



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

SWITCH EQUIVALENCIA EN MULTIGRAFOS Y DIGRAFOS CON SIGNO

Desarrollado por:
Victor Eliecer Cartes Vidal

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al título profesional de Ingeniero Civil
Matemático

Profesor Guía: Dr. Julio Bernardo Aracena Lucero

Enero 2024
Concepción, Chile

© 2024 Victor Cartes Vidal

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

SWITCH EQUIVALENCIA EN MULTIGRAFOS Y DIGRAFOS CON SIGNO

Victor Eliecer Cartes Vidal

COMISIÓN EVALUADORA

- Dr. Julio Aracena Lucero [**Profesor Guía**]
Departamento de Ingeniería Matemática y Centro de Investigación
en Ingeniería Matemática (CI²MA), Universidad de Concepción,
Chile.
- Dr. Camilo González Palma
Departamento de Matemática, Universidad de Concepción, Chile.
- Dr. Nicolás Sanhueza Matamala
Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción,
Chile.

Para mi familia y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero comenzar expresando mi agradecimiento a dos personas fundamentales en mi vida, mi madre Fabiola Vidal y mi padre Joaquín Cartes por su constante apoyo, preocupación y cariño a lo largo de este arduo proceso. También deseo extender mi agradecimiento a mi familia y seres queridos, quienes me brindaron un apoyo incondicional en cada paso de este camino.

A mis compañeros de carrera, en especial a Francisco Arrepol, Tomás Arancibia y Claudio Álvarez, les agradezco por su constante respaldo en los diferentes ramos y por los momentos de alegría compartidos, tanto dentro como fuera del aula.

No puedo dejar de mencionar a mi profesor guía, el Dr. Julio Aracena, cuya paciencia y apoyo fueron fundamentales en esta travesía académica. Siempre estuvo presente, brindándome confianza y orientación. Además, agradezco a los profesores Gabriel Gatica, Anahí Gajardo, Freddy Paiva, Nicolás Sanhueza, Mauricio Sepúlveda y Christopher Thraves por sus valiosas charlas y consejos.

También agradezco al Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA) por brindarme un espacio y un ambiente idóneo para desarrollar esta investigación. He de destacar a la Sra. Lorena, la Sra. Paola y los estudiantes de doctorado por su cálida compañía y hospitalidad en este periodo.

Finalmente agradezco al proyecto BASAL-ANID Project PFB FB210005,

“Center for Mathematical Modeling”, Universidad of Chile por financiar este trabajo.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Índice de figuras	VI
Índice de algoritmos	VIII
1 Introducción	1
2 Grafos	4
2.1 Grafos, digrafos y multigrafos	4
2.1.1 Conceptos básicos	4
2.1.2 Conexidad	7
2.1.3 Árboles y ciclos	9
2.2 Grafos con signos	11
2.2.1 Conceptos básicos	11
2.2.2 Switch equivalencia	14
3 Grupos	19
3.1 Subgrupos y grupos especiales	20
3.2 Clases laterales	21
3.3 Homomorfismos	22
4 Switch equivalencia: Análisis teórico	24
4.1 Grupos y digrafos con signos	24
4.1.1 Aplicamos teoría de grupos	25
4.1.1.1 Propiedades de \mathcal{S} y $H(G)$	29
4.1.1.2 Aplicación del teorema de Lagrange	35
4.1.1.3 Orden de $H(G)$	36

4.1.1.4	Cantidad de clases de equivalencia	44
4.1.2	Generalizaciones	46
4.1.3	Ejemplos	47
4.1.3.1	Un ciclo	48
4.1.3.2	Bosque	48
4.2	Caracterización de la switch equivalencia	49
4.2.1	Caracterización vía ciclos	49
4.2.2	Caracterización vía funciones balanceadas	54
5	Switch equivalencia: Resultados algorítmicos	57
5.1	Método para determinar los representantes	58
5.2	Algoritmos para el problema del switch	62
5.2.1	Algoritmo de la bipartición	62
5.2.2	Algoritmo del árbol	69
6	Número e índice de frustración	81
6.1	Problema del mínimo número de cambios de signo	82
6.2	Problema del índice y número de frustración	89
6.2.1	Operador restricción	93
6.2.2	Problema del índice de frustración	95
6.2.3	Problema del número de frustración	105
6.3	Complejidad computacional	109
6.3.1	PIF y PNF son NP-hard	112
6.3.2	PIF y PNF son NP-Completos	113
7	Conclusiones	116
	Referencias	119
	Apéndices	122
A	Ejemplos de cantidad de clases de equivalencia	122
A.1	Grafo completo	122
A.2	Grafo bipartito completo	124
A.3	Grafo k -regular	124
A.4	Grafo auto-complementario	125

A.5 Grafo planar	126
A.6 Grafo con genus g	126
B Propiedades del operador \mathcal{A}	128
C Propiedades del operador \mathcal{R}	131

Índice de figuras

2.1	Grafo.	6
2.2	Multigrafo.	6
2.3	Digrafo.	7
2.4	(a) Ciclo de largo 2. (b) Ciclo de largo 1.	9
2.5	(a) Ciclo dirigido de largo 4. (b) Ciclo de largo 4.	10
2.6	(a) Dibujo de un grafo G . (b) Dibujo de él grafo con signo (G, σ)	13
2.7	(a) Dibujo de un digrafo G . (b) Dibujo de él grafo con signo (G, σ)	13
2.8	Digrafo con signo (G, σ)	15
2.9	Digrafo con signo $(G, \sigma^\nu) = (G, \sigma^I)$	16
4.1	Digrafo desconexo.	36
4.2	(a) Digrafo con signo $(G, \mathcal{S}(I_1))$. (b) Digrafo con signo $(G, \mathcal{S}(I_2))$	37
4.3	Ciclo de largo 3.	45
4.4	Todos los elementos de $H(G)$	45
4.5	Una función signo que no está en $H(G)$	46
4.6	Todos lo elementos que no están en $H(G)$	46
4.7	(a) Multigrafo con aristas paralelas y un bucle. (b) Multigrafo transformado.	50
4.8	(a) Multigrafo con signos (G, σ) . (b) Multigrafo con signos $(\hat{G}, \hat{\sigma})$	51
5.1	Árbol de decisión basado en las aristas e_i	59
5.2	(a) La función signo σ . (b) La función signo ρ	67
5.3	Función signo $\phi = \sigma\rho$	67

5.4	Grafo con signo obtenido por el algoritmo de la bipartición.	68
5.5	(a) Otra función signo σ . (b) Otra función signo ρ .	68
5.6	Función signo $\phi = \sigma\rho$.	69
5.7	(a) Función signo σ . (b) Función signo ρ .	77
5.8	El grafo en verde es un grafo recubridor del grafo original.	78
5.9	Función signo $\mathcal{S}(\{b, c\})\rho$.	78
5.10	(a) Función signo σ . (b) Función signo ρ .	79
5.11	Función signo $\mathcal{S}(\{b\})\rho$.	79
6.1	(a) Grafo con signo (C_5, σ) . (b) Grafo con signo (C_5, ρ) .	82
6.2	Grafo con signo (C_5, ρ) tras cambiarle el signo a la arista cd .	83
6.3	(a) Grafo con signo (G, σ) . (b) Grafo con signo (G, ρ) .	83
6.4	Grafo con signo $(G, \mathcal{S}(\{a, c\})\rho)$.	84
6.5	(a) Grafo con signo (G, σ) . (b) Grafo con signo (G, ρ) , con G un tipo de grafo rueda.	90
6.6	(a) Grafo con signo (G, σ) tras quitar tres aristas. (b) Grafo con signo (G, ρ) tras quitar tres aristas.	91
6.7	(a) Grafo con signo (G, σ) tras quitar a a . (b) Grafo con signo (G, ρ) tras quitar a a .	92
6.8	Un bucle.	93
6.9	El grafo C_5 .	97

Índice de algoritmos

5.1	Algoritmo de la bipartición	64
5.2	Parámetro γ	70
5.3	Algoritmo del Árbol	76
6.1	Verificador Polinomial de PIFM.	114

Capítulo 1

Introducción

Un grafo es una estructura matemática que representa relaciones entre objetos. Está compuesto por vértices (también llamados nodos) y aristas que conectan dos vértices. De manera intuitiva, un grafo puede visualizarse como un conjunto de puntos (vértices) interconectados por líneas (aristas). Un grafo con signos es aquel en el que las aristas están etiquetadas con los símbolos “+” (o $+1$) o “−” (o -1), y la función que se encarga de esta asignación de símbolos se llama “función de signo”. A pesar de su aparente simplicidad, esta estructura proporciona una sólida base para abordar una diversidad de problemas en diversas áreas del conocimiento, como la biología [5], física [2], química [3], sociología [1], entre otras disciplinas. Un artículo pionero en el estudio de grafos con signo es [6], que analiza estos grafos como modelos de redes sociales, donde los nodos representan personas, las aristas denotan conocidos, y las etiquetas son $+1$ para amistad y -1 para enemistad. Los autores de [6] se centran en grafos con signo que permiten dividir los vértices en dos grupos, con características específicas que definen relaciones entre los nodos, dando origen a funciones de signo denominadas balanceadas, ampliamente estudiadas y utilizadas en la actualidad.

Debido a su amplio rango de aplicaciones, el estudio de las propiedades de los grafos con signo ha adquirido una relevancia significativa. La literatura

ha explorado exhaustivamente los grafos simples no dirigidos con signos [6] [18] [17], así como en menor medida los grafos dirigidos (con aristas orientadas) con signos [10] [18], y aún menos los multigrafos (donde las aristas pueden repetirse) con signos [4]. Para el análisis de los grafos con signo, se emplean diversas técnicas, como métodos combinatorios, análisis de grafos, métodos probabilísticos, entre otros. Destaca el método algebraico, en particular, el uso de álgebra lineal. Una de las formas en las que se usa el álgebra lineal es a través de las matrices. Los grafos con signo tienen representaciones matriciales, como la matriz de adyacencia, y a partir de estas representaciones obtienen propiedades del grafo con signo. El uso del álgebra lineal en este contexto ha sido fructífero, y algunos resultados importantes del área que hacen uso de esta técnica se pueden encontrar en el libro [8].

Uno de los conceptos fundamentales en estos documentos es la “switch equivalencia”. Esta relación se define de la siguiente manera: dadas dos funciones de signo σ y ρ , se consideran switch equivalentes si y solo si existe un subconjunto I de vértices tal que $\rho = \sigma^I$, donde la función de signo σ^I es la función σ con la siguiente modificación: para una arista dada, su etiqueta no cambia si ambos extremos de la arista están en I o ninguna lo está; en caso contrario, se cambia la etiqueta al signo opuesto. Esta relación, como su nombre sugiere, es una relación de equivalencia, y ha sido completamente estudiada en el caso de grafos simples no dirigidos [18] [17] y parcialmente en el caso de grafos dirigidos [6] [18]. En este documento, se abordará esta relación en el contexto de grafos dirigidos y no dirigidos con aristas paralelas, haciendo uso de la estructura de grupo. A pesar de ser una estructura más débil que un espacio vectorial, se pueden obtener resultados similares.

Además de estudiar la relación de equivalencia mencionada, esta tesis abordará tres problemas combinatorios relacionados con grafos con signo. Dichos problemas incluyen:

- Problema del Mínimo Cambio de Signos: Determinar el número

mínimo de cambios de signo necesarios en una función para que sea switch equivalente a otra sobre el mismo grafo subyacente.

- Índice de Frustración: Calcular el número mínimo de aristas que deben eliminarse del grafo para que dos funciones de signo sean switch equivalentes.
- Número de Frustración: Similar al índice de frustración, pero considerando el número mínimo de vértices que deben eliminarse para lograr la switch equivalencia entre dos funciones de signo.

Los dos últimos problemas han sido ampliamente investigados, y en [18] se presenta un resumen de los resultados más relevantes relacionados con estos valores.

Esta tesis consta de 7 capítulos, siendo el primero la introducción y el último la conclusión. Los Capítulos 2 y 3 se presentan definiciones y resultados previos esenciales para el desarrollo del trabajo. Los Capítulos 4, 5 y 6 contienen los resultados desarrollados en la investigación. El Capítulo 2 se divide en dos secciones principales: la primera aborda definiciones y resultados clásicos de la Teoría de Grafos, mientras que la segunda se centra en los grafos con signos. El Capítulo 3 se dedica completamente a las definiciones y resultados relevantes de la Teoría de Grupos. El Capítulo 4 establece la estructura de grupo que se utilizará en el resto del documento, también se determina la cantidad de clases de equivalencia de la relación switch y se caracteriza dicha relación. En el Capítulo 5 se describe un método para construir los representantes de cada clase de equivalencia, y se desarrollan dos algoritmos que deciden en tiempo polinomial si dos funciones de signo son switch equivalentes. Finalmente, el Capítulo 6 analiza los problemas del Mínimo Cambio de Signos, Índice de Frustración y Número de Frustración, y este capítulo concluye con la demostración de la NP-Complejidad de los dos últimos problemas.

Capítulo 2

Grafos

En este primer capítulo introduciremos algunas notaciones, definiciones y resultados de la teoría de grafos y grafos con signos, las cuales usaremos en todo el documento.

2.1. Grafos, digrafos y multigrafos

Empezaremos mostrando algunos conceptos básicos de la teoría de grafos. Algunos otros conceptos, notaciones y resultados distintos a los que introduciremos en esta sección se pueden ver en el libro [16].

2.1.1. Conceptos básicos

Fundamentalmente existen dos tipos de grafos: los dirigidos y los no dirigidos.

Definición 2.1. *Un grafo simple (o grafo no dirigido, o simplemente grafo) G es un par ordenado (V, E) , donde V es un conjunto finito; a los elementos de V se les llama **nodos o vértices**. Si $V = \emptyset$ se define $E = \emptyset$, en caso contrario definiremos a $E \subseteq \{x \in \mathcal{P}(V) : |x| = 2\}$ es un conjunto de pares no ordenados de V . Los elementos de E son llamados **aristas**.*

Definición 2.2. Un **digrafo** (o **grafo dirigido**) G es un par ordenado (V, A) , donde V es un conjunto finito; a los elementos de V se les llama **nodos** o **vértices**. Si $V = \emptyset$ se define $A = \emptyset$, en caso contrario $A \subseteq V \times V$ un conjunto de pares ordenados de V . Los elementos de A son llamados **arcos**.

En los grafos, a la arista que conecta a u con v la denotaremos por $\{u, v\} = uv = vu \in E$. Mientras que en los digrafos, al arco que conecta a u con v la denotaremos por $(u, v) = uv \in A$.

Además de los grafos simples y digrafos existen otros tipos de grafos los cuales extienden el concepto original de grafo. Una de estas extensiones son los llamados multigrafos, el “multi” proviene del hecho que este grafo permite repetir aristas.

Definición 2.3. Un **multigrafo** es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito; a los elementos de V se le llaman **vértices**. Si $V = \emptyset$ se define $E = \emptyset$, en caso contrario a E se define como un multiconjunto de pares no ordenados de los vértices, incluyendo elementos de tipo uu , con $u \in V$. A los elementos de E se le llaman **aristas**, y a las aristas que se repiten se les suelen llamar **aristas paralelas**.

Observación 2.1. En un multigrafo o digrafo, a las aristas uu (con $u \in V$) se le conocen por el nombre de **loop** o **bucle**.

Otra generalización que usaremos en menor medida, es el grafo que no tiene vértices.

Definición 2.4. El grafo $G = (\emptyset, \emptyset)$ lo llamaremos **grafo nulo** o **vacío**.

Observación 2.2. De aquí en adelante cuando hablemos de grafos, digrafos y multigrafo, asumiremos que $V \neq \emptyset$ a menos que se diga lo contrario.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de grafos, digrafos y multigrafos.

Ejemplo 2.1. a) Consideremos el grafo $G_1 = (V, E)$, donde

$$V := \{u, v, w, x, y\}$$

$$E := \{uv, vw, uw, wx, vx, xy\}$$

El dibujo de G_1 se encuentra en la Figura 2.1.

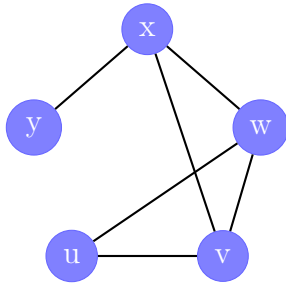


Figura 2.1: Grafo.

b) Sea $G_2 = (V, E')$ multigrafo, donde

$$V := \{u, v, w, x, y\}$$

$$E' := \{uu, uv, vw, vw, uw, wx, vx, xy, yy\}$$

La representación gráfica de G_2 está en la Figura 2.2.

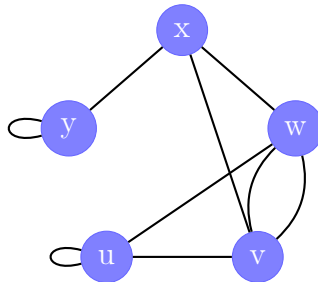


Figura 2.2: Multigrafo.

c) Consideremos el digrafo $G_3 = (V, A)$, donde

$$V := \{u, v, w, x, y\}$$

$$A := \{uu, vu, vw, wv, uv, xv, yx, yy\}$$

El dibujo de G_3 se encuentra en la Figura 2.3.

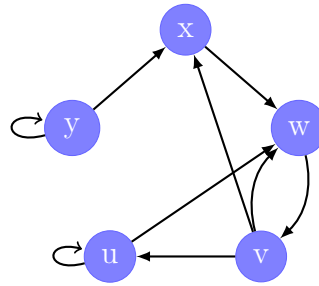


Figura 2.3: Digrafo.

Otro concepto que usaremos en los siguientes capítulos es el del subgrafo y subgrafo recubridor.

Definición 2.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo, diremos que $G' = (V', E')$ es un **subgrafo** de G si y solo si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Análogamente se puede definir los subgrafos para digrafos y multigrafos. En todos los casos ocuparemos la notación $G' \subseteq G$ para indicar que G' es un subgrafo de G .

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ grafos tales que $G' \subseteq G$. Si $V = V'$, se dirá que G' es un **subgrafo recubridor** de G .

2.1.2. Conexidad

La conexidad es un concepto en teoría de grafos que nos asegura que para cualquier par de vértices siempre se puede encontrar un camino que los una.

Definición 2.6. Consideremos $G = (V, E)$ un grafo, digrafo o multigrafo.

- *Un camino es un grafo simple cuyos vértices pueden ser ordenados de tal forma que dos vértices son adyacentes si y solo si son consecutivos en el orden. Diremos que un grafo o multigrafo G tiene un camino si existe un camino como subgrafo de G . En el caso del digrafo, este tendrá un camino si existe un camino (como grafo) al ignorar la orientación de los arcos.*
- *Diremos que G es **conexo**, si y solo si para todo par de vértices $u, v \in V$, existe un camino que tiene un extremo en u y otro en v . En caso contrario diremos que G es **disconexo**.*

Observación 2.3. *Para el caso de los digrafos, la definición de camino dada anteriormente no toma en cuenta la dirección de los arcos. Sin embargo, existe otra definición de camino que sí considera esta dirección, a la que llamamos **caminos dirigidos**. Al igual que antes, esta clase de caminos generan su propia noción de conexidad, la cual se llama **conexidad fuerte**.*

Algunos conceptos relacionados a la conexidad, los cuales nos serán de utilidad en este trabajo son los siguientes.

Definición 2.7. *Dado un G un grafo, digrafo o multigrafo. Sea $H \subseteq G$, decimos que H es:*

- *Una **componente conexa** si H es conexo, y no existe una componente conexa H' de G tal que $H \subsetneq H'$.*
- *Una **componente trivial (o componente conexa trivial o simplemente grafo trivial)** si H es un componente conexa que no tiene aristas (o arcos).*

*Dado G un grafo o multigrafo, se dice que G es un **grafo totalmente desconexo** si todas las componentes conexas de G son triviales.*

Por último, se puede definir un parámetro de un grafo, el cual cuenta la cantidad de grafos conexos que tiene.

Definición 2.8. *Dado G un grafo, digrafo o multigrafo, se define el*

parámetro $\text{comp}(G)$ como el número de componentes conexas de G .

2.1.3. Árboles y ciclos

Una estructura que usaremos reiteradas veces en este documento son los conceptos de ciclos y árboles. Empecemos por definir un ciclo.

Definición 2.9. *Un **ciclo** es un grafo simple con el mismo número de vértices y aristas, cuyos vértices pueden ser ordenados circularmente de tal forma que dos vértices son adyacentes si y solo si ellos aparecen de forma consecutiva en el orden.*

Sea G un ciclo, definiremos el largo de un ciclo dirigido como el número de vértices de éste, y denotaremos por C_l a los ciclos de largo l , con $l \in \mathbb{N}$ y $l \geq 3$.

La noción de ciclo la podemos extender a los multigrafos. En el caso de los multigrafos existirían dos ciclos que no tiene un grafo, los ciclos de largo 1 y 2. Los ciclos de largo 1 son los bucles, mientras que los ciclos de largo 2 son los formados por aristas paralelas, i.e. el grafo dado por: $C_2 = (\{u, v\}, \{uv, uv\})$.

El multigrafo de la izquierda es un ciclo de largo 2, mientras que el multigrafo de la derecha es un ciclo de largo 1.

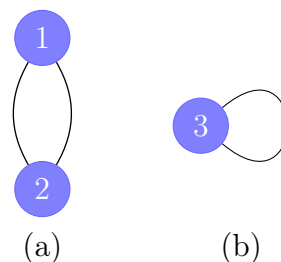


Figura 2.4: (a) Ciclo de largo 2. (b) Ciclo de largo 1.

Los ciclos no solo se pueden definir en grafos o multigrafos, sino también en digrafos. En el caso de los digrafos existirían dos tipos de ciclos: los

ciclos y los ciclos dirigidos. En ambos casos, al quitar la orientación de las aristas obtenemos un ciclo (de la definición de grafos), la diferencia radica en que un ciclo no le importa la orientación del arco, mientras que el ciclo dirigido sí le importa. En el ciclo dirigido solo están los arcos $v_i v_{i+1}$, donde los v_i son los vértices del ciclo ordenados circularmente.

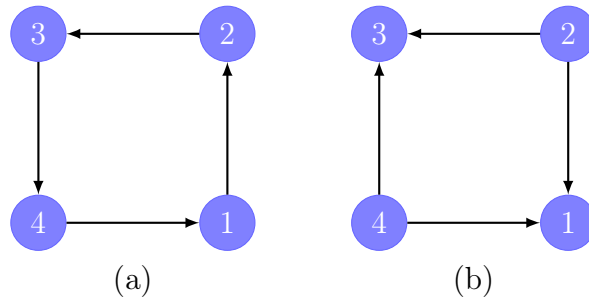


Figura 2.5: (a) Ciclo dirigido de largo 4. (b) Ciclo de largo 4.

Un parámetro asociados a los ciclos es el llamado número cíclico, el cual permite medir la cantidad de ciclos que son “independientes” de un grafo dado.

Definición 2.10. *Dado un grafo (o digrafo o multigrafo) G , denotaremos por $cyc(G)$ como el mínimo número de aristas a remover para quitar a todos los ciclos de G . El $cyc(G)$ se le suele llamar **número cíclico** de G .*

El siguiente resultado nos permite calcular el cyc de un grafo rápidamente.

Proposición 2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, se cumple que*

$$cyc(G) = |E| - |V| + comp(G).$$

La demostración de la Proposición 2.1 se puede encontrar en [15].

Observación 2.4. *La proposición anterior se puede generalizar para el caso de multigrafos. Esto se debe a que cada bucle genera un nuevo ciclo que debe ser quitado. Si existen aristas paralelas podemos subdividirlas,*

generando así un grafo que tiene un vértice y una arista extra por cada arista paralela del multigrafo. Luego, el multigrafo tiene el mismo número cíclico que el grafo obtenido, y al calcular el número cíclico del grafo, las aristas y vértices extra se cancelan, quedándonos con las aristas y vértices originales del multigrafo. Para finalizar, al agregar los bucles que quitamos en un principio, obtenemos la misma fórmula de $\text{cyc}(G)$ dada en 2.1, pero ahora aplicada a un multigrafo.

El último concepto de la teoría grafos que enunciaremos será el de árbol y bosque. Estos son los grafos que no tienen ciclos.

Definición 2.11. ■ Diremos que un grafo (o multigrafo o digrafo) es **acíclico o bosque** si el grafo (o multigrafo o digrafo) no tiene ningún ciclo.

- Un **árbol** es un grafo (o multigrafo o digrafo) acíclico conexo.
- Un **árbol recubridor** es un subgrafo recubridor que es un árbol.
- Un **bosque recubridor** es un subgrafo recubridor que es un bosque.

2.2. Grafos con signos

En esta sección introduciremos algunos conceptos sobre los grafos, digrafos y multigrafos con signos.

2.2.1. Conceptos básicos

Empecemos por definir a una función con signos, y a los grafos, digrafos y multigrafos con signos.

Definición 2.12. Dado un grafo o multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, se define una **función signo** como:

$$\begin{aligned} \sigma : E &\rightarrow \{-1, +1\} \\ uv &\mapsto \sigma(uv) \end{aligned}$$

Análogamente para los digrafos $G = (V, A)$ se define una **función signo** como:

$$\begin{aligned}\sigma : A &\rightarrow \{-1, +1\} \\ uv &\mapsto \sigma(uv)\end{aligned}$$

Al par (G, σ) se le llama **grafo (o digrafo o multigrafo) con signos**. Además denotaremos por $\Sigma(G)$ al conjunto de todas las funciones signos definidas en las aristas (o arcos) de G .

Observación 2.5. Notar que $|\Sigma(G)| = 2^{|E|}$ para grafos y multigrafos, o $|\Sigma(G)| = 2^{|A|}$ para digrafos.

Los grafos (o digrafos o multigrafos) con signos también se pueden representar de manera gráfica al igual que sus homólogos sin signos. Existen varias formas de dibujar los grafos con signos, la que usaremos en este trabajo es la siguiente: Comenzamos por dibujar el grafo (o digrafos o multigrafos) G , a todas las aristas uv de G las etiquetamos con los signos “+” o “-”, dependiendo si $\sigma(uv) = +1$ o $\sigma(uv) = -1$.

A continuación veremos dos ejemplos para ilustrar lo anterior.

Ejemplo 2.2. ■ Consideremos el siguiente grafo $G = (V, E)$ definido en (a) de la Figura 2.6. Consideremos función signo $\sigma : E \rightarrow \{-1, +1\}$ definida por:

$$\begin{aligned}\sigma(ac) = \sigma(ad) = \sigma(bd) = \sigma(ec) &= +1, \\ \sigma(bc) = \sigma(be) = \sigma(de) &= -1.\end{aligned}$$

La representación gráfica de (G, σ) esta en (b) de la Figura 2.6.

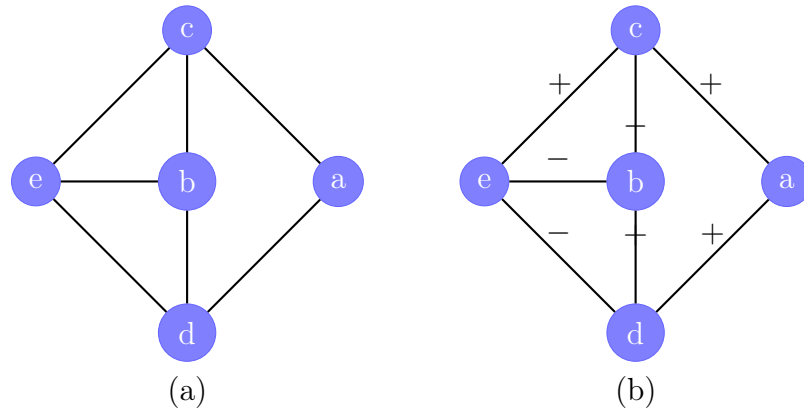


Figura 2.6: (a) Dibujo de un grafo G . (b) Dibujo de él grafo con signo (G, σ) .

- Consideremos el siguiente digrafo $G = (V, A)$ definido en (a) de la Figura 2.7. Consideremos función signo $\sigma : A \rightarrow \{-1, +1\}$ definida por:

$$\begin{aligned} \sigma(ab) = \sigma(cb) = \sigma(dc) = \sigma(de) &= +1, \\ \sigma(ba) = \sigma(ec) = \sigma(ce) &= -1. \end{aligned}$$

La representación gráfica de (G, σ) esta en (b) de la Figura 2.7.

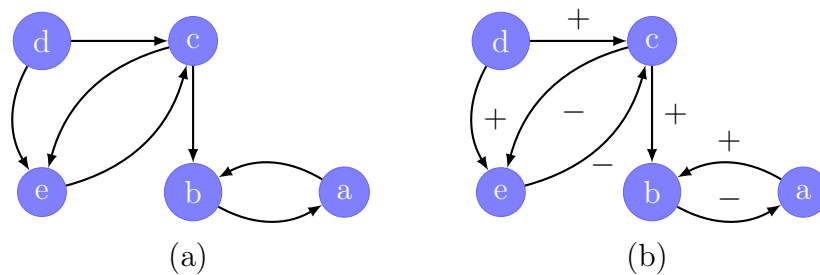


Figura 2.7: (a) Dibujo de un digrafo G . (b) Dibujo de él grafo con signo (G, σ) .

Uno de los conceptos básicos de la teoría de grafos con signo es el del signo de un ciclo.

Definición 2.13. Dado un grafo G tenga por lo menos un ciclo, y $\sigma \in \Sigma(G)$. Sea C un ciclo en G y $E[C] := \{e_1, \dots, e_n\}$. Se define el

signo del ciclo C respecto a σ como:

$$\sigma(C) := \prod_{i=1}^n \sigma(e_i)$$

Análogamente se define el signo de ciclo en un digrafo o multigrafo con signos.

2.2.2. Switch equivalencia

Una de las ideas fundamentales en esta teoría es el concepto de *switch equivalencia*, en la literatura existen dos definiciones de switch equivalencia, las cuales son equivalentes entre sí. La primera definición es:

Definición 2.14. Sean $G = (V, E)$ un grafo (o digrafo o multigrafos) no totalmente desconexo, $\sigma \in \Sigma(G)$ y $\nu : V \rightarrow \{-1, +1\}$ una **función con signos en vértices**. Se define ν -**switch** de σ como:

$$\sigma^\nu(uv) := \nu(u)\sigma(uv)\nu(v) \quad \forall uv \in E. \quad (2.1)$$

Sean $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Se dice que σ y ρ son **switch equivalentes**, si y solo si existe una función con signo en los vértices ν tal que $\sigma^\nu = \rho$.

La otra definición de switch equivalencia es:

Definición 2.15. Dado un grafo (o digrafo o multigrafo) no totalmente desconexo $G = (V, E)$, $\sigma \in \Sigma(G)$ e $I \subseteq V$. El **I-switch** de σ es una nueva función signo σ^I la cual se define así: para todo $uv \in E$,

$$\sigma^I(u, v) = \begin{cases} \sigma(u, v) & \text{si } \{u, v\} \subseteq I \text{ o } \{u, v\} \cap I = \emptyset, \\ -\sigma(u, v) & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Sean $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Se define la relación inducida por la switch equivalencia

\sim como:

$$\sigma \sim \rho \iff \exists I \subseteq V, \sigma^I = \rho. \quad (2.3)$$

Entonces se dice que σ y ρ son **switch equivalentes** si y solo si $\sigma \sim \rho$.

Observación 2.6. La equivalencia entre las dos definiciones se puede ver en la siguiente demostración: Dado una función signo en vértices ν , denotaremos por V^- como el conjunto de vértices v del grafos tales que $\nu(v) = -1$. Entonces $\sigma^\nu = \sigma^{V^-}$, en efecto, dada $uv \in E(G)$. Si $\nu(u) = \nu(v)$ implica que $\{u, v\} \subseteq V^-$ o $\{u, v\} \cap V^- = \emptyset$, por tanto $\sigma^\nu(uv) = \sigma(uv) = \sigma^{V^-}(uv)$. Si $\nu(u) \neq \nu(v)$, entonces no ocurriría que $\{u, v\} \subseteq V^-$ ni $\{u, v\} \cap V^- = \emptyset$, luego $\sigma^\nu(uv) = -\sigma(uv) = \sigma^{V^-}(uv)$.

Ejemplo 2.3. Consideremos la siguiente función signo σ dada por:

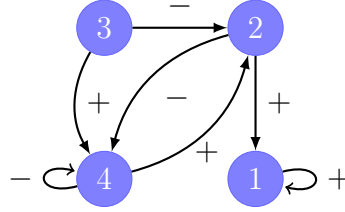


Figura 2.8: Digrafo con signo (G, σ) .

Consideremos la función de signos de vértices ν definido por: $\nu(1) = \nu(2) = +1$ y $\nu(3) = \nu(4) = -1$. Vamos a calcular σ^ν ,

$$\sigma^\nu(1, 1) = \nu(1)\sigma(1, 1)\nu(1) = +1$$

$$\sigma^\nu(2, 1) = \nu(2)\sigma(2, 1)\nu(1) = +1$$

$$\sigma^\nu(3, 2) = \nu(3)\sigma(3, 2)\nu(2) = +1$$

$$\sigma^\nu(2, 4) = \nu(2)\sigma(2, 4)\nu(4) = -1$$

$$\sigma^\nu(3, 4) = \nu(3)\sigma(3, 4)\nu(4) = +1$$

$$\sigma^\nu(4, 2) = \nu(4)\sigma(4, 2)\nu(2) = +1$$

$$\sigma^\nu(4, 4) = \nu(4)\sigma(4, 4)\nu(4) = -1$$

Luego la función signo σ^ν se puede ver en la Figura 2.9.

Sea $I = \{3, 4\}$, vamos a determinar el I -switch de σ . Notar que los arcos que no cumplen con $\{u, v\} \subseteq I$ o $\{u, v\} \cap I = \emptyset$ son: $(3, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, 2)$, por tanto en esos arcos se les cambiará el signo. En la Figura 2.9 se puede apreciar el dibujo de la función signo σ^I .

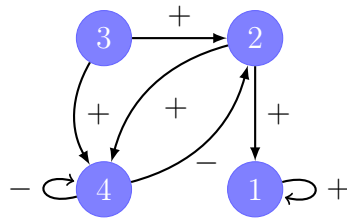


Figura 2.9: Digrafo con signo $(G, \sigma^\nu) = (G, \sigma^I)$.

Determinar si dos funciones signos son switch equivalentes puede llegar a ser una tarea muy tardada, pero el siguiente resultado nos permite determinar si dos funciones signos son switch equivalentes de manera rápida.

Teorema 2.1 (bipartición de Harary). *El grafo con signo (G, σ) tal que $\sigma \sim +1$ si y solo si existe una bipartición en los vértices, $V = X \cup Y$, tal que todas las aristas positivas están dentro de X o Y , y las aristas negativas tienen un extremo en X y el otro en Y .*

Este resultado nos da otra caracterización de la switch equivalencia, este resultado no es muy útil en la práctica, pero tiene su importancia en la teoría.

Proposición 2.2. *Sea G un grafo no totalmente desconexo, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Las funciones σ y ρ son switch equivalentes, si y solo si $\sigma(C) = \rho(C)$ para todo ciclo C en G .*

La demostración del Teorema 2.1 están en [6], mientras que la demostración de la Proposición 2.2 se encuentran en [17].

Dos funciones signo importantes en esta teoría son la $+1$ y -1 .

Definición 2.16. Denotaremos por $+1$ y -1 a las funciones signos definidas en el grafo (o digrafo o multigrafo) no totalmente desconexo $G = (V, E)$, tales que $+1(e) := +1$ y $-1(e) := -1$ para todo $e \in E$.

Con la noción de switch equivalencia y la función $+1$ podemos definir dos conceptos, las funciones signo balanceadas y antibalanceadas. Las funciones balanceadas serian aquellas funciones que son “parecidas” a $+1$, mientras que las antibalanceadas como su nombre indican, son aquellas funciones que su negación es balanceada.

Definición 2.17. Dado un grafo (o digrafo o multigrafo) no totalmente desconexo G y $\sigma \in \Sigma(G)$.

- La función σ se dice **balanceada** si y solo si $\sigma \sim +1$.
- Se dice que σ es **antibalanceada**, si y solo si $-\sigma$ es balanceada, donde $-\sigma$ denota a la función signo que tiene el signo opuesto de σ en cada arista.

Observación 2.7. ■ En el caso de grafos, el Teorema 2.1 permite caracterizar a una función balanceada.

- Notar que una función signo σ es antibalanceada, si y solo si $\sigma \sim -1$.

Finalmente, dos parámetros que tienen relevancia en la teoría de grafos con signos, y en este documento, son: el índice y número de frustración.

Definición 2.18. Dado un grafo (o digrafo o multigrafo) no totalmente desconexo G y $\sigma \in \Sigma(G)$. Se define el **índice de frustración** $l(\sigma)$ como el tamaño del conjunto más pequeño de aristas tal que al quitarlas, la función σ es balanceada en este nuevo grafo. Análogamente se define el **número de frustración** $l_0(\sigma)$ como el tamaño del conjunto más pequeño de vértices tal que al quitarlos, la función σ es balanceada en este nuevo grafo.

Determinar los valores de l y l_0 en el caso general es sabido que es un problema difícil, pero existen algunos casos particulares en los cuales

se puede determinar de manera exacta esos valores. A continuación enunciamos algunos resultados que apuntan a eso.

Proposición 2.3. *Dado un grafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se cumple que $l(-1) = |E| - \text{maxcut}(G)$ y $l_0(-1) = |V| - \beta(G)$, donde $\text{maxcut}(G)$ es tamaño del conjunto de corte máximo en G , y $\beta(G)$ denota al máximo orden de un subgrafo bipartito inducido por G .*

Proposición 2.4. *Consideremos que el grafo completo K_n , y $\sigma \in \Sigma(K_n)$. $\max_{\sigma} l(\sigma) = l(-1) = \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$, y dado una función signo σ que no es antibalanceada, entonces $l(\sigma) < l(-1)$.*

Proposición 2.5. *Consideremos que el grafo completo K_n , y $\sigma \in \Sigma(K_n)$. $\max_{\sigma} l_0(\sigma) = l_0(-1) = n - 2$, y dado una función signo σ que no es antibalanceada, entonces $l_0(\sigma) < l_0(-1)$.*

La demostración de la Proposición 2.4 está en [12], y de las Proposiciones 2.3 y 2.5 se encuentran en [18].

Capítulo 3

Grupos

En este capítulo mostrando algunos conceptos de la teoría de grupos. Otros conceptos y/o notaciones distintos a los que introduciremos en esta sección se puede ver en el libro [9].

Empecemos por definir a un grupo.

Definición 3.1. Un **grupo** es un par (G, \circ) donde G es un conjunto no vacío y

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a \circ b \end{aligned}$$

es una operación que cumple:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, para todo $a, b, c \in G$.
2. Existe un elemento $e \in G$ (llamado **elemento neutro**) tal que

$$a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in G.$$

3. Para cada $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

Se dice que un grupo es **abeliano** si $a \circ b = b \circ a$ para todo $a, b \in G$.

Ejemplo 3.1. Algunos ejemplos clásicos de grupos son:

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{C}, +)$ son grupos abelianos infinitos.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ (con p primo) son grupos abelianos finitos.
- $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ es un grupo abeliano, donde X es un conjunto, y Δ es la diferencia simétrica. Esta se puede definir como:

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \forall A, B \subseteq X.$$

3.1. Subgrupos y grupos especiales

Uno de los conceptos básicos en la teoría de grupos es el concepto de subgrupo.

Definición 3.2. Un **subgrupo** de un grupo (G, \cdot) es un subconjunto no vacío H de G que sea por sí mismo un grupo con la operación de G , i.e. (H, \cdot) es un grupo. Se ocupa la notación $H \leq G$ para indicar que H es un subgrupo de G .

Junto con el concepto de subgrupos, nacen los subgrupos con algunas características especiales. A continuación definiremos tres.

Definición 3.3. Sea (G, \cdot) un grupo.

- Un subgrupo H es **abeliano** si (H, \cdot) es un grupo abeliano.
- Un subgrupo N de un grupo G es **normal** si $gNg^{-1} \subseteq N$ para cada $g \in G$, donde

$$gNg^{-1} := \{gxg^{-1} : x \in N\}.$$

Se ocupa la notación $N \trianglelefteq G$ para indicar que N es un subgrupo normal de G .

- Sea $N \trianglelefteq G$. Consideremos el conjunto de las clases laterales

izquierdas (las cuales definiremos en la siguiente sección) de N en G :

$$G/N := \{aN : a \in G\}.$$

El conjunto G/N con la operación $aN \cdot bN := abN$ es el llamado **grupo cociente**.

3.2. Clases laterales

Las clases laterales de un subgrupo es uno de los conceptos más clásicos de la teoría de grupos. Este concepto tiene implicancias importantes en esta teoría, además será un concepto muy relevante en el desarrollo del Capítulo 4.

Definición 3.4. Sea G un grupo y $H \leq G$. Dados $a, b \in G$, definimos la relación:

$$a \sim_d b \iff ab^{-1} \in H.$$

De forma similar se define:

$$a \sim_i b \iff a^{-1}b \in H.$$

Se puede probar que las relaciones \sim_i y \sim_d son relaciones de equivalencia. Las clases de equivalencia con respecto a la relación \sim_d se llaman **clases laterales derechas** de H en G , análogamente la relación \sim_i se llaman **clases laterales izquierdas** de H en G . Para este tipo de clases de equivalencia se usa las siguientes notaciones:

- La clase de equivalencia de $a \in G$ con respecto a \sim_d es:

$$\{b \in G : ba^{-1} \in H\} = \{ha : h \in H\}$$

y se denotará con Ha .

- La clase de equivalencia de $a \in G$ con respecto a \sim_i es:

$$\{b \in G : b^{-1}a \in H\} = \{ah : h \in H\}$$

y se denotará con aH .

Cuando las clases laterales izquierdas y derechas sean iguales, estas pasan a denominarse simplemente como **clases laterales**, y la notación de \sim_d y \sim_i se cambia a \sim .

Uno de los resultados más importantes de las clases laterales es el teorema de Lagrange, el cual nos permite contar la cantidad de clases laterales.

Teorema 3.1. (Teorema de Lagrange). *Sea G un grupo finito y $H \leq G$. Entonces:*

- $|H|$ es un divisor de $|G|$.
- $|G|/|H|$ es igual al número de las clases laterales derechas (o izquierdas) de H en G .

La demostración de este resultado se encuentra en [13].

3.3. Homomorfismos

Uno de los últimos conceptos que introduciremos de la teoría de grupos será el de homomorfismos e isomorfismo.

Definición 3.5. *Sean G_1 y G_2 dos grupos. Una función $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un **homomorfismo de grupos** si se cumple:*

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \quad \forall a, b \in G_1.$$

Además, diremos que

- f es un **isomorfismo** si f es un homomorfismo inyectivo y sobreyectivo.
- Dos grupos G_1 y G_2 son **isomorfos** si existe un isomorfismo $f : G_1 \rightarrow G_2$ (en este caso escribiremos $G_1 \cong G_2$).

Los homomorfismos satisfacen las siguientes propiedades:

Proposición 3.1. Si $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos, entonces

- $\ker(f) := \{a \in G_1 : f(a) = e\}$ es un subgrupo normal de G_1 .
- $\text{Im}(f) := \{f(a) : a \in G_1\}$ es un subgrupo de G_2 .

Al igual que el teorema de Lagrange, este es otro teorema importante en la teoría de grupos.

Teorema 3.2. (Primer Teorema de Isomorfismo) Sea $f : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos y sea $H := \ker(f)$. Entonces G_1/H es isomorfo a $\text{Im}(f)$. Más precisamente la función:

$$\begin{aligned} \bar{f} : G_1/H &\rightarrow \text{Im}(f) \\ aH &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

Las demostraciones de todos los resultados enunciados en esta sección se encuentran en [13].

Capítulo 4

Switch equivalencia: Análisis teórico

En este capítulo nos centraremos en analizar la switch equivalencia en digrafos (y posteriormente la generalizaremos a multigrafos).

El estudio de la switch equivalencia de este capítulo se dividirá en dos partes. En la primera sección vamos a estudiar las propiedades generales que tiene la switch equivalencia, y el conjunto $\Sigma(G)$, junto con su generalización a multigrafos. En la segunda sección se verán dos caracterizaciones de la switch equivalencia, las cuales nos serán útiles más adelante.

4.1. Grupos y digrafos con signos

Empezaremos este análisis con una simple observación, de la definición de ν -switch tenemos esta expresión:

$$\sigma^\nu(uv) = \nu(u)\sigma(uv)\nu(v) \quad \forall uv \in A.$$

Notar que $\nu(u)$, $\sigma(uv)$ y $\nu(v)$ son números reales, entonces los podemos conmutar $\sigma(uv)$ y $\nu(v)$, obteniendo así lo siguiente:

$$\sigma^\nu(uv) = \nu(u)\nu(v)\sigma(uv) \quad \forall uv \in A.$$

Si definimos a $\rho_\nu(uv) = \nu(u)\nu(v)$ para todo $uv \in A$. Notar que ρ_ν es una función de signos, y adicionalmente tenemos esta igualdad

$$\sigma^\nu(uv) = \rho_\nu(uv)\sigma(uv) \quad \forall uv \in A \quad (4.1)$$

Con la expresión anterior nos surgen dos ideas, la primera es que el lado derecho de (4.1) es como una “multiplicación de funciones de signo”, y esto nos motiva a definir una operación entre funciones con signo como en (4.1). Lo segundo es que a través de la definición ρ_ν podemos redefinir el I -switch, y por tanto dar una nueva definición de switch equivalencia.

4.1.1. Aplicamos teoría de grupos

Desarrollaremos la primera idea. Para ello vamos a dar una definición más exacta de la “multiplicación de funciones de signo” motivada en (4.1).

Definición 4.1. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Se define la operación interna*

$$\begin{aligned} \cdot : \Sigma(G) \times \Sigma(G) &\rightarrow \Sigma(G) \\ (\sigma, \rho) &\mapsto \sigma \cdot \rho \end{aligned}$$

donde

$$(\sigma \cdot \rho)(uv) = \sigma(uv)\rho(uv) \quad \forall uv \in A.$$

A esta operación interna la denominaremos por **multiplicación de funciones de signo**.

Dada la definición de la multiplicación de funciones signos, no sería descabellado pensar que el par $(\Sigma(G), \cdot)$ es un grupo. Para demostrar esto último usaremos las propiedades que tiene la multiplicación en los números reales, en particular, en el conjunto $\{-1, 1\}$.

Proposición 4.1. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. La estructura algebraica $(\Sigma(G), \cdot)$ es un grupo abeliano.*

Demostración.

Para demostrar que $(\Sigma(G), \cdot)$ es un grupo abeliano, probaremos que $(\Sigma(G), \cdot)$ cumple las cuatro condiciones escritas en 3.1.

1. Sean $\sigma, \rho, \tau \in \Sigma(G)$, gracias a la propiedades de la multiplicación en los números reales, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \rho) \cdot \tau(a) &= (\sigma \cdot \rho)(a)\tau(a), \\ &= \sigma(a)\rho(a)\tau(a), \\ &= \sigma(a)(\rho(a)\tau(a)), \\ &= \sigma(a)(\rho \cdot \tau)(a), \\ &= \sigma \cdot (\rho \cdot \tau)(a) \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

Por ende, $(\sigma \cdot \rho) \cdot \tau = \sigma \cdot (\rho \cdot \tau)$ para todo $\sigma, \rho, \tau \in \Sigma(G)$.

2. Dado un $\sigma \in \Sigma(G)$. Es claro que $\sigma \cdot +1 = \sigma$, en efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma \cdot +1(a) &= \sigma(a) + 1(a) \\ &= \sigma(a) \cdot +1 \\ &= \sigma(a) \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

Por tanto $\sigma \cdot +1 = \sigma$. La demostración $+1 \cdot \sigma = \sigma$ es análoga al caso anterior. Entonces $+1$ será nuestro elemento neutro.

3. Sea $\sigma \in \Sigma(G)$, notamos que

$$\sigma \cdot \sigma(a) = \sigma(a)^2 = (\pm 1)^2 = +1 \quad \forall a \in A.$$

Con esto hemos probado que $\sigma \cdot \sigma = +1$ para todo $\sigma \in \Sigma(G)$.

4. Dados $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Usando la propiedad conmutativa de la

multiplicación de los reales, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sigma \cdot \rho(a) &= \sigma(a)\rho(a) \\ &= \rho(a)\sigma(a) \\ &= \rho \cdot \sigma(a) \quad \forall a \in A\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma \cdot \rho = \rho \cdot \sigma$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.

Con esto hemos demostrado que $(\Sigma(G), \cdot)$ es efectivamente un grupo abeliano. ■

Observación 4.1. ■ *Del punto 3 de la demostración anterior, se logra inferir que todos los elementos de $\Sigma(G)$ tienen orden dos (i.e. $\sigma^2 = +1$ para todo $\sigma \in \Sigma(G)$), y por tanto todas las funciones signos son su propio inverso.*

- *Como todos los elementos de $\Sigma(G)$ tienen orden dos, esto implica que $\Sigma(G) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|E|}$.*
- *Si consideramos el conjunto $\mathcal{F}(A)$ de todas las funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. No es difícil ver que $\mathcal{F}(A)$ con la operación producto definida en 4.1 forma un grupo. Luego se podría demostrar que $\Sigma(G)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(A)$.*

A continuación vamos a desarrollar la segunda idea obtenida de (4.1). Consideremos un $I \subseteq V$, luego se define la función de signos en los vértices ν_I como:

$$\nu_I(u) = \begin{cases} +1 & , \text{ si } u \in I \\ -1 & , \text{ si } u \notin I \end{cases} \quad (4.2)$$

Con la definición de ν_I , podemos definir una nueva función, la cual cumplirá un papel similar a ρ_ν en (4.1).

Observación 4.2. *Aquí el ν_I se puede ver como un tipo de función característica, ya que si un elemento u no pertenece a I , entonces en vez que $\nu_I(u) = 0$ lo definimos como $\nu_I(u) = -1$.*

Definición 4.2. Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Se define el operador $\mathcal{S} : \mathcal{P}(V) \rightarrow \Sigma(G)$ como $\mathcal{S}(I)(uv) = \nu_I(u)\nu_I(v)$ para todo $uv \in A$, donde ν_I está definido en (4.2). Al operador \mathcal{S} lo llamaremos **operador switch**. Además definiremos $H(G) := \text{Im}(\mathcal{S})$.

Observación 4.3. ■ Escribimos $H(G)$ para denotar la dependencia que tiene la imagen de \mathcal{S} del digrafo.

- Es fácil ver que $+1 \in H(G)$. Sea $I = \emptyset$, entonces $\nu_I(u) = -1$ para todo $u \in V$, y por tanto $\mathcal{S}(I)(uv) = +1$ para toda $uv \in A$. Análogamente se puede demostrar que $\mathcal{S}(V) = +1$. Por lo tanto, $+1 \in H(G)$ para cualquier digrafo no totalmente desconexo G .
- Unas de las primeras preguntas que uno se hace al ver el operador switch son sobre la inyectividad y sobreyectividad de este operador. Del punto anterior ya sabemos que el operador switch no es inyectivo, pues $\mathcal{S}(\emptyset) = \mathcal{S}(V)$. Dada la definición del operador switch, no se ve sencillo determinar la sobreyectividad. Esto lo responderemos en la Subsubsección 4.1.3.2, ya que requerimos usar algunos resultados que todavía no hemos enunciado.

La siguiente proposición nos asegura que podemos usar el operador switch para re-escribir el I -switch.

Proposición 4.2. Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Para toda $\sigma \in \Sigma(G)$ se cumple que $\sigma^I = \mathcal{S}(I)\sigma$ para todo $I \subseteq V$.

Demostración.

Consideremos un $\sigma \in \Sigma(G)$ y $uv \in A$. Si $u, v \in I$, tenemos que $\sigma^I(uv) = \sigma(uv)$. Por otro lado se sigue de la Ecuación (4.2) que

$$\mathcal{S}(I)(uv) = \nu_I(u)\nu_I(v) = +1,$$

luego $\mathcal{S}(I)\sigma(uv) = \sigma(uv)$. Ahora si $u, v \notin I$, la demostración es análoga al caso anterior.

Si $u \in I$ y $v \notin I$, tenemos que $\sigma^I(uv) = -\sigma(uv)$. Por otro lado al utilizar la Ecuación (4.2) obtenemos

$$\mathcal{S}(I)(uv) = \nu_I(u)\nu_I(v) = -1,$$

luego $\mathcal{S}(I)\sigma(uv) = -\sigma(uv)$. Y si $v \in I$ y $u \notin I$, la demostración es similar al caso anterior.

Por lo tanto $\sigma^I = \mathcal{S}(I)\sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma(G)$. ■

Una de las consecuencias de la proposición anterior, es que permite reescribir la relación \sim en términos de \mathcal{S} .

Corolario 4.1. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ se cumple:*

$$\sigma \sim \rho \iff \exists I \subseteq V \text{ tal que } \mathcal{S}(I)\sigma = \rho. \quad (4.3)$$

Demostración.

Directa de la Proposición 4.2. ■

Notamos que la equivalencia (4.3) es algo que ya habíamos visto antes, son las llamadas clases laterales 3.4. La Relación (4.3) tiene la estructura de una clase lateral, pero lo único que le falta para que de verdad lo sea, es que $H(G)$ sea un subgrupo de $\Sigma(G)$. Lo cual demostraremos en la siguiente sección.

4.1.1.1. Propiedades de \mathcal{S} y $H(G)$

Nuestro objetivo es probar que $H(G) \leq \Sigma(G)$, para ello vamos a estudiar algunas propiedades que tiene el operador switch.

Este resultado caracteriza la función $\mathcal{S}(I)$, y nos resultará muy útil más

adelante.

Proposición 4.3. *Dados un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. El operador switch satisface la siguiente igualdad*

$$\mathcal{S}(I)(uv) = \begin{cases} +1 & , \text{ si } u, v \in I \vee u, v \notin I, \\ -1 & , \text{ si } (u \in I \wedge v \notin I) \vee (u \notin I \wedge v \in I). \end{cases} \quad (4.4)$$

Para todo $I \subseteq V$.

Demostración.

Sean $I \subseteq V$ y $uv \in A$. Si $u, v \in I$, tenemos que $\nu_I(u) = \nu_I(v) = +1$, y si $u, v \notin I$, obtenemos que $\nu_I(u) = \nu_I(v) = -1$. En ambos casos se tiene que

$$\mathcal{S}(I)(uv) = \nu_I(u)\nu_I(v) = (\nu_I(u))^2 = +1.$$

Ahora si $u \in I$ y $v \notin I$, tenemos que $\nu_I(u) = +1$ y $\nu_I(v) = -1$, y si $u \notin I$ y $v \in I$, obtenemos que $\nu_I(u) = -1$ y $\nu_I(v) = +1$. En ambos casos se satisface que

$$\mathcal{S}(I)(uv) = \nu_I(u)\nu_I(v) = -1 \cdot +1 = -1.$$

Con esto hemos probado que se verifica 4.4. ■

Observación 4.4. *Notar que (4.4) es equivalente a:*

$$\mathcal{S}(I)(uv) = \begin{cases} +1 & \text{si } \{u, v\} \subseteq I \text{ o } \{u, v\} \cap I = \emptyset, \\ -1 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Lo cual es muy parecido a la definición del I -switch (2.2), más aún, de aquí también se puede deducir que $\sigma^I = \mathcal{S}(I)\sigma$.

Otra cosa que se puede deducir de (4.5) es que $\mathcal{S}(I) = +1^I$, lo cual tiene

sentido, pues $+1$ es el elemento neutro.

Gracias a la Identidad (4.5) podemos generalizar lo observado en el segundo punto de la Observación 4.3.

Proposición 4.4. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Se cumple que $\mathcal{S}(I) = \mathcal{S}(I^c)$, para todo $I \subseteq V$.*

Demostración.

Consideremos $I \subseteq V$. Se sigue de 4.5 que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(I^c)(uv) &= \begin{cases} +1 & \text{si } \{u, v\} \subseteq I^c \text{ o } \{u, v\} \cap I^c = \emptyset, \\ -1 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} +1 & \text{si } \{u, v\} \subseteq I \text{ o } \{u, v\} \cap I = \emptyset, \\ -1 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \mathcal{S}(I)(uv) \quad \forall uv \in A. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{S}(I^c) = \mathcal{S}(I)$. ■

Una propiedad más básica que cumple cualquier subgrupo es que, la multiplicación de dos elementos del subgrupo esté en el subgrupo. El siguiente resultado hace referencia a esto último.

Proposición 4.5. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Para todo $I_1, I_2 \subseteq V$, se cumple que:*

$$\mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2) = \mathcal{S}(I_1 \Delta I_2) = \mathcal{S}((I_1 \Delta I_2)^c).$$

Demostración.

Sean $I_1, I_2 \subseteq V$. Definamos el conjunto $I' := I_1 \Delta I_2$. Vamos a probar que $\mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2)(uv) = \mathcal{S}(I')(uv)$, con $uv \in A$, para ello realizaremos un análisis por casos. El primer caso principal a estudiar es $u \in (I_1 \cup I_2)^c$,

notar que $u \notin I'$.

1. Si $v \in (I_1 \cup I_2)^c$, entonces $v \notin I'$. Con esto tenemos que $\mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I_2)(uv) = \mathcal{S}(I')(uv) = +1$.
2. Si $v \in I_1 \cap I_2$, luego $v \notin I'$. Lo anterior implica que $\mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I_2)(uv) = -1$ y $\mathcal{S}(I')(uv) = +1$.
3. Si $v \in I_1 \setminus I_2$, por tanto $v \in I'$. Así se tiene que $\mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I')(uv) = -1$ y $\mathcal{S}(I_2)(uv) = +1$.
4. Si $v \in I_2 \setminus I_1$, entonces $v \in I'$. Con esto obtenemos que $\mathcal{S}(I_2) = \mathcal{S}(I')(uv) = -1$ y $\mathcal{S}(I_1)(uv) = +1$.

Con esto hemos demostrado que $\mathcal{S}(I_1)\mathcal{S}(I_2)(uv) = \mathcal{S}(I')(uv)$ si $u \in (I_1 \cup I_2)^c$.

Ahora si $u \in I_1 \cap I_2$, el desarrollo de la demostración es análoga al caso anterior, los únicos cambios son que al analizar el caso 1 obtenemos el resultado de 2 y viceversa, y que el estudio del caso 3 obtenemos las consecuencias de 4 y viceversa.

El tercer caso a analizar es $u \in I_1 \setminus I_2$. Notar que $u \in I'$.

5. Si $v \in (I_1 \cup I_2)^c$, entonces $v \notin I'$. Con esto tenemos que $\mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I')(uv) = -1$ y $\mathcal{S}(I_2)(uv) = +1$.
6. Si $v \in I_1 \cap I_2$, luego $v \notin I'$. Lo anterior implica que $\mathcal{S}(I_2) = \mathcal{S}(I')(uv) = -1$ y $\mathcal{S}(I_1)(uv) = +1$.
7. Si $v \in I_1 \setminus I_2$, por tanto $v \in I'$. Así se tiene que $\mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I_2)(uv) = \mathcal{S}(I')(uv) = +1$.
8. Si $v \in I_2 \setminus I_1$, entonces $v \in I'$. Con esto obtenemos que $\mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I_2)(uv) = -1$ y $\mathcal{S}(I')(uv) = +1$.

Por ende, se cumple que $\mathcal{S}(I_1)\mathcal{S}(I_2)(uv) = \mathcal{S}(I')(uv)$ si $u \in I_1 \setminus I_2$.

Si $u \in I_2 \setminus I_1$, el desarrollo de la demostración es análoga al caso anterior, los únicos cambios son que al analizar el caso 5 obtenemos el resultado de 6 y viceversa, y que el estudio del caso 7 obtenemos las consecuencias de 8 y viceversa.

Como consecuencia de los cuatro casos estudiados antes, hemos probado que $\mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2)(uv) = \mathcal{S}(I')(uv)$, para todo $uv \in A$.

Por lo tanto $\mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2) = \mathcal{S}(I')$. Se sigue de la Proposición 4.4 que $\mathcal{S}(I'^c) = \mathcal{S}(I') = \mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2)$. ■

Como consecuencia directa de la Proposición 4.5 se tienen dos resultados útiles. El primero de ellos nos permite calcular $\mathcal{S}(I)$ de manera iterativa.

Corolario 4.2. *Dados un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$, y un $I_1, I_2 \subseteq V$ tal que I_1 y I_2 son disjuntos. Se cumple que $\mathcal{S}(I_1 \cup I_2) = \mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2)$. Además, dado $I \subseteq V$ tal que $I = \{v_1, \dots, v_r\}$, se satisface:*

$$\mathcal{S}(I) = \prod_{i=1}^r \mathcal{S}(v_i).$$

Demostración.

Recordemos que dados dos conjuntos disjuntos I_1 y I_2 se cumple que $I_1 \Delta I_2 = I_1 \cup I_2$, entonces 4.5 nos asegura que:

$$\mathcal{S}(I_1 \cup I_2) = \mathcal{S}(I_1 \Delta I_2) = \mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2).$$

Ahora consideremos un $I \subseteq V$ tal que $I = \{v_1, \dots, v_r\}$. Se definen los conjunto $I_s = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$, con $s \leq r$. Es claro que I_s y v_{s+1} son conjunto disjuntos (con $s \leq r - 1$), luego aplicando sucesivamente el

resultado anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(I) &= \mathcal{S}(I_{r-1} \cup \{v_r\}), \\
 &= \mathcal{S}(I_{r-1}) \mathcal{S}(v_r), \\
 &\vdots \\
 &= \mathcal{S}(I_1) \prod_{i=2}^r \mathcal{S}(v_i), \\
 &= \prod_{i=1}^r \mathcal{S}(v_i).
 \end{aligned}$$

■

El segundo resultado que se desprende de la Proposición 4.5, nos asegura que \mathcal{S} es un homeomorfismo.

Corolario 4.3. *Dados un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. El operador switch $\mathcal{S} : (\mathcal{P}(V), \Delta) \rightarrow (\Sigma(G), \cdot)$ es un homeomorfismo de grupos.*

Demostración.

Directo de la Proposición 4.5. ■

Como resultado directo del corolario anterior, tenemos que $H(G)$ es un subgrupo.

Corolario 4.4. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. El conjunto $H(G)$ es un subgrupo abeliano de $\Sigma(G)$.*

Demostración.

Como el operador switch es un homeomorfismo, tenemos que su imagen es un subgrupo de $\Sigma(G)$, es decir, $H(G) \leq \Sigma(G)$. Además $H(G)$ es abeliano, pues todos los elementos de $\Sigma(G)$ cumplen con la propiedad de

la conmutatividad, en particular los elementos de $H(G)$. ■

Observación 4.5. ■ *Otra resultado que se logra inferir del Corolario 4.3 es que $\Sigma(G)/\ker(\mathcal{S}) \cong H(G)$, lo cual es consecuencia del Primer Teorema de Isomorfismos 3.2.*

- *El Corolario 4.4 se puede deducir directamente de la Proposición 4.5.*

4.1.1.2. Aplicación del teorema de Lagrange

Gracias a la Proposición 4.5 y a la equivalencia (4.3), podemos asegurar que la switch equivalencia es una clase lateral. Como consecuencia de esto último, \sim es una relación de equivalencia, las clases de \sim corresponden a las clases laterales de $H(G)$, i.e. las clases de equivalencia son iguales a $\sigma H(G)$, con $\sigma \in \Sigma(G)$.

Además de todas propiedades anteriores, tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \sigma \sim \rho &\iff \exists I \subseteq V \text{ tal que } \mathcal{S}(I)\sigma = \rho, \\ &\iff \rho \in \sigma H(G). \end{aligned}$$

Por último, el Teorema de Lagrange 3.1 nos asegura que todas las clases laterales son del mismo tamaño, y que la cantidad de clases de equivalencia distintas es igual a $|\Sigma(G)|/|H(G)|$.

Sabemos que $|\Sigma(G)| = 2^{|A|}$, pero ¿Cuánto vale el orden de $H(G)$? Responder esta pregunta requiere un análisis no trivial, y para poder determinar $|H(G)|$ vamos a estudiar con mayor profundidad la inyectividad de \mathcal{S} .

4.1.1.3. Orden de $H(G)$

El objetivo en esta ocasión es determinar el orden de $H(G)$ para cualquier G no totalmente desconexo. Para ello, empezaremos por encontrar un conjunto R en el cual \mathcal{S} sea inyectivo para algunos digrafos, obteniendo así que $\mathcal{S} : R \rightarrow H(G)$ sea biyectivo, y por tanto $|H(G)| = |R|$. Tomando este resultado como base, deduciremos el orden de $H(G)$ para cualquier digrafo.

Teniendo en cuenta lo dicho por la Proposición 4.4 se define el siguiente conjunto.

Definición 4.3. Dado $G = (V, A)$ un digrafo. Diremos que $R \subset \mathcal{P}(V)$ cumple la propiedad de **no complemento** si para todo $I \in R$ se cumple que $I^c \notin R$. Denotaremos por $\overline{\mathcal{P}(V)}$ a uno de los conjunto de tamaño maximo que cumple con la propiedad no complemento.

Inocentemente uno pensaría que $\mathcal{S} : \overline{\mathcal{P}(V)} \rightarrow H(G)$ es inyectiva para cualquier G , pero esta afirmación no es de todo verdadera. Para mostrar esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1. Consideremos el digrafo $G = (V, A)$ que se encuentra en la Figura 4.1

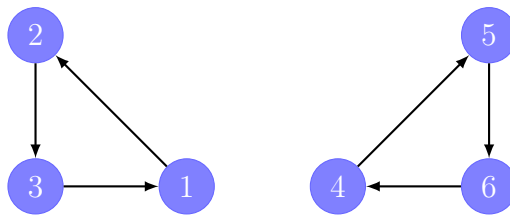


Figura 4.1: Digrafo desconexo.

Definimos $I_1 = \{2, 5\}$, calculamos $\mathcal{S}(I_1)$, el cual se encuentra en la Figura 4.2 (a).

Ya sabemos que $\mathcal{S}(I_1^c) = \mathcal{S}(I_1)$, pero si consideramos $I_2 = \{2, 4, 6\}$, obtenemos que el $\mathcal{S}(I_2)$ es el digrafo de la Figura 4.2 (b).

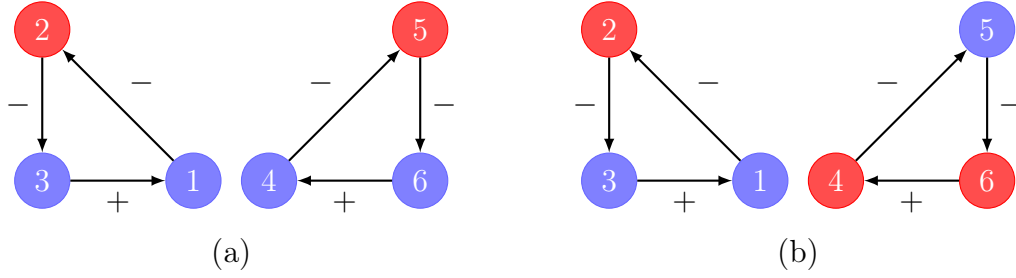


Figura 4.2: (a) Digrafo con signo $(G, \mathcal{S}(I_1))$. (b) Digrafo con signo $(G, \mathcal{S}(I_2))$.

Por tanto $\mathcal{S}(I_1^c) = \mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I_2) = \mathcal{S}(I_2^c)$, aunque $I_1 \neq I_2 \neq I_1^c$.

A pesar de lo mostrado en el Ejemplo 4.1, el operador $\mathcal{S} : \overline{\mathcal{P}(V)} \rightarrow H(G)$ es inyectiva solo si G es conexa. Para demostrar esta afirmación, debemos probar un lema previo.

Lema 4.1. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. El digrafo G es conexo si y solo si los únicos subconjuntos I de V tales que $\mathcal{S}(I) = +1$ son $I = \emptyset$ e $I = V$.*

Demostración.

(\Rightarrow) Asumamos que G es conexo. Sea $I \subseteq V$ tal que $I \neq \emptyset$ e $I \neq V$. Notamos que existe un arco uv tal que $u \in I$ y $v \in I^c$ o $v \in I$ y $u \in I^c$, la existencia de este arco queda asegurada por la conexidad de G . Se sigue de (4.5) que $\mathcal{S}(I)(uv) = -1$, entonces $\mathcal{S}(I) \neq +1$. Por lo tanto, los únicos $I \subseteq V$ tales que $\mathcal{S}(I) = +1$ son $I = \emptyset$ e $I = V$.

(\Leftarrow) Ahora asumamos que los únicos subconjuntos I de V tales que $\mathcal{S}(I) = +1$ son $I = \emptyset$ e $I = V$. Sea $G' = (V', A')$ una componente conexa de G con $A' \neq \emptyset$. Si $\mathcal{S}(V') \neq +1$, entonces existe un $uv \in A$ tal que $\mathcal{S}(V')(uv) = -1$, luego (4.5) nos asegura que $u \notin V'$ y $v \in V'$ o $u \in V'$ y $v \notin V'$, lo cual no puede ocurrir, pues G' es una componente conexa maximal. Por ende $\mathcal{S}(V') = +1$, lo cual implica que $V' = V$, entonces G es conexo. ■

Proposición 4.6. *Dado un digrafo $G = (V, A)$ conexo y $A \neq \emptyset$. El operador switch restringido $\mathcal{S} : \overline{\mathcal{P}(V)} \rightarrow H(G)$ es inyectivo.*

Demostración.

Sean $I_1, I_2 \in \overline{\mathcal{P}(V)}$ tales que $\mathcal{S}(I_1) = \mathcal{S}(I_2)$, es decir, $I_1 \neq I_2^c$ y $\mathcal{S}(I_1 \Delta I_2) = \mathcal{S}(I_1) \mathcal{S}(I_2) = +1$. Gracias al Lema 4.1 podemos asegurar que $I_1 \Delta I_2 = \emptyset$ o $I_1 \Delta I_2 = V$. Si $I_1 \Delta I_2 = V$, implica que $I_1 = I_2^c$ lo cual no puede ocurrir por hipótesis. Si $I_1 \Delta I_2 = \emptyset$, implica que $I_1 = I_2$. Con esto hemos probado que $\mathcal{S} : \overline{\mathcal{P}(V)} \rightarrow H(G)$ es inyectivo. ■

Observación 4.6. ■ *Notamos que $|\overline{\mathcal{P}(V)}| = 2^{|V|-1}$.*

- *Si $G = (V, A)$ es conexo, de la Proposición 4.6 se deduce que $\mathcal{S} : \overline{\mathcal{P}(V)} \rightarrow H(G)$ es una biyección, y por tanto $|H(G)| = |\overline{\mathcal{P}(V)}| = 2^{|V|-1}$.*

Para continuar debemos generalizar la Proposición 4.6, pero como vimos en el Ejemplo 4.1 la generalización no es tan trivial.

En el Ejemplo 4.1 podemos observar que no tenemos inyectividad del operador $\mathcal{S} : \overline{\mathcal{P}(V)} \rightarrow H(G)$, pero sí lo tenemos por cada componente conexa, y podemos usar eso para la generalización.

Ejemplo 4.2. *Sigamos usando los mismos conjuntos definidos en 4.1. Es claro que el digrafo G tiene dos componentes conexas, uno con los vértices $V_1 = \{1, 2, 3\}$ y el otro con los vértices $V_2 = \{4, 5, 6\}$.*

Notamos que $I_1 \cap V_1 = I_2 \cap V_1$ y $(I_1 \cap V_2)^c = I_2 \cap V_2$, de esto podemos deducir que los subconjuntos $R \subseteq V$ donde \mathcal{S} es inyectivo seria formado por la “unión” de $\overline{\mathcal{P}(V_1)}$ y $\overline{\mathcal{P}(V_2)}$, con esto nos referimos a que un $I \in R$ si $I \cap V_1 \in \overline{\mathcal{P}(V_1)}$ y $I \cap V_2 \in \overline{\mathcal{P}(V_2)}$.

Teniendo en mente la idea mostrada en el ejemplo anterior, se define el siguiente conjunto:

Definición 4.4. *Dados dos digrafos no totalmente desconexos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$, tales que V_1 y V_2 son disjuntos. Denotaremos por $\mathcal{S}_i : \mathcal{P}(V_i) \rightarrow \Sigma(G_i)$ y sean $H(G_i) := \text{Im}(\mathcal{S}_i)$, con $i = 1, 2$. Se define el conjunto*

$$H(G_1) * H(G_2) := \{\sigma \in \Sigma(G) : \sigma|_{A_1} \in H_1 \text{ y } \sigma|_{A_2} \in H_2\}$$

donde G es la **unión disjunta** de G_1 y G_2 , es decir, $G = (V, A) := G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$.

Observación 4.7. *En la union disjunta de grafos o digrafos se asume que V_1 y V_2 son conjuntos disjuntos.*

Vamos a probar que $H(G_1) * H(G_2) = H(G_1 \cup G_2)$, y como consecuencia de ello, podemos generalizar el resultado obtenido en la Observación 4.6.

Proposición 4.7. *Dados dos digrafos no totalmente desconexos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$, tales que V_1 y V_2 sean disjuntos; sea $G = (V, A) := G_1 \cup G_2$. Consideremos a $\mathcal{S}_i : \mathcal{P}(V_i) \rightarrow \Sigma(G_i)$ (con $i = 1, 2$) y $\mathcal{S} : \mathcal{P}(V) \rightarrow \Sigma(G)$. Se cumple que $H(G) = H(G_1) * H(G_2)$, donde $H(G_i) := \text{Im}(\mathcal{S}_i)$.*

Demostración.

(\subseteq) Sea $\sigma \in H(G)$, definamos a $\sigma_i := \sigma|_{A_i}$, con $i = 1, 2$. Como $\sigma \in H(G)$, luego existe un $I \subseteq V$ tal que $\mathcal{S}(I) = \sigma$. Observamos que

$$\mathcal{S}(I)|_{A_i} = \sigma|_{A_i} = \sigma_i \tag{4.6}$$

Notar que $\mathcal{S}(I)|_{A_i} = \mathcal{S}(I \cap V_i)$, en efecto, supongamos que existe un $uv \in A_i$ tal que $\mathcal{S}(I)|_{A_i}(uv) \neq \mathcal{S}(I \cap V_i)(uv)$. Si $\mathcal{S}(I)|_{A_i}(uv) = +1$ y $\mathcal{S}(I \cap V_i)(uv) = -1$, por un lado de $\mathcal{S}(I)|_{A_i}(uv) = +1$, se obtiene que $u, v \in I$ o $u, v \notin I$. Por otro lado de $\mathcal{S}(I \cap V_i)(uv) = -1$, se deduce que $u \in I \cap V_i$ y $v \notin I \cap V_i$, o $u \notin I \cap V_i$ y $v \in I \cap V_i$. Como $I \cap V_i \subseteq I$, de aquí obtenemos una contradicción.

Ahora si $\mathcal{S}(I)|_{A_i}(uv) = -1$ y $\mathcal{S}(I \cap V_i)(uv) = +1$, la demostración es análoga al caso anterior. Con esto hemos probado que $\mathcal{S}(I)|_{A_i} = \mathcal{S}(I \cap V_i)$.

Definamos a $I_i = I \cap V_i$, entonces de (4.6) se infiere que: $\mathcal{S}(I_i) = \mathcal{S}(I)|_{A_i} = \sigma_i$. Es evidente que $I_i \subseteq V_i$, con lo cual tenemos demostrado que $\sigma_i \in H(G_i)$, con $i = 1, 2$. Por lo tanto, $H(G) \subseteq H(G_1) * H(G_2)$.

La inclusión contraria claramente se cumple ■

Observación 4.8. *Notar que $|H(G_1) * H(G_2)| = |H(G_1)||H(G_2)|$.*

Gracias a la Proposición 4.7 podemos determinar $|H(G)|$ cuando G no tiene vértices aislados (i.e. vértices el cual no es extremo de ninguna arista).

Proposición 4.8. *Dado un digrafo no totalmente desconexo y sin vértices aislados $G = (V, A)$. Sean $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2), \dots, G_r = (V_r, A_r)$ las componentes conexas de G , entonces*

$$H(G) = H(G_1) * H(G_2) * \dots * H(G_r).$$

Además $|H(G)| = 2^{|V|-r}$, donde $H(G_i) := \text{Im}(\mathcal{S}_i)$ (con $\mathcal{S}_i := \mathcal{S}|_{\mathcal{P}(V_i)}$).

Demostración.

Definimos a $G'_j = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{r-j}$, sea $H(G'_j) := \text{Im}(\mathcal{S}'_j)$, con $\mathcal{S}'_j = \mathcal{S}|_{G'_j}$ ($0 \leq j \leq r-1$).

La Proposición 4.7 nos asegura que $H(G'_j) = H(G'_{j+1}) * H(G_{r-j})$, pues $G'_j = G'_{j+1} \cup G_{r-j}$. Utilizando de manera iterativa esto último, obtenemos

que:

$$\begin{aligned}
 H(G) &= H(G'_0) = H(G'_1) * H(G_r), \\
 &= H(G'_2) * H(G_{r-1}) * H(G_r), \\
 &\quad \vdots \\
 &= H(G'_{r-1}) * H(G_2) * \cdots * H(G_r), \\
 &= H(G_1) * H(G_2) * \cdots * H(G_r).
 \end{aligned}$$

Además, se sigue de la Observación 4.8 que:

$$\begin{aligned}
 |H(G)| &= |H(G_1) * H(G_2) * \cdots * H(G_r)|, \\
 &= |H(G_1) * H(G_2) * \cdots * H(G_{r-1})| |H(G_r)|, \\
 &\quad \vdots \\
 &= \prod_{i=1}^r |H(G_i)|.
 \end{aligned}$$

Dado que los G_i son digrafos conexos no totalmente desconexos, podemos aplicar lo escrito en la Observación 4.6. Así tenemos $|H(G_i)| = 2^{|V_i|-1}$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Lo anterior implica que

$$|H(G)| = \prod_{i=1}^r |H(G_i)| = \prod_{i=1}^r 2^{|V_i|-1} = 2^{\sum |V_i|-r} = 2^{|V|-r}.$$

Por ende $|H(G)| = 2^{|V|-r}$. ■

Ahora vamos a determinar el orden $H(G)$ cuando G es un digrafo cualquiera. En este caso habría que estudiar lo que ocurre con los vértices aislados. Como las funciones con signos solo dependen de los arcos, entonces los nodos importantes son aquellos que conforman los arcos,

por tanto, uno podría quitar los vértices aislados del análisis, porque no deberían influir.

Para demostrar que los vértices aislados no influyen en el análisis, vamos a probar el siguiente resultado que nos será útil (y que parece natural).

Proposición 4.9. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$ y v un vértice aislado de G .*

1. *Para todo $I \subseteq V - v$, se cumple que $\mathcal{S}(I) = \mathcal{S}(I \cup \{v\})$.*
2. *Para todo $I \subseteq V$, tal que $v \in I$, se cumple que $\mathcal{S}(I) = \mathcal{S}(I - v)$.*

Demostración.

1. Sea $I \subseteq V - v$, supongamos que $\mathcal{S}(I) \neq \mathcal{S}(I - v)$, eso nos dice que existe por lo menos una arista uw tal que $\mathcal{S}(I)(uw) \neq \mathcal{S}(I - v)(uw)$. Como I e $I - v$ difieren solo en un elemento, el cual es v , entonces la arista uw debe empezar o terminar en ese elemento que difieren, es decir, que $u = v$ o $w = v$, pero si eso ocurre el vértice v deja de ser un nodo aislado, lo que es una contradicción.
2. La prueba es análoga a la demostración del punto 1. ■

Definición 4.5. *Dado un digrafo $G = (V, A)$, se define el siguiente conjunto:*

$$\delta_0(G) := \{v \in V : v \text{ es un vértice aislado}\}.$$

El siguiente resultado nos garantiza que los vértices aislados no afectan el análisis antes hecho.

Proposición 4.10. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Se definen $G' = (V', A') := G - \delta_0(G)$, y a $H(G') := \text{Im}(\mathcal{S} \upharpoonright_{\mathcal{P}(V')})$. Se cumple que $H(G) = H(G')$.*

Demostración.

(\subseteq) Consideremos un $\sigma \in H(G)$, luego existe un $I \subseteq V$ tal que $\mathcal{S}(I) = \sigma$.

Si $I \cap \delta_0(G) = \emptyset$, entonces $I \subseteq V'$, y por tanto $\sigma \in H(G')$.

Si $I \cap \delta_0(G) \neq \emptyset$, sean $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = I \cap \delta_0(G)$. Se definen los conjunto $I_j := I \setminus \{v_j, v_{j+1}, \dots, v_k\}$ (con $1 \leq j \leq k$).

Aplicando reiteradas veces el punto 2 de la Proposición 4.9, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\mathcal{S}(I) = \mathcal{S}(I_k) = \mathcal{S}(I_{k-1}) = \dots = \mathcal{S}(I_1).$$

Notar que I_1 no tiene vértices aislados, entonces $I_1 \subseteq V'$. De aquí se obtiene que $\sigma = \mathcal{S}(I) = \mathcal{S}(I_1) \in H(G')$.

Por lo tanto hemos demostrado que $H(G) \subseteq H(G')$. La desigualdad contraria claramente se cumple. ■

Reuniendo todos los resultados obtenidos en esta sección, podemos determinar el orden de $H(G)$ para cualquier G .

Corolario 4.5. *Dado un digrafo no totalmente desconexo $G = (V, A)$. Sean $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$, \dots , $G_r = (V_r, A_r)$ las componentes conexas maximales no triviales de G , entonces*

$$H(G) = H(G_1) * H(G_2) * \dots * H(G_r).$$

Además $|H(G)| = 2^{|V| - \text{comp}(G)}$, donde $H(G_i) := \text{Im}(\mathcal{S}_i)$ (con $\mathcal{S}_i := \mathcal{S} \big|_{\mathcal{P}(V_i)}$).

Demostración.

Se define $G' = (V', A') := G - \delta_0(G)$ y sea $H(G') := \text{Im}(\mathcal{S} \big|_{\mathcal{P}(V')})$. Se sigue de la Proposición 4.8 que

$$H(G') = H(G_1) * H(G_2) * \dots * H(G_r),$$

y además $|H(G')| = 2^{|V'|-r}$.

Luego la Proposición 4.10 nos asegura que

$$H(G) = H(G') = H(G_1) * H(G_2) * \cdots * H(G_r),$$

más aún $|H(G)| = |H(G')| = 2^{|V'|-r}$. Notar que $|V'| = |V| - |\delta_0(G)|$, entonces $|H(G)| = 2^{|V|-|\delta_0(G)|-r} = 2^{|V|-\text{comp}(G)}$. ■

4.1.1.4. Cantidad de clases de equivalencia

Como ya sabemos que el orden de $H(G)$, podemos determinar la cantidad de clases de equivalencia de \sim .

$$\frac{|\Sigma(G)|}{|H(G)|} = \frac{2^{|A|}}{2^{|V|-\text{comp}(G)}} = 2^{|A|-|V|+\text{comp}(G)}$$

La Proposición 2.1 nos asegura que:

$$\frac{|\Sigma(G)|}{|H(G)|} = 2^{|A|-|V|+\text{comp}(G)} = 2^{\text{cyc}(G)}.$$

Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Dado un digrafo no totalmente desconexo G . La relación \sim es una relación de equivalencia, las clases de equivalencia de \sim son iguales a $\sigma H(G)$ (con $\sigma \in \Sigma(G)$), y la cantidad de clases distintas son $2^{\text{cyc}(G)}$.*

Otra forma de enunciar el teorema anterior es: *Dado un digrafo no totalmente desconexo G . La relación \sim es una relación de equivalencia, esta corresponde a las clases laterales de $H(G)$, y el tamaño de las clases laterales es $|H(G)| = 2^{|V|-\text{comp}(G)}$.*

Ilustraremos los últimos resultados por medio del siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3. Consideremos el digrafo G de la Figura 4.3.

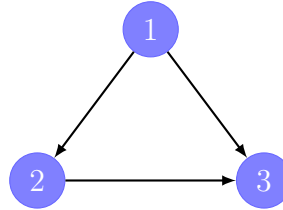


Figura 4.3: Ciclo de largo 3.

Vamos a determinar todos las funciones signos de G y todas las clases laterales. Según nuestros resultados, G tiene dos clases de equivalencia y el tamaño estas es $|H(G)| = 2^2 = 4$. Así que encontraremos todos los elementos de $H(G)$ (los vértices en color rojo, son los nodos en los cuales se realizó el switch), estos digrafos con signos se encuentran en la Figura 4.4.

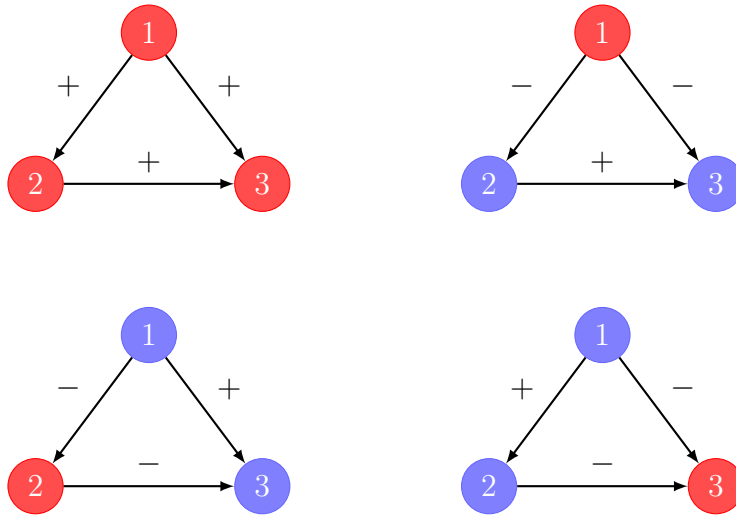


Figura 4.4: Todos los elementos de $H(G)$.

Para obtener el resto de funciones signos, vamos a considerar la función con signos σ de la Figura 4.5, la cual no pertenece a $H(G)$.

Los elementos de $\sigma H(G)$ son las digrafos con signos que se encuentran en la Figura 4.6.

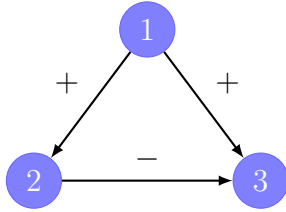


Figura 4.5: Una función signo que no está en $H(G)$.

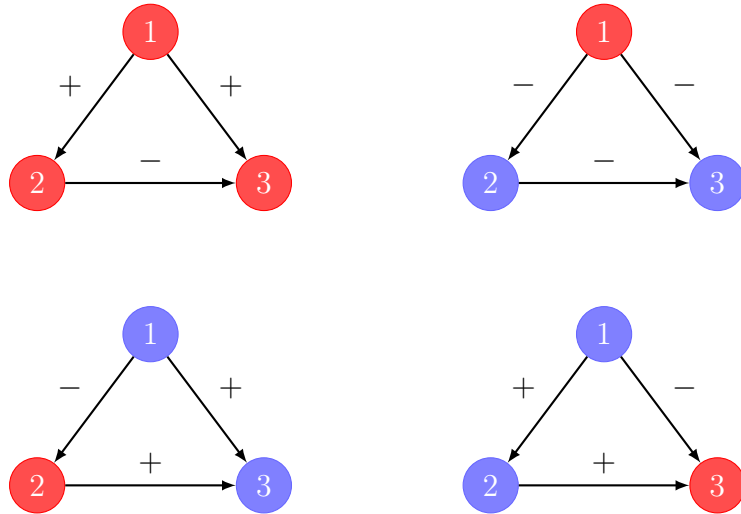


Figura 4.6: Todos los elementos que no están en $H(G)$.

En total tenemos 8 funciones signo distintas, y $\Sigma(G) = 2^3 = 8$. Por tanto tenemos todas las funciones signo del digrafo G .

Notar que la cantidad de clases laterales es $2^{cyc(G)} = 2^{3-3+1} = 2$, lo cual coincide con lo obtenido anteriormente.

4.1.2. Generalizaciones

Una cosa que debemos notar es que no hemos usado el hecho de que los arcos en un digrafo tengan dirección, más precisamente solo nos usábamos que el arco existe y cuáles vértices conecta, pero nunca usamos la dirección del mismo.

De hecho, si cambiamos la orientación de un arco, deberíamos obtener el mismo resultado. Para ilustrar esto consideremos el digrafo G definido en la Figura 4.3, si le cambiamos el arco $(1,3)$ por el arco $(3,1)$, y volvemos a realizar los mismos cálculos hechos antes obtendríamos el mismo resultado, pero con la orientación del arco cambiado. Lo mismo ocurre si cambiamos la orientación de cualquier arco. Eso se debe a que la multiplicación de funciones signos como el operador switch no dependen de la orientación del arco.

Dado que todos los resultados que tenemos no dependen de la orientación de los arcos, entonces podemos quitar esta orientación y obtener los mismos resultados. Al quitar la orientación de un digrafo, podemos obtener dos estructuras discretas: un grafo simple o un multigrafo. Como estamos interesados en estudiar los digrafos con signos, entonces nos conviene trabajar de aquí en adelante con multigrafos. Esto se debe a que los multigrafos tienen la presencia de ciclos de largo dos y las bucles, lo cual no existe en los grafos simples.

Observación 4.9. *Notar que todos los resultados que tenemos hasta ahora también son válidos para multigrafos, las demostraciones de estos resultados son análogas (o en unos casos iguales) a las demostraciones hechas antes.*

4.1.3. Ejemplos

En esta sección determinaremos la cantidad de clases de equivalencia para dos familias de grafos, los ciclos y bosques. Otras familias de grafos interesantes, como los cliques o grafos k -regulares, también determinamos la cantidad de clases de equivalencia, este desarrollo (junto a otras familias de grafos) se encuentran en el Apéndice A.

4.1.3.1. Un ciclo

En un ciclo C_n . Sabemos que $|E| = |V| = n$, luego

$$\begin{aligned} \text{cyc}(G) &= |E| - |V| + \text{comp}(G), \\ &= n - n + 1, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por ende, la cantidad de clases equivalencia es 2^1 .

Corolario 4.6. *La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para C_n , son 2.*

4.1.3.2. Bosque

Un bosque no totalmente desconexo G (ya sea grafo o digrafo) es un grafo acíclico, entonces $\text{cyc}(G) = 0$. Por lo tanto, la cantidad de clases equivalencia es $2^0 = 1$, esto quiere decir que $|H(G)| = |\Sigma(G)|$, luego $H(G) = \Sigma(G)$.

Con esto tenemos que si G es un bosque no totalmente desconexo, entonces $\Sigma(G) = H(G)$. Pero ¿es cierta la implicancia contraria?, la respuesta a esta pregunta es sí. La implicancia contraria se puede demostrar al usar el siguiente resultado clásico de la teoría de grafos.

Proposición 4.11. *Un grafo $G = (V, E)$ es un bosque, si y solo si $|V| = |E| + \text{comp}(G)$.*

Demostración.

La demostración de esta proposición la puede encontrar en [16]. ■

Entonces, si G es un bosque la Proposición 4.11 nos asegura que $\text{cyc}(G) = 0$, y por tanto $\Sigma(G) = H(G)$.

Observación 4.10. *Notamos que $H(G) = \Sigma(G)$ si y solo si toda función signo definida en G es balanceada, es decir, que para todo $\sigma \in \Sigma(G)$ existe un $I \subseteq V$, tal que $\sigma = \mathcal{S}(I)$.*

Todos los resultados obtenidos en esta pequeña sección, quedan resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- G es un bosque.
- $H(G) = \Sigma(G)$.
- $(\Sigma(G), \sim)$ tiene solo una clase de equivalencia.
- $|V| = |E| + \text{comp}(G)$.
- Toda $\sigma \in \Sigma(G)$ es balanceada.
- $\forall \sigma \in \Sigma(G), \exists I \subseteq V : \sigma = \mathcal{S}(I)$.

4.2. Caracterización de la switch equivalencia

En esta sección vamos a caracterizar la relación \sim . Para ello generalizaremos dos resultados ya conocidos. El primero de ellos será la Proposición 2.2 donde su desarrollo se encontrará en la Sección 4.2.1, mientras que la Sección 4.2.2 contendrá la generalización del Teorema de Harary 2.1, junto con otra caracterización de la switch equivalencia.

4.2.1. Caracterización vía ciclos

Como habíamos anticipado, en esta subsección vamos a generalizar la Proposición 2.2 para el caso de multigrafos, para ello debemos suponer que el multigrafo G tenga por lo menos un ciclo. El caso en el que G sea acíclico no nos supone ningún problema, pues el Teorema 4.2 nos asegura que todas las funciones signo son switch equivalentes.

Para poder realizar la generalización, vamos a definir una transformación de funciones signos, la cual nos ayudara a demostrar lo que queremos. Empecemos definiendo una transformación sobre los multigrafos.

Definición 4.6. *Dado un multigrafo G , definimos el grafo $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ obtenido tras cambiar todos los loops de G por ciclos de largo tres, y todas las aristas paralelas de G por caminos de largo 3.*

Ejemplo 4.4. *Consideremos el siguiente multigrafo G de Figura 4.7 (a). El grafo de la Figura 4.7 (b) es el grafo \hat{G} .*

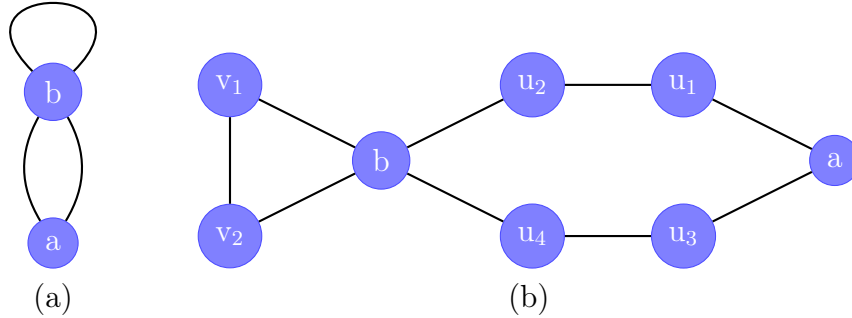


Figura 4.7: (a) Multigrafo con aristas paralelas y un bucle. (b) Multigrafo transformado.

Ahora definiremos la transformación $\hat{\sigma}$ sobre las funciones signos.

Definición 4.7. *Sea $\sigma \in \Sigma(G)$, definimos la función $\hat{\sigma} \in \Sigma(\hat{G})$ como:*

- *Si xy es una arista en G que no es arista paralela ni loop, se define $\hat{\sigma}(e) := \sigma(e)$.*
- *Si xy es una arista paralela en G , sean $u_1, u_2 \in \hat{V}$ a los vértices que se usaron en el camino que reemplaza xy en \hat{G} , tales que $u_1u_2, xu_1, yu_2 \in \hat{E}$. Se define $\hat{\sigma}(u_1u_2) := \sigma(xy)$, y $\hat{\sigma}(xu_1) := \hat{\sigma}(yu_2) := +1$.*
- *Si xx un bucle en G , sean $v_1, v_2 \in \hat{V}$ los vértices que forman parte del ciclo de largo tres que reemplazan a xx en \hat{G} , tales que $xv_1, v_1v_2, v_2x \in \hat{E}$. Se define $\hat{\sigma}(v_1v_2) := \sigma(xx)$, y $\hat{\sigma}(xv_1) := \hat{\sigma}(v_2x) := +1$.*

Ejemplo 4.5. Consideremos el siguiente grafo con signo de la Figura 4.8 (a), y en la Figura 4.8 (b) se muestra el grafo con signo transformado.

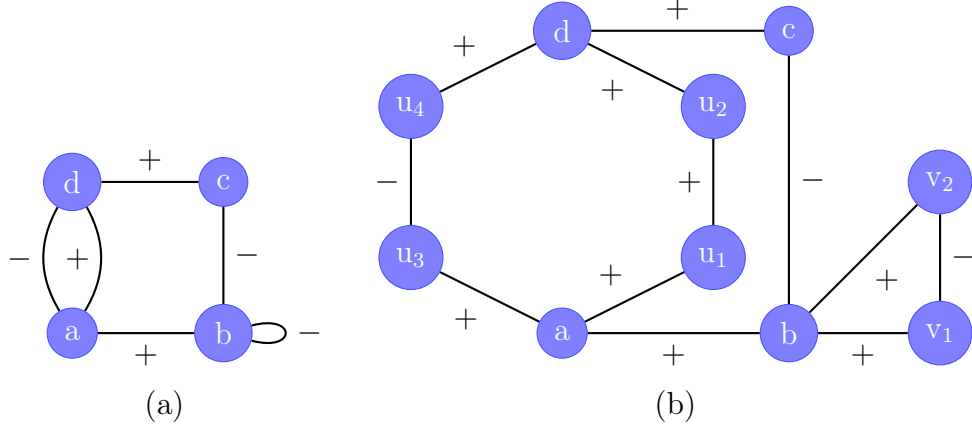


Figura 4.8: (a) Multigrafo con signos (G, σ) . (b) Multigrafo con signos $(\hat{G}, \hat{\sigma})$.

Algunas propiedades que tiene la transformación hat 4.7 y la construcción dada en la Definición 4.6 son las siguientes:

1. Por la Definición 4.6 podemos inferir que $\text{cyc}(G) = \text{cyc}(\hat{G})$, y que se define una biyección entre los ciclos de G y \hat{G} . Dado un C ciclo en G , denotaremos por \hat{C} al ciclo de \hat{G} dada por la biyección antes mencionada.
2. La transformación hat es inyectiva.
3. La transformación hat es sobreyectiva si y solo si $G = \hat{G}$.
4. Para cualquier $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, se cumple que $\widehat{\sigma\rho} = \hat{\sigma}\hat{\rho}$, es decir, que la transformación hat es un homomorfismo de grupos.
5. Para cualquier $\sigma \in \Sigma(G)$, se cumple que $\sigma(C) = \hat{\sigma}(\hat{C})$ para todo ciclo C en G .

El siguiente lema nos será muy útil en la demostración de la Proposición 2.2 para el caso de multigrafos.

Lema 4.2. Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. $\sigma \sim \rho$ en G , si y solo si $\hat{\sigma} \sim \hat{\rho}$ en \hat{G} .

Demostración.

(\Rightarrow) Asumamos que $\sigma \sim \rho$ en G , es decir, que existe un $I \subseteq V$ tal que $\sigma = \mathcal{S}(I)\rho$.

Lo que haremos será construir un $\hat{I} \subseteq \hat{V}$ tal que $\hat{\sigma} = \mathcal{S}(\hat{I})\hat{\rho}$. Para ello empezaremos definiendo a $\hat{I} := I$, y realizaremos un análisis por casos, y dependiendo del caso vamos a modificar el conjunto \hat{I} para obtener la igualdad deseada. Consideremos $e \in E$.

- Si e no es una arista paralela ni un bucle, se cumple que $\sigma(e) = \mathcal{S}(I)\rho(e)$ y $e \in \hat{E}$, entonces $\hat{\sigma}(e) = \mathcal{S}(\hat{I})\hat{\rho}(e)$.
- Si $e = xy$ es una arista paralela, sean $u_1, u_2 \in \hat{V}$ los vértices que forman el camino de largo 3 que cambia la arista xy en \hat{G} , tales que $xu_1, u_1u_2, u_2y \in \hat{E}$. Si $x, y \notin I$ o si ambos lo están, tenemos que $\sigma(xy) = \rho(xy)$. Entonces si $x, y \notin I$ no hacemos nada a \hat{I} , pero si $x, y \in I$, entonces a \hat{I} le agregamos u_1 y u_2 . Ahora, si $x \in I$ e $y \notin I$, se tiene $\sigma(xy) \neq \rho(xy)$, luego agregamos u_1 a \hat{I} . Lo mismo ocurre si $x \notin I$ e $y \in I$; en este caso, se agrega u_2 a \hat{I} . Notamos que en todos los casos, obtenemos que $\hat{\sigma}(e) = \mathcal{S}(\hat{I})\hat{\rho}(e)$ para todo $e \in \{xu_1, u_1u_2, u_2y\}$.
- Si $e = xx$, sean $v_1, v_2 \in \hat{V}$ los vértices que forman el ciclo de largo 3 que cambia al bucle xx en \hat{G} , tales que $xv_1, xv_2, v_1v_2 \in \hat{E}$. Notar que $\sigma(xx) = \mathcal{S}(I)\rho(xx) = \rho(xx)$, pues xx es un loop, entonces $\hat{\sigma}(xv_1) = \hat{\rho}(xv_1)$, $\hat{\sigma}(xv_2) = \hat{\rho}(xv_2)$ y $\hat{\sigma}(v_1v_2) = \hat{\rho}(v_1v_2)$. Si $x \in \hat{I}$, agregamos a \hat{I} los nodos v_1 y v_2 , en caso contrario dejamos \hat{I} como esta. Tras este proceso obtenemos que $\mathcal{S}(\hat{I})(xv_1) = \mathcal{S}(\hat{I})(xv_2) = \mathcal{S}(\hat{I})(v_1v_2) = +1$. Así tenemos que $\hat{\sigma}(e) = \mathcal{S}(\hat{I})\hat{\rho}(e)$ con $e \in \{xv_1, xv_2, v_1v_2\}$.

Tras repetir el proceso descrito en los tres puntos anteriores para cada $e \in E$, obtenemos que $\hat{\sigma} = \mathcal{S}(\hat{I})\hat{\rho}$. Por ende $\hat{\sigma} \sim \hat{\rho}$.

(\Leftarrow) Ahora supondremos que $\hat{\sigma} \sim \hat{\rho}$ en \hat{G} , es decir, que existe un $\hat{I} \subseteq \hat{V}$ tal que $\hat{\sigma} = \mathcal{S}(\hat{I})\hat{\rho}$.

Definamos $I := \hat{I} \cap V$. Vamos a demostrar que $\sigma = \mathcal{S}(I)\rho$, para ello nuevamente realizaremos un análisis por casos. Consideremos $e \in E$.

- Si e no es una arista paralela ni un bucle, se cumple que $\hat{\sigma}(e) = \mathcal{S}(\hat{I})\hat{\rho}(e) = \mathcal{S}(I)\hat{\rho}(e)$, $\hat{\sigma}(e) = \sigma(e)$ y $\hat{\rho}(e) = \rho(e)$. Entonces $\sigma(e) = \mathcal{S}(I)\rho(e)$.
- Si $e = xy$ es una arista paralela, sean $u_1, u_2 \in \hat{V}$ los vértices que forman el camino de largo 3 que cambia la arista xy en \hat{G} , tales que $xu_1, u_1u_2, u_2y \in \hat{E}$. Si $\hat{\sigma}(u_1u_2) = \hat{\rho}(u_1u_2)$, tendremos que $\sigma(u_1u_2) = \rho(u_1u_2)$, y además que $\sigma(u_1u_2) = \mathcal{S}(I)\rho(u_1u_2)$, pues $\hat{\sigma}(xu_1) = \hat{\rho}(xu_1)$ y $\hat{\sigma}(yu_2) = \hat{\rho}(yu_2)$. Ahora, si $\hat{\sigma}(u_1u_2) \neq \hat{\rho}(u_1u_2)$; en este caso tenemos que $x, u_1 \in \hat{I}$ o $y, u_2 \in \hat{I}$, ya que $\hat{\sigma}(xu_1) = \hat{\rho}(xu_1)$ y $\hat{\sigma}(yu_2) = \hat{\rho}(yu_2)$. Luego, por la definición de I obtenemos que $\sigma(xy) = \mathcal{S}(I)\rho(xy)$.
- Si $e = xx$, sean $v_1, v_2 \in \hat{V}$ los vértices que forman el ciclo de largo 3, llamémoslo \hat{C} , que cambia al bucle xx en \hat{G} , tales que $xv_1, xv_2, v_1v_2 \in \hat{E}$. El caso $\hat{\sigma}(v_1v_2) \neq \hat{\rho}(v_1v_2)$ no puede ocurrir, ya que tendríamos que $\hat{\sigma} \approx \hat{\rho}$ en \hat{C} , lo cual nos lleva a una contradicción, pues $\hat{\sigma} \sim \hat{\rho}$. Entonces $\hat{\sigma}(v_1v_2) = \hat{\rho}(v_1v_2)$, esto implica que $\sigma(e) = \rho(e)$. Además notemos que $\mathcal{S}(I)(e) = +1$, ya que e es un bucle. Por ende $\sigma(e) = \mathcal{S}(I)\rho(e)$.

Con esto hemos demostrado que $\sigma = \mathcal{S}(I)\rho$, es decir, $\sigma \sim \rho$. ■

Ahora estamos preparados para demostrar la proposición deseada.

Proposición 4.12. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Sean $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, se cumple que $\sigma \sim \rho$, si y solo si $\sigma(C) = \rho(C)$ para todo C ciclo en G .*

Demostración.

Si G no tiene ciclos, del Teorema 4.2 queda demostrada la proposición.

Asumamos que G tiene por lo menos un ciclo. Del Lema 4.2 sabemos que $\sigma \sim \rho$ en G , si y solo si $\hat{\sigma} \sim \hat{\rho}$ en \hat{G} . Luego la Proposición 2.2 nos asegura que $\hat{\sigma} \sim \hat{\rho}$ es equivalente a $\hat{\sigma}(\hat{C}) = \hat{\rho}(\hat{C})$ para todo \hat{C} ciclo en \hat{G} . Recordemos que $\sigma(C) = \hat{\sigma}(\hat{C})$, con esto podemos deducir que $\sigma \sim \rho$, si y solo si $\sigma(C) = \rho(C)$ para todo C ciclo en G . ■

Una de las consecuencias de la proposición anterior es que nos permite caracterizar las funciones balanceadas.

Corolario 4.7. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Sean $\sigma \in \Sigma(G)$, σ es balanceada, si y solo si $\sigma(C) = +1$ para todo C ciclo en G .*

Demostración.

Si G no tiene ciclos el corolario se sigue del Teorema 4.2. Asumamos que G tiene por lo menos un ciclo. Recordemos que σ es balanceada si y solo si $\sigma \sim +1$. La proposición 4.12 nos asegura que $\sigma \sim +1$ si y solo si $\sigma(C) = +1(C) = +1$. Por lo tanto σ es balanceada, si y solo si $\sigma(C) = +1$ para todo C ciclo en G . ■

4.2.2. Caracterización vía funciones balanceadas

Como habíamos dicho el principio de la sección, en esta subsección demostraremos que el Teorema de Harary 2.1 sigue siendo valido en multigrafos, y por consiguiente obtendremos una nueva caracterización de la switch equivalencia. Eso último se debe a que si logramos caracterizar las funciones balanceadas, podremos caracterizar la switch equivalencia,

pues:

$$\begin{aligned}\sigma \sim \rho &\iff \exists I \subseteq V : \sigma = \mathcal{S}(I)\rho, \\ &\iff \exists I \subseteq V : \sigma\rho = \mathcal{S}(I), \\ &\iff \sigma\rho \in H(G).\end{aligned}$$

Una primera caracterización de las funciones balanceadas viene dado por su definición, ya que una función σ es balanceada si y solo si $\sigma \sim +1$, es decir, $\sigma = +1\sigma = \mathcal{S}(I)$ con $I \subseteq V$. Otra caracterización la obtenemos por el Corolario 4.7.

Una segunda caracterización de las funciones balanceadas viene dada por el Teorema de Harary. Teniendo eso en mente, damos la siguiente definición.

Definición 4.8. *Dado un $\sigma \in \Sigma(G)$, con $G = (V, E)$ un multigrafo no totalmente desconexo. Sean $X_\sigma, Y_\sigma \subseteq V$, diremos que X_σ e Y_σ cumplen la **condición de Harary**, si X_σ e Y_σ forma una bipartición de V , además todas las aristas positivas están dentro de X_σ o Y_σ , y las aristas negativas tienen un extremo en X_σ y el otro en Y_σ .*

Proposición 4.13. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y sea $\sigma \in \Sigma(G)$. $\sigma \in H(G)$ si y solo si existen unos $X, Y \subseteq V$ tales que cumplen la condición de Harary para σ .*

Demostración.

(\Leftarrow) Supongamos que existen unos $X, Y \subseteq V$ tales que cumplen la condición de Harary para σ . Se sigue de la condición de Harary y de la identidad (4.4) que $\sigma = \mathcal{S}(X)$. Por tanto σ es balanceada.

(\Rightarrow) Ahora asumamos que $\sigma \in H(G)$. Luego existe $X \subseteq V$ tal que $\sigma = \mathcal{S}(X)$, y sea $Y := V \setminus X$. Gracias a la identidad (4.4) podemos

asegurar que $u, v \in X$ o $u, v \in Y$ si y solo si $\sigma(uv) = +1$, además que $\sigma(uv) = -1$ si o solo si $u \in X \wedge v \in Y$ o $v \in X \wedge u \in Y$. Por ende, X e Y satisfacen la condición de Harary para σ . ■

Gracias a la proposición anterior obtenemos el siguiente resultado: $\sigma \sim \rho$, si y solo si existen $X, Y \subseteq V$ tales que X e Y cumplen la condición de Harary para $\sigma\rho$.

En el siguiente teorema resumimos todos los resultados sobre la switch equivalencia, escritos en esta subseccion.

Teorema 4.3. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\sigma \sim \rho$.
- $\sigma\rho$ es balanceada.
- $\sigma\rho(C) = +1$, para todo C ciclo en G .
- $\sigma\rho = \mathcal{S}(I)$, para algún $I \subseteq V$.
- Existen $X, Y \subseteq V$ tales que X e Y cumplen la condición de Harary para $\sigma\rho$.

Capítulo 5

Switch equivalencia: Resultados algorítmicos

En esta capítulo nos centraremos en mostrar algunos algoritmos para la resolución de dos problemas relacionados con la switch equivalencia, los cuales tienen el potencial de ser implementados.

Observación 5.1. *Si se desea implementar algún algoritmo mostrado en este capítulo, se recomienda usar algún tipo de estructura de dato que mejore los tiempos de cómputo. Esta recomendación toma importancia al implementar los algoritmos de la Sección 5.2, dado que sus tiempos de cómputo son muy largos si se implementa tal cual está escrito en el texto.*

El primer problema que abordaremos será el *problema de determinar todos los representantes de cada clase lateral*. Este problema se encuentra desarrollado en Sección 5.1. En esa sección se mostrará un método que construirá a los representantes de cada clase.

El segundo problema que estudiaremos será el *problema de determinar si dos funciones signos son switch equivalentes*. Este problema se encuentra resuelto en la Sección 5.2. Lo que haremos en esa sección es mostrar dos

algoritmos que resuelven ese problema. Estos dos algoritmos se basan en ideas distintas, las cuales presentamos en la Sección 4.2.

5.1. Método para determinar los representantes

En esta sección mostraremos un método para encontrar a los representantes de cada clase de equivalencia.

Recordemos que la cantidad de clases de equivalencia es igual a $2^{\text{cyc}(G)}$, y $\text{cyc}(G)$ es un número que depende de un problema muy conocido, estamos hablando del problema FAS.

Definición 5.1. *El problema minFAS consiste: dado un multigrafo $G = (V, E)$. Determine un conjunto $K \subseteq E$ de tamaño mínimo tal que $G - K$ no tenga ciclos. Denotaremos por $K \leftarrow \text{minFAS}(G)$, a un conjunto K que resuelve el problema minFAS de G .*

Lo que haremos en la siguiente definición es, usando el problema minFAS construiremos una familia de funciones signo. Posteriormente probaremos que esa familia representa cada clase de equivalencia.

Para construir la familia de funciones, empezaremos por enumerar el conjunto de aristas $K = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$. Luego definiremos los multigrafos $G_0 := G - K$, y $G_i = G_{i-1} \cup \{e_i\}$ para todo $i = 1, \dots, p$. La idea para construir la familia es, partimos de una función base en $\sigma_0 = +1 \in \Sigma(G_0)$, a partir de esa construiremos otras dos funciones en $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(G_1)$ tales que $\sigma_1(e_1) = +1$, $\sigma_2(e_1) = -1$, y $\sigma_1(e) = \sigma_2(e) = \sigma_0(e)$ para todo $e \in E[G_0]$. Así podemos seguir definiendo las funciones de manera recursiva.

Las funciones que describimos en el párrafo anterior son la familia de funciones que buscamos, el problema es que su definición no es muy práctica, pero existe otra forma más elegante de definir la misma familia, la

cual está relacionada con el código binario. Para mostrar esta construcción comenzaremos por ilustrarla en el árbol de decisión de la Figura 5.1. Los nodos serían las aristas e_i , y el nodo raíz tendrá el símbolo \emptyset , pues en G_0 no existen las aristas e_i . Dada la definición de la función del párrafo anterior, sabemos que de una función σ obtenemos dos nuevas funciones, estas funciones se representan en el árbol de la siguiente manera: Sea e_i la última arista que se agregó para formar σ . Sus hijos tendrán como extra la arista e_{i+1} , esto se verá en el grafo como una arista que une los nodos e_i y e_{i+1} . El hijo que tiene signo positivo en la arista e_{i+1} estará a la izquierda, y el hijo con arista -1 estará a la derecha. Para mostrar visualmente esto, la arista que une un nodo padre con el hijo tendrá peso 0 si la arista hija tendrá signo positivo, y 1 en el otro caso.

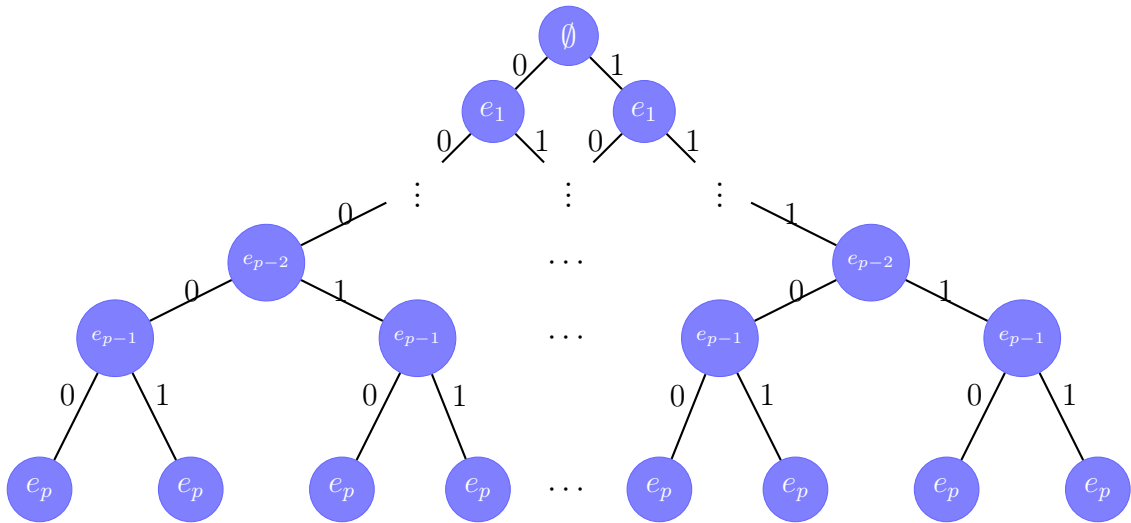


Figura 5.1: Árbol de decisión basado en las aristas e_i .

En el árbol de la Figura 5.1, notamos que la forma de construir cada función de la familia está definida por el camino que une la raíz con una de las hojas. Debido a que esa función se puede “decodificar” siguiendo esto: Si la primera arista tiene peso 0 significa que $\sigma(e_1) = +1$, si la segunda arista tiene peso 1 significa $\sigma(e_2) = -1$, y así sucesivamente. El resto de las aristas que no están en K sabemos que tendrán signo positivo, por tanto σ está bien definida.

Podemos ir más allá con este análisis. Lo único que nos importa para construir cada función de la familia son los caminos que unen la raíz con una de las hojas, en particular, solo necesitamos la información de los pesos de las aristas. Esa información la podemos representar como una cadena de bits de largo $\text{cyc}(G)$. Por ejemplo, para $\text{cyc}(G) = 4$, tomemos la cadena de bits 0110, eso significa que $\sigma(e_1) = +1$, $\sigma(e_2) = -1$, $\sigma(e_3) = -1$ y $\sigma(e_4) = +1$, el resto de aristas del grafo tendrán signo $+1$.

Definición 5.2. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, sea $K \leftarrow \text{minFAS}(G)$, con $K = \{e_1, \dots, e_p\}$, y $L \in \{0, 1\}^{\text{cyc}(G)}$. Se define el $\sigma_L \in \Sigma(G)$ como: $\sigma_L(e) = +1$ para todo $e \in E[G] \setminus K$; $\sigma_L(e_i) = +1$ si $L(i) = 0$, y $\sigma_L(e_i) = -1$ si $L(i) = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, \text{cyc}(G)\}$.*

Observación 5.2. *Es claro que dados dos cadenas de bits obtenemos funciones signo distintas. De aquí podemos inferir que existe una biyección entre $\{0, 1\}^{\text{cyc}(G)}$ y las funciones σ_L . Por ende la cantidad de funciones σ_L son $2^{\text{cyc}(G)}$.*

Con las funciones de la familia propuesta bien definidas, podemos probar que cada una de las funciones σ_L es un representante de una clase. Para probar esto, primero demostraremos la siguiente:

Proposición 5.1. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$ y $K \leftarrow \text{minFAS}(G)$. Consideremos las funciones con signos σ_L construídas en la Definición 5.2. Las funciones σ_L viven cada una en una clase de equivalencia distinta en $\Sigma(G_i)$.*

Demostración.

Sean $L_1, L_2 \in \{0, 1\}^{\text{cyc}(G)}$ tales que $L_1 \neq L_2$, y sea i el índice más pequeño que cumple con $L_1(i) \neq L_2(i)$. Denotaremos por $G' := G - \{e_{i+1}, \dots, e_p\}$, y sea C un ciclo que contenga la arista e_i , el cual existe pues K resuelve minFAS.

Notamos que $\sigma_{L_1}(e) = \sigma_{L_2}(e)$ para todo $e \in E[G'] \setminus \{e_i\}$, y

$\sigma_{L_1}(e_i) \neq \sigma_{L_2}(e_i)$. De esto último se deduce que $\sigma_{L_1}(C) \neq \sigma_{L_2}(C)$. Luego, la Proposición 4.12 nos asegura que $\sigma_{L_1}|_{G'}$ y $\sigma_{L_2}|_{G'}$ no son switch equivalentes, y por tanto $\sigma_{L_1} \not\sim \sigma_{L_2}$. Esto prueba que σ_{L_1} y σ_{L_2} viven en distintas clases de equivalencia. ■

Con todo lo anterior, estamos listos para probar que la familia construída en la Definición 5.2 contiene a cada uno de los representantes de cada clase.

Proposición 5.2. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Consideremos las funciones con signos σ_L construídas en la Definición 5.2. Los σ_L son los representantes de cada clase de equivalencia en $\Sigma(G)/\sim$.*

Demostración.

La Proposición 5.1 nos asegura que todos los σ_L pertenecen a clases de equivalencia distintas en $\Sigma(G)$, y la cantidad de los σ_L es $2^{\text{cyc}(G)}$, la cual corresponde a la cantidad de clases de equivalencia distintas. Por lo tanto, los σ_L son los representantes de cada clase de equivalencia en $\Sigma(G)/\sim$. ■

Observación 5.3. ■ *Notar que órdenes distintos de las aristas en K obtienen las mismas funciones σ_L , pero con distintas codificaciones L .*

- *Si consideramos dos conjuntos K y K' que resuelven minFAS. Las funciones signo σ_L obtenidas a partir de K y K' pueden llegar a ser distintas, pero cada familia sigue generando todos los representantes de cada clase.*

Esta representación en cadenas de bits es muy conveniente a la hora de la implementación de la construcción, ya que construir los σ_L es bastante rápido y consume poco espacio. Además, nos permite enumerar las representantes de cada clase de equivalencia sin ambigüedad, ya que podemos escoger un número entero i , con $0 \leq i \leq 2^{\text{cyc}} - 1$, tomar su representación binaria $L(i) \in \{0, 1\}^{\text{cyc}(G)}$, y definir el $\sigma_i := \sigma_{L(i)}$.

La representación en cadenas de bits también nos permite responder otras preguntas, como por ejemplo, podemos construir una función signo que no sea balanceada, para ello tomamos una cadena de bits arbitraria L de $\{0, 1\}^{\text{cyc}(G)}$, y en una posición determinada i de la cadena de bits ponemos un 1, luego el σ_L no será balanceada ya que tiene por lo menos un ciclo negativo, pues $L(i) = 1$. Otra pregunta que podemos responder es ¿podemos generar dos función signos que no sean switch equivalente? Para ello tomamos una cadena de bits arbitraria L de $\{0, 1\}^{\text{cyc}(G)}$, y en una posición determinada de la cadena de bits, cambiamos el bit de esa posición por un 0, llamemos a esa nueva cadena L_0 , y hacemos lo mismo pero esta vez cambiamos el bit por 1, llamemos a esa nueva cadena L_1 . Las funciones con signo σ_{L_0} y σ_{L_1} no son switch equivalentes entre si, pues existe por lo menos un ciclo en el cual difieren de signo.

5.2. Algoritmos para el problema del switch

En esta última sección del capítulo, vamos a mostrar dos algoritmos polinomiales (i.e. algoritmo “rápidos”) que resuelven el siguiente problema:

Definición 5.3. Problema de switch equivalencia (PSE): Dado un multigrafo no totalmente desconexo G y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, ¿ $\sigma \sim \rho$?

Los algoritmos que propondremos están basados en las dos caracterizaciones de la switch equivalencia que obtuvimos en la Sección 4.2.

5.2.1. Algoritmo de la bipartición

El primer algoritmo que enseñaremos se basa en el Teorema 4.3. La idea es construir unos conjuntos $X, Y \subseteq V$ que satisfagan la condición de Harary, para ello usaremos como base el conocido “algoritmo exploración o de búsqueda”.

Dado un multigrafo conexo no trivial G , y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Primero el algoritmo calcula $\phi \leftarrow \sigma\rho$. Después, usando el algoritmo de exploración obtenemos un árbol recubridor, y a la vez que se va formado ese árbol, se construyen los conjuntos X e Y , los cuales satisfacen la condición de Harary para ϕ en el árbol. Al finalizar el proceso anterior, el algoritmo revisa las aristas que no están en el árbol, si todos tienen el signo correcto, entonces se retorna un “TRUE”, en caso contrario se retorna un “FALSE”.

Lo detalles del algoritmo se encuentran descrito en el siguiente pseudocódigo.

Algoritmo 5.1: Algoritmo de la bipartición

```

1: Input: Un multigrafo conexo no trivial  $G = (V, E)$  y  $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ .
2: Sea  $s \in V$ ,  $\text{pred}[s] \leftarrow \text{Null}$ , y  $\phi \leftarrow \sigma\rho$ .
3:  $Q \leftarrow \{s\}$ ,  $X \leftarrow \{s\}$ ,  $R \leftarrow \emptyset$  e  $Y \leftarrow \emptyset$ .
4: while  $Q \neq \emptyset$  do
5:   Extraer  $v \in Q$ , y marcar  $v$ .
6:   if  $\text{pred}[v] \neq \text{Null}$  then
7:      $u \leftarrow \text{pred}[v]$ , elegir una arista  $e = uv$ , y  $R \leftarrow R \cup \{e\}$ .
8:     if  $\phi(e) = +1$  then
9:       if  $u \in X$  then
10:         $X \leftarrow X \cup \{v\}$ .
11:       else
12:         $Y \leftarrow Y \cup \{v\}$ .
13:     else
14:       if  $u \in X$  then
15:         $Y \leftarrow Y \cup \{v\}$ .
16:       else
17:         $X \leftarrow X \cup \{v\}$ .
18:   forall  $w \in V$  sucesor de  $v$  do
19:     if  $w$  no esta marcado then
20:        $\text{pred}[w] \leftarrow v$ ,  $Q \leftarrow Q \cup \{w\}$ .
21:  $K \leftarrow E \setminus R$ .
22: forall  $xy \in K$  do
23:   if  $x, y \in X \vee x, y \in Y$  then
24:     if  $\phi(xy) = -1$  then
25:       return FALSE.
26:   else
27:     if  $\phi(xy) = +1$  then
28:       return FALSE.
29: return TRUE.

```

Ahora realizaremos un análisis de tiempo de ejecución en el peor caso al Algoritmo 5.1.

- La línea 3 es de orden constante, mientras que las líneas 2 y 21 son de orden $|E|$, pues las funciones signos las podemos pensar como listas de signos de largo $|E|$.
- La línea 5 es $O(|V|)$ y la línea 6 es $O(|E|)$. Todo lo que está en el if de la línea 8 es $O(|V|)$, y luego el tiempo de todo el código que está dentro del forall de la línea 18 es $O(|V|^2)$. Por tanto, el tiempo de ejecución del código dentro del while de la línea 4 es $O(|V|^3 + |V||E|)$.
- El tiempo de ejecución del todo el código del if de la línea 23 es de orden $|V|$, entonces el tiempo de ejecución del código dentro del forall de la línea 22 es $O(|V||E|)$.

Por ende, el tiempo de ejecución del Algoritmo 5.1 en el peor caso es $O(|V|^3 + |V||E|)$. Esto nos indica que el Algoritmo 5.1 se puede ejecutar en tiempo polinomial respecto al tamaño de la entrada.

A continuación probaremos que el Algoritmo 5.1 resuelve el PSE.

Proposición 5.3. *Dado un multigrafo conexo no trivial G , y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. El algoritmo 5.1 resuelve el PSE para σ y ρ .*

Demostración.

Asumamos que el Algoritmo 5.1 retorna un “TRUE”. Eso quiere decir que los conjuntos X e Y definidos en el Algoritmo 5.1 satisfacen la condición de Harary, en efecto, por construcción de X e Y sabemos que estos satisfacen la condición de Harary en el árbol. Además, todas las instrucciones entre las líneas 21 y 28 revisan si el resto de aristas cumplen la condición de Harary respecto a X e Y o no, y como el algoritmo retorna “TRUE” entonces todas las aristas cumplen la condición de Harary resp. a X e Y . Por lo tanto, X e Y cumplen la condición de Harary, luego el Teorema 4.3 nos asegura que $\sigma \sim \rho$.

Ahora supongamos que $\sigma \sim \rho$, entonces ϕ es balanceada. Sea T el árbol definido en desde las líneas 4 hasta la 20, y X e Y los conjuntos definidos en esas mismas líneas. Razonando por contradicción asumiremos que el Algoritmo 5.1 retorna un “FALSE”, y sea $e \in K$ la arista que provoca esto.

Sea $C = (V_c, E_c)$ al único ciclo en $T \cup \{e\}$, notamos que C tiene una cantidad par de aristas que tienen un extremo en X e Y , denotaremos por R_c al conjunto de todas las aristas que cumplen lo anterior. Además, como ϕ es balanceada, debe cumplir que $\phi(C) = +1$.

Si e genera que el Algoritmo 5.1 retorna un “FALSE” de la línea 25, tenemos que

$$\phi(C) = (+1)^{|E_c \setminus (R_c \cup \{e\})|} (-1)^{|R_c|} (-1)^{|\{e\}|} = -1.$$

Lo cual es una contradicción.

Luego, si e genera que el Algoritmo 5.1 retorna un “FALSE” de la línea 28, obtenemos que

$$\phi(C) = (+1)^{|E_c \setminus R_c|} (-1)^{|R_c \setminus \{e\}|} (+1)^{|\{e\}|} = -1.$$

Lo cual nuevamente es una contradicción. Por lo tanto, la arista e no puede existir, es decir, el Algoritmo 5.1 retorna un “TRUE”. ■

Observación 5.4. *El Algoritmo 5.1 lo podemos usar para resolver PSE para el caso no conexo. La idea es repetir el Algoritmo 5.1 por cada componente conexas de G .*

Para finalizar el análisis del Algoritmo 5.1, mostraremos dos ejemplos

en donde simularemos lo que haría el Algoritmo 5.1. El primer ejemplo tiene función signos que son switch equivalentes, y el segundo usamos funciones que no son switch equivalentes.

Ejemplo 5.1. 1. Consideremos las funciones signo dibujadas en la Figura 5.2.

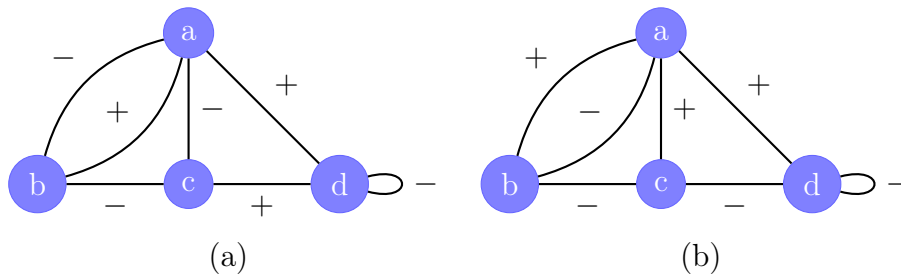


Figura 5.2: (a) La función signo σ . (b) La función signo ρ .

El algoritmo elige algún vértice, en este caso tomaremos $s = a$, inicializamos $Q = \{a\}$, $X = \{a\}$, $R = \emptyset$, $Y = \emptyset$, el predecesor de a es el nulo, y por último la función ϕ está dibujada en la Figura 5.3.

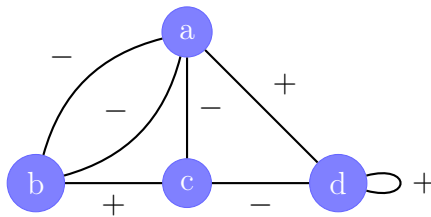


Figura 5.3: Función signo $\phi = \sigma\rho$.

En la primera iteración del while de la línea 4, se marca a , después se actualiza $Q = \{b, c, d\}$ y el predecesor de b , c y d es a . En la segunda iteración se extrae y marca a b , como $\phi(ab) = -1$ entonces $R = \{ab\}$ e $Y = \{b\}$, luego el predecesor de c se cambia por b . En la tercera iteración se extrae y marca a c , dado que $\phi(bc) = +1$ entonces $R = \{ab, bc\}$ e $Y = \{b, c\}$, luego el predecesor de d se cambia por c . En la cuarta iteración se extrae y marca a d , dado que $\phi(cd) = -1$ entonces $R = \{ab, bc, cd\}$ e $X = \{a, d\}$, como

$Q = \emptyset$ entonces esta es la última iteración. Luego revisamos todas las aristas de $K = \{ab, ac, ad, dd\}$ en el forall de la línea 22, y como estas aristas tienen el signo correcto, el algoritmo retorna *TRUE*.

La bipartición obtenida por este algoritmo se encuentra en la Figura 5.4.

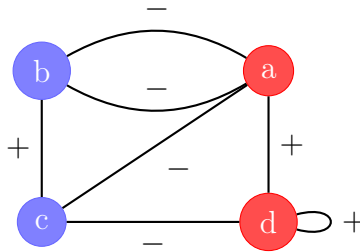


Figura 5.4: Grafo con signo obtenido por el algoritmo de la bipartición.

donde los vértices rojos representan a los nodos en X , mientras que los vértices en azules están en Y .

2. Consideremos las funciones con signos dibujadas en la Figura 5.5

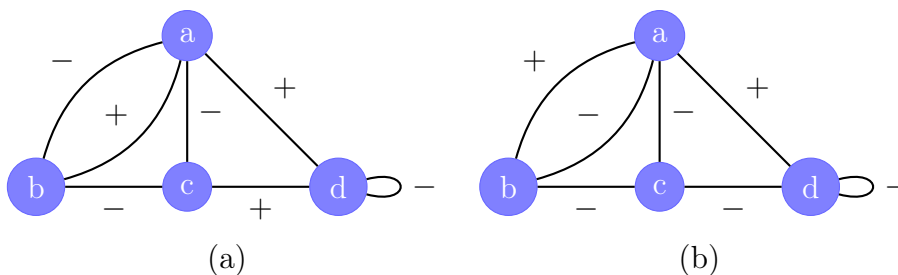


Figura 5.5: (a) Otra función signo σ . (b) Otra función signo ρ .

El algoritmo elige algún vértice, en este caso tomaremos $s = a$, inicializamos $Q = \{a\}$, $X = \{a\}$, $R = \emptyset$, $Y = \emptyset$, el predecesor de a es el nulo, y por último la función ϕ está dibujada en la Figura 5.6.

En la primera iteración del while de la línea 4, se marca a , después

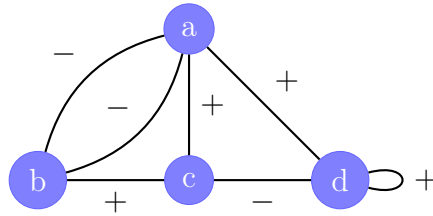


Figura 5.6: Función signo $\phi = \sigma\rho$.

se actualiza $Q = \{b, c, d\}$ y el predecesor de b , c y d es a . En la segunda iteración se extrae y marca a b , como $\phi(ab) = -1$ entonces $R = \{ab\}$ e $Y = \{b\}$, luego el predecesor de c se cambia por b . En la tercera iteración se extrae y marca a c , dado que $\phi(bc) = +1$ entonces $R = \{ab, bc\}$ e $Y = \{b, c\}$, luego el predecesor de d se cambia por c . En la cuarta iteración se extrae y marca a d , dado que $\phi(cd) = -1$ entonces $R = \{ab, bc, cd\}$ e $X = \{a, d\}$, como $Q = \emptyset$ entonces esta es la última iteración. Luego revisamos todas las aristas de $K = \{ab, ac, ad, dd\}$ en el forall de la línea 22, en la segunda iteración revisa la arista ac , y como $\phi(ac) = +1$ entonces el algoritmo retorna FALSE, pues $a \in X$ y $c \in Y$.

5.2.2. Algoritmo del árbol

El segundo algoritmo que resuelve PSE se basa en la Proposición 4.12.

Para no tener que revisar los ciclos del multigrafo, vamos a escoger un árbol recubridor T , y realizaremos todos los switch necesarios a una función signo para que en T ambas funciones sean iguales. Luego si existe una arista fuera que no esté en el árbol en que las dos funciones difieran, entonces el algoritmo retornaría un “FALSE”, en caso contrario retorna un “TRUE”.

Probar que el algoritmo descrito en el párrafo anterior siempre entrega la respuesta correcta no es fácil, y más aún dijimos que consideramos

un árbol recubridor T , pero ¿Cualquier árbol T sirve para demostrar que entrega la respuesta correcta o sólo algunos árboles recubridores me sirven?

Para que el análisis del algoritmo sea más sencillo, “partiremos en dos” el algoritmo descrito antes, y estudiaremos cada parte por separado. El primer algoritmo que analizaremos será aquel que realiza los switch a una función para que en T ambas funciones sean iguales. Lo detalles del algoritmo se encuentran descrito en el siguiente pseudocódigo.

Algoritmo 5.2: Parámetro γ .

```

1: Input: Un multigrafo conexo no trivial  $G = (V, E)$ , un árbol recubridor
    $T = (V_T, E_T)$  de  $G$ , con su raíz  $r$  (con  $r \in V$ ), y  $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ .
2:  $R \leftarrow \emptyset, L \leftarrow \{r\}$  ( $L$  es una lista ordenada).
3: while  $L \neq \emptyset$  do
4:   Extraer el primer elemento de  $L$ , el cual llamaremos  $v$ .
5:    $R \leftarrow R \cup \{v\}$ .
6:   forall  $u \in N_T(v)$  do
7:     if  $u \notin R$  then
8:       Agregamos a  $u$  como último elemento de  $L$ .
9:       Sea  $e = uv \in E_T$ .
10:      if  $\sigma(e) \neq \rho(e)$  then
11:         $\rho \leftarrow \mathcal{S}(u)\rho$ .
12:  $K \leftarrow E \setminus E_T$ .
13: forall  $e \in K$  do
14:   if  $\sigma(e) = \rho(e)$  then
15:      $K \leftarrow K \setminus \{e\}$ .
16: return  $K$ .
```

Lo que haremos a continuación es deducir propiedades que cumple el Algoritmo 5.2, con el fin de demostrar lo afirmado al principio de la subsección. Antes de eso, vamos a realizar un análisis de tiempo de ejecución en el peor caso.

- Las líneas 7 y 8 son orden $|V|$, las líneas 9, 10 y 11 son orden $|E|$. Por ende, las líneas 6 a 11 son $O(|V|^2 + |V||E|)$.

- Las líneas 4 y 5 son orden $|V|$, entonces las líneas 3 a 11 son $O(|V|^3 + |V|^2|E|)$.
- La línea 2 es orden constante, mientras que la línea 12 es orden $|E|$.
- Las líneas 14 y 15 son orden $|E|$, luego las líneas 13 a 15 son $O(|E|^2)$.

Por ende, el tiempo de ejecución del Algoritmo 5.2 en el peor caso es $O(|V|^3 + |V|^2|E| + |E|^2)$. Esto nos indica que el Algoritmo 5.2 se puede ejecutar en tiempo polinomial respecto al tamaño de la entrada.

Para estudiar las propiedades del Algoritmo 5.2, definiremos un parámetro el cual es inducido por este último algoritmo.

Definición 5.4. *Dado un multigrafo conexo no trivial $G = (V, E)$, un árbol recubridor T de G , con su raíz r (con $r \in V$), y las funciones $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Se define el **parámetro gamma** como:*

$$\gamma(T, r, \sigma, \rho) = |K|,$$

donde K es el conjunto que retorna el Algoritmo 5.2.

Nuestro primer resultado muestra que γ es independiente a la raíz del árbol.

Proposición 5.4. *Dado un multigrafo conexo no trivial $G = (V, E)$, un árbol recubridor T de G . Dados $r, s \in V$, con $r \neq s$. Se cumple que $\gamma(T, r, \sigma, \rho) = \gamma(T, s, \sigma, \rho)$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*

Demostración.

Sean $K_r, K_s \subseteq E$ los conjuntos que retorna el Algoritmo 5.2, con la entrada T , σ , ρ , y como segunda entrada r y s , respectivamente. Además sean $I_r, I_s \subseteq V$ los conjuntos en los cuales el Algoritmo 5.2 realizó los switch a una función, es decir, $\sigma|_T = \mathcal{S}(I_r)\rho|_T$ y $\sigma|_T = \mathcal{S}(I_s)\rho|_T$.

Razonando por contradicción asumiremos que $\gamma(T, r, \sigma, \rho) \neq \gamma(T, s, \sigma, \rho)$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $\gamma(T, r, \sigma, \rho) < \gamma(T, s, \sigma, \rho)$, es decir, $|K_r| < |K_s|$, luego existe una arista $e \in K_s \setminus K_r$. De esto último se deduce que $\sigma(e) \neq \mathcal{S}(I_s)\rho(e)$ y $\sigma(e) = \mathcal{S}(I_r)\rho(e)$.

Denotaremos por C al único ciclo en $T \cup \{e\}$. Como $\sigma|_T = \mathcal{S}(I_i)\rho|_T$, con $i \in \{r, s\}$, entonces $\sigma(C) \neq \mathcal{S}(I_s)\rho(C)$ y $\sigma(C) = \mathcal{S}(I_r)\rho(C)$. Por tanto, $\sigma \approx \rho$ y $\sigma \sim \rho$ ambas en $T \cup \{e\}$, lo cual es una contradicción. ■

Desde aquí en adelante realizaremos el siguiente abuso de notación. Cuando escribamos el parámetro gamma lo haremos solo escribiremos 3 argumentos, el bosque T , y las dos funciones con signos. La raíz la dejaremos de escribir, pues por la Proposición 5.4 sabemos que no afecta el valor de γ .

El siguiente resultado nos dice que γ tiene la propiedad de simetría entre las funciones signo.

Proposición 5.5. *Dado un multigrafo conexo no trivial $G = (V, E)$, un árbol recubridor T de G . Dados $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, se cumple que $\gamma(T, \sigma, \rho) = \gamma(T, \rho, \sigma)$.*

Demostración.

Esta demostración es análoga a la demostración de la Proposición 5.4. ■

Una interpretación de la siguiente proposición es que al fijar el árbol recubridor T , los valores que toma γ son “fijos” para cada clase de equivalencia de $\Sigma(G)$.

Proposición 5.6. *Dado un multigrafo conexo no trivial $G = (V, E)$, un árbol recubridor T de G . Dados $\sigma, \rho, \theta \in \Sigma(G)$, tal que $\sigma \sim \theta$. Se cumple que $\gamma(T, \sigma, \rho) = \gamma(T, \theta, \rho)$.*

Demostración.

Realizando argumentos análogos a los descritos en la demostración de la Proposición 5.4, obtenemos que $\sigma \sim \rho$ y $\theta \approx \rho$, ambos en $T \cup \{e\}$. Como $\sigma \sim \theta$, por transitividad se tiene que $\theta \sim \rho$ en $T \cup \{e\}$, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 5.1. *Dado un multigrafo conexo no trivial $G = (V, E)$, un árbol recubridor T de G . Dados $\sigma, \rho, \theta \in \Sigma(G)$, tal que $\rho \sim \theta$. Se cumple que $\gamma(T, \sigma, \rho) = \gamma(T, \sigma, \theta)$.*

Demostración.

Se sigue de los Proposiciones 5.5 y 5.6 que,

$$\gamma(T, \sigma, \rho) = \gamma(T, \rho, \sigma) = \gamma(T, \theta, \sigma) = \gamma(T, \sigma, \theta).$$

■

La siguiente proposición nos permite relacionar el parámetro gamma con el PSE.

Proposición 5.7. *Dado un multigrafo conexo no trivial $G = (V, E)$, y sean $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Entonces $\sigma \sim \rho$, si y solo si existe un árbol recubridor T tal que $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$.*

Demostración.

Dado un árbol recubridor $T = (V, E_T)$. Sea $I \subseteq V$ tal que $\sigma|_T = \mathcal{S}(I)\rho|_T$, este conjunto I está formado por todos los vértices en los cuales se usó switch en el algoritmo 5.2. Definamos a $K = E \setminus E_T$.

(\Leftarrow) Asumamos que exista un árbol recubridor T tal que $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$, eso significa que $\sigma(e) = \mathcal{S}(I)\rho(e)$ para todo $e \in K$, entonces $\sigma = \mathcal{S}(I)\rho$, es decir, $\sigma \sim \rho$.

(\Rightarrow) Ahora supongamos que $\sigma \sim \rho$. Consideremos un árbol recubridor T , vamos a probar $\sigma(e) = \mathcal{S}(I)\rho(e)$ para todo $e \in K$.

Si $K = \emptyset$ se cumple trivialmente lo que queremos probar, así que supondremos que $K \neq \emptyset$. Sea C el único ciclo de $T \cup \{e\}$, con $e \in K$. Como $\sigma \sim \rho \sim \mathcal{S}(I)\rho$ en G , luego en particular tenemos que $\sigma \sim \mathcal{S}(I)\rho$ en $T \cup \{e\}$, entonces $\sigma(C) = \mathcal{S}(I)\rho(C)$. Dado que $\sigma|_T = \mathcal{S}(I)\rho|_T$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(C) = \mathcal{S}(I)\rho(C) &\iff \sigma(e) \prod_{\substack{f \in E[C] \\ f \neq e}} \sigma(f) = \mathcal{S}(I)\rho(e) \prod_{\substack{f \in E[C] \\ f \neq e}} \mathcal{S}(I)\rho(f), \\ &\iff \sigma(e) = \mathcal{S}(I)\rho(e). \end{aligned}$$

Por tanto $\sigma(e) = \mathcal{S}(I)\rho(e)$ para todo $e \in K$.

De lo anterior podemos inferir que $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$, esto se debe al funcionamiento del Algoritmo 5.2. ■

Viendo la demostración anterior, pareciera que podemos cambiar el “existe” de la Proposición 5.7 por un “para todo árbol recubridor”. Esto uno lo puede intuir, porque en la demostración de esa proposición no existe ninguna restricción a los árboles. Teniendo esa idea en la mente se escribe el siguiente resultado.

Corolario 5.2. *Dado un multigrafo conexo no trivial $G = (V, E)$, y sean $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Existe un árbol recubridor T tal que $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$, si y solo si $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$, para todo árbol recubridor T .*

Demostración.

(\Leftarrow) Se cumple trivialmente.

(\Rightarrow) Ahora supongamos que existe un árbol recubridor T tal que $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$. Se sigue de la Proposición 5.7, que $\sigma \sim \rho$. Razonando por

contradicción, asumiremos que existe un árbol recubridor $T' = (V, E')$ tal que $\gamma(T', \sigma, \rho) > 0$. Sean $K := E \setminus E'$, e $I \subseteq V$ tal que $\sigma|_{T'} = \mathcal{S}(I)\rho|_{T'}$, este conjunto I está formado por todos los vértices en los cuales se usó switch en el algoritmo 5.2.

Como $\gamma(T', \sigma, \rho) > 0$, luego existe una arista $e \in K$ tal que $\sigma(e) \neq \mathcal{S}(I)\rho(e)$. Sea C el único ciclo de $T' \cup \{e\}$, dado que $\sigma|_{T'} = \mathcal{S}(I)\rho|_{T'}$, obtenemos que $\sigma(C) \neq \mathcal{S}(I)\rho(C)$. De lo anterior se deduce que $\sigma \not\sim \rho$ en $T' \cup \{e\}$, y por tanto $\sigma \not\sim \rho$ en G , lo cual es una contradicción. ■

Estos dos últimos resultados los podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Dados un multigrafo conexo no trivial G , y sean $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\sigma \sim \rho$ en G .
2. Existe un árbol recubridor T tal que $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$
3. $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$, para cualquier árbol recubridor T .

Los puntos 2 y 3 del Teorema 5.1 nos son muy útiles, ya que si elegimos de antemano un árbol recubridor T fácil de construir, sabemos que $\gamma(T, \sigma, \rho) = 0$ si y solo si $\sigma \sim \rho$, por el punto 2 y 3.

Entonces para construir un algoritmo que resuelva PSE, debemos tener un árbol recubridor que sea rápido de construir, pero eso ya lo sabemos, los algoritmos de búsqueda, BFS y DFS nos permiten construir árboles recubridores en tiempo polinomial. Por tanto, podemos usar cualquiera de esos algoritmos junto al Algoritmo 5.2 para resolver PSE.

Un algoritmo que resuelve PSE es el siguiente:

Algoritmo 5.3: Algoritmo del Árbol

```

1: Input: Un multigrafo conexo no trivial  $G = (V, E)$ , y  $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ .
2: Sea  $r \in V$ .
3:  $T \leftarrow \text{BFS}(G, r)$ .
4:  $K \leftarrow \text{algoritmo5.2}(G, T, r, \sigma, \rho)$ .
5: if  $|K| = 0$  then
6:   | return TRUE.
7: else
8:   | return FALSE.

```

A continuación, realizaremos un análisis de tiempo de ejecución en el peor caso al Algoritmo 5.3.

- La línea 2 es de orden constante, mientras que la línea 5 es de orden $|E|$.
- Sabemos que el algoritmo BFS es $O(|V| + |E|)$, y el algoritmo 5.2 es $O(|V|^3 + |V|^2|E| + |E|^2)$.

Por tanto, el Algoritmo 5.3 es $O(|V|^3 + |V|^2|E| + |E|^2)$. Esto nos indica que el Algoritmo 5.3 se puede ejecutar en tiempo polinomial respecto al tamaño de la entrada.

Antes de pasar a los ejemplos, vamos a dar algunas observación de estos dos últimos algoritmos.

- En el peor caso el Algoritmo 5.2 realiza $|V| - 1$ switchs. Esto nos estaría indicando que dos funciones signo switch equivalentes, la puedo transformar una en la otra usando a lo más $|V| - 1$ switch.
- El parámetro gamma se puede generalizar al caso de multigrafos no totalmente desconexos. Para ello se toma como primer argumento un bosque recubridor T en vez del árbol recubridor, los otros dos argumentos serían las funciones signo.

En este caso γ se definiría de la siguiente manera: se aplicaría el

Algoritmo 5.2 sobre cada componente conexa no trivial de G . El input sería T y las dos función signos todas ellas restringidas a esta componente conexa, el grafo sería la componente conexa no trivial, y la raíz sería cualquier vértice de la componente. El output lo denotamos como K_i . Así,

$$\gamma(T, \sigma, \rho) := \sum |K_i|.$$

- El igual que podemos generalizar el parámetro gamma para el caso general, todos los resultados vistos en esta subsección se pueden generalizar el caso de multigrafos no totalmente desconexo. En estas generalización se cambiaría “árbol recubridor” por “bosque recubridor”.
- El Algoritmo 5.3 también lo podemos usar para resolver PSE para el caso no conexo. La idea es aplicar el Algoritmo 5.3 por cada componente conexa no trivial de G .

Para finalizar el análisis del Algoritmo 5.3, mostraremos dos ejemplos en que simularemos lo que haría este algoritmo. En estos ejemplos usaremos los mismos multigrafos del Ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.2. 1. Consideremos las funciones signos σ y ρ dibujadas en la Figura 5.7.

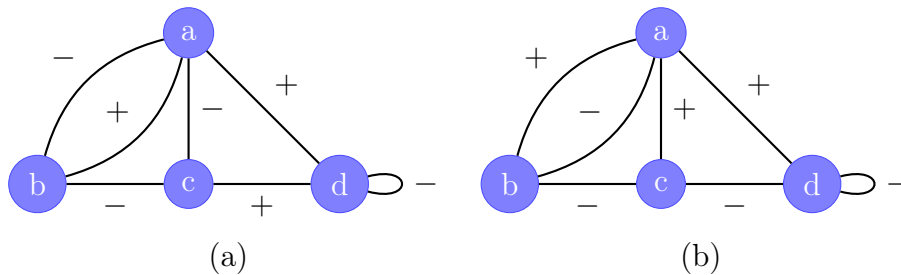


Figura 5.7: (a) Función signo σ . (b) Función signo ρ .

Lo primero que hace el algoritmo es elegir un vértice, en este caso elige el nodo a. El árbol $T = (V, E_T)$ obtenido por el algoritmo BFS

con raíz a es el subgrafo de color verde de la Figura 5.8.

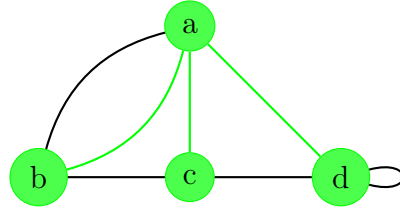


Figura 5.8: El grafo en verde es un grafo recubridor del grafo original.

Ahora simularemos lo que ocurre en el Algoritmo 5.2 con el input G , T , a , σ y ρ . Empezamos por definir $R = \emptyset$ y $L = \{a\}$. Después extraemos a de L , y R se actualiza al conjunto $\{a\}$. Ahora revisamos cada vecino a en la línea 6, tras este proceso L pasa a ser este conjunto $\{b, c, d\}$, y ρ pasa a ser $\mathcal{S}(\{b, c\})\rho$. El dibujo de ρ actualizado se encuentra en la Figura 5.9.

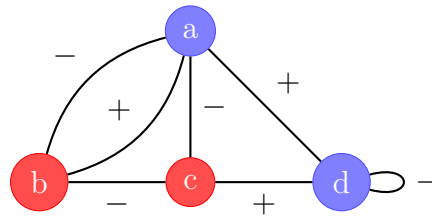


Figura 5.9: Función signo $\mathcal{S}(\{b, c\})\rho$.

Como b , c y d tienen sus vecinos en R , entonces el Algoritmo 5.2 realiza tres iteraciones más en las cuales solo actualiza los conjunto R y L . Como todas las aristas e de $K = E \setminus E_T$ cumplen $\sigma(e) = \rho(e)$, luego el algoritmo al terminar todas las iteraciones de la línea 13, quita todos los elementos de K . Este algoritmo finaliza retornando K .

Volvamos al Algoritmo 5.3, dado que $|K| = 0$ este algoritmo retorna “TRUE”.

2. Consideremos las funciones signos σ y ρ dibujadas en la Figura 5.10.

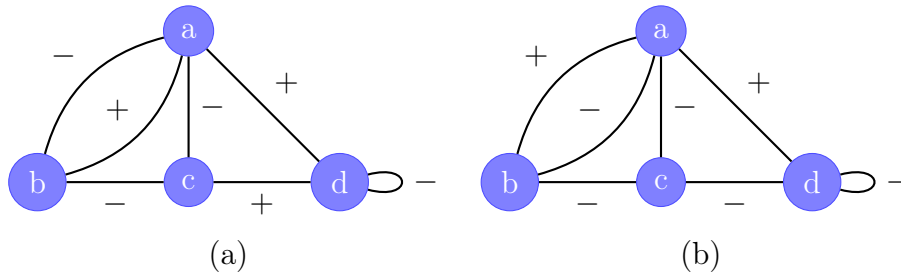


Figura 5.10: (a) Función signo σ . (b) Función signo ρ .

Asumamos que el Algoritmo 5.3 escoge la raíz a y el mismo árbol $T = (V, E_T)$ de la Figura 5.8.

Ahora simularemos lo que ocurre en el Algoritmo 5.2 con el input G, T, a, σ y ρ . Empezamos por definir $R = \emptyset$ y $L = \{a\}$. Después extraemos a de L , y R se actualiza al conjunto $\{a\}$. Ahora revisamos cada vecino a en la línea 6, tras este proceso L pasa a ser este conjunto $\{b, c, d\}$, y ρ pasa a ser $\mathcal{S}(\{b\})\rho$. El dibujo de ρ actualizado se encuentra en la Figura 5.11.

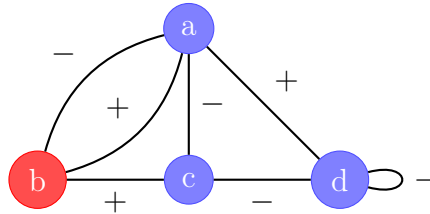


Figura 5.11: Función signo $\mathcal{S}(\{b\})\rho$.

Como b, c y d tienen sus vecinos en R , entonces el Algoritmo 5.2 realiza tres iteraciones más en las cuales solo actualiza los conjunto R y L . Las aristas e de $K = E \setminus E_T$ cumplen $\sigma(e) = \rho(e)$ son: ab y dd . Luego el algoritmo al terminar todas las iteraciones de la línea 13, actualiza el conjunto K al conjunto $\{bc, cd\}$. Este algoritmo finaliza retornando K .

Volvamos al Algoritmo 5.3, dado que $|K| = 2$ este algoritmo retorna

“FALSE”.

Capítulo 6

Número e índice de frustración

En los Capítulos 4 y 5 nos centramos principalmente en el estudio de la switch equivalencia. Ahora, con todo ese conocimiento vamos a abordar unos problemas combinatoriales de multigrafos con signo los cuales están asociados a la switch equivalencia. Se analizarán tres problemas, los cuales para el caso de grafos y digrafos con signo tienen su importancia. Esto se debe a que la solución de esos problemas nos indica, por así decirlo, a qué “distancia” están las funciones de signo entre sí, en particular, si son balanceadas.

El primer problema que se abordará será el que llamamos “Problema del mínimo número de cambios de signo”, el cual intenta responder cual es mínimo número de cambios de signo que se debe hacer a una función signo para que sea switch equivalente a otra función signo dada. Este problema se encuentra desarrollado en la Sección 6.1. Los otros dos problemas que analizamos son los conocidos “problema del índice de frustración” y el “problema del número de frustración”, el problema del índice de frustración y número de frustración se definen como el problema de determinar respectivamente la cantidad mínima de aristas y vértices que se le debe quitar al multigrafo para que dos funciones signos dadas sean switch equivalentes. Ambos problemas se encuentran estudiados en

la Sección 6.2, esto lo hicimos porque los problemas son muy parecidos y se puede realizar un estudio similar para los dos problemas.

6.1. Problema del mínimo número de cambios de signo

El primer problema que estudiaremos es el que denominamos como “problema del mínimo número de cambios de signo”. Este problema se puede enunciar de la siguiente manera: *Dado un multigrafo no totalmente disconexo G y dos funciones de signo σ y ρ en $\Sigma(G)$, ¿cuál es el número mínimo de aristas de (G, ρ) a las cuales debemos cambiar el signo para que el resultado sea equivalente al cambio de signo de σ ?*

Para comprender mejor el enunciado del problema, consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6.1. ■ *Consideremos las siguientes funciones signos σ y ρ que se encuentran en la Figura 6.1.*

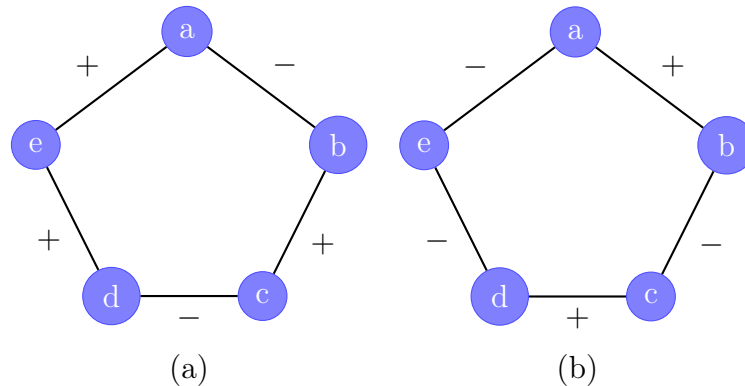


Figura 6.1: (a) Grafo con signo (C_5, σ) . (b) Grafo con signo (C_5, ρ) .

Notamos que $\sigma(C_5) = +1$ y $\rho(C_5) = -1$; por lo tanto, $\sigma \not\approx \rho$. Si cambiamos un número impar de signos en (C_5, ρ) , obtendríamos $\rho(C_5) = +1$. Así que, para resolver el problema del mínimo número de cambios de signo, debemos cambiar solo un signo en (C_5, ρ) una

vez. Por ejemplo, podríamos cambiar el signo de la arista cd , y de esta forma obtendríamos la función de signo de la Figura 6.2.

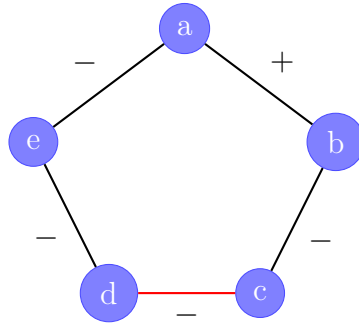


Figura 6.2: Grafo con signo (C_5, ρ) tras cambiarle el signo a la arista cd .

En este caso, $\rho(C) = +1$, entonces $\sigma \sim \rho$, y, por tanto, basta con cambiar el signo de una arista para resolver el problema del mínimo número de cambios de signo.

- Consideremos las funciones signos σ y ρ que se encuentran definidas en la Figura 6.3.

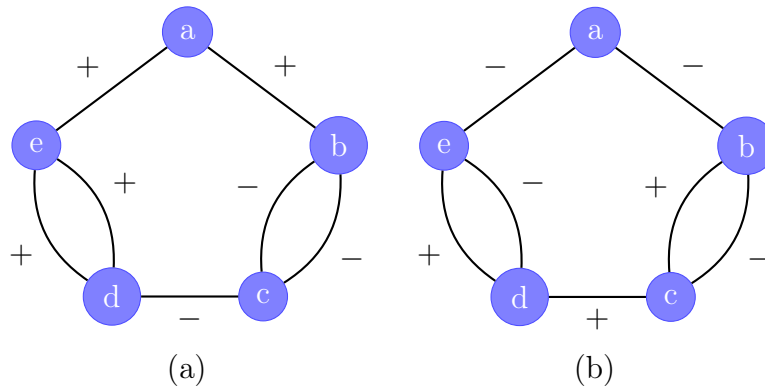


Figura 6.3: (a) Grafo con signo (G, σ) . (b) Grafo con signo (G, ρ) .

En este caso es complicado determinar el conjunto de aristas que resuelve el problema planteado. Por ese motivo vamos a hacer switch en ρ en ciertos vértices para que nos quede más claro determinar ese conjunto de aristas.

Calculamos $\mathcal{S}(\{a, c\})\rho$, ver resultado en Figura 6.4.

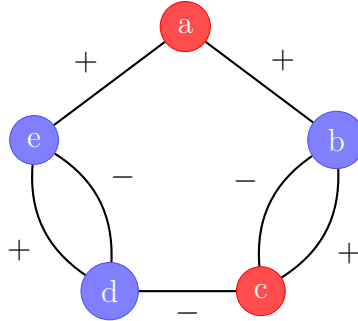


Figura 6.4: Grafo con signo $(G, \mathcal{S}(\{a, c\})\rho)$.

Comparando σ y $\mathcal{S}(\{a, c\})\rho$, podemos notar que bastaría con cambiar el signo en una de las aristas bc y una de las aristas de . Además, necesitamos cambiar el signo de al menos dos aristas, ya que b con c y d con e forman dos ciclos de longitud dos, y el signo de ambos ciclos en σ es $+1$, mientras que en $\mathcal{S}(\{a, c\})\rho$ es -1 .

Por tanto, cambiando dos signos de ρ , resolvemos el problema del mínimo número de cambios de signo.

Habiendo entendido el problema, vamos a reescribir el enunciado de éste. El motivo de esto, es que con el enunciado actual es difícil utilizar todas las propiedades que ya sabemos del Capítulo 4. Con ese objetivo en mente, se definirá un operador el cual nos permitirá realizar la “operación de cambio de signo”.

Definición 6.1. Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Consideremos el operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathcal{P}(E) &\rightarrow \Sigma(G) \\ I &\mapsto \mathcal{A}(I) \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{A}(I)(e) := \begin{cases} -1 & , \text{ si } e \in I \\ +1 & , \text{ si } e \notin I \end{cases}$$

El operador \mathcal{A} lo llamaremos **operador de cambio**.

Observación 6.1. Notar que $\mathcal{A}(E) = -1$ y $\mathcal{A}(\emptyset) = +1$.

El operador de cambio se puede interpretar así: dado $\sigma \in \Sigma(G)$ y $J \subseteq E$, la expresión $\mathcal{A}(J)\sigma$ representa el cambio de los signos de σ en las aristas en J .

Se realizó un estudio de las propiedades de \mathcal{A} , y se logró probar que \mathcal{A} cumple propiedades similares a las del operador switch. Las demostraciones, y el detalle de estas propiedades las podrá encontrar en el Apéndice B.

A continuación, enunciaremos el problema del mínimo cambio de signos utilizando el operador \mathcal{A} .

Definición 6.2. Sea $J \subseteq E$, diremos que J satisface la condición de **cambio de signos (CS)** para σ y ρ , con $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, si y solo si se cumple $\sigma \sim \mathcal{A}(J)\rho$. El **problema del mínimo cambio de signos (minPCS)** se define como sigue: Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y unos $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, determine $J \subseteq E$ de tamaño mínimo tal que J satisface CS para σ y ρ .

Un estudio exhaustivo del minPCS se realizara en la Sección 6.2.2 , ya que el minPCS está relacionado con un problema que analizaremos en esa sección, y se estudiarán ambos problemas juntos.

A continuación, mostraremos dos resultados que nos permiten determinar el tamaño y, a su vez, caracterizar el conjunto que resuelve el minPCS. Para facilitar la lectura, definiremos la siguiente función.

Definición 6.3. Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$.

Definiremos la función

$$\gamma^*(\sigma, \rho) := |J| \quad \forall \sigma, \rho \in \Sigma(G),$$

donde J es un conjunto que resuelve minPCS para σ y ρ .

El primero resultado que mostraremos es hasta cierto punto esperable que se cumpliera.

Proposición 6.1. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se cumple $\gamma^*(\sigma, \rho) = \min_{I \subseteq V} |E^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)|$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, donde $E^-(\varphi)$ es un conjunto de aristas $e \in E$ tales que $\varphi(e) = -1$.*

Demostración.

Por un lado, consideremos un $J \subseteq E$ que resuelve minPCS para σ y ρ , luego existe un $I \subseteq V$ tal que $\sigma = \mathcal{A}(J)\mathcal{S}(I)\rho$, o bien, $\mathcal{A}(J)\mathcal{S}(I)\sigma\rho = +1$. De esto ultimo se deduce que $|E^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)| = |J|$, por tanto

$$\gamma^*(\sigma, \rho) = |I| = |E^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)| \geq \min_{I \subseteq V} |E^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)|.$$

Por el otro lado, sea $I \subseteq V$ y se define $J := E^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)$. Esto implica que $\mathcal{A}(J)\mathcal{S}(I)\sigma\rho = +1$, luego J satisface CS para σ y ρ . Entonces

$$\gamma^*(\sigma, \rho) \leq |J| = |E^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)|.$$

Tomando el mínimo sobre todo los $I \subseteq V$ en la desigualdad anterior, obtenemos la desigualdad deseada. ■

El segundo resultado permite relacionar a γ^* con γ . La demostración de esta proposición requiere el uso de un lema previo, el cual probaremos a continuación.

Lema 6.1. *Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y dados $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Consideremos un $J \subseteq E$ que resuelve minPCS para σ y ρ , entonces $G - J$ mantiene la conexidad de cada una de las componentes conexas que G .*

Demostración.

Razonando por contradicción, supondremos que $G - J$ tiene más componentes conexas que G . Sea U una componente conexa de $G - J$ que no está en G . Sea $J' \subseteq J$ de tamaño mínimo tal que en $G - J'$ aparezca U como componente conexa.

Notamos que toda $e \in J$ pertenece por lo menos a un ciclo, ya que si no es así, $J \setminus \{e\}$ satisface CS, lo cual no puede ocurrir ya que J resuelve minPCS . Además, todo ciclo al cual pertenece una arista de J' tiene la presencia de un número par de aristas de J' . En efecto, sea $e = uv \in J'$ con $u \in V[U]$ y C un ciclo en G tal que $e \in E[C]$. Al empezar a recorrer el ciclo desde u y pasar por el vecino que no es v , estoy obligado a pasar a $G - U$ por una arista en J' , ya que las únicas aristas que conectan a $G - U$ con U son las de J' . Luego, el ciclo puede volver a U , y salir de él. Al final, debe estar en $G - U$ y está obligado a pasar por e para llegar a u . En este recorrido hemos contado una cantidad par de aristas que están en C y en J' .

Con la información del párrafo anterior, vamos a demostrar que $J \setminus J'$ resuelve CS. Para ello, nos basta demostrar que $\mathcal{A}(J \setminus J')\rho \sim \mathcal{A}(J)\rho$, ya que $\mathcal{A}(J)\rho \sim \sigma$ y por transitividad obtendríamos lo que queremos.

Sea C un ciclo de G , notamos que

$$\mathcal{A}(J)\rho(C) = (-1)^{|E[C] \cap J'|} \mathcal{A}(J \setminus J')\rho(C) = \mathcal{A}(J \setminus J')\rho(C),$$

esto último se tiene porque $|E[C] \cap J'|$ es un número par.

De esto último, obtenemos que $\mathcal{A}(J \setminus J')\rho \sim \mathcal{A}(J)\rho$, y por tanto $J \setminus J'$ resuelve CS, llegando así a una contradicción. ■

Observación 6.2. *Una última observación antes de mostrar el resultado es que $\gamma^*(\sigma, \rho) = \gamma^*(\sigma, \mathcal{S}(I)\rho)$ para cualquier $I \subseteq V$. Esto se deriva de la transitividad de la relación switch.*

Proposición 6.2. *Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y dados $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Se cumple que $\gamma^*(\sigma, \rho) = \min_{T \in \mathcal{T}(G)} \gamma(T, \sigma, \rho)$, donde $\mathcal{T}(G)$ es el conjunto de todos los bosques recubridores de G .*

Demostración.

Por un lado, sean $T \in \mathcal{T}(G)$ y R el conjunto que retorna el Algoritmo 5.2, con la entrada T , σ , ρ y con algún vértice como raíz.

Además, sabemos que el Algoritmo 5.2 construye un $I \subseteq V$ tal que

$$\sigma(e) = \begin{cases} \mathcal{S}(I)\rho(e) & , \text{ si } e \in E \setminus R \\ -\mathcal{S}(I)\rho(e) & , \text{ si } e \in R. \end{cases}$$

Luego tendremos que $\sigma = \mathcal{S}(I) \mathcal{A}(R)\rho$, por tanto R satisface CS para σ y ρ . Entonces,

$$\gamma^*(\sigma, \rho) \leq \gamma(T, \sigma, \rho), \quad \forall T \in \mathcal{T}(G).$$

Tomando el mínimo de lo $T \in \mathcal{T}(G)$ obtenemos la desigualdad $d_E(\sigma, \rho) \leq \min_{T \in \mathcal{T}(G)} \gamma(T, \sigma, \rho)$.

Por el otro lado, consideremos un $J \subseteq E$ que resuelve minPCS para σ y ρ . Notamos que $\sigma \sim \rho$ en $G - J$, luego existiría un $I \subseteq V$ tal que $\sigma|_{G-J} = \mathcal{S}(I)\rho|_{G-J}$.

Sea T un bosque recubridor en $G - J$, por el Lema 6.1 tenemos asegurado que T es un bosque recubridor en G . Dado que $T \subseteq G - J$ tenemos $\sigma|_T = \mathcal{S}(I)\rho|_T$, entonces el conjunto que retorna el Algoritmo 5.2 considerando como bosque T , y función signo σ , $\mathcal{S}(I)\rho$ será J . Esto implica que,

$$\begin{aligned} \gamma^*(\sigma, \rho) &= \gamma^*(\sigma, \mathcal{S}(I)\rho), \\ &= \gamma(T, \sigma, \mathcal{S}(I)\rho), \\ &= \gamma(T, \sigma, \rho), \\ &\geq \min_{T \in \mathcal{T}(G)} \gamma(T, \sigma, \rho). \end{aligned}$$

Con esto hemos probado la igualdad deseada. ■

6.2. Problema del índice y número de frustración

En esta sección vamos a analizar dos problemas muy similares, conocidos como el “problema del índice de frustración” y el “problema del número de frustración”. El problema del índice de frustración se puede enunciar como: dado un multigrafo no totalmente desconexo G y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, ¿cuál es el mínimo número de aristas que debo quitar de G para que, en el multigrafo resultante, todos sus ciclos C , si los tiene, cumplan con $\sigma(C) = \rho(C)$?. Por otro lado, el problema del número de frustración es similar al problema del índice de frustración, pero se pregunta sobre el conjunto de vértices más pequeño en lugar de aristas.

Estos problemas del índice y número de frustración son una generalización de los problemas enunciados en la Definición 2.18. A pesar de que los

problemas que vamos a abordar son generales, en realidad están más relacionados de lo que parecen con los enunciados clásicos dados en 2.18 y, hasta cierto punto, son esencialmente lo mismo. Esta relación será explicada más adelante.

A continuación mostraremos un ejemplo donde se solucionan los problemas del índice y número de frustración.

Ejemplo 6.2. *Empezamos por contemplar las funciones signo que se encuentran en la Figura 6.5.*

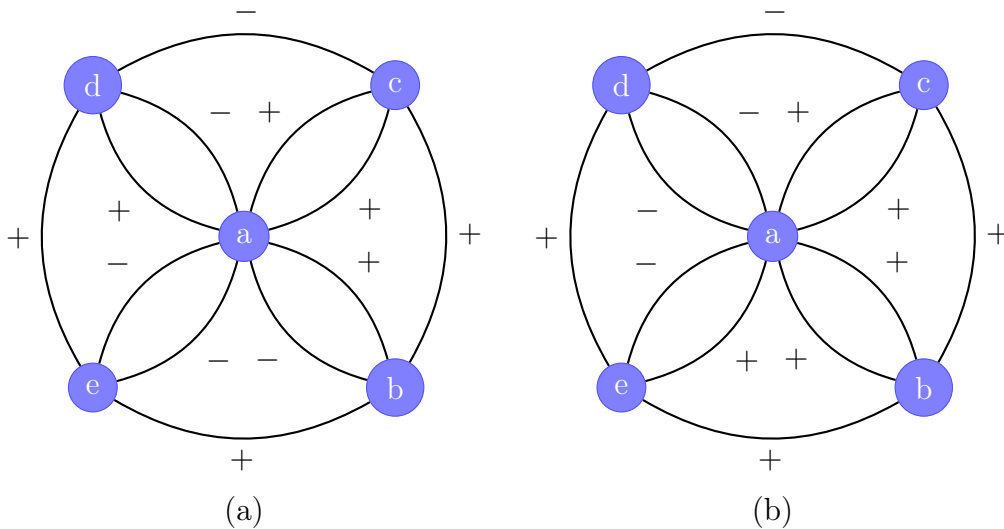


Figura 6.5: (a) Grafo con signo (G, σ) . (b) Grafo con signo (G, ρ) , con G un tipo de grafo rueda.

- *Vamos a resolver el problema del índice de frustración para σ y ρ .*

Notamos que tres de los cuatro ciclos de largo 2 cumplen con $\sigma(C) \neq \rho(C)$. Los ciclos de largo 2 que son problemáticos son el formado por a y b , a y d , y a y e . Esto nos obliga a quitar por lo menos tres aristas, uno por cada ciclo. Entonces debemos eliminar unas aristas de tipo ab , ad , y ae . Los multigrafos con signo obtenidos están en la Figura 6.6.

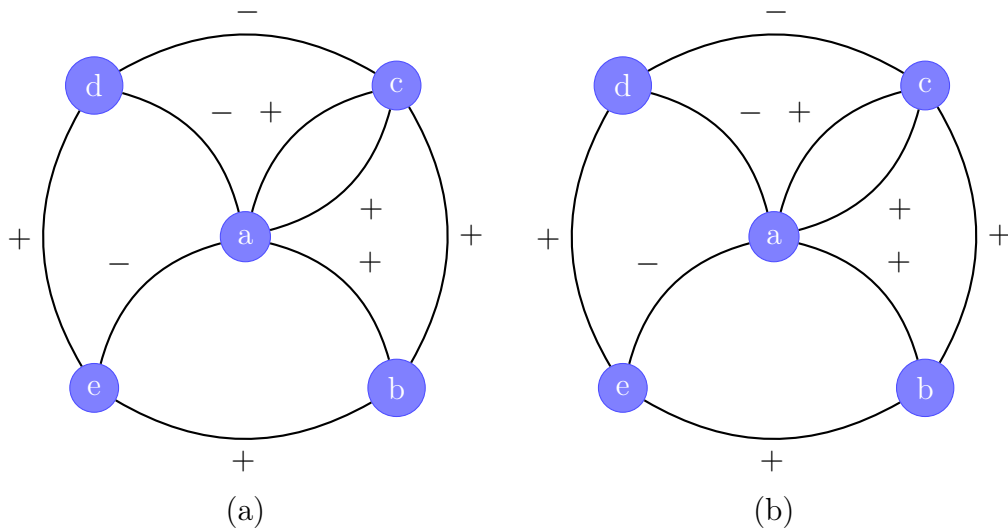


Figura 6.6: (a) Grafo con signo (G, σ) tras quitar tres aristas. (b) Grafo con signo (G, ρ) tras quitar tres aristas.

Como se puede apreciar, los multigrafos con signos son iguales. Por tanto, un conjunto que resuelve el problema del índice de frustración es de tamaño a lo mas 3. Por otro lado, se necesitan por lo menos 3 aristas para resolver el problema, pues debemos quitar tres ciclos de largo 2. Por ende, $\{ab, ad, ae\}$ soluciona el problema del índice de frustración para σ y ρ .

- Ahora resolveremos el problema del número de frustración para σ y ρ de la Figura 6.5.

Recordemos que los ciclos problemáticos son ciclos de largo 2, los cuales están formados por los vértices a y b , a y d , y a y e . Como a está presente en todos estos ciclos, al quitar a del multigrafo, haremos que todos estos ciclos desaparezcan. Los multigrafos con signo tras quitar a están en la Figura 6.7.

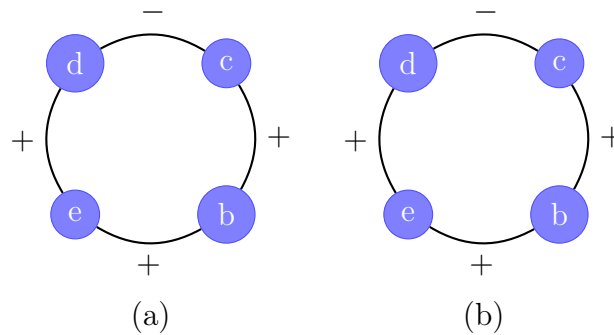


Figura 6.7: (a) Grafo con signo (G, σ) tras quitar a a . (b) Grafo con signo (G, ρ) tras quitar a a .

Como se puede apreciar, los multigrafos con signos son iguales. Por lo tanto, un conjunto que resuelve el problema del número de frustración es de tamaño a lo sumo 1. Por otra parte, es claro que $\sigma \approx \rho$, implicando que, se necesita al menos un vértice para resolver el problema del número de frustración. Por tanto, $\{a\}$ resuelve el problema del número de frustración para σ y ρ

Por la Proposición 4.12, uno podría pensar que el problema del índice (o número) de frustración se puede expresar como sigue: dado un multigrafo no totalmente desconexo G y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, ¿Cuál es el mínimo número de aristas (o vértices) que le tengo que quitar a G , para que en el multigrafo resultante las funciones σ y ρ sean switch equivalentes? Sin embargo, este enunciado no es equivalente al enunciado que escribimos al comienzo de la sección; para ser más específicos, este enunciado está incompleto.

Lo anterior se basa en la siguiente observación: con el primer enunciado de los problemas, podríamos obtener que $G - K$ es un grafo trivial o incluso nulo, donde K es el conjunto que soluciona el problema del índice (o número) de frustración para ciertas funciones signos dadas. En el caso de que $G - K$ sea un grafo trivial o nulo, deja de tener sentido hablar de las funciones signos y, por lo tanto, menos sentido tiene hablar de la relación switch.

Un ejemplo de que $G - K$ puede ser un grafo trivial o nulo es el siguiente: consideremos el multigrafo G que consiste en solo un bucle,



Figura 6.8: Un bucle.

y consideremos las funciones signos $+1$ y -1 . Es claro que $+1 \approx -1$, entonces para resolver el problema del índice de frustración debemos quitar la única arista de G , obteniendo así un grafo trivial. Ahora, si queremos resolver el problema del número de frustración, debemos quitar el único vértice de G , obteniendo así un grafo nulo.

Por lo tanto, el enunciado que sí es equivalente al primer enunciado para el problema del índice (o número) de frustración sería: dado un multigrafo no trivial G y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, ¿Cuál es el mínimo número de aristas (o vértices) que le tengo que quitar a G , para que en el multigrafo resultante sea un grafo trivial o nulo, o bien, las funciones σ y ρ sean switch equivalentes en el multigrafo resultante?

6.2.1. Operador restricción

De la misma forma en la que hemos abordado los problemas anteriores, vamos a definir un operador que nos ayudará en el estudio de los problemas del índice y número de frustración.

El operador más adecuado en este caso sería aquel que tenga el efecto de restringir las funciones de signo a un submultigrafo del multigrafo original. Para trabajar de manera adecuada con este operador, primero debemos definir algunos conjuntos.

Definición 6.4. Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Definiremos el conjunto de las particiones de G como $\mathcal{P}(G) := \{H : H \subseteq G\}$, y a $\Sigma((K, \emptyset)) := \emptyset$, para todo $(K, \emptyset) \in \mathcal{P}(G)$. De esta forma podemos definir

$$\Sigma(\mathcal{P}(G)) := \bigcup_{H \in \mathcal{P}(G)} \Sigma(H).$$

Además denotaremos por

$$\mathcal{P}_G(*) := \{K \in \mathcal{P}(*) : G - K \text{ es no totalmente desconexo o nulo}\},$$

donde $*$ representa a E o V .

Definición 6.5. Definamos el **operador restricción de vértices o aristas** de una función signos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_* : \mathcal{P}_G(*) \times \Sigma(G) &\rightarrow \Sigma(\mathcal{P}(G)) \\ (K, \sigma) &\mapsto \mathcal{R}_*(K, \sigma) := \sigma|_{G-K} \end{aligned}$$

donde $*$ representa a E o V .

Al igual que el operador switch y el operador cambio de signo, el operador restricción tiene algunas propiedades interesantes que podrá encontrar en el Apéndice C. Eso sí, una propiedad útil que tiene \mathcal{R} , la cual usaremos mas adelante, es la que encuentra en la Proposición C.1. Esta proposición nos asegura que el operador \mathcal{R} es un homomorfismo de grupo si se deja fijo el valor de K .

En lo que sigue, vamos a estudiar los problemas del índice y número de frustración de manera específica. Dado que ambos problemas se parecen, se definirá un concepto que nos permitirá definir los dos problemas de una manera más compacta.

Definición 6.6. Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$,

$\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, y un $K \in \mathcal{P}(*)$. Diremos que K satisface la **condición de frustración** para σ y ρ , si y solo si $G - K$ es un grafo totalmente desconexo o nulo, o $\mathcal{R}_*(K, \sigma) \sim \mathcal{R}_*(K, \rho)$. Donde $*$ es E o V .

6.2.2. Problema del índice de frustración

Empezaremos este análisis definiendo el objeto de estudio.

Definición 6.7. *El problema del índice de frustración (PIF):* Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y unos $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Determine $K \subseteq E$ de tamaño mínimo tal que satisfaga la condición de frustración para σ y ρ .

Como habíamos dicho en la sección anterior, el minPCS está relacionado con otro problema, el PIF es ese problema. Antes de mostrar esta conexión entre PIF y minPCS, veamos cual relación entre la condición de signo y la condición de frustración para aristas.

Proposición 6.3. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, y un $K \subseteq E$.*

1. K satisface la condición cambio de signo para σ y ρ , entonces K cumple la condición de frustración σ y ρ .
2. K resuelve PIF para σ y ρ , entonces K satisface la condición de cambio de signo para σ y ρ .

Demostración.

1. Asumamos que K satisface la condición cambio de signo. Si $G - K$ es un grafo totalmente desconexo, entonces K cumple la condición de frustración. Ahora, si $G - K$ es un multigrafo no totalmente desconexo con por lo menos un ciclo, notamos que todos los C ciclos en $G - K$ cumplen con $\sigma(C) = \rho(C)$, ya que si no se cumpliera, entonces K no satisfaría la condición cambio de signo. Esto ultimo implica que $\mathcal{R}_E(K, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K, \rho)$. Por otra parte si $G - K$ es un bosque no totalmente desconexo también se cumple lo anterior. Por

ende, en estos dos casos K cumple la condición de frustración.

2. Ahora supongamos que K satisface el problema PIF para σ y ρ . Si $G - K$ es un grafo totalmente desconexo, eso significa que todas las aristas e de G pertenecen a un ciclo y que $\sigma(e) \neq \rho(e)$. De esto último obtenemos que $\sigma = \mathcal{A}(E)\rho$. Si $G - K$ no es un grafo totalmente desconexo, tenemos que $\mathcal{R}_E(K, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K, \rho)$, entonces existe un conjunto $I \subseteq V$ tal que

$$\mathcal{R}_E(K, \sigma) = \mathcal{S}(I) \mathcal{R}_E(K, \rho) = \mathcal{R}_E(K, \mathcal{S}(I)\rho).$$

Notamos que $\sigma(e) \neq \mathcal{S}(I)\rho(e)$ para todo $e \in K$, pues si no cumpliera, entonces existiría un conjunto más pequeño que K que satisfaría el problema PIF. Por ende, $\sigma = \mathcal{S}(I) \mathcal{A}(K)\rho$, luego K satisface la condición de cambio de signo. ■

Lo que llama la atención de la Proposición 6.3 es que en la afirmación 2 se requiera la hipótesis de que K resuelva PIF, en vez que K solo satisficiera la condición frustración, es decir, que pedimos que K sea de tamaño mínimo. Pero ¿es necesario que K sea de tamaño mínimo tal que satisfaga la condición de frustración? la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

La justificación de la respuesta anterior es la siguiente: consideremos un ciclo C en G tal que $\sigma(C) \neq \rho(C)$, con $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Si queremos que K resuelva PIF o satisfaga la condición de frustración, se debe cumplir que $K \cap E[C] \neq \emptyset$. La diferencia radical entre la condición de frustración y PIF viene dada por este número $|K \cap E[C]|$, ya que si K satisface la condición de frustración el $|K \cap E[C]|$ puede ser cualquier número entre uno y $|E[C]|$, pero si resuelve PIF el $|K \cap E[C]|$ tiene uno para cada ciclo que cumpla $\sigma(C) \neq \rho(C)$. Esto toma relevancia, pues para que K satisfaga la condición de cambio de signo, se debe cumplir que $|K \cap E[C]|$ sea un número impar

entre uno y $|E[C]|$, pero si K solo satisface la condición de frustración este número $|K \cap E[C]|$ puede ser par, lo cual no ocurre si K resuelve PIF.

Para ilustrar lo anterior vamos a considera el siguiente ejemplo: Tomemos al grafo C_5 de la Figura 6.9.

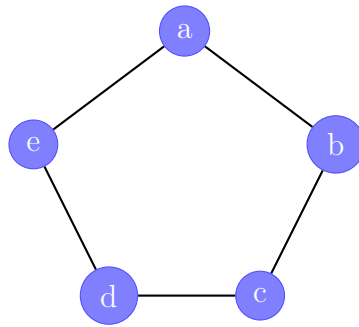


Figura 6.9: El grafo C_5 .

Notamos que las funciones signos $+1$ y -1 no son switch equivalentes en C_5 . Si queremos encontrar un conjunto K que satisfaga la condición de frustración para $+1$ y -1 , podemos tomar cualquier subconjunto no vacío de E , por ejemplo $K = \{ab, cd\}$. Notamos que $-1 \mathcal{A}(K) \approx +1$ en G , por tanto, K no satisface la condición de cambio de signos.

Ahora, si queremos encontrar un conjunto K que resuelva PIF, basta con que K esté formado por solo una arista, por ejemplo, $K = \{ab\}$. Notamos que $-1 \mathcal{A}(K) \sim +1$ en $G - K$, por ende, K satisface la condición de cambio de signos.

Gracias a la Proposición 6.3 podemos decir que minPCS y PIF son problemas equivalentes.

Corolario 6.1. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, y un $K \subseteq E$. K resuelve minPCS para σ y ρ , si y solo si K resuelve PIF para σ y ρ .*

Demostración.

(\Rightarrow) Asumamos que K satisface minPCS, del punto 1 de la Proposición

6.3 sabemos que K cumple la condición de frustración. Razonando por contradicción supondremos K no resuelve PIF. Sea $K' \subseteq E$ que resuelve PIF, luego $|K'| < |K|$, del punto 2 de la Proposición 6.3 obtenemos que K' satisface la condición de cambio de signo, entonces $|K| = |K'|$ lo cual es una contradicción.

(\Leftarrow) La demostración de la implicancia contraria es análoga a la demostración anterior. ■

De este último resultado se desprende que la función γ^* abarca a los dos problemas. Como se había mencionado en la sección anterior, no usaremos γ^* , en cambio, para estudiar los dos problemas cambiaremos la notación de la función a una que sea más adecuada a los resultados que mostraremos.

Definición 6.8. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se define la función*

$$\begin{aligned} d_E : \Sigma(G) \times \Sigma(G) &\rightarrow \mathbb{N} \\ (\sigma, \rho) &\mapsto d_E(\sigma, \rho), \end{aligned}$$

donde

$$d_E(\sigma, \rho) := \min\{|K| : \text{resuelve PIF para } \sigma \text{ y } \rho\}.$$

La primera propiedad que demostraremos que satisface, y la cual motivó el cambio de notación, es que d_E es una pseudométrica para $\Sigma(G)$.

Proposición 6.4. *Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. La función d_E es una pseudométrica para $\Sigma(G)$.*

Demostración.

Para demostrar que d_E es una pseudométrica, basta chequear que d_E cumple con las tres propiedades de una pseudométrica.

1. (No-negativa) Es claro $0 \leq d_E(\sigma, \rho)$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, pues $0 \leq |K|$ para todo $K \subseteq E$.
2. (Simetría) Sean $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, y $K \subseteq E$ tal que K resuelve PIF para σ y ρ . Si $G - K$ no es un multigrafo totalmente desconexo, se sigue de la simetría de \sim que $d_E(\sigma, \rho) = d_E(\rho, \sigma)$. Si $G - K$ es un grafo totalmente desconexo, se cumple trivialmente la igualdad.
3. (Desigualdad triangular) Consideremos unos $\sigma, \rho, \varphi \in \Sigma(G)$. Sean $K_1, K_2, K_3 \subseteq V$ tales que K_1 resuelve PIF para σ y ρ , K_2 resuelve PIF para σ y φ , y K_3 resuelve PIF para φ y ρ .

Si $G - K_2 \cup K_3$ es un grafo totalmente desconexo, tenemos que $K_2 \cup K_3$ satisface la condición de frustración para σ y ρ . Si $G - K_2 \cup K_3$ no es un grafo totalmente desconexo, notamos que $\mathcal{R}_E(K_2 \cup K_3, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K_2 \cup K_3, \varphi)$ y $\mathcal{R}_E(K_2 \cup K_3, \varphi) \sim \mathcal{R}_E(K_2 \cup K_3, \rho)$, luego la transitividad de \sim nos asegura que $\mathcal{R}_E(K_2 \cup K_3, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K_2 \cup K_3, \rho)$. Por lo tanto, $K_2 \cup K_3$ satisface la condición de frustración para σ y ρ .

Como K_1 resuelve PIF para σ y ρ , tenemos que

$$|K_1| \leq |K_2 \cup K_3| \leq |K_2| + |K_3|.$$

Por ende,

$$d_E(\sigma, \rho) = |K_1| \leq |K_2| + |K_3| = d_E(\sigma, \varphi) + d_E(\varphi, \rho).$$

Con hemos demostrado que d_E cumple con la desigualdad triangular. ■

Una pregunta natural que uno se hace en este punto es: ¿por qué d_E no es una métrica?, ¿ d_E no cumple el axioma de coincidencia? El siguiente resultado nos responderá esas preguntas.

Proposición 6.5. *Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. $d_E(\sigma, \rho) = 0$, si y solo si $\sigma \sim \rho$.*

Demostración.

Asumamos que $\sigma \sim \rho$. Notamos que \emptyset satisface la condición de frustración para σ y ρ , luego $d_E(\sigma, \rho) \leq |\emptyset| = 0$.

Ahora supondremos que $d_E(\sigma, \rho) = 0$. Esto quiere decir que \emptyset resuelve PIF para σ y ρ , entonces $\sigma = \mathcal{R}_E(\emptyset, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(\emptyset, \rho) = \rho$. Por ende, $\sigma \sim \rho$. ■

La Proposición 6.5 nos estaría diciendo que d_E no es una métrica en $\Sigma(G)$, pero podría ser una métrica en $\Sigma(G)/\sim$. Para mostrar esto, nos basta demostrar que d_E es invariante ante el operador switch.

Proposición 6.6. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Se cumple que $d_E(\sigma, \rho) = d_E(\mathcal{S}(I_1)\sigma, \mathcal{S}(I_2)\rho)$ para todo $I_1, I_2 \subseteq V$.*

Demostración.

Primero demostraremos que $d_E(\sigma, \rho) = d_E(\sigma, \mathcal{S}(I)\rho)$. Sea $K \subseteq E$ tal que resuelve PIF para σ y ρ . Si $G - K$ es un multigrafo totalmente desconexo, entonces $K = E$, luego $d_E(\sigma, \rho) \geq d_E(\sigma, \mathcal{S}(I)\rho)$. Si $G - K$ no es un multigrafo totalmente desconexo, tenemos que

$$\mathcal{R}_E(K, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K, \rho) \sim \mathcal{R}_E(K, \mathcal{S}(I)\rho).$$

La transitividad nos asegura que K cumple la condición de frustración para σ y $\mathcal{S}(I)\rho$. Por tanto, $d_E(\sigma, \rho) \geq d_E(\sigma, \mathcal{S}(I)\rho)$.

Análogamente se demuestra la desigualdad contraria.

Gracias a la propiedad recién demostrada y a la simetría de d_E podemos

asegurar que se cumple $d_E(\sigma, \rho) = d_E(\mathcal{S}(I)\sigma, \rho)$. De esto ultimo se logra concluir que la identidad deseada es verdadera. ■

Observación 6.3. *Dados $\sigma, \rho, \varphi \in \Sigma(G)$, si $\sigma \sim \varphi$ o $\rho \sim \varphi$, entonces la desigualdad triangular se cumple con igualdad, esto es consecuencia directa de la Proposición 6.6.*

Con estos resultados podemos estar seguros de que d_E es una métrica en $\Sigma(G)/\sim$. Bajo este contexto solo nos queda enunciar los resultados, antes de eso, dado que vamos a trabajar con el conjunto $\Sigma(G)/\sim$, tendremos que definir una notación para representar las clases de equivalencia.

Definición 6.9. *Dado $\sigma \in \Sigma(G)$, denotaremos por $[\sigma]_\sim$ a la clase de equivalencia respecto a la relación \sim , donde σ seria un representante de la clase. Lo anterior es equivalente a:*

$$[\sigma]_\sim := \{\rho \in \Sigma(G) : \rho \sim \sigma\}.$$

Definición 6.10. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se define la función*

$$\begin{aligned} \tilde{d}_E : \Sigma(G)/\sim \times \Sigma(G)/\sim &\rightarrow \mathbb{N}, \\ ([\sigma]_\sim, [\rho]_\sim) &\mapsto \tilde{d}_E([\sigma]_\sim, [\rho]_\sim) := d_E(\sigma, \rho). \end{aligned}$$

Corolario 6.2. *Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. La función \tilde{d}_E esta bien definida, y es una métrica para $\Sigma(G)/\sim$.*

Demostración.

Empezaremos verificando que la función \tilde{d}_E este bien definida. Sean $\sigma, \sigma', \rho \in \Sigma(G)$ tal que $[\sigma]_\sim = [\sigma']_\sim$, entonces existe un $I \subseteq V$ tal que

$\sigma = \mathcal{S}(I)\sigma'$. Se sigue de la proposición 6.6 que

$$\tilde{d}_E([\sigma]_{\sim}, [\rho]_{\sim}) = d_E(\sigma, \rho) = d_E(\mathcal{S}(I)\sigma', \rho) = d_E(\sigma', \rho) = \tilde{d}_E([\sigma']_{\sim}, [\rho]_{\sim}).$$

Por ende, \tilde{d}_E esta bien definida. Lo de que \tilde{d}_E sea una métrica es una consecuencia directa de las Proposiciones 6.4 y 6.5. ■

Algunas propiedades que satisface \tilde{d}_E son:

1. El par $(\Sigma(G)/\sim, \tilde{d}_E)$ es un espacio métrico compacto, esto ultimo debe a que $\Sigma(G)/\sim$ es un conjunto finito.
2. Para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ cumple con

$$\tilde{d}_E([\sigma]_{\sim}, [\rho]_{\sim}) = d_E(\sigma, \rho) \leq \text{cyc}(G).$$

Pues en el peor de la casos, se deben quitar todos los ciclos de G para que las función σ y ρ sean switch equivalentes.

Observación 6.4. *Todas estas propiedades que fuimos demostrando del d_E fueron probadas usando el PIF, pero también se pueden probar todos los resultados usando el minPCS. En este caso el rol de \mathcal{R}_E lo asume \mathcal{A} .*

A continuación exhibiremos dos propiedades de d_E , las cuales nos permiten usar algunos resultados del PIF que han sido probados en grafos simples. La primera propiedad nos permite relacionar el d_E con la transformación definida en 4.7.

Proposición 6.7. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ se cumple $d_E(\sigma, \rho) = d_{\hat{E}}(\hat{\sigma}, \hat{\rho})$.*

Demostración.

Sea $K \subseteq E$ tal que resuelve PIF para σ y ρ . Construiremos un $\hat{K} \subseteq \hat{E}$ a partir de K que satisfaga la condición de frustración. Sea $e \in K$, luego:

- Si e no es un loop y no es una arista paralela. Entonces lo agregamos a \hat{K} .

- Si e es una arista paralela. Sabemos que en \hat{G} la arista e se transforma en un camino de largo 3, entonces agregamos cualquier arista de ese camino a \hat{K} .
- Si e es un bucle. Sabemos que en \hat{G} la arista e se cambia por un ciclo de largo 3. Agregamos a \hat{K} cualquier arista de ese ciclo.

Notamos que $|K| = |\hat{K}|$. Además, por las propiedades que satisface $\hat{\cdot}$, podemos asegurar que $\hat{\sigma}(\hat{C}) = \hat{\rho}(\hat{C})$ para todo ciclo \hat{C} en $\hat{G} - \hat{K}$. Pues los ciclo C que $\sigma(C) \neq \rho(C)$ no están en $G - K$. De esto ultimo obtenemos que \hat{K} satisface la condición de frustración, por lo tanto $d_E(\sigma, \rho) \geq d_{\hat{E}}(\hat{\sigma}, \hat{\rho})$.

La desigualdad contraria se demuestra de manera similar a la prueba anterior. ■

La segunda propiedad que mostraremos, nos da la equivalencia entre la definición clásica del PIF y la definición general del PIF que hemos estado usando.

Proposición 6.8. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, y un $K \subseteq E$. K resuelve PIF para σ y ρ , si y solo si K resuelve PIF para $\sigma\rho$ y $+1$.*

Demostración.

Primero notamos que si existen un $K \subseteq E$ y un $I \subseteq V$ tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_E(K, \sigma) = \mathcal{S}(I) \mathcal{R}_E(K, \rho) &\iff \mathcal{R}_E(K, \sigma) \mathcal{R}_E(K, \rho) = \mathcal{S}(I), \\ &\iff \mathcal{R}_E(K, \sigma\rho) = \mathcal{S}(I). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{R}_E(K, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K, \rho)$ si y solo si $\mathcal{R}_E(K, \sigma\rho) \sim +1$.

(\Rightarrow) Asumamos que K resuelve PIF para σ y ρ . Si $G - K$ es un multigrafo

totalmente desconexo, entonces todas las aristas e de G forman parte de bucles, y $\sigma(e) \neq \rho(e)$, es decir, $\sigma\rho(e) = -1$, luego $\sigma\rho = -1$. En este caso en particular no existe ningún ciclo en G tal que $\sigma\rho(C) = -1(C) = +1$, por tanto, debemos quitar todos los ciclos los cuales son bucles. Por ende, K también resuelve PIF para $\sigma\rho$ y $+1$.

Ahora si $G - K$ no es un multigrafo totalmente desconexo, tenemos que $\mathcal{R}_E(K, \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K, \rho)$, es decir, $\mathcal{R}_E(K, \sigma\rho) \sim +1$. Razonando por contradicción supondremos que K no resuelve PIF para $\sigma\rho$ y $+1$, entonces existe un $K' \subseteq E$ tal que $|K'| < |K|$ y $\mathcal{R}_E(K', \sigma\rho) \sim +1$. Pero por el resultado del párrafo anterior sabemos que $\mathcal{R}_E(K', \sigma) \sim \mathcal{R}_E(K', \rho)$, lo cual nos lleva a una contradicción.

(\Leftarrow) La demostración de la implicancia contraria es análoga a la prueba de la primera implicancia. ■

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos una nueva identidad para d_E , la cual lo relaciona con la Definición de índice de frustración dada en 2.18.

Corolario 6.3. *Dado un multigrafo no trivial $G = (V, E)$. Se cumple $d_E(\sigma, \rho) = l(\sigma\rho)$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*

Demostración.

Es claro que $d_E(\sigma\rho, +1) = l(\sigma\rho)$, y se sigue de la Proposición 6.8 que $d_E(\sigma, \rho) = d_E(\sigma\rho, +1)$. ■

Como habíamos dicho, con estos ultimas proposiciones, podemos usar algunos resultados en grafos con signos en esta nuevo contexto de multigrafos con signos. Como una pequeña muestra de ello, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.4. *1. Dado un multigrafo no totalmente desconexo*

$G = (V, E)$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Si $\widehat{\sigma\rho} = -1$, entonces $d_E(\sigma, \rho) = |\widehat{E}| - \text{maxcut}(\widehat{G})$, donde $\text{maxcut}(\widehat{G})$ es tamaño del conjunto de corte máximo en \widehat{G} .

2. Consideremos que el grafo completo K_n , y $\sigma, \rho \in \Sigma(K_n)$. Si $\sigma\rho = -1$, entonces $d_E(\sigma, \rho) = \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$. Si $\sigma\rho$ no es antibalanceada, entonces $d_E(\sigma, \rho) < \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$.

Demostración.

La afirmación 1. es consecuencia directa del Corolario 6.3 y de las Proposiciones 6.7 y 2.3. Mientras que la afirmación 2, es consecuencia directa del Corolario 6.3 y de la Proposición 2.4. ■

6.2.3. Problema del número de frustración

Para comenzar este estudio, primero definiremos el problema a trabajar.

Definición 6.11. *El problema del número de frustración (PNF): Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Determine $K \subseteq V$ de tamaño mínimo tal que satisfaga la condición de frustración para σ y ρ .*

Al igual que lo hicimos con el PIF, el PNF también se le puede asociar una pseudométrica, la cual cumple las mismas propiedades que d_E . A continuación, daremos las definiciones respectivas, así como las propiedades que cumple esta nueva métrica.

Definición 6.12. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se definen las funciones:*

$$\begin{aligned} d_V : \Sigma(G) \times \Sigma(G) &\rightarrow \mathbb{N} \\ (\sigma, \rho) &\mapsto d_V(\sigma, \rho), \end{aligned}$$

donde

$$d_V(\sigma, \rho) := \min\{|K| : \text{resuelve PNF para } \sigma \text{ y } \rho\}.$$

Y ,

$$\begin{aligned} \tilde{d}_V : \Sigma(G)/\sim \times \Sigma(G)/\sim &\rightarrow \mathbb{N} \\ ([\sigma]_{\sim}, [\rho]_{\sim}) &\mapsto \tilde{d}_V([\sigma]_{\sim}, [\rho]_{\sim}) := d_V(\sigma, \rho) \end{aligned}$$

Proposición 6.9. *Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *La función d_V es una pseudométrica para $\Sigma(G)$.*
2. *$d_V(\sigma, \rho) = 0$, si y solo si $\sigma \sim \rho$, con $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*
3. *$d_V(\sigma, \rho) = d_V(\mathcal{S}(I_1)\sigma, \mathcal{S}(I_2)\rho)$, para todo $I_1, I_2 \subseteq V$, para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*
4. *La función \tilde{d}_V esta bien definida, y es una métrica para $\Sigma(G)/\sim$.*
5. *$d_V(\sigma, \rho) = d_{\hat{V}}(\hat{\sigma}, \hat{\rho})$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*
6. *Sea $K \subseteq V$. K resuelve PNF para σ y ρ , si y solo si K resuelve PNF para $\sigma\rho$ y $+1$, para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*
7. *$d_V(\sigma, \rho) = l_0(\sigma\rho)$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*

Demostración.

La demostración del punto 1 es análoga a la prueba de 6.4, la 2 al 6.5, la 3 al 6.6, la 4 al 6.2, la 5 al 6.7, la 6 al 6.8, y la 7 al 6.3. ■

Algunas propiedades que satisface \tilde{d}_V y d_V son:

1. El par $(\Sigma(G)/\sim, \tilde{d}_V)$ es otro espacio métrico compacto, esto ultimo debe a que $\Sigma(G)/\sim$ es un conjunto finito.
2. Para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ cumple con $d_V(\sigma, \rho) \leq d_E(\sigma, \rho)$. Esto se debe a que si $K \subseteq E$ resuelve PIF, entonces podemos elegir un vértices de cada extremo de K , este conjunto de vértices cumplirá

la condición de frustración. Por tanto,

$$d_V(\sigma, \rho) \leq |K| = d_E(\sigma, \rho).$$

3. Para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ cumple con

$$\tilde{d}_V([\sigma]_{\sim}, [\rho]_{\sim}) = d_V(\sigma, \rho) \leq \min\{\text{cyc}(G), |V| - |\delta_0(G)|\}. \quad (6.1)$$

Donde $\delta_0(G)$ es el conjunto de los vértices aislados de G , en efecto, del punto anterior obtenemos la siguiente desigualdad:

$$d_V(\sigma, \rho) \leq d_E(\sigma, \rho) \leq \text{cyc}(G).$$

La otra desigualdad aparece del hecho que en el peor caso, para resolver PNF debemos quitar todas las aristas. Una forma de hacer ese es quitar todos los vértices que tienen una arista, es decir, $V - \delta_0(G)$. Con eso, obtenemos que

$$d_V(\sigma, \rho) \leq |V| - |\delta_0(G)|.$$

Usando estas dos ultimas desigualdades tenemos la demostración de Ecuación (6.1).

Gracias al punto 5 y 7 de la proposición anterior, podemos usar algunos resultados que ya existen en grafos con signos a este contexto más general. En el siguiente resultado daremos una pequeña muestra de ello.

Corolario 6.5. *1. Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Si $\widehat{\sigma\rho} = -1$, entonces $d_V(\sigma, \rho) = |\hat{V}| - \beta(\hat{G})$, donde $\beta(\hat{G})$ denota al máximo orden de un subgrafo bipartito inducido por \hat{G} .*

2. Consideremos que el grafo completo K_n , y $\sigma, \rho \in \Sigma(K_n)$. Si $\sigma\rho = -1$, entonces $d_V(\sigma, \rho) = n - 2$. Si $\sigma\rho$ no es antibalanceada, entonces $d_V(\sigma, \rho) < n - 2$.

Demostración.

La afirmación 1. es consecuencia directa de los puntos 5 y 7 de la Proposición 6.9 y de la Proposición 2.3. Mientras que la afirmación 2, es consecuencia directa del punto 7 de la Proposición 6.9 y de la Proposición 2.5. ■

Con todo lo anterior, tenemos que el d_V satisface las mismas propiedades que el d_E . Pero hay algo que el d_E tiene que el d_V no, y son las identidades que están en la Sección 6.1 (están escritas en términos de la función γ^*). A pesar de lo anterior, hay otra propiedad que cumple d_V que es análoga a una propiedad de la Sección 6.1. La propiedad que estamos haciendo referencia es la que encuentra escrita en la Proposición 6.1, pero para poder enunciar la proposición debemos dar la siguiente definición.

Definición 6.13. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y $\sigma \in \Sigma(G)$. Sean $E^+(\sigma) := \{e \in E : \sigma(e) = +1\}$, y $G^-(\sigma) := G - E^+(\sigma)$. Definimos a $V^-(\sigma) \subseteq V$ de tamaño mínimo tal que $G^-(\sigma) - V^-(\sigma)$ es un multigrafo totalmente desconexo o nulo.*

Proposición 6.10. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se cumple que $d_V(\sigma, \rho) = \min_{I \subseteq V} |V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)|$, para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.*

Demostración.

Por un lado, sea $I \subseteq V$. Si $G - V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)$ es un multigrafo totalmente desconexo o nulo, entonces $V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)$ cumple la condición de frustración. Si $G - V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)$ no es un multigrafo totalmente desconexo ni nulo, se deduce por la definición de $V^-(\cdot)$ que

$$\mathcal{R}_V(V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho), \sigma\rho) = +1 \iff \mathcal{R}_V(V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho), \sigma) = \mathcal{R}_V(V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho), \rho).$$

Entonces $V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)$ nuevamente cumple la condición de frustración.

De lo anterior se deduce que $d_V(\sigma, \rho) \leq |V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)|$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. Tomando el mínimo sobre los $I \subseteq V$ obtenemos una de las desigualdades deseadas.

Por otro lado, sea $K \subseteq V$ que resuelve PNF para σ y ρ . Si $G - K$ es un multigrafo totalmente desconexo o nulo, eso significa que todas las aristas en $E^-(\sigma\rho)$ tienen un extremo en K , luego

$$|V^-(\mathcal{S}(\emptyset)\sigma\rho)| = |V^-(\sigma\rho)| \leq |K|.$$

Ahora si $G - K$ no es un multigrafo totalmente desconexo ni nulo, entonces $\mathcal{R}_V(K, \sigma) \sim \mathcal{R}_V(K, \rho)$, luego existe un $I \subseteq V$ tal que

$$\mathcal{R}_V(K, \sigma) = \mathcal{S}(I) \mathcal{R}_V(K, \rho) = \mathcal{R}_V(K, \mathcal{S}(I)\rho).$$

Es decir, $\mathcal{R}_V(K, \mathcal{S}(I)\sigma\rho) = +1$, entonces $|V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)| \leq |K|$.

Del texto precedente se puede inferir que siempre existe un $I \subseteq V$ tal que $|V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)| \leq |K|$. Por lo tanto,

$$\min_{I \subseteq V} |V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)| \leq |V^-(\mathcal{S}(I)\sigma\rho)| \leq |K| = d_V(\sigma, \rho).$$

■

6.3. Complejidad computacional

En esta última sección del capítulo, vamos a estudiar la complejidad computacional de PIF y PNF. Dado que es la primera vez en todo el documento que vamos a hablar de complejidad computacional, mostraremos algunas intuiciones de las definiciones más básicas o esenciales de complejidad, junto con un resultado clásico que nos será de

ayuda más adelante. Las definiciones formales y resultados clásicos de complejidad se pueden encontrar en el libro [11].

Uno de los objetos centrales de la complejidad computacional son los **problemas de decisión**. Un problema de decisión es un problema en donde las respuestas posibles son sí (o TRUE) o no (o FALSE), y el dominio de un problema de decisión se conoce como **instancias** del problema. Un ejemplo de problema de decisión es “Dado un número $n \in \mathbb{N}^*$, ¿ n es primo?”, las instancias del problema son todos los números naturales.

Otro de los objetos centrales de la complejidad computacional son los algoritmos. En este documento nos van a interesar aquellos algoritmos que sean “rápidos”, es decir, los **algoritmos polinomiales**. Un algoritmo polinomial es un algoritmo el cual, en ejecutarse toma un tiempo que puede ser descrito como una función polinomial del tamaño del input. Algunos ejemplos de algoritmos polinomiales son los algoritmos que se encuentran en la Sección 5.2.

Una notación que usaremos en el resto de la sección es \leq_p hace referencia al concepto de **reducción polinomial**. R se reduce polinomialmente a Q , si existe una función f (no necesariamente inyectiva ni sobreyectiva) que transforma instancias del problema R a instancias del problema Q , la cual puede calcularse por medio de un algoritmos polinomial, y que transforma instancias positivas de R a instancias positivas a Q .

Vamos a definir intuitivamente algunas clases de complejidad. Un problema de decisión Q se dice que es:

- **P (Polynomial time)**, si existe un algoritmo polinomial que resuelve Q .

- **NP (Nondeterministic Polynomial time)**, si existe un algoritmo polinomial que verifica que una solución resuelve Q , este algoritmo se llama **verificador polinomial**.
- **NP-Hard**, si para todo problema R que es NP se cumple $R \leq_p Q$.
- **NP-Completo**, si Q es NP y NP-Hard.

El resultado que mencionamos antes, es el siguiente:

Teorema 6.1. *Dados dos problemas de decisión Q y R . Si R es NP-hard y $R \leq_p Q$, entonces Q es NP-hard.*

Con los conceptos clásicos de complejidad ya definidos, vamos a enunciar los problemas de decisión que estudiaremos en esta sección.

Definición 6.14. ■ **Problema del índice de frustración en digrafos (PIFD):** *Dado un digrafo no trivial $G = (V, A)$, un $k \in \mathbb{N}$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. ¿Existe un $A' \subseteq A$ tal que $|A'| \leq k$ y todos los ciclos C en $G - A'$ cumplen $\sigma(C) = \rho(C)$?*

- **Problema del índice de frustración en multigrafos (PIFM):** *Dado un multigrafo no trivial $G = (V, E)$, un $k \in \mathbb{N}$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. ¿Existe un $E' \subseteq E$ tal que $|E'| \leq k$ y todos los ciclos C en $G - E'$ cumplen $\sigma(C) = \rho(C)$?*
- **Problema del número de frustración en digrafos (PNFD):** *Dado un digrafo no trivial $G = (V, A)$, un $k \in \mathbb{N}$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. ¿Existe un $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq k$ y todos los ciclos C en $G - V'$ cumplen $\sigma(C) = \rho(C)$?*
- **Problema del número de frustración en multigrafos (PNFM):** *Dado un multigrafo no trivial $G = (V, E)$, un $k \in \mathbb{N}$, y $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$. ¿Existe un $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq k$ y todos los ciclos C en $G - V'$ cumplen $\sigma(C) = \rho(C)$?*

6.3.1. PIF y PNF son NP-hard

En esta sección demostraremos que PIFM y PNFM son problemas NP-hard. Los problemas PIFD y PNFD no los tomaremos mucho en cuenta, pues $\text{PIFM} \leq_p \text{PIFD}$ y $\text{PNFM} \leq_p \text{PNFD}$, y si demostramos que PIFM y PNFM son problemas NP-hard, entonces el Teorema 6.1 nos aseguraría que PIFD y PNFD son NP-hard.

No es difícil ver que $\text{PIFM} \leq_p \text{PIFD}$ y $\text{PNFM} \leq_p \text{PNFD}$, y eso es consecuencia de lo mostrado en el Capítulo 4. En ese capítulo se concluyó que la orientación de las aristas no tenía relevancia en la switch equivalencia, de esto último se obtiene el reductor polinomial. Se eligen los multigrafos con a lo más dos aristas paralelas entre cada par de vértices, luego se le da una orientación a las aristas del multigrafo, y de esa forma obtenemos el digrafo. Por lo concluido en el Capítulo 4, se demostraría que cada función descrita antes es una reducción polinomial.

Para demostrar que PIFM y PNFM son problemas NP-hard, usaremos los siguientes problemas auxiliares:

Definición 6.15. ■ **Problema de la función balanceada para aristas (PFBA):** Dado un grafo no trivial $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma(G)$. ¿Existe un $E' \subseteq E$ tal que $|E'| \leq k$ y todos los ciclos C en $G - E'$ cumplen $\sigma(C) = +1$?

■ **Problema de la función balanceada para vértices (PFBV):** Dado un grafo no trivial $G = (V, E)$, un $k \in \mathbb{N}$, y $\sigma \in \Sigma(G)$. ¿Existe un $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq k$ y todos los ciclos C en $G - V'$ cumplen $\sigma(C) = +1$?

Es claro que $\text{PFBA} \leq_p \text{PIFM}$ y $\text{PFBV} \leq_p \text{PNFM}$, pues PFBA es un caso particular del PIFM, lo mismo ocurre con PFBV y PNFM. Los problemas PFBA y PFBV son los problemas de decisión inducidos por PIF y PNF clásicos, respectivamente. Estos problemas ya se han demostrado que son

NP-hard, y muchos artículos científicos citan a este paper [7] como prueba.

El artículo científico [7] demuestra que los siguientes problemas son NP-hard.

Definición 6.16. ■ *Problema de la bipartición para aristas*

(PBA): Dado un grafo $G = (V, E)$, y $k \in \mathbb{N}$. ¿Existe un $E' \subseteq E$ tal que $|E'| \leq k$ y $G - E'$ es un grafo bipartito?

- *Problema de la bipartición para vértices (PBV): Dado un grafo $G = (V, E)$, y $k \in \mathbb{N}$. ¿Existe un $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq k$ y $G - V'$ es un grafo bipartito?*

Claramente PBA y PFBA son diferentes, pero están relacionados. Si al PFBA se escoge $\sigma = -1$, el PBA se puede reducir a ese caso particular del problema PFBA, lo cual está justificado por el Teorema de la bipartición de Harary 2.1. Lo mismo ocurre con PBV y PNFV.

Con esto hemos demostrado que PIFM y PNFM son problemas NP-hard.

Observación 6.5. *Se puede dar una demostración alternativa que probaría que PNFV y PNFM son ambos problemas NP-hard. Para ello usamos un resultado del paper [10] que prueban que PFBV es NP-hard, y siguiendo el mismo desarrollo mostrado en esta sección, se demostraría que PNFV y PNFM son problemas NP-hard. No se puede realizar el mismo proceso con los problemas PIFV y PIFM, pues en el artículo científico [10] se estudia la complejidad computacional de PFBA y PFBV en el contexto de los digrafos, y en ese contexto reducen los problemas al feedback arc set (FAS) y feedback vertex set (FVS), respectivamente. Y en el contexto de grafos FVS sigue siendo NP-hard, pero FAS no lo es.*

6.3.2. PIF y PNF son NP-Completos

Finalizaremos esta sección, demostrando que PIFV, PIFM, PNFV y PNFM son problemas NP-completos. En la sección pasada, demostramos

que todos esos problemas son NP-hard, así que lo único que nos falta probar es que son NP.

No es difícil probar que PIFD y PIFM son NP, ya que tomando por ejemplo PIFM, podemos construir un algoritmo que tome una instancia del problema PIFM y un $E' \subseteq E$, y determine si es que E' cumple las condiciones descritas en PIFM en tiempo polinomial (i.e. existe un verificador polinomial), en efecto, el Algoritmo 6.1 satisface lo descrito.

Algoritmo 6.1: Verificador Polinomial de PIFM.

```

1: Input: Un multigrafo no totalmente desconexo  $G = (V, E)$ ,  $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$ ,
    $k \in \mathbb{N}$ , y  $E' \subseteq E$ .
2: if  $|E'| > k$  then
3:   return FALSE.
4: if  $E' = E$  then
5:   return TRUE.
6: return algoritmo5.1( $G - E', \sigma|_{G-E'}, \rho|_{G-E'}$ ).

```

Observación 6.6. *En la línea 6 del Algoritmo 6.1, también se puede usar el Algoritmo 5.3 en vez del Algoritmo 5.1.*

A continuación demostraremos que el Algoritmo 6.1 es un verificador polinomial de PIFM. Claramente Algoritmo 6.1 es polinomial. Ahora si E' satisface las condiciones de PIFM, entonces $|E'| \leq k$, además si $G - E'$ es un multigrafo totalmente desconexo, luego $E = E'$ por tanto el algoritmo responde TRUE (línea 5). Ahora si $G - E'$ no es un multigrafo totalmente desconexo, tenemos que $\sigma|_{G-E'} \sim \rho|_{G-E'}$, entonces el Algoritmo 5.1 (o el Algoritmo 5.3) retornara TRUE (línea 6). Si el algoritmo descrito en el párrafo anterior retorna TRUE, significa que $|E'| \leq k$ por la línea 2, y que $E = E'$ por las líneas 4 y 5, o bien, que el Algoritmo 5.1 (o el Algoritmo 5.3) con la entrada $(G - E', \sigma|_{G-E'}, \rho|_{G-E'})$ retorna TRUE, entonces $\sigma|_{G-E'} \sim \rho|_{G-E'}$. En ambos casos implican que todos los ciclos C en $G - E'$ cumplen

$\sigma(C) = \rho(C)$. Por ende el Algoritmo 6.1 es un verificador polinomial, de esto ultimo se deduce que PIFM es NP. Análogamente se puede probar que PIFD es NP.

La demostración que PNFD y PNFM son NP, es similar a la demostración que PIFM es NP. El único cambio que se debiera hacer es en la linea 4 del Algoritmo 6.1. En esa linea, se cambia “ $E' = E$ ” por “ $V' = V$ o $E[G - V'] = \emptyset$ ”.

Todos los resultados que hemos demostrado en la Sección 6.3, quedan enunciados en la siguiente proposición.

Proposición 6.11. *Los problemas PIFD, PIFM, PNFD y PNFM son problemas NP-completos*

Capítulo 7

Conclusiones

En este documento, se abordó el problema de la switch equivalencia en multigrafos y digrafos, así como algunos problemas asociados a él. En el Capítulo 4, se buscó determinar la cantidad de clases de equivalencia. Para ello, se introdujo una operación al conjunto de funciones signo, generando una estructura de grupo. Utilizando resultados clásicos de Teoría de Grupos, se logró determinar la cantidad de clases de equivalencia, resultado similar al obtenido en el libro [8], donde se emplearon técnicas de álgebra lineal. En el mismo capítulo, se generalizaron las dos caracterizaciones más conocidas de la switch equivalencia para el caso de multigrafos.

En el Capítulo 5, se presentó una construcción de representantes para cada clase de equivalencia, seguida de una versión comprimida, la cual puede tener algunas implicaciones algorítmicas interesantes. Además, se desarrollaron dos algoritmos basados en las caracterizaciones presentadas en la Sección 5.2, permitiendo determinar en tiempo polinomial si dos funciones signos son switch equivalentes.

Finalmente, en el Capítulo 6, se exploraron problemas de optimización asociados a la switch equivalencia. Estos incluyen el problema del mínimo cambio de signo, el índice de frustración y el número de frustración. Estos

problemas, en términos generales, buscan determinar el mínimo número de cambios necesarios en las funciones signos o en el multigrafo para que dos funciones signos sean switch equivalentes. Demostramos que el problema del mínimo cambio es equivalente al problema del índice de frustración y que los problemas de frustración son NP-Completo.

Un resultado destacado en este capítulo es la demostración de que los problemas de frustración permiten inducir métricas sobre el espacio cociente de funciones signo, dotando al conjunto de funciones signo de la estructura de grupo y de espacio métrico (con dos métricas), o como un espacio vectorial con dos métricas si se desean utilizar técnicas de álgebra lineal para abordar algunos problemas. Aunque este documento no desarrolló este resultado, podría ser interesante estudiarlo en el futuro.

Además, se identificaron varios problemas abiertos que podrían ser objeto de investigación futura:

- Al igual que se pueden definir funciones signo sobre las aristas, se pueden definir funciones signo sobre los vértices. Una de las primeras preguntas que uno se hace es ¿se puede definir una noción de switch equivalencia para estas funciones?, y si es así, se podrían utilizar técnicas similares a las presentadas en este documento para la resolución de problemas de estas funciones signo en vértices.
- Para digrafos, existe una noción de switch equivalencia relacionada con ciclos dirigidos. Esta otra noción de switch equivalencia se puede definir así: Dadas $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, con G un digrafo, decimos que σ y ρ son **switch equivalentes dirigidos**, si y solo si $\sigma(C) = \rho(C)$ para todo C ciclo dirigido en G .

Se podrían utilizar algunas técnicas y resultados presentados en este trabajo en este nuevo contexto dirigido.

- Desde una perspectiva algorítmica, la NP-Complejidad de los problemas del índice y número de frustración sugiere la posibilidad de encontrar algoritmos aleatorios o aproximados para resolverlos.

Como idea inicial, se podría utilizar la Proposición 6.2 para el problema del índice de frustración y aprovechar las reducciones de problemas conocidos, como FVS, para diseñar algoritmos aleatorios o aproximados para la resolución del problema del número de frustración.

Referencias

- [1] K. Agrawal and W. H. Batchelder. Cultural Consensus Theory: Aggregating Signed Graphs under a Balance Constraint. In S. J. Yang, A. M. Greenberg, and M. Endsley, editors, *Social Computing, Behavioral - Cultural Modeling and Prediction*, pages 53–60, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-29047-3.
- [2] A. Aharony. Low-temperature phase diagram and critical properties of a dilute spin glass. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 11(11):L457, jun 1978. doi: 10.1088/0022-3719/11/11/004. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0022-3719/11/11/004>.
- [3] D. Angeli and E. D. Sontag. Multi-stability in monotone input/output systems. *Systems & Control Letters*, 51(3):185–202, 2004. ISSN 0167-6911. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2003.08.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691103002317>.
- [4] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Alternating cycles and paths in edge-coloured multigraphs: A survey. *Discrete Mathematics*, 165–166: 39–60, 1997. ISSN 0012-365X. doi: 10.1016/S0012-365X(96)00160-4. URL [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00160-4](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00160-4).
- [5] A. Bhattacharya and R. K. De. Divisive Correlation Clustering Algorithm (DCCA) for grouping of genes: detecting varying patterns in expression profiles. *Bioinformatics*, 24(11):1359–1366, 04 2008. ISSN 1367-4803. doi: 10.1093/bioinformatics/btn133. URL <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btn133>.

- [6] D. Cartwright and F. Harary. Structural balance: a generalization of Heider's theory. *Psychological Review*, 63(5):277–293, 1956. doi: 10.1037/h0046049. URL <https://doi.org/10.1037/h0046049>.
- [7] H.-A. Choi, K. Nakajima, and C. S. Rim. Graph bipartization and via minimization. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2(1):38–47, 1989. doi: 10.1137/0402004. URL <https://doi.org/10.1137/0402004>.
- [8] C. Godsil and G. F. Royle. *Algebraic graph theory*, volume 207. Springer Science & Business Media, 2001.
- [9] J. F. Humphreys. *A course in group theory*, volume 6. Oxford University Press on Demand, 1996.
- [10] M. Montalva, J. Aracena, and A. Gajardo. On the complexity of feedback set problems in signed digraphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:249–254, 2008. ISSN 1571-0653. doi: 10.1016/j.endm.2008.01.043. URL <https://doi.org/10.1016/j.endm.2008.01.043>.
- [11] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*. Courier Corporation, 1998.
- [12] M. Petersdorf. Einige bemerkungen über vollständige Bigraphen. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau*, 12:257–260, 1966.
- [13] J. S. Rose. *A course on group theory*. Courier Corporation, 1994.
- [14] R. J. Trudeau. *Introduction to graph theory*. Courier Corporation, 2013.
- [15] V. V. Vazirani. *Approximation algorithms*, volume 1. Springer, 2001.
- [16] D. B. West. *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2 edition, 2001.
- [17] T. Zaslavsky. Signed graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 4(1): 47–74, 1982. ISSN 0166-218X. doi: 10.1016/0166-218X(82)90033-6. URL [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(82\)90033-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(82)90033-6).
- [18] T. Zaslavsky. Negative (and positive) circles in signed graphs: A

problem collection. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 15(1):31–48, 2018. ISSN 0972-8600. doi: 10.1016/j.akcej.2018.01.011. URL <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2018.01.011>.

Apéndice A

Ejemplos de cantidad de clases de equivalencia

En este apéndice vamos a aplicar el Teorema 4.1 en algunas familias de grafos.

A.1. Grafo completo

- El grafo completo con n vértices tiene $n(n-1)/2$ aristas, luego

$$\begin{aligned} \text{cyc}(G) &= |E| - |V| + \text{comp}(G), \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - n + 1, \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - (n-1), \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de clases equivalencia es $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

Corolario A.1. *Dado un grafo completo G , con n vértices. La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.*

- El digrafo completo sin bucles con n vértices tiene $n(n - 1)$ arcos, entonces

$$\begin{aligned}
 \text{cyc}(G) &= |A| - |V| + \text{comp}(G), \\
 &= n(n - 1) - n + 1, \\
 &= n(n - 1) - (n - 1), \\
 &= (n - 1)^2.
 \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de clases equivalencia es $2^{(n-1)^2}$.

Corolario A.2. *Dado un digrafo completo sin bucles G , con n vértices. La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son $2^{(n-1)^2}$.*

- El digrafo completo con bucles con n vértices tiene n^2 arcos, entonces

$$\begin{aligned}
 \text{cyc}(G) &= |A| - |V| + \text{comp}(G), \\
 &= n^2 - n + 1, \\
 &= n^2 - 2n + 1 + n, \\
 &= (n - 1)^2 + n.
 \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de clases equivalencia es $2^{(n-1)^2+n}$.

Corolario A.3. *Dado un digrafo completo con bucles G , con n vértices. La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son $2^{(n-1)^2+n}$.*

A.2. Grafo bipartito completo

El grafo bipartito completo $K_{n,m}$, tiene $n + m$ vértices y nm aristas, entonces

$$\begin{aligned} \text{cyc}(G) &= |E| - |V| + \text{comp}(G), \\ &= nm - n - m + 1, \\ &= n(m - 1) - (m - 1), \\ &= (n - 1)(m - 1). \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de clases equivalencia es $2^{(n-1)(m-1)}$.

Corolario A.4. *Dado un grafo bipartito completo $K_{n,m}$. La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para $K_{n,m}$, son $2^{(n-1)(m-1)}$.*

A.3. Grafo k -regular

El grafo k -regular conexo con n vértices tiene $nk/2$ aristas, luego

$$\begin{aligned} \text{cyc}(G) &= |E| - |V| + \text{comp}(G), \\ &= \frac{nk}{2} - n + 1, \\ &= \frac{n(k - 2)}{2} + 1, \\ &= \frac{n(k - 2) + 2}{2}. \end{aligned}$$

Por ende, la cantidad de clases equivalencia es $2^{\frac{n(k-2)+2}{2}}$.

Corolario A.5. *Dado un grafo (o digrafo) G conexo y k -regular (con $k > 1$), y sea $|V| := n > 0$. La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son $2^{\frac{n(k-2)+2}{2}}$.*

Un caso particular en donde se puede aplicar el corolario anterior es el n -cubo. El Q_n tiene 2^n vértices y es un grafo n -regular, por tanto el número de cíclico de Q_n es:

$$\begin{aligned} \text{cyc}(G) &= \frac{|V|(k-2) + 2}{2}, \\ &= \frac{2^n(n-2) + 2}{2}, \\ &= 2^{n-1}(n-2) + 1. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que:

Corolario A.6. *El n -cubo (con $n > 1$), tiene una cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son $2^{2^{n-1}(n-2)+1}$.*

A.4. Grafo auto-complementario

El grafo auto-complementario G con n vértices, tiene $n(n-1)/4$ aristas, entonces

$$\begin{aligned} \text{cyc}(G) &= |E| - |V| + \text{comp}(G), \\ &= \frac{n(n-1)}{4} - n + 1, \\ &= \frac{n(n-1)}{4} - (n-1), \\ &= \frac{(n-1)(n-4)}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de clases equivalencia es $2^{\frac{(n-1)(n-4)}{4}}$.

Corolario A.7. *Dado un grafo auto-complementario G con n vértices (con $n > 3$). La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son $2^{\frac{(n-1)(n-4)}{4}}$.*

A.5. Grafo planar

Un grafo planar G con n vértices, y m aristas, cumple con:

$$n + f - m = 2 \tag{A.1}$$

donde f representa la cantidad de caras que tiene el dibujo del grafo G en el plano.

Se sigue de (A.1) que,

$$\begin{aligned} \text{cyc}(G) &= |E| - |V| + \text{comp}(G), \\ &= n + f - 2 - n + 1, \\ &= f - 1. \end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de clases equivalencia es 2^{f-1} .

Corolario A.8. *Dado un grafo planar G , con f la cantidad de caras que tiene el dibujo del grafo G en el plano. La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son 2^{f-1} .*

A.6. Grafo con genus g

Un grafo G de genus g , con n vértices, y m aristas, cumple con (ver [14]):

$$n + f - m = 2 - 2g \tag{A.2}$$

donde f representa la cantidad de caras que tiene el dibujo del grafo G en el g -Toro.

Se sigue de (A.2) que,

$$\begin{aligned}\text{cyc}(G) &= |E| - |V| + \text{comp}(G), \\ &= n + f + 2g - 2 - n + 1, \\ &= f + 2g - 1.\end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de clases equivalencia es 2^{f+2g-1} .

Corolario A.9. *Dado un grafo G con genus g , y f la cantidad de caras que tiene el dibujo del grafo G en el g -Toro. La cantidad de clases equivalencia distintas de \sim para G , son 2^{f+2g-1} .*

Apéndice B

Propiedades del operador \mathcal{A}

Empezaremos por recordar la definición del operador \mathcal{A} .

Definición B.1. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Consideremos el operador:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathcal{P}(E) &\rightarrow \Sigma(G) \\ I &\mapsto \mathcal{A}(I) \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{A}(I)(e) := \begin{cases} -1 & , \text{ si } e \in I \\ +1 & , \text{ si } e \notin I \end{cases}$$

El operador \mathcal{A} lo llamaremos **operador de cambio**.

Observación B.1. *Notar que $\mathcal{A}(E) = -1$ y $\mathcal{A}(\emptyset) = +1$.*

Mostraremos algunas propiedades que tiene el operador de cambio. La primera propiedad que satisface \mathcal{A} nos permite deducir que \mathcal{A} tiene características similares al operador switch.

Proposición B.1. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Se cumple que $\mathcal{A}(J_1)\mathcal{A}(J_2) = \mathcal{A}(J_1\Delta J_2)$ para todo $J_1, J_2 \subseteq E$.*

Demostración.

Consideremos un $e \in J_1 \Delta J_2$. Si $e \in J_1 \setminus J_1 \cap J_2$ o $e \in J_2 \setminus J_1 \cap J_2$ tenemos que

$$\mathcal{A}(J_1) \mathcal{A}(J_2)(e) = -1 \cdot +1 = -1 = \mathcal{A}(J_1 \Delta J_2)(e).$$

Supongamos que $e \notin J_1 \Delta J_2$. Si $e \in J_1 \cap J_2$, tenemos que

$$\mathcal{A}(J_1) \mathcal{A}(J_2)(e) = -1 \cdot -1 = +1 = \mathcal{A}(J_1 \Delta J_2)(e).$$

Si $e \notin J_1 \cup J_2$, se tiene que

$$\mathcal{A}(J_1) \mathcal{A}(J_2)(e) = +1 \cdot +1 = +1 = \mathcal{A}(J_1 \Delta J_2)(e).$$

Por lo tanto $\mathcal{A}(J_1) \mathcal{A}(J_2) = \mathcal{A}(J_1 \Delta J_2)$. ■

Corolario B.1. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$.*

1. *El operador $\mathcal{A} : (\mathcal{P}(E), \Delta) \rightarrow (\Sigma(G), \cdot)$ es un homeomorfismo de grupos.*

2. *Consideremos $J = \{e_1, \dots, e_r\} \subseteq E$, se cumple que*

$$\mathcal{A}(J) = \prod_{i=1}^r \mathcal{A}(e_i).$$

Demostración.

1. Consecuencia directa de la Proposición B.1.

2. Definimos los conjuntos $J_i = \{e_1, \dots, e_i\}$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Notar que $J_i \Delta \{e_{i+1}\} = J_{i+1}$ con $i = 1, 2, \dots, r-1$, esto se debe a que J_i y $\{e_{i+1}\}$ son conjunto disjuntos.

Se sigue de la Proposición B.1 que,

$$\prod_{i=1}^r \mathcal{A}(e_i) = \mathcal{A}(J_1) \mathcal{A}(e_2) \prod_{i=3}^r \mathcal{A}(e_i) = \dots = \mathcal{A}(J_r).$$

Por ende $\mathcal{A}(J) = \mathcal{A}(J_r) = \prod_{i=1}^r \mathcal{A}(e_i)$. ■

El siguiente resultado nos permite asegurar que siempre existe un $J \subseteq E$ tal que $\sigma \sim \mathcal{A}(J)\rho$ para cualquier $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$.

Proposición B.2. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, se cumple que $\text{Im}(\mathcal{A}) = \Sigma(G)$.*

Demostración.

Es claro que $\text{Im}(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma(G)$. Sea $\sigma \in \Sigma(G)$, luego se define el conjunto:

$$E^-(\sigma) := \{e \in E : \sigma(e) = -1\}.$$

Vamos a demostrar que $\sigma = \mathcal{A}(E^-(\sigma))$, en efecto, si $e \in E^-(\sigma)$, tenemos que $\sigma(e) = -1$. Por otra parte $\mathcal{A}(E^-(\sigma))(e) = -1$, luego $\sigma(e) = \mathcal{A}(E^-(\sigma))(e)$. Si $e \notin E^-(\sigma)$, se tiene que $\sigma(e) = +1$, además $\mathcal{A}(E^-(\sigma))(e) = +1$, esto implica que $\sigma(e) = \mathcal{A}(E^-(\sigma))(e)$. Por lo tanto $\sigma(e) = \mathcal{A}(E^-(\sigma))(e)$ para todo $e \in E$, es decir, $\sigma = \mathcal{A}(E^-(\sigma))$.

Lo anterior implica que $\sigma \in \text{Im}(\mathcal{A})$, y con esto hemos demostrado lo que queríamos. ■

Observación B.2. *Dados $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, sabemos que $\sigma\rho \in \Sigma(G)$. La Proposición B.2 nos asegura que existe un conjunto $J \subseteq E$ tal que $\mathcal{A}(J) = \sigma\rho$, por lo tanto, $\sigma = \mathcal{A}(J)\rho$. Con esto, podemos asegurar que siempre existe un conjunto $J \subseteq E$ tal que $\sigma \sim \mathcal{A}(J)\rho$.*

De la Observación B.2 sabemos que es fácil encontrar un $J \subseteq E$ que satisface CS, la dificultad está en encontrar uno de tamaño mínimo.

Apéndice C

Propiedades del operador \mathcal{R}

Comenzaremos por recordar la definición del operador \mathcal{A} .

Definición C.1. *Consideremos un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$. Definiremos el conjunto de las particiones de G como $\mathcal{P}(G) := \{H : H \subseteq G\}$, y a $\Sigma((K, \emptyset)) := \emptyset$, para todo $(K, \emptyset) \in \mathcal{P}(G)$. De esta forma podemos definir*

$$\Sigma(\mathcal{P}(G)) := \bigcup_{H \in \mathcal{P}(G)} \Sigma(H).$$

Además denotaremos por

$$\mathcal{P}_G(*) := \{K \in \mathcal{P}(*) : G - K \text{ es no totalmente desconexo o nulo}\},$$

donde $*$ es E o V .

Definición C.2. *Definamos el **operador restricción de vértices o aristas** de una función signos como:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_* : \mathcal{P}_G(*) \times \Sigma(G) &\rightarrow \Sigma(\mathcal{P}(G)) \\ (K, \sigma) &\mapsto \mathcal{R}_*(K, \sigma) := \sigma|_{G-K} \end{aligned}$$

donde $*$ es E o V .

Observación C.1. *Notar que si $K \in \mathcal{P}_G(*)$ fijo, tenemos que $\mathcal{R}_*(K, \cdot) \in \Sigma(G - K)$. Con esto obtenemos una función $\mathcal{R}_*(K, \cdot) : \Sigma(G) \rightarrow \Sigma(G - K)$, donde $*$ es E o V .*

A continuación, mostraremos algunas propiedades que cumple el operador $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$. Lo primero que probaremos es que ese operador es un homomorfismo de grupos.

Proposición C.1. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y un $K \in \mathcal{P}_G(*)$ fijo. Se cumple que $\mathcal{R}_*(K, \sigma) \mathcal{R}_*(K, \rho) = \mathcal{R}_*(K, \sigma\rho)$ para todo $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, donde $*$ es E o V .*

Demostración.

Consideremos $\sigma, \rho \in \Sigma(G)$, notar que

$$\mathcal{R}_*(K, \sigma) \mathcal{R}_*(K, \rho) = \sigma|_{G-K} \rho|_{G-K} = \sigma\rho|_{G-K} = \mathcal{R}_*(K, \sigma\rho).$$

■

Como consecuencia de la Proposición C.1, tenemos que $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$ es un homomorfismo de grupos. Luego, el Primer Teorema de Isomorfismos 3.2 nos asegura que $\Sigma(G)/\ker(\mathcal{R}_*(K, \cdot)) \cong \text{Im}(\mathcal{R}_*(K, \cdot))$, y además $\ker(\mathcal{R}_*(K, \cdot))$ es un subgrupo normal de $\Sigma(G)$.

Es fácil ver que

$$\ker(\mathcal{R}_*(K, \cdot)) = \{\sigma \in \Sigma(G) : \sigma|_{G-K} = +1\}.$$

Esto implica que

$$\{\sigma \in \Sigma(G) : \sigma|_{G-K} = +1\} \trianglelefteq \Sigma(G),$$

para todo $K \in \mathcal{P}_G(*)$ fijo.

Otra cosa que debemos notar es que $|\ker(\mathcal{R}_E(K, \cdot))| = 2^{|K|}$ si $K \in \mathcal{P}_G(E)$, y $|\ker(\mathcal{R}_V(K, \cdot))| = 2^{|K'|}$ si $K \in \mathcal{P}_G(V)$, donde K' es el conjunto de aristas que son incidentes a algún vértice de K . De esto ultimo obtenemos que,

$$|\operatorname{Im}(\mathcal{R}_E(K, \cdot))| = |\Sigma(G)/\ker(\mathcal{R}_E(K, \cdot))| = \frac{|\Sigma(G)|}{|\ker(\mathcal{R}_E(K, \cdot))|} = 2^{|E|-K},$$

si $K \in \mathcal{P}_G(E)$. Análogamente, si $K \in \mathcal{P}_G(V)$ tenemos que $|\operatorname{Im}(\mathcal{R}_*(K, \cdot))| = 2^{|E|-K'}$.

Ahora proseguiremos analizando la sobreyectividad e inyectividad de $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$. Empecemos por la sobreyectividad.

Proposición C.2. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y un $K \in \mathcal{P}_G(*)$ fijo. Entonces $\operatorname{Im}(\mathcal{R}_*(K, \cdot)) = \Sigma(G - K)$, donde $*$ representa a E o V .*

Demostración.

Notamos que $|\Sigma(G - K)| = 2^{|E|-K}$ si $K \in \mathcal{P}_G(E)$, y $|\Sigma(G - K)| = 2^{|E|-K'}$ si $K \in \mathcal{P}_G(V)$, donde K' es el conjunto de aristas que son incidentes a algún vértice de K . Entonces $|\operatorname{Im}(\mathcal{R}_*(K, \cdot))| = |\Sigma(G - K)|$. Lo cual muestra la sobreyectividad de $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$. ■

Observación C.2. *Gracias a la proposición anterior, podemos asegurar que $\Sigma(G)/\ker(\mathcal{R}_*(K, \cdot)) \cong \Sigma(G - K)$.*

Proposición C.3. *Dado un multigrafo no totalmente desconexo $G = (V, E)$, y un $K \in \mathcal{P}_G(*)$ fijo. La función $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$ es inyectiva, donde $*$ representa a E o V , si y solo si $E[G - K] = E$.*

Demostración.

Asumamos que $E[G - K] = E$, luego $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$ es la función identidad,

entonces $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$ es inyectiva.

Ahora supongamos que $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$ es inyectiva, razonando por contradicción asumiremos que $E[G - K] \subsetneq E$. Consideremos la función signo σ dada por: $\sigma|_{G-K} = +1$ y $\sigma(e) = -1$ para todo $e \in E \setminus E[G - K]$. Notar que $\sigma \in \Sigma(G)$, $\sigma \neq +1$, y $\mathcal{R}_*(K, \sigma) = +1$, por ende $\sigma \in \ker(\mathcal{R}_*(K, \cdot))$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $E[G - K] = E$. ■

Observación C.3. *Con estas dos últimas proposiciones, podemos saber cuándo $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$ es biyectiva. Lo cual se cumple si y solo si $E[G - K] = E$, es decir, $\mathcal{R}_*(K, \cdot)$ es la función identidad.*

La única forma de que $\mathcal{R}_E(K, \cdot)$ sea biyectiva es que $K = \emptyset$. Mientras que $\mathcal{R}_V(K, \cdot)$ sea biyectiva si $K = \emptyset$ o todos los nodos en K son vértices aislados.

