso toma  $O(|V|)$ . Si el primer ciclo tiene 3 elementos, entonces escogemos uno de ellos, que es raíz de otra cadena, y lo incluimos en  $V_1$  y el resto en  $V_2$ , para hacer esto en el

peor de los casos hay que revisar todas las cadenas por lo que toma tiempo  $O(|V|)$ .

En los pasos 20-26, cada cadena se incluye en alguna de las particiones donde tenga una raíz y esto toma en el peor de los casos  $O(|V|)$ . Finalmente, obtenemos una partición válida pero no necesariamente balanceada por lo que ocupamos el algoritmo presentado anteriormente que toma  $O(|V|^2)$ . Después de un análisis rápido vemos que el algoritmo toma en el peor caso  $O(|V|^4)$  en ejecutarse.

En (Maurer, 1979) se presenta un algoritmo polinomial para colorear los vértices de un grafo de grado mínimo mayor o igual a 2 con dos colores de forma que ningún vértice quede con todos sus vecinos del color opuesto. Es fácil ver que la partición que induce esta coloración es válida y el algoritmo permite escoger la cantidad de vértices que quedan pintados de cada color, por lo que se puede obtener una partición válida balanceada en el caso en que el grado mínimo del grafo sea 2.

El algoritmo presentado genera una coloración balanceada, pero no necesariamente válida y al azar va escogiendo pares de vértices y los cambia de color hasta hacer válida la coloración, mientras que el algoritmo presentado anteriormente comienza con una partición válida y cambia vértices de partición hasta hacerla balanceada. Esto último permite encontrar particiones válidas y balanceadas en grafos con grado mínimo uno cuando existen.



## Conclusiones

Si consideramos la motivación del problema, los puntos fijos polarizados representan estados estables del proceso de formación de opiniones donde una sociedad no puede llegar a un acuerdo, mientras que los puntos fijos de consenso representan un estado estable donde todos los miembros de la sociedad se ponen de acuerdo en la misma opinión.

Al final del Capítulo 3 se evidenció que determinar si una red Booleana que modela este proceso tiene puntos fijos polarizados es un problema difícil en general.

En el Capítulo 4 nos enfocamos en estudiar las redes mayoría y minoría que aparecen de forma natural en la literatura. En cuanto a los estados de consenso, observamos que siempre pueden ser obtenidos en redes de mayoría, pero nunca en redes de minoría. Para estudiar los estados polarizados obtenidos con ciertas estructuras de red, asociamos el problema de existencia con problemas conocidos de partición en grafos. Esto último nos permitió utilizar herramientas de esta área para comprender la complejidad computacional del problema. Entre los resultados destacados, encontramos que siempre existe la posibilidad de llegar a estados polarizados cuando los agentes de las sociedades opinan en contra de la mayoría (redes minoría) y existen muy pocas o muchas conexiones. En particular, si todos los agentes de este tipo de sociedades consideran la opinión de todo el resto de agentes, no existe la posibilidad de llegar a un estado estable distinto del polarizado, y por lo tanto, nunca se llegaría a un acuerdo. Para otros tipos de estructuras de red más específicas también se puede asegurar la existencia de estados polarizados, como en el caso de los grafos bipartitos regulares. Es contraintuitivo pensar que una red de mayoría podría alcanzar estados estables de polarización, pero en este mismo capítulo encontramos ciertas estructuras de red interacción que permiten alcanzarlos, así como también existen estructuras que aseguran nunca llegar a un estado polarización.

En el Capítulo 5 adoptamos otro enfoque, primero observamos que, dada cualquier estructura de

interacción sin vértices aislados, se puede definir una red que asegure estados estables de consenso y otra red que asegure estados estables polarizados. Por esta razón, decidimos restringir las interacciones y estudiar el caso en el que todas son positivas. En este caso sigue siendo fácil asegurar la existencia de estados estables de consenso, pero se podría pensar que si todos los agentes se influyen de manera positiva entre sí, no se debería llegar a estados estables donde no hay acuerdo. Uno de los resultados más interesantes de este trabajo es que, bajo la condición de que cada agente se vea influenciado por la opinión de al menos otros dos agentes, siempre existe la posibilidad de definir una red de interacciones positivas que puede alcanzar un estado estable de polarización, más aún, presentamos un algoritmo que lo encuentra en tiempo polinomial.

Considerando que nos restringimos únicamente a interacciones positivas, una pregunta abierta es estudiar el caso en el que solo hay interacciones negativas o una mezcla de ambas. Otras preguntas que surgieron durante la investigación y que no fueron exploradas se plantean en los respectivos capítulos. Por ejemplo, encontrar una condición necesaria para asegurar la existencia de puntos fijos polarizados en redes de minoría con sesgo o conocer la complejidad del problema de existencia de puntos fijos polarizados de las redes minorías asociadas a grafos.

## Referencias

- Anastos, M., Lamaison, A., Steiner, R., y Szabó, T. (2019). Majority colorings of sparse digraphs. *arXiv preprint arXiv:1911.01954*.
- Anthony, M. (2001). *Discrete mathematics of neural networks: selected topics*. SIAM.
- Aracena, J. (2008). Maximum number of fixed points in regulatory boolean networks. *Bulletin of mathematical biology*, 70, 1398–1409.
- Aracena, J., Demongeot, J., y Goles, E. (2004). Fixed points and maximal independent sets in and–or networks. *Discrete Applied Mathematics*, 138(3), 277–288.
- Aracena, J., Richard, A., y Salinas, L. (2014). Maximum number of fixed points in and–or–not networks. *Journal of Computer and System Sciences*, 80(7), 1175–1190.
- Aracena, J., Richard, A., y Salinas, L. (2017). Number of fixed points and disjoint cycles in monotone boolean networks. *SIAM journal on Discrete mathematics*, 31(3), 1702–1725.
- Bang-Jensen, J., y Gutin, G. Z. (2008). *Digraphs: theory, algorithms and applications*. Springer Science & Business Media.
- Bazgan, C., Tuza, Z., y Vanderpooten, D. (2006). The satisfactory partition problem. *Discrete applied mathematics*, 154(8), 1236–1245.
- Bridoux, F., Durbec, N., Perrot, K., y Richard, A. (2019). Complexity of maximum fixed point problem in boolean networks. En *Conference on computability in europe* (pp. 132–143).
- Förster, M., Grabisch, M., y Rusinowska, A. (2013). Anonymous social influence. *Games and Economic Behavior*, 82, 621–635.
- Goles, E., Medina, P., Montealegre, P., y Santivañez, J. (2022). Majority networks and consensus dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 164, 112697.
- Goles, E., Medina, P., y Santivañez, J. (2023). Majority networks and local consensus algorithm. *Scientific Reports*, 13(1), 1858.
- Goles, E., y Montealegre, P. (2015). The complexity of the majority rule on planar graphs. *Advances in Applied Mathematics*, 64, 111–123.
- Grabisch, M., y Rusinowska, A. (2013). A model of influence based on aggregation functions. *Mathematical Social Sciences*, 66(3), 316–330.
- Green, D. G., Leishman, T. G., y Sadedin, S. (2007). The emergence of social consensus in boolean networks. En *2007 IEEE Symposium on Artificial Life* (pp. 402–408).
- Hayes, B. (2002). Computing science: The easiest hard problem. *American Scientist*, 90(2), 113–117. Descargado 2023-10-26, de <http://www.jstor.org/stable/27857621>
- Kauffman, S. A. (1969). Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of theoretical biology*, 22(3), 437–467.
- Kosub, S. (2008). Dichotomy results for fixed-point existence problems for boolean dynamical systems. *Mathematics in Computer Science*, 1(3), 487–505.
- Maurer, S. B. (1979). Vertex colorings without isolates. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*,

27(3), 294–319.

Moore, C. (1997). Majority-vote cellular automata, ising dynamics, and p-completeness. *Journal of Statistical Physics*, 88, 795–805.

Poindron, A. (2021). A general model of binary opinions updating. *Mathematical Social Sciences*, 109, 52–76.

Ruz, G. A., y Goles, E. (2022). Characterizing consensus in threshold boolean networks. En *2022 international joint conference on neural networks (ijcnn)* (pp. 1–8).

Schmidt, J. M. (2013). A simple test on 2-vertex-and 2-edge-connectivity. *Information Processing Letters*, 113(7), 241–244.

Sheehan, J. (1992). Balanced graphs with minimum degree constraints. *Discrete mathematics*, 102(3), 307–314.

Yang, K., y Zhao, Q. (2004). The balance problem of min–max systems is co-np hard. *Systems & control letters*, 53(3-4), 303–310.

## Códigos de los algoritmos desarrollados

### A.1. Código para encontrar puntos fijos polarizados red minoría sin sesgo

El código recibe un grafo  $G$  en forma de una lista con las listas de adyacencia de cada vértice. La función  $exPF(G)$  devuelve una configuración que es punto fijo de la red en caso en que exista y 0 en caso que no existe ninguno.

```

1 #Funcion minoria sin sesgo
2 #n: nodo, nv= vector de indices vecinos a n, x= configuracion
3 def minsinb(n,nv,x):
4     sum=0
5     for i in nv:
6         sum=sum+x[i-1]
7     if sum < len(nv)/2:
8         return(1)
9     elif sum > len(nv)/2:
10        return(0)
11    else:
12        return(x[n-1])
13
14 #Decide si x es punto fijo de G
15 def ispf(G,x):
16    for i in G:
17        if minsinb(i,G[i],x) != x[i-1]:
18            return(-1)

```

```

19     return(1)
20
21 #Generamos todos los posibles puntos fijos polarizados de tamaño n
22 from itertools import combinations
23 #Funcion que genera una lista con n/2 ceros seguido de n/2 unos
24 def genP(n):
25     lst=[]
26     for i in range(0,n):
27         if i <n/2:
28             lst.append(0)
29         else:
30             lst.append(1)
31     return(lst)
32 def polComb(n):
33     lst=genP(n)
34     for comb in combinations(range(n), int(n/2)):
35         result = [0]*n
36         for i in comb:
37             result[i] = 1
38         yield result
39
40 #Buscamos la primera configuracion polarizada que es punto fijo
41 def exPF(G):
42     n=len(G)
43     for comb in polComb(n):
44         if ispf(G,comb) == 1:
45             return(comb)
46     return(0)

```

## A.2. Código para encontrar puntos fijos polarizados red minoría con sesgo

Al igual que en el algoritmo A.1, las funciones reciben un grafo en forma de lista de lista de adyacencias. Y la última función  $exPF(G)$  devuelve un punto fijo polarizado en caso en que lo encuentre y un 0 en caso en que no exista uno.

```

1     #Funcion minoria con sesgo

```

```

2  #n: nodo, nv= vector de indices vecinos a n, x= configuracion
3  def umb(nv,x):
4      sum=0
5      for i in nv:
6          sum=sum+x[i-1]
7      if sum <= len(nv)/2:
8          return(1)
9      else:
10         return(0)
11
12 #Funcion que decide si un elemento es punto fijo
13 def ispf(G,x):
14     for i in G:
15         if umb(G[i],x) != x[i-1]:
16             return(-1)
17     return(1)
18
19 #Funcion que genera una lista con n/2 ceros seguido de n/2 unos
20 def genP(n):
21     lst=[]
22     for i in range(0,n):
23         if i <n/2:
24             lst.append(0)
25         else:
26             lst.append(1)
27     return(lst)
28
29 #Generamos todos los posibles puntos fijos polarizados de tamaño n
30 from itertools import combinations
31
32 def polComb(n):
33     lst=genP(n)
34     for comb in combinations(range(n), int(n/2)):
35         result = [0]*n
36         for i in comb:
37             result[i] = 1
38     yield result
39

```

```

40 #Busca si alguna configuracion polarizada es punto fijo
41 def exPF(G):
42     n=len(G)
43     for comb in polComb(n):
44         if ispf(G,comb) == 1:
45             return(comb)
46     return(0)

```

### A.3. Código para encontrar partición válida balanceada

```

1
2 #DFS
3
4 def DFSrec(G,v,visited,dfstree,dfsindex):
5     visited[v-1]=1
6     dfsindex.append(v)
7     for u in G[v]:
8         if visited[u-1]==0:
9             dfstree[u]=v
10            DFSrec(G,u,visited,dfstree,dfsindex)
11
12 def DFS(G,v):
13     dfstree={} #diccionarios para guardar el arbol DFS (padres)
14     visited =[0]*len(G) #lista de nodos visitados
15     dfsindex=[] #lista que da el orden en que se visitaron
16     DFSrec(G,v,visited,dfstree,dfsindex)
17     return(dfsindex,dfstree)
18
19 def ChainDecomp(G):
20     index , dfstree = DFS(G,1)
21
22     #Inicializo una lista para guardar las cadenas y dos
23     #diccionarios que guardaran si un vertice fue visitado
24     #y si fue agregado a una cadena
25     chains=[]
26     visited={}
27     isinachain={}

```



```

28     for i in range(1, len(G)+1):
29         isinachain[i]=0
30         visited[i]=0
31
32     #Se recorren los vertices en el orden que dio DFS,
33     #se busca backedge y se crea cadena.
34     for i in range(0, len(G)):
35         v=index[i]
36         visited[v]=1
37         for u in G[v]:
38             #Si es el primero en el orden DFS no tiene padre
39             if u==index[0]:
40                 continue
41             if visited[u]==0 and v!= dfstree[u]:
42                 visited[u]=1
43                 C=[v,u]         #armamos una cadena
44                 #incluyendo vertices hasta volver a v
45                 #o a otra cadena
46                 n=dfstree[u]
47                 while visited[n]==0:
48                     C.append(n)
49                     visited[n]=1
50                     n=dfstree[n]
51
52                 C.append(n) #esta podria ser la raiz de la cadena
53
54                 #Esta parte detecta caminos entre ciclos
55                 if n!=index[0] and isinachain[n] == 0:
56                     n=dfstree[n]
57                     while isinachain[n]==0:
58                         C.append(n)
59                         n=dfstree[n]
60                 C.append(n)
61
62         for i in C:
63             isinachain[i]=1
64         chains.append(C)
65     return(chains)

```

```

66
67 def intersection(lst1, lst2):
68     lst3 = [value for value in lst1 if value in lst2]
69     return lst3
70
71
72 def balancedpartition(G):
73     V1=[]
74     V2=[]
75     ch=ChainDecomp(G)
76
77     #Particionamos la primera cadena como se pueda
78     if len(ch[0]) > 4:
79         for i in range(0, len(ch[0])-1): #no contamos raiz
80             if i+1 < len(ch[0])/2:
81                 V1.append(ch[0][i])
82             else:
83                 V2.append(ch[0][i])
84     else:
85         for i in range(0, len(ch[0])-1):
86             if (ch[0][i]==ch[1][0] or ch[0][i]==ch[1][-1]):
87                 if len(V1)==0:
88                     V1.append(ch[0][i])
89                 else:
90                     V2.append(ch[0][i])
91
92
93     if len(ch) > 1:
94         #Ahora agregamos la cadena a alguna de las particiones
95         #donde este alguna de sus raices
96         for i in range(1, len(ch)):
97             if ch[i][-1] in V1:
98                 for j in range(1, len(ch[i])-1):
99                     V1.append(ch[i][j])
100            else:
101                for j in range(1, len(ch[i])-1):
102                    V2.append(ch[i][j])
103

```

```

104
105     #Y ahora hay que balancear
106     while abs(len(V1)-len(V2)) > 1:
107
108         if len(V1)<len(V2):
109             NV1interV2=[]
110             for v in V2:
111                 if len(intersection(G[v],V1)) > 0:
112                     NV1interV2.append(v)
113
114             for v in NV1interV2:
115                 flag=0
116                 for w in intersection(G[v],V2):
117                     if len(intersection(G[w],V2))==1:
118                         flag=1
119                 if flag==0:
120                     V1.append(v)
121                     V2.remove(v)
122                     break #si encuentra alguno se acaba
123
124         else:
125             NV2interV1=[]
126             for v in V1:
127                 if len(intersection(G[v],V2)) > 0:
128                     NV2interV1.append(v)
129
130             for v in NV2interV1:
131                 flag=0
132                 for w in intersection(G[v],V1):
133                     if len(intersection(G[w],V1))==1:
134                         flag=1
135                 if flag==0:
136                     V2.append(v)
137                     V1.remove(v)
138                     break
139
140     return(V1,V2)

```