

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas



ESTIMADOR DE ERROR A POSTERIORI PARA UN PROBLEMA DE ELASTICIDAD

TESIS PRESENTADA POR CINTHYA MACARENA RIVAS VALENZUELA
PARA OBTENER EL GRADO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PROFESOR GUÍA: DR. RODOLFO ARAYA DURÁN.

2014

Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar a mi familia, a mis padres Eliana y Sergio, a mi hermano Nick y a mi esposo Marco, por su apoyo y amor incondicional durante todos mis años de estudio; a mis compañeros y amigos por su ayuda durante este proceso.

Agradezco a mi profesor guía, Dr. Rodolfo Araya D. por su dedicación, entrega y paciencia que ha tenido durante este trabajo. También quisiera expresar mi gratitud al Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, CI²MA, por recibirme en sus instalaciones.

Índice general

Agradecimientos	2
1. Introducción	8
2. Notaciones y resultados preliminares	10
2.1. Espacios de Sobolev	10
2.2. Resultados de existencia y unicidad	12
2.3. Discretización por elementos finitos	15
2.4. Operadores de Interpolación	20
3. Problema Modelo	22
3.1. Problema homogéneo	22
3.2. Problema no homogéneo	29
4. Formulación Discreta	31
5. Estimaciones a posteriori	41

5.1. Estimador Residual	43
6. Resultados Numéricos	55
6.1. Implementación	56
6.1.1. Esquema Matricial	59
6.2. Experimentos Numéricos	62
6.2.1. Caso analítico	62
6.2.2. Ejemplo 2: Cavidad	67
6.2.3. Ejemplo 3	70
6.2.4. Ejemplo 4	71
6.2.5. Ejemplo 5	74
6.2.6. Ejemplo 3D	76
Bibliografía	80

Índice de figuras

6.1. Transformación afín $\mathcal{F}$ para $d = 2$	57
6.2. Dominio Ejemplo 1.	62
6.3. Convergencia de $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{0,\Omega}$ para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$	63
6.4. Convergencia de $\ p - p_h\ _{0,\Omega}$ para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$	64
6.5. Convergencia de $\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\ _E$ y de η para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$	65
6.6. Dominio Ejemplo 2.	67
6.7. Malla inicial, 64 elementos. Malla adaptada, 368 elementos.	68
6.8. Presión en la malla inicial y la malla adaptada para $\lambda = \mu = 1$	68
6.9. Malla inicial, 64 elementos. Malla adaptadas, 300 elementos.	69
6.10. Presión en la malla inicial y la malla adaptada con $\lambda \rightarrow \infty$	69
6.11. Dominio Ejemplo 3.	70
6.12. Malla inicial, 75 elementos. Malla adaptada 1526 elementos. Solución e isovalores de la primera componente de la velocidad.	71
6.13. Dominio Ejemplo 4.	72

6.14. Malla inicial, 220 elementos. Malla adaptada, 15709 elementos. Solución e isovalores de las componentes de la velocidad.	73
6.15. Dominio Ejemplo 5.	74
6.16. Malla inicial, 139 elementos. Malla adaptada, 9162 elementos.	75
6.17. Dominio Ejemplo 3D.	76
6.18. Malla inicial, 54.112 elementos. Malla adaptada, 2.754.402 elementos. .	77
6.19. Vectores y Líneas de corriente para la primera componente de la velocidad.	77
6.20. Cortes para la primera componente de la velocidad.	78
6.21. Isovalores de la primera componente de la velocidad y de la presión. . .	79

Índice de cuadros

6.1. Error del método para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$	65
6.2. Índice de efectividad para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$ cuando $h \rightarrow 0$	66
6.3. Índice de efectividad para $\lambda = 10^5$ y $\mu = 0,5$ cuando $h \rightarrow 0$	66

Capítulo 1

Introducción

El Método de Elementos Finitos (MEF) es uno de los más utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales, que surgen de problemas de ingeniería o ciencias. Es un método numérico que permite obtener una aproximación de la solución de problemas de contorno gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.

El MEF consiste en particionar el dominio donde está planteada la ecuación diferencial, y se aproxima la solución de la ecuación diferencial (dada en su forma débil) por una función que restringida a cada triángulo (2D) o tetraedro (3D) es un polinomio de grado fijo, con el propósito de ir mejorando la aproximación a medida que la partición se hace más fina.

Los MEF mixtos nos permite introducir variables adicionales, motivadas por algún interés físico o matemático, como es en el caso de las ecuaciones de la elasticidad, donde la presión es introducida como una nueva incógnita para ser aproximada simultáneamente con el vector de desplazamientos.

Los MEF mixtos utilizan espacios diferentes para aproximar variables diferentes, sin embargo, estos espacios no pueden escogerse de manera independiente, pues deben

satisfacer la condición inf-sup.

Dentro de los espacios más utilizados del MEF son del tipo $\mathbb{P}_1^2$ para el desplazamiento y $\mathbb{P}_1$ para la presión, es decir, aproximamos el desplazamiento y la presión por funciones continuas y $\mathbb{P}_1$ a trozos. Estos espacios tienen la ventaja de ser fáciles de implementar computacionalmente. Sin embargo los espacios discretos utilizados para el esquema de Galerkin del problema de elasticidad linealizada no satisfacen la condición inf-sup, con lo cual será necesario estabilizar el método.

La estabilización consiste en introducir un término extra a la formulación que regularice el problema, asegurándose un buen planteamiento de la solución discreta. Los métodos de elementos finitos estabilizados han sido utilizados por más de 20 años, comenzando por los llamados Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG), introducidos por Brook y Hughes [5], están también los llamados Galerkin Least Squares (GLS) introducidos por Hughes, Franca y Hulbert.

Para verificar que la solución numérica encontrada a través del MEF es cercana a la solución exacta del problema, es fundamental el análisis del error de aproximación. Las estimaciones de error se dividen básicamente en dos tipos: las *a priori* y las *a posteriori*. Las primeras tienen como objetivo demostrar la convergencia del método, obtener el orden del error y determinar de qué depende el error. En cambio, las estimaciones de error *a posteriori* tienen como objetivo dar información cuantitativa del error y son la base de los métodos adaptativos o de refinamiento automático de mallas.

En la presente memoria se desarrollará, de forma teórica y computacional, un estimador de error *a posteriori* aplicado al problema de elasticidad linealizada.

Capítulo 2

Notaciones y resultados preliminares

2.1. Espacios de Sobolev

Dado un abierto Ω de $\mathbb{R}^d$, ($d = 2$ o 3), $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre Ω , a valores reales. Para cada $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ definimos su soporte por

$$\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Además, introducimos el espacio de funciones

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto y } \text{sop}(\varphi) \subseteq \Omega\}.$$

Definimos el espacio

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u|^2 dx < +\infty \right\}$$

provisto del producto escalar

$$(u, v)_{0, \Omega} := \int_{\Omega} u v \, dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Se sigue que la norma $\|\cdot\|_{0, \Omega} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\|u\|_{0, \Omega} := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Por otro lado se denota por $L_0^2(\Omega)$ al espacio

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0 \right\}.$$

Dada $v \in L^2(\Omega)$, para $1 \leq i \leq d$ decimos que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ en el sentido distribucional, si existe $z_i \in L^2(\Omega)$ tal que

$$- \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} z_i \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

En este caso, escribimos $\frac{\partial v}{\partial x_i} = z_i$.

Definimos también el espacio de Sobolev

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ en el sentido distribucional}, \forall 1 \leq i \leq d \right\},$$

el cual es un espacio de Hilbert provisto del producto escalar

$$(u, v)_{1, \Omega} := (u, v)_{0, \Omega} + (\nabla u, \nabla v)_{0, \Omega}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Se sigue que la norma $\|\cdot\|_{1, \Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\|u\|_{1, \Omega} := (\|u\|_{0, \Omega}^2 + |\nabla u|_{0, \Omega}^2)^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

donde $|u|_{1,\Omega} := \|\nabla u\|_{0,\Omega}$ es una seminorma.

Además, introducimos los espacios

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ en el sentido de trazas}\},$$

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0 \text{ en el sentido de trazas}\}.$$

2.2. Resultados de existencia y unicidad

Sea H un espacio de Hilbert real con producto escalar $(\cdot, \cdot)_H$, $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y sea $F \in H'$, donde H' corresponde al espacio de los funcionales lineales y acotados sobre H . Consideremos el siguiente problema variacional: *Hallar $u \in H$ tal que*

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (2.1)$$

Teorema 2.1 (Lema de Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert y $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que*

a) B es acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$B(v, w) \leq M\|v\|_H\|w\|_H, \quad \forall v, w \in H.$$

b) B es H -elíptica, es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$B(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

Entonces, para $F \in H'$, existe un único $u \in H$ solución de (2.1). Además

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}.$$

Demostración. Ver Teorema 1.1.3 en [6]

□

Sea Q otro espacio de Hilbert y sean $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ dos formas bilineales acotadas. Dados $F \in H'$, $G \in Q'$, consideremos el siguiente problema variacional: *Hallar $(u, p) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= F(v) & \forall v \in H, \\ b(u, q) &= G(q) & \forall q \in Q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Introducimos los operadores lineales $\mathcal{B} : H \rightarrow Q'$ y $\mathcal{B}' : Q \rightarrow H'$, definidos por

$$\langle \mathcal{B}v, q \rangle_{Q' \times Q} = \langle v, \mathcal{B}'q \rangle_{H \times H'} = b(v, q), \quad \forall v \in H, \quad \forall q \in Q.$$

Teorema 2.2 (Teorema de Babuška-Brezzi). *Sea $V := N(\mathcal{B})$. Suponga que*

a) a es V -elíptica, es decir, existe una constante positiva α tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V.$$

b) Existe una constante positiva β tal que

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq \theta}} \frac{|b(v, q)|}{\|v\|_H} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q.$$

Entonces, para cada $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único $(u, p) \in H \times Q$ solución de (2.2). Además existe una constante positiva $C > 0$, que depende de α y β , tal que

$$\|u\|_H + \|p\|_Q \leq C \{\|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'}\}.$$

Demostración. Ver Capítulo 1, Corolario 4.1 en [8]. □

Observación 1. *La condición b) del Teorema de Babuška-Brezzi es conocida como condición inf-sup, debido a que ella se puede escribir como:*

$$\inf_{\substack{q \in Q \\ q \neq \theta}} \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq \theta}} \frac{|b(v, q)|}{\|v\|_H \|q\|_Q} \geq \beta.$$

En algunas aplicaciones, en particular en materiales casi incompresibles, se requiere una formulación más general que la del problema (2.2). Entonces introducimos una nueva forma bilineal acotada $c : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, y consideramos la siguiente extensión del problema (2.2): *Hallar $(u, p) \in H \times Q$ tal que*

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= F(v) & \forall v \in H, \\ b(u, q) - c(p, q) &= G(q) & \forall q \in Q. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Denotamos por $\mathcal{C} : Q \rightarrow Q'$ el operador asociado con la forma bilineal c , definido por

$$\langle \mathcal{C}q, r \rangle_{Q' \times Q} = c(q, r), \quad \forall q, r \in Q.$$

Teorema 2.3. *Suponga que*

a) a es semidefinida positiva, esto es

$$a(v, v) \geq 0, \quad \forall v \in H,$$

b) c es semidefinida positiva y simétrica,

c) el rango del operador $\mathcal{B}$ es cerrado en Q' , esto es, existe una constante positiva k_0 tal que

$$\sup_{v \in H} \frac{b(v, q)}{\|v\|_H} \geq k_0 \|q\|_{Q/Ker \mathcal{B}'} \quad \forall q \in Q/Ker \mathcal{B}',$$

d) a es invertible sobre el $Ker \mathcal{B}$, esto es, existe una constante positiva α_0 , tal que

$$\left\{ \begin{aligned} \inf_{u_0 \in Ker \mathcal{B}} \sup_{v_0 \in Ker \mathcal{B}} \frac{a(u_0, v_0)}{\|u_0\|_H \|v_0\|_H} &\geq \alpha_0, \\ \inf_{v_0 \in Ker \mathcal{B}} \sup_{u_0 \in Ker \mathcal{B}} \frac{a(u_0, v_0)}{\|u_0\|_H \|v_0\|_H} &\geq \alpha_0, \end{aligned} \right.$$

e) Existe una constante positiva γ_0 tal que $\forall \bar{p} \in (Ker \mathcal{B}')^\perp$ y $\forall \delta > 0$, la solución $p_0 := p - \bar{p} \in Ker \mathcal{B}'$ de la ecuación

$$\delta(p_0, q)_Q + c(p_0, q) = -c(\bar{p}, q), \quad \forall q \in Ker \mathcal{B}',$$

es acotada por

$$\gamma_0 \|p_0\|_Q \leq \|\bar{p}\|_Q.$$

Entonces para todo $F \in H'$ y todo $G \in Im \mathcal{B}$, el problema (2.3) tiene una solución (u, p) , que es única en $H \times Q/M$, donde

$$M = Ker \mathcal{B}' \cap Ker \mathcal{C}.$$

Demostración. Ver Capítulo 2, Teorema 1.2 en [4]

□

2.3. Discretización por elementos finitos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 2$ o 3) un dominio abierto acotado, conexo y con frontera poligonal. Una triangulación $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ es una partición de $\bar{\Omega}$ en triángulos ($d = 2$) o tetraedros ($d = 3$) K tales que:

1. $\forall K \in \mathcal{T}_h : \overset{\circ}{K} \neq \emptyset$
2. $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h, K_1 \neq K_2$ se tiene que $\overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset$
3. $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h, K_1 \neq K_2$, entonces su intersección $K_1 \cap K_2$ es:
 - (I) vacía, o un vértice común, o un lado común de ambos triángulos cuando $d = 2$;
 - (II) vacía, o un vértice común, o un lado común, o una cara común de ambos tetraedros cuando $d = 3$.

Para $K \in \mathcal{T}_h$ denotemos por h_K al diámetro de K

$$h_K := \text{diam}(K),$$

por ρ_K el diámetro del círculo (esfera) inscrito en K

$$\rho_K := \sup\{\text{diam}(S) : S \text{ círculo (esfera) incluido en } K\},$$

y por σ_K al cociente

$$\sigma_K := \frac{h_K}{\rho_K}.$$

También denotaremos por h al diámetro de la triangulación $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$, es decir,

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

Definición 2.4. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones de $\overline{\Omega}$. Diremos que ella es regular si existe una constante $\sigma > 0$, independiente de h , tal que:

$$\sigma_K \leq \sigma, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall h.$$

Definición 2.5. Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones de $\overline{\Omega}$. Si $d = 2$ diremos que ella satisface una condición de ángulo mínimo, si existe una constante $\alpha_0 > 0$, independiente de h tal que

$$\alpha_K \geq \alpha_0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall h,$$

donde α_K es el ángulo mínimo de K .

Observación 2. *Esta definición puede ser extendida al caso $d = 3$. Llamaremos por ángulos diedros los ángulos entre dos caras de un tetraedro, y por ángulos sólidos los ángulos entre dos de sus lados. Entonces cuando $d = 3$, diremos que la familia de triangulaciones satisface una condición de ángulo mínimo, si existe una constante $\alpha_0 > 0$, independiente de h tal que para todo $\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, para todo tetraedro $K \in \mathcal{T}_h$ y para cualquier ángulo diedro o sólido α de K*

$$\alpha \geq \alpha_0.$$

Observación 3. *Se puede probar que una familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\overline{\Omega}$ es regular si y sólo si satisface la condición de ángulo mínimo. De aquí, es claro que si $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es regular, entonces dado un nodo de $\mathcal{T}_h$, existe una constante positiva que acota uniformemente el número de elementos de $\mathcal{T}_h$ que comparten dicho nodo.*

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia regular de triangulaciones de Ω y sea $\mathcal{T}_h$ un elemento de la familia, denotemos por $\mathcal{E}_h$ al conjunto de todos los lados (caras) de $\mathcal{T}_h$ con la división usual $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_\Omega \cup \mathcal{E}_N \cup \mathcal{E}_D$, donde $\mathcal{E}_\Omega$, $\mathcal{E}_N$ y $\mathcal{E}_D$ denotan los lados (caras) interiores, los lados (caras) en la frontera con condición de Neumann Γ_N y los lados (caras) en la frontera con condición de Dirichlet Γ_D , respectivamente. También denotaremos por N_h al conjunto de todos los vértices de $\mathcal{T}_h$ con la división usual $N_h = N_\Omega \cup N_N \cup N_D$, donde N_Ω , N_N y N_D denotan los vértices interiores, los vértices en la frontera con condición de Neumann Γ_N y los vértices en la frontera con condición de Dirichlet Γ_D , respectivamente.

Para $K \in \mathcal{T}_h$ denotemos por $h_E := |E|$, $E \in \mathcal{E}_h$. También denotamos por $N(K)$ al conjunto de todos los vértices de K , por $N(E)$ al conjunto de vértices de E , y por $\mathcal{E}(K)$, el conjunto de lados de K . También para $K \in \mathcal{T}_h$ y $E \in \mathcal{E}_h$ definimos las siguientes vecindades:

$$\omega_K := \bigcup_{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(K') \neq \emptyset} K' \quad , \quad \tilde{\omega}_K := \bigcup_{N(K) \cap N(K') \neq \emptyset} K'$$

$$\omega_E := \bigcup_{E \in \mathcal{E}(K')} K' \quad , \quad \tilde{\omega}_E := \bigcup_{N(E) \cap N(K') \neq \emptyset} K'$$

$$\omega_x := \bigcup_{x \in N(K')} K'.$$

Dado un lado (cara) $E \in \mathcal{E}_h$, le asociamos un vector unitario $\mathbf{n}_E$ que es ortogonal con E y que coincide con el vector normal a $\partial\Omega$, si $E \subset \partial\Omega$. Sea $\phi \in L^2(\omega_E)^d$ tal que $\phi|_{K'} \in \mathcal{C}(K')^d$, para todo $K' \in \omega_E$. Definimos el *salto* de ϕ sobre E por:

$$[\![\phi]\!]_E(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(x + t\mathbf{n}_E) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \phi(x + t\mathbf{n}_E), \quad \forall x \in E.$$

Definición 2.6 (Funciones Burbujas). *Sea $K \in \mathcal{T}_h$, definimos la función burbuja elemental b_K por:*

$$b_K := (d+1)^{d+1} \prod_{x \in N(K)} \lambda_x,$$

donde λ_x denota la coordenada baricéntrica asociada al nodo x , es decir, λ_x es igual a 1 en x y se anula en los otros vértices. Sea $\hat{K}$ el triángulo (tetraedro) de referencia. Denotemos a los lados (caras) de $\hat{K}$ por $\hat{E}_j$, con $1 \leq j \leq d+1$.

Definimos la función burbuja del lado (cara) $\hat{E}_2$, $b_{\hat{E}_2}$, por:

$$b_{\hat{E}_2}(x) := \begin{cases} d^d \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3, & x \in \hat{K} \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Sea $E \in \mathcal{E}_\Omega$ y supongamos que $\omega_E = K_1 \cup K_2$, entonces definimos $G_{E,i}$, $i = 1, 2$, la transformación afín que preserva la orientación tal que $G_{E,i}(\hat{K}) = K_i$ y $G_{E,i}(E) = E$, $i = 1, 2$. Definimos la función burbuja del lado (cara) E por:

$$b_E(x) := \begin{cases} b_{\hat{E}_2} \circ G_{E,i}^{-1}, & x \in K_i, i = 1, 2, \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Si $E \in \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_N$, b_E se define con las modificaciones obvias.

Cuando $d = 2$, sea $\widehat{\Pi}$ el hiperplano definido por $\widehat{\Pi} := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y cuando $d = 3$, sea la recta $\widehat{\Pi} := \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Sea $\widehat{Q} : \mathbb{R}^d \rightarrow \widehat{\Pi}$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^d$ en $\widehat{\Pi}$. Introducimos el operador de levantamiento $\widehat{P}_{\widehat{E}} : \mathbb{P}_k(\widehat{E}) \rightarrow \mathbb{P}_k(\widehat{K})$ por

$$\widehat{P}_{\widehat{E}}(\widehat{s}) = \widehat{s} \circ \widehat{Q} \quad \forall \widehat{s} \in \mathbb{P}_k(\widehat{E}).$$

Aquí $\mathbb{P}_k$ denota el espacio de los polinomios de grado a lo más k .

Sea $E \in \mathcal{E}_h$ y sea $K_i \subset \omega_E$, definimos otro operador de levantamiento $P_{E, K_i} : \mathbb{P}_k(E) \rightarrow \mathbb{P}_k(K_i)$ por

$$P_{E, K_i}(s) = \widehat{P}_{\widehat{E}}(s \circ G_{E, i}) \circ G_{E, i}^{-1} \quad \forall s \in \mathbb{P}_k(E).$$

Con estas notaciones, podemos definir un último operador de levantamiento $P_E : \mathbb{P}_k(E) \rightarrow \mathbb{P}_k(\omega_E)$ por

$$P_E(s) := \begin{cases} P_{E, K_1}(s) & \text{en } K_1 \\ P_{E, K_2}(s) & \text{en } K_2 \end{cases}, \quad \forall s \in \mathbb{P}_k(E). \quad (2.4)$$

Para $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{P}_k^2$ ($\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{P}_k^3$), denotamos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{s}) &= (P_E(s_1), P_E(s_2)), & \text{si } d = 2, \\ \mathbf{P}(\mathbf{s}) &= (P_E(s_1), P_E(s_2), P_E(s_3)), & \text{si } d = 3. \end{aligned}$$

Teorema 2.7. *Sean $K \in \mathcal{T}_h$ y $v \in \mathbb{P}_k(K)$, entonces existen constantes positivas C_1 y C_2 independientes de h tales que*

$$\|v\|_{0, K}^2 \leq C_1(v, b_K v)_{0, K}, \quad (2.5)$$

$$\|v b_K\|_{0, K} \leq C_2 h_K^{-1} \|v\|_{0, K}. \quad (2.6)$$

Además, sean $E \in \mathcal{E}_h$ y $s \in \mathbb{P}_k(E)$, entonces existen constantes positivas C_3 y C_4 independientes de h tal que

$$\|s\|_{0,E}^2 \leq C_3(s, b_E s)_{0,E} \quad (2.7)$$

$$\|P(s)b_E\|_{0,\omega_E} \leq C_2 h_E^{-1/2} \|s\|_{0,E}. \quad (2.8)$$

Demostración. Ver Teorema 19 en [2]. $\square$

2.4. Operadores de Interpolación

Sea $H := H_{\Gamma_D}^1$, denotemos por H_h al subespacio de dimensión finita de H definido por:

$$H_h := \{\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d : \varphi|_K \in \mathbb{P}_m(K)^d, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \cap H.$$

Para cada nodo interno x_i , $1 \leq i \leq N$ de la triangulación, asociamos la función base $\varphi_i \in H_h$, de modo que

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Definición 2.8. Definimos el operador de interpolación de Lagrange, como la aplicación $\Pi_h : \mathcal{C}(\overline{\Omega})^d \rightarrow H_h$, definida por

$$\Pi_h \mathbf{v} := \sum_{i=1}^N \mathbf{v}(x_i) \varphi_i. \quad (2.9)$$

Teorema 2.9. Para todo $K \in \mathcal{T}_h$ y todo $\mathbf{v} \in H^s(K)^d \cup \mathcal{C}(K)^d$, existe una constante positiva C independiente de h tal que

$$|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}|_{r,K} \leq C h_K^{s-r} |\mathbf{v}|_{s,K} \quad (2.10)$$

con $0 \leq r \leq 2$ y $\max\{r, 1\} \leq s \leq m + 1$.

Demostración. Ver Teorema 3.1.6 en [6] $\square$

Ahora presentamos otro operador que puede ser definido para funciones menos regulares que $H^2(\Omega)^d$. Sea $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d$. Denotaremos por $\Pi_x \mathbf{u} \in H_h$ a la proyección ortogonal $L^2(\omega_x)^d$ de $\mathbf{u}$ sobre H_h , es decir

$$\int_{\omega_x} \Pi_x \mathbf{u} \mathbf{v} \, dx = \int_{\omega_x} \mathbf{u} \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in H_h.$$

Definición 2.10. Definimos el operador de interpolación de Clément, como la aplicación $I_h : L^2(\Omega) \rightarrow H_h$, definida por

$$(I_h \mathbf{u})(x) = \begin{cases} (\Pi_x \mathbf{u})(x), & x \in N_\Omega \cup N_N \\ 0, & x \in N_D. \end{cases}$$

Lema 2.11. Sea $K \in \mathcal{T}_h$, $E \in \mathcal{E}_h$ y $\mathbf{u} \in H$. Entonces existen constantes positivas C_1 , C_2 y C_3 , independientes de h , tales que

$$\|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}\|_{0,K} \leq C_1 h_K |\mathbf{u}|_{1,\tilde{\omega}_K} \quad (2.11)$$

$$\|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}\|_{0,E} \leq C_2 h_E^{1/2} |\mathbf{u}|_{1,\tilde{\omega}_E} \quad (2.12)$$

$$\|I_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \quad (2.13)$$

Demostración. Ver Lema 1.127 en [1]. □

Capítulo 3

Problema Modelo

3.1. Problema homogéneo

Consideremos el problema de elasticidad linealizada:

Hallar $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

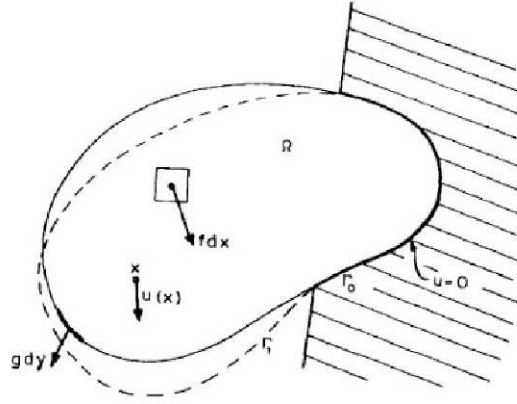
$$(E) \begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_N, \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto, abierto, conexo, acotado, de frontera poligonal (poliédrica) de $\mathbb{R}^d$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, $|\Gamma_D| > 0$ y $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_N)^d$, $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior a Γ ; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ son los coeficientes de Lamé del material que ocupa el dominio Ω , y donde el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ tiene la forma

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) := 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq d,$$

aquí $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ son las componentes del tensor de deformaciones linealizado, las que están definidas por

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad 1 \leq i, j \leq d.$$



Observación 4. Los coeficientes de Lamé caracterizan por completo el comportamiento elástico de un material. Otro par de parámetros constantemente usados son el módulo de Young de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν . Estos pares de constantes se relacionan entre ellos por las ecuaciones:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

La formulación variacional estandar asociada a la ecuación (E) está dada por:
Hallar $\mathbf{u} \in H := H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d$ tal que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H, \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} A &: H \times H \rightarrow \mathbb{R} \\ A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} G &: H \rightarrow \mathbb{R} \\ G(\mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Es conocido que la formulación (3.1) presenta problemas cuando el material es casi incompresible pues en ese caso λ se acerca a $+\infty$. Para tratar esto, existe una formulación mixta del problema (E), la que permite considerar tanto el caso compresible como el incompresible. Para ello se introduce una variable auxiliar p , denominada presión hidrostática en el caso incompresible, definida por

$$p := -\lambda \nabla \cdot \mathbf{u},$$

con esto las componentes del tensor de esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ quedan dadas por

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}, p) = 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - p \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Luego el problema diferencial (E) puede ser escrito como:

Hallar $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$(Em) \left\{ \begin{array}{lll} -2\mu \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_D \\ \{2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p \mathbf{I}\} \mathbf{n} &= \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

Multiplicamos la primera ecuación por $\mathbf{v} \in H$,

$$\int_{\Omega} (-2\mu \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

$$\int_{\Omega} (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p \mathbf{I}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\partial\Omega} (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p \mathbf{I}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

$$2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Multiplicamos la segunda ecuación por $q \in Q := L^2(\Omega)$

$$- \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} p q \, dx = 0.$$

Así, la formulación mixta asociada al problema (Em) está dada por:

Hallar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q := H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= G(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H \\ b(\mathbf{u}, q) - c(p, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde las formas bilineales a , b y c están dadas por:

$$\begin{aligned} a &: H \times H \rightarrow \mathbb{R} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= 2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} b &: H \times Q \rightarrow \mathbb{R} \\ b(\mathbf{v}, q) &:= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} c &: Q \times Q \rightarrow \mathbb{R} \\ c(p, q) &:= \epsilon \int_{\Omega} p q \, dx, \end{aligned} \tag{3.7}$$

con $\epsilon := 1/\lambda$.

Observación 5. *Definiendo*

$$\begin{aligned} B &: (H \times Q) \times (H \times Q) \rightarrow \mathbb{R} \\ B((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) &:= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q) - c(p, q) \\ &= 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{0,\Omega} - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p)_{0,\Omega} - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_{0,\Omega} - \epsilon(p, q)_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &: H \times Q \rightarrow \mathbb{R} \\ F(\mathbf{v}, q) &:= G(\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{0,\Gamma_N}, \end{aligned}$$

la formulación variacional (3.4) se puede escribir como:

Hallar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q := H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ tal que

$$B((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = F(\mathbf{v}, q) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in H \times Q.$$

Para demostrar la existencia y unicidad de la solución de la formulación mixta (3.4), necesitamos el siguiente resultado:

Teorema 3.1 (Desigualdad de Korn). *Existe una constante $C > 0$, que depende de Ω , tal que*

$$C\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in H.$$

Demostración. Ver Teorema 3.77 en [1]. □

Verifiquemos que tanto las formas bilineales a , b , c y el funcional lineal F satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3:

- Las formas bilineales a , b y c son acotadas. En efecto, sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$ y $p, q \in Q$,

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq 2\mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\|_{0,\Omega} \\
&\leq 2C_1\mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega} |\mathbf{w}|_{1,\Omega} \\
&\leq 2C_1\mu \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{v}, q)| &\leq \|p\|_{0,\Omega} \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\
&\leq C_2 \|p\|_{0,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \\
&\leq C_2 \|p\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

$$|c(p, q)| \leq \epsilon \|p\|_{0,\Omega} \|q\|_{0,\Omega}.$$

- a es semidefinida positiva. En efecto, sea $\mathbf{v} \in H$

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2\mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq 0.$$

- c es semidefinida positiva y simétrica. En efecto, sean $q, r \in Q$

$$\begin{aligned}
c(q, q) &= \epsilon \|q\|_{0,\Omega}^2 \geq 0, \\
c(q, r) &= \epsilon (q, r)_{0,\Omega} = \epsilon (r, q)_{0,\Omega} = c(r, q).
\end{aligned}$$

- Veamos que el rango del operador $\mathcal{B}$ es cerrado en Q' .

Notemos que $\mathcal{B} := \text{div} : H \rightarrow Q$ y $\mathcal{B}' := -\nabla : Q \rightarrow H^{-1}(\Omega)^d$, entonces

$$\text{Ker} \mathcal{B}' = \text{Ker}(-\nabla) = \{q \in Q : q \text{ es constante sobre } \Omega\}.$$

Sea $q \in Q/\text{Ker} \mathcal{B}'$, como $L_0^2(\Omega)$ puede ser identificado isométricamente con $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, y el operador divergencia es un isomorfismo de $V^\perp$ en $L_0^2(\Omega)$ (ver Corolario 2.4 en [8]) con $V := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$, se tiene que existe un único $v_q \in V^\perp$ tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_q = q \quad \text{y} \quad \|\mathbf{v}_q\|_{1,\Omega} \leq C_3 \|q\|_{0,\Omega},$$

donde C_3 es una constante positiva que depende de Ω . Ahora usando el hecho que $H_0^1(\Omega)^d \subset H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d$, tenemos

$$\sup_{\mathbf{v} \in H - \{0\}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq \frac{|b(\mathbf{v}_q, q)|}{\|\mathbf{v}_q\|_{1,\Omega}} = \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_q, q)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{v}_q\|_{1,\Omega}} = \frac{\|q\|_{0,\Omega}^2}{\|\mathbf{v}_q\|_{1,\Omega}} \geq \frac{\|q\|_{0,\Omega}^2}{C_3 \|q\|_{0,\Omega}} = k_0 \|q\|_{0,\Omega},$$

donde $k_0 := \frac{1}{C_3} > 0$.

- a es invertible sobre el $Ker \mathcal{B}$. Notemos primero que a es H -elíptica. En efecto, sea $\mathbf{v} \in H$, usando la desigualdad de Korn,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2\mu \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \geq 2C_4\mu \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Entonces, usando que a es H -elíptica y simétrica, tenemos que a es invertible sobre el $Ker \mathcal{B}$.

- Sean $\bar{p} \in (Ker \mathcal{B}')^\perp$ y $\delta > 0$, entonces la ecuación

$$\delta(p_0, q)_Q + c(p_0, q) = -c(\bar{p}, q), \quad \forall q \in Ker \mathcal{B}',$$

se reduce a

$$(\delta + \epsilon)(p_0, q)_{0,\Omega} = 0, \quad \forall q \in Ker \mathcal{B}',$$

de donde $p_0 = 0$. Así para cualquier $\gamma_0 > 0$, $\gamma_0 \|p_0\|_Q \leq \|\bar{p}\|_Q$.

- G es acotado. Sea $\mathbf{v} \in H$,

$$\begin{aligned} |G(\mathbf{v})| &\leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{0,\Gamma_N} \|\mathbf{v}\|_{0,\Gamma_N} \\ &\leq (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{0,\Gamma_N}) \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, del Teorema 2.3, la formulación variacional mixta (3.4) tiene una solución $(\mathbf{u}, p)$, que es única en $H \times Q/M$, donde

$$M = Ker \mathcal{B}' \cap Ker \mathcal{C}.$$

Como en nuestro caso $Ker \mathcal{C} = \{0\}$, entonces $M = \{0\}$, por lo tanto, la formulación variacional mixta (3.4) tiene una solución $(\mathbf{u}, p)$, que es única en $H \times Q$.

Observación 6. *Notar que cuando el material se acerca a la incompresibilidad, es decir cuando $\lambda \rightarrow +\infty$, se tiene que $\epsilon \rightarrow 0$ lo que no representa un problema para la formulación variacional mixta (3.4).*

Observación 7. *La condición inf-sup, aún cuando sea válida en el caso continuo, no necesariamente es verdad (con una constante β independiente de h) en el caso discreto, lo que impone una restricción a la elección de los subespacios discretos para el desplazamiento y la presión.*

3.2. Problema no homogéneo

Consideramos ahora el problema de elasticidad con condición de Dirichlet no nula: Hallar $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$(E2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D & \text{en } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_N, \end{cases}$$

donde $\mathbf{u}_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)^d$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ y $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_N)^d$.

Siguiendo el mismo análisis anterior, puede probarse que la formulación variacional está dada por: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$ en Γ_D y

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} pq \, dx &= 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como en este caso no podemos aplicar el teorema que nos asegura existencia y unicidad, se considera un elemento $\tilde{\mathbf{u}}_D \in H^1(\Omega)^d$ tal que $\tilde{\mathbf{u}}_D = \mathbf{u}_D$ en Γ_D . La existencia de tal $\tilde{\mathbf{u}}_D$ está garantizada por el Teorema de Trazas. Introduciendo una nueva incógnita $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_D$, observamos que $\tilde{\mathbf{u}} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, y luego (3.8) es equivalente a:

Hallar $(\tilde{\mathbf{u}}, p) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= G(\mathbf{v}) - a(\tilde{\mathbf{u}}_D, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \\ b(\tilde{\mathbf{u}}, q) - c(p, q) &= b(\tilde{\mathbf{u}}_D, q) \quad \forall q \in L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde a , b , c y G son los mismos que definimos en (3.5), (3.6), (3.7) y (3.3) respectivamente. Utilizando los resultados ya demostrados para las formas a , b , c y aplicando nuevamente el Teorema (2.3), concluimos que (3.9) tiene una única solución $\tilde{\mathbf{u}} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$. Así, $\mathbf{u} := \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}_D$ es la única solución de la formulación (3.8).

Capítulo 4

Formulación Discreta

Sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones del dominio $\bar{\Omega}$ y sea $\mathcal{T}_h$ un elemento de la familia compuesta de triángulos ($d = 2$) o tetraédros ($d = 3$), y sean H_h y Q_h los espacios de elementos finitos dados por

$$\begin{aligned} H_h &:= \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})^d : \mathbf{v}_h|_K \in \mathbb{P}_m^d(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d \\ Q_h &:= \{ q_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : q_h|_K \in \mathbb{P}_l(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \cap L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Esta elección particular de espacios discretos H_h y Q_h , con m y l arbitrarios, no satisface necesariamente la condición inf-sup en el nivel discreto, por lo que necesitamos realizar algunos cambios para recuperar la estabilidad del esquema. Para ello, el método de elementos finitos que se usará en la presente memoria, es el método estabilizado introducido por Franca y Stenberg en [7], considerando $l = 1$, el cual consiste en:

Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = F_\tau(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in H_h \times Q_h, \quad (4.1)$$

donde la forma bilineal B_τ y la forma lineal F_τ están dadas por:

$$B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) := B((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) + \nabla p_h, -\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) + \nabla q_h)_{0,K},$$

$$F_\tau(\mathbf{v}_h, q_h) := F(\mathbf{v}_h, q) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\mathbf{f}, -\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) + \nabla q_h)_{0,K},$$

donde el parámetro de estabilización τ_K está dado por

$$\tau_K := \alpha \frac{h_K^2}{\mu},$$

con $\alpha > 0$, B y F definidos en la Observación 5.

Observación 8. En este capítulo usaremos las letras C , C_I , C_1 , $C_2, \dots$ para denotar constantes positivas independientes de h y λ .

Para resultados posteriores, ocuparemos las siguientes desigualdades inversas.

Teorema 4.1 (Desigualdades Inversas). Sea $K \in \mathcal{T}_h$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ Existen constantes positivas C_1 y C_2 , independientes de K tales que

$$\begin{aligned} C_1 h_K \|\nabla q\|_{0,K} &\leq \|q\|_{0,K}, \\ C_2 h_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(q)\|_{0,K} &\leq \|\boldsymbol{\varepsilon}(q)\|_{0,K}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $q \in H_h$.

Demostración. Ver Lema 1.138 en [1] □

Introduciremos la abreviación $|\cdot|_h$ para la semi norma definida sobre Q :

$$|q|_h := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}. \tag{4.3}$$

Usando el Teorema 4.1 obtenemos las siguientes desigualdades inversas:

$$\begin{aligned}
|q_h|_h &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha}{\mu C} \|q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\mu}} \|q_h\|_{0,\Omega}, \quad \forall q_h \in Q_h.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{C} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 \leq C_I^{-1} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall \mathbf{v}_h \in H_h. \tag{4.5}$$

Veamos que B_τ es una forma bilineal acotada.

Lema 4.2. *Existe una constante positiva C , tal que para todo $(\mathbf{v}_h, q_h) \in H_h \times Q_h$ y $(\mathbf{w}_h, r_h) \in H_h \times Q_h$ se tiene*

$$B_\tau((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{w}_h, r_h)) \leq C (\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|q_h\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \cdot (\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|r_h\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}.$$

Demostración. Sean $(\mathbf{v}_h, q_h) \in H_h \times Q_h$ y $(\mathbf{w}_h, r_h) \in H_h \times Q_h$,

$$\begin{aligned}
&B_\tau((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{w}_h, r_h)) \\
&= 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_{0,\Omega} - (q_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_{0,\Omega} - (r_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} - \epsilon(q_h, r_h)_{0,\Omega} \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) + \nabla q_h, -\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h) + \nabla r_h)_{0,K} \\
&\leq 2\mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)\|_{0,\Omega} + \|q_h\|_{0,\Omega} \|\nabla \cdot \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} + \|r_h\|_{0,\Omega} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \\
&\quad + \epsilon \|q_h\|_{0,\Omega} \|r_h\|_{0,\Omega} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|-\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) + \nabla q_h\|_{0,K} \|-\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h) + \nabla r_h\|_{0,K} \\
&\leq C \left(\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 + (\epsilon + 1) \|q_h\|_{0,\Omega}^2 + |q_h|_h^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \cdot \left(\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)\|_{0,K}^2 + (\epsilon + 1) \|r_h\|_{0,\Omega}^2 + |r_h|_h^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

De la ecuación (4.5)

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 \leq C \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2,$$

entonces, finalmente aplicando (4.4) queda demostrado. $\square$

Para demostrar la estabilidad del método, necesitamos el siguiente resultado:

Lema 4.3. *Existen constantes positivas C_1, C_2 tales que*

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in H_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}} \geq C_1 \|q_h\|_{0,\Omega} - C_2 \|q_h\|_h, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.6)$$

Demostración. Sea $q_h \in Q_h$, primero escribimos q_h como $q_h = \bar{q}_h + q_h^*$, con

$$\bar{q}_h = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q_h \, dx.$$

De donde $q_h^* = q_h - \bar{q}_h \in L_0^2(\Omega)$, pues $\int_{\Omega} q_h^* \, dx = 0$. Luego existe un $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^d$ no nulo, tal que $\nabla \cdot \mathbf{w} = q_h^*$ y $C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq \|q_h^*\|_{0,\Omega}$, así

$$(\nabla \cdot \mathbf{w}, q_h)_{0,\Omega} = (\nabla \cdot \mathbf{w}, \bar{q}_h)_{0,\Omega} + (\nabla \cdot \mathbf{w}, q_h^*)_{0,\Omega}.$$

Pero integrando por partes

$$(\nabla \cdot \mathbf{w}, \bar{q}_h)_{0,\Omega} = (\mathbf{w}, \nabla \bar{q}_h)_{0,\Omega} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \bar{q}_h)_{0,\partial\Omega} = 0,$$

de donde

$$(\nabla \cdot \mathbf{w}, q_h)_{0,\Omega} = (\nabla \cdot \mathbf{w}, q_h^*)_{0,\Omega} = (q_h^*, q_h^*)_{0,\Omega} = \|q_h^*\|_{0,\Omega}^2 \geq C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|q_h^*\|_{0,\Omega}.$$

Sea $I_h \mathbf{w} \in H_h \cap H_0^1(\Omega)^d$ el operador de interpolación de Clément de $\mathbf{w}$. Usando los resultados del Lema 2.11 y el hecho que la malla es regular, obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|\mathbf{w} - I_h \mathbf{w}\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E^{-1} \|\mathbf{w} - I_h \mathbf{w}\|_{0,E} \right)^{1/2} \\ & \leq C_4 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{w}\|_{1,\tilde{\omega}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1,\tilde{\omega}_E}^2 \right)^{1/2} \leq C_4 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (4.7)$$

y

$$\|I_h \mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq C_5 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}.$$

Integrando por partes sobre cada $K \in \mathcal{T}_h$, y usando (4), se obtiene

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot I_h \mathbf{w}, q_h)_{0,\Omega} &= (\nabla \cdot I_h \mathbf{w}, q_h^*)_{0,\Omega} \\ &= (\nabla \cdot (I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}), q_h^*)_{0,\Omega} + (\nabla \cdot \mathbf{w}, q_h^*)_{0,\Omega} \\ &\geq (\nabla \cdot (I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}), q_h^*)_{0,\Omega} + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|q_h^*\|_{0,\Omega} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [(I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}, \nabla q_h^*)_{0,K} + ((I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}, q_h^*)_{0,\partial K}] + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|q_h^*\|_{0,\Omega} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}) \nabla q_h^* dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \int_E ((I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}) [q_h^*] ds \\ &\quad + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega} \\ &\geq - \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E^{-1} \int_E |I_h \mathbf{w} - \mathbf{w}|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h^*\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E \int_E |[q_h^*]|^2 ds \right)^{1/2} + C_3 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|q_h^*\|_{0,\Omega} \\ &\geq \left\{ -C_4 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h^*\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E \int_E |[q_h^*]|^2 ds \right)^{1/2} + C_3 \|q_h^*\|_{0,\Omega} \right\} \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Pero como $Q_h \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, se tiene que $q_h^* = q_h - \bar{q}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, de donde

$$\left(\sum_{K \in Th} h_K^2 \|\nabla q_h^*\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E \int_E |[q_h^*]|^2 ds \right)^{1/2} \leq C_6 |q_h^*|_h = C_6 |q_h|_h$$

Combinando ambas estimaciones obtenemos:

$$\frac{(\nabla \cdot I_h \mathbf{w}, q_h)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}} \geq C_7 \|q_h^*\|_{0,\Omega} - C_8 |q_h|_h.$$

Finalmente, existe $\mathbf{z}_h \in H_h$, $\mathbf{z}_h \neq \mathbf{0}$ (ver [7]), tal que

$$\frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}_h, \bar{q}_h)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{z}_h\|_{1,\Omega}} \geq C_9 \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}.$$

Ahora, dado $\delta > 0$, tomando $\mathbf{v}_h = \frac{I_h \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{\mathbf{z}_h}{\|\mathbf{z}_h\|_{1,\Omega}}$ tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)_{0,\Omega} &= \frac{(\nabla \cdot I_h \mathbf{w}, q_h)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}_h, q_h)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{z}_h\|_{1,\Omega}} \\ &= \frac{(\nabla \cdot I_h \mathbf{w}, q_h)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}_h, \bar{q}_h)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{z}_h\|_{1,\Omega}} + \delta \frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}_h, q_h^*)_{0,\Omega}}{\|\mathbf{z}_h\|_{1,\Omega}} \\ &\geq C_7 \|q_h^*\|_{0,\Omega} - C_8 |p_h|_h + \delta C_9 \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega} - \delta \|q_h^*\|_{0,\Omega} \\ &\geq C_{10} \|q_h\|_{0,\Omega} - C_{11} |q_h|_h \end{aligned}$$

cuando $\delta < C_7$. Y como

$$\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} = \frac{\|I_h \mathbf{w}\|_{1,\Omega}}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}} + \delta \leq C_5 + \delta. \quad (4.8)$$

tomando el supremo obtenemos el resultado. $\square$

Ahora estamos listos para probar la estabilidad del método.

Lema 4.4. *Existe una constante positiva C , independiente de h y λ tal que para $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ se tiene*

$$\sup_{\substack{(\mathbf{v}_h, q_h) \in H_h \times Q_h \\ (\mathbf{v}_h, q_h) \neq (\mathbf{0}, 0)}} \frac{B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h))}{(\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|q_h\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}} \geq C(\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|p_h\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Demostración. Sea $\mathbf{w}_h \in H_h$ una función para la cual el supremo del Lema 4.3 se alcanza y asumamos que $\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} = \|p_h\|_{0,\Omega}$.

Sea $\delta > 0$, eligiendo $(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{u}_h - \delta \mathbf{w}_h, -p_h)$ tenemos

$$\sup_{\substack{(\mathbf{v}_h, q_h) \in H_h \times Q_h \\ (\mathbf{v}_h, q_h) \neq (\mathbf{0}, 0)}} \frac{B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h))}{(\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|q_h\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}} \geq \frac{B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h - \delta \mathbf{w}_h, -p_h))}{(\|\mathbf{u}_h - \delta \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|p_h\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}}.$$

Usando la bilinealidad de B_τ ,

$$B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h - \delta \mathbf{w}_h, -p_h)) = B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, -p_h)) + \delta B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (-\mathbf{w}_h, 0)). \quad (4.10)$$

■ Notemos que de (4.5) y de la desigualdad de Korn tenemos

$$\begin{aligned} B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, -p_h)) &= 2\mu\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon\|p_h\|_{0,\Omega} + |p_h|_h^2 - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 \\ &\geq (2\mu - \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{\alpha_K\} C_I^{-1}) \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon\|p_h\|_{0,\Omega} + |p_h|_h^2 \\ &\geq C_1 \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + \epsilon\|p_h\|_{0,\Omega}^2 + |p_h|_h^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

■ Además, usando la bilinealidad de B_τ ,

$$\begin{aligned} &B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (-\mathbf{w}_h, 0)) \\ &= B_\tau((\mathbf{u}_h, 0), (-\mathbf{w}_h, 0)) + B_\tau((0, p_h), (-\mathbf{w}_h, 0)) \\ &= B_\tau((\mathbf{u}_h, 0), (-\mathbf{w}_h, 0)) + (\nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h)_{0,\Omega} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\nabla p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_{0,K} \end{aligned}$$

De la desigualdad inversa (4.5), Lema 4.2 y Lema (4.3)

$$\begin{aligned}
& B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (-\mathbf{w}_h, 0)) \\
& \geq -C_2 \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} + (\nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h) \\
& \quad - \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla p_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
& \geq -C_2 \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} + C_3 \|p_h\|_{0,\Omega}^2 - C_4 |p_h|_h \|p_h\|_{0,\Omega} - C_5 |p_h|_h \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} \\
& \geq -C_2 \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \|p_h\|_{0,\Omega} + C_3 \|p_h\|_{0,\Omega}^2 - (C_4 + C_5) |p_h|_h \|p_h\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Young, sabemos que $2ab \leq \frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$, donde $a, b \geq 0$ y $\gamma > 0$. Luego tomando los pares $a_1 = \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$, $b_1 = \|p_h\|_{0,\Omega}$ y $a_2 = |p_h|_h$, $b_2 = \|p_h\|_{0,\Omega}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
2\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \|p_h\|_{0,\Omega} & \leq \frac{\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2}{\gamma_1} + \gamma_1 \|p_h\|_{0,\Omega}^2, \\
2|p_h|_h \|p_h\|_{0,\Omega} & \leq \frac{|p_h|_h^2}{\gamma_2} + \gamma_2 \|p_h\|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

donde $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Luego, cuando las constantes positivas γ_1 y γ_2 son escogidas lo suficientemente pequeñas, obtenemos

$$\begin{aligned}
& B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (-\mathbf{w}_h, 0)) \\
& \geq -\frac{C_2}{2\gamma_1} \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + \left(C_3 - \frac{C_2\gamma_1}{2} - \frac{(C_4 + C_5)\gamma_2}{2} \right) \|p_h\|_{0,\Omega}^2 - \frac{C_4 + C_5}{2\gamma_2} |p_h|_h^2 \\
& \geq -C_6 \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + C_7 \|p_h\|_{0,\Omega}^2 - C_8 |p_h|_h^2,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Entonces, insertando (4.11) y (4.12) en (4.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
& B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h - \delta \mathbf{w}_h, -p_h)) \\
& \geq (C_1 - \delta C_6) \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + \delta C_7) \|p_h\|_{0,\Omega}^2 + (1 - \delta C_8) |p_h|_h^2 \\
& \geq C_9 (\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|p_h\|_{0,\Omega}^2),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

cuando $0 < \delta < \min\{C_1 C_6^{-1}, C_8^{-1}\}$. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|q_h\|_{0,\Omega}^2 &\leq 2\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + 2\delta^2\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|p_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &= 2\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + (1 + \epsilon + 2\delta^2)\|p_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C_{10}(\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|p_h\|_{0,\Omega}^2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

que combinado con (4.13) demuestra la estabilidad de la estimación. $\square$

Teorema 4.5. *El problema variacional estabilizado dado por (4.1) admite una única solución $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$.*

Demostración. Consecuencia directa del Lema (4.4) $\square$

Además, tenemos el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 4.6. *Sean $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ y $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ las soluciones de (Em) y (4.1) respectivamente. Supongamos que $\mathbf{u} \in (H^{m+1}(\Omega)^d \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d)$ y $p \in (H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega))$. Entonces existe una constante positiva C independiente de h y λ , tal que el error $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)$ satiface:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C(h^m |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + h|p|_{1,\Omega}).$$

Demostración. Sea $\Pi_h \mathbf{u} \in H_h$ el interpolante de Lagrange de $\mathbf{u}$ y sea $\Pi_x p \in Q_h$ la proyección L^2 de p . El resultado de estabilidad dado por el Lema 4.4 implica la existencia de $(\mathbf{v}_h, q_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1)\|q_h\|_{0,\Omega}^2 \leq C_1 \quad (4.15)$$

y

$$\|\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + (\epsilon + 1)^{1/2} \|\Pi_x p - p_h\|_{0,\Omega} \leq B_\tau((\mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{u}, p_h - \Pi_x p), (\mathbf{v}_h, q_h)). \quad (4.16)$$

Entonces, si asumimos $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^d$ y $p \in H^1(\Omega)$, el esquema es consistente, es decir

$$B_\tau((\mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{u}, p_h - \Pi_x p), (\mathbf{v}_h, q_h)) = B_\tau((\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}, p - \Pi_x p), (\mathbf{v}_h, q_h)). \quad (4.17)$$

Para el lado derecho de (4.17),

$$\begin{aligned} & B_\tau((\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}, p - \Pi_x p), (\mathbf{v}_h, q_h)) \\ & \leq C_2 \left(\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 + \|p - \Pi_x p\|_{0,\Omega}^2 + |p - \Pi_x p|_h^2 \right)^{1/2} \\ & \cdot \left(\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 + \|q_h\|_{0,\Omega}^2 + |q_h|_h^2 \right)^{1/2} - \epsilon(p - \Pi_x p, q_h)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Como $\Pi_x p$ es definida como la proyección L^2 de p , el último término desaparece. Entonces, usando (4.4), (4.5), y (4.15)-(4.17) tenemos

$$\begin{aligned} \|\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + (\epsilon + 1)^{1/2} \|\Pi_x p - p_h\|_{0,\Omega} & \leq B_\tau((\mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{u}, p_h - \Pi_x p), (\mathbf{v}_h, q_h)) \\ & = B_\tau((\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}, p - \Pi_x p), (\mathbf{v}_h, q_h)) \\ & \leq C_3 \left(\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|p - \Pi_x p\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que $\epsilon + 1 \geq 1$, la desigualdad triangular y las estimaciones estándar de interpolación y, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \\ & \leq \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|p - \Pi_x p\|_{0,\Omega} + \|\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + (\epsilon + 1)^{1/2} \|\Pi_x p - p_h\|_{0,\Omega} \\ & \leq C_4 \left\{ \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|p - \Pi_x p\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \\ & \leq C_5 \left\{ h^{2m} |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega}^2 + h^2 |p|_{1,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \\ & \leq C_5 \left\{ h^m |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + h |p|_{1,\Omega} \right\}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Estimaciones a posteriori

El error más significativo en el MEF es el producido por la discretización, el cual representa la diferencia entre la solución exacta del problema $(\mathbf{u}, p)$, y la solución discreta obtenida numéricamente $(\mathbf{u}_h, p_h)$. Como en la mayoría de los problemas reales la solución exacta es desconocida, sólo queda acotar superiormente, de forma eficiente, la norma del error $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|$ por una función que depende de la solución discreta y h .

Algunos de los problemas tratados con el MEF presentan soluciones suficientemente uniformes como para ser obtenidas con una buena precisión mediante discretizaciones homogéneas del dominio. Sin embargo, en muchos otros casos, las características de la geometría del dominio produce soluciones que presentan una gran variación a lo largo del él, o incluso, singularidades en algunas zonas del mismo. En este caso, una malla homogénea es altamente ineficiente, pues presenta incógnitas en zonas donde no son necesarias por escasa variación de la solución, y carencia de grados de libertad allí donde la variación de la solución es mayor. La generación de una malla eficiente se consigue con la adecuación de ésta a la variación de la solución del problema. Los métodos adaptativos son los encargados de esta generación automática de malla adaptada a la solución.

Los estimadores de error a posteriori son la base de los métodos adaptativos o de refinamiento automático de mallas. Los procesos adaptativos basados en indicadores a posteriori del error juegan actualmente un rol muy revelante en la resolución de ecuaciones diferenciales. Muchos códigos adaptativos de MEF usan la estrategia de un valor promedio para determinar cuáles elementos deberían ser refinados. Esta estrategia está motivada por la idea de que asintóticamente el error debería estar distribuido uniformemente a través de todos los elementos. El refinamiento consiste en refinar h .

Entonces nuestro objetivo es obtener no sólo cotas de error a posteriori que sean fiables para el error global, sino también para los errores locales en cada uno de los elementos de la malla. De esta forma se refinarán sólo los elementos en donde se concentra un mayor porcentaje del error, evitando así aumentar los grados de libertad en todo el dominio.

Construiremos un estimador de error local η_K para cada elemento de la malla K , luego a partir de él, definiremos un estimador de error global utilizando la expresión

$$\eta := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2}.$$

Se espera que el estimador de error sea equivalente al error de elementos finitos, es decir, que existan constantes positivas independientes de h y λ , C_1 y C_2 , tales que

$$C_1 \eta \leq \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\| \leq C_2 \eta.$$

5.1. Estimador Residual

Sean $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ y $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ las soluciones de (Em) y (4.1) respectivamente. Utilizando integración por partes, obtenemos que para todo $(\mathbf{v}, q) \in H \times Q$

$$\begin{aligned}
& B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}, q)) \\
&= B((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) - B((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}, q)) \\
&= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{0,\Gamma_N} - 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{0,\Omega} + (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_{0,\Omega} \\
&\quad + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_{0,\Omega} + \epsilon(p_h, q)_{0,\Omega} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ((\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,K} - 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{0,K} + (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_{0,K} + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_{0,K} + \epsilon(p_h, q)_{0,K}) \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{0,E} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v})_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} (\mathbf{g} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v})_{0,E} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} (-\llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \mathbf{v})_{0,E} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \epsilon p_h, q)_{0,K}.
\end{aligned}$$

Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ y $E \in \mathcal{E}_h$ definimos los siguientes residuos

$$R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h) := (\mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h))|_K \quad (5.1)$$

$$R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h) := (\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \epsilon p_h)|_K \quad (5.2)$$

$$R_E(\mathbf{u}_h, p_h) := \begin{cases} -\llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n} \rrbracket|_E, & E \in \mathcal{E}_\Omega \\ (\mathbf{g} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n})|_E, & E \in \mathcal{E}_N \\ 0, & E \in \mathcal{E}_D \end{cases} \quad (5.3)$$

así, el error $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)$ satisface la ecuación residual

$$\begin{aligned}
B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}, q)) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v})_{0,K} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h), q)_{0,K} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (R_E(\mathbf{u}_h), \mathbf{v})_{0,E}.
\end{aligned}$$

Supongamos que $m = l = 1$, entonces se tiene que $\forall \mathbf{v}_h \in H_h$, tenemos que

$$\begin{aligned}
B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) &= B((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}_h, 0)) - B((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) \\
&= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} + (\mathbf{g}, \mathbf{v}_h)_{0,\Gamma_N} - B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Definición 5.1. Definimos la siguiente norma sobre el espacio producto $H \times Q$:

$$\|(\mathbf{v}, q)\| := \left\{ \mu \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|q\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in H \times Q. \quad (5.4)$$

Dado $K \in \mathcal{T}_h$, $\|\cdot\|_K$ y $\|\cdot\|_{\omega_K}$ representarán esta norma restringida a K y ω_K respectivamente.

Teorema 5.2. Existe una constante C positiva, que depende de λ y μ , tal que para $(\mathbf{v}, q) \in H \times Q$:

$$\|(\mathbf{v}, q)\| \leq C \sup_{\substack{(\mathbf{w}, t) \in H \times Q \\ (\mathbf{w}, t) \neq (\mathbf{0}, 0)}} \frac{B((\mathbf{v}, q), (\mathbf{w}, t))}{\|(\mathbf{w}, t)\|}. \quad (5.5)$$

Demostración. En la demostración de este Teorema usaremos las letras $C_1, C_2, \dots$ para denotar constantes positivas independientes de h, λ y μ .

Sea $\mathbf{v}_q \in H$ una función para la cual el supremo

$$\sup_{\mathbf{v} \in H - \{\mathbf{0}\}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq C \|q\|_{0,\Omega}$$

se alcanza y asumimos $\|\mathbf{v}_q\|_{1,\Omega} = \|q\|_{0,\Omega}$.

Sea $\delta > 0$, luego

$$\sup_{\substack{(\mathbf{w},t) \in H \times Q \\ (\mathbf{w},t) \neq (\mathbf{0},0)}} \frac{B((\mathbf{v},q),(\mathbf{w},t))}{\|(\mathbf{w},t)\|} \geq \frac{B((\mathbf{v},q),(\mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_q,-q))}{\|(\mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_q,-q)\|}.$$

Usando la bilinealidad de B ,

$$B((\mathbf{v},q),(\mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_q,-q)) = B((\mathbf{v},q),(\mathbf{v},-q)) + \delta B((\mathbf{v},q),(-\mathbf{v}_q,0)) \quad (5.6)$$

■ Pero usando la desigualdad de Korn,

$$\begin{aligned} B((\mathbf{v},q),(\mathbf{v},-q)) &= a(\mathbf{v},\mathbf{v}) - c(q,q) \\ &= 2\mu\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon\|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq 2C_1\mu|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \epsilon\|q\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

■ Por otro lado, usando la desigualdad de Young

$$\begin{aligned} B((\mathbf{v},q),(-\mathbf{v}_q,0)) &= a(\mathbf{v},-\mathbf{v}_q) + b(-\mathbf{v}_q,q) \\ &\geq -2C_2\mu|\mathbf{v}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}_q|_{1,\Omega} + C_3\|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &= -2C_2\mu|\mathbf{v}|_{1,\Omega}\|q\|_{0,\Omega} + C_3\|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq -\frac{C_2}{\gamma}\mu^2|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (C_3 - \gamma C_2)\|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq -C_4\mu^2|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + C_5\|q\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

cuando la constante positiva γ se escoge lo suficientemente pequeña.

Entonces insertando (5.7) y (5.8) en (5.6)

$$\begin{aligned} B((\mathbf{v},q),(\mathbf{v}-\delta\mathbf{v}_q,-q)) &= B((\mathbf{v},q),(\mathbf{v},-q)) + \delta B((\mathbf{v},q),(-\mathbf{v}_q,0)) \\ &\geq (2C_1 - \delta C_4\mu)\mu|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + \delta C_5)\|q\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Tomando $\delta = \frac{C_1}{C_4\mu}$, consideremos los siguientes casos:

Caso 1 : Supongamos que $\frac{C_1C_5}{C_4\mu} \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} B((\mathbf{v}, q), (\mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_q, -q)) &\geq C_1\mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \min\{C_1, 1\} \|(\mathbf{v}, q)\|^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Caso 2 : Supongamos que $\frac{C_1C_5}{C_4\mu} < 1$

$$\begin{aligned} B((\mathbf{v}, q), (\mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_q, -q)) &\geq C_1\mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \left(\frac{C_1C_5}{C_4\mu}\epsilon + \frac{C_1C_5}{C_4\mu}\right) \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq C_1\mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \frac{C_1C_5}{C_4\mu}(\epsilon + 1) \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \min\left\{C_1, \frac{C_1C_5}{C_4\mu}\right\} \|(\mathbf{v}, q)\|^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_q, -q)\|^2 &= \mu |\mathbf{v} - \delta \mathbf{v}_q|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq 2\mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + 2\mu\delta^2 |\mathbf{v}_q|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &= 2\mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + 2\mu\delta^2 \|q\|_{0,\Omega}^2 + (\epsilon + 1) \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &= 2\mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + (\epsilon + 1 + 2\mu\delta^2) \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \max\left\{2, \frac{2C_1^2\lambda}{C_4^2\mu(\lambda + 1)}\right\} \|(\mathbf{v}, q)\|^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por lo tanto, combinando (5.12) con (5.11) o (5.10), dependiendo del caso en el cual nos encontremos, demuestra el resultado. $\square$

A continuación presentamos el estimador de error a posteriori de tipo residual y mostraremos su equivalencia con el error de aproximación del método.

Definición 5.3. Definimos el estimador residual η_R como sigue

$$\eta_R := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,K}^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.13)$$

donde para cada $K \in \mathcal{T}_h$

$$\eta_{R,K}^2 := \tau_K \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(K)} \tau_E \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}^2,$$

con $\tau_K := \frac{h_K^2}{24\mu}$, $\tau_E := \beta_E h_E$, $\beta_E := \frac{1}{2\mu}$ si $E \in \mathcal{E}_\Omega$ y $\beta_E := \frac{1}{\mu}$ en otro caso.

Teorema 5.4. Sean $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ y $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ las soluciones de (Em) y (4.1) respectivamente y supongamos que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones polinomiales a trozos sobre la triangulación $\mathcal{T}_h$. Entonces existen constantes positivas C_1 y C_2 independientes de h , λ y μ tales que:

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\| \leq C_1 \eta_R \quad (5.14)$$

$$C_2 \frac{1}{\max \left\{ 1, \sqrt{\frac{1}{\mu} + \epsilon}, \frac{1+\mu}{\mu} \right\}} \eta_{R,K} \leq \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{\omega_K} \quad (5.15)$$

Demostración. En la demostración de este Teorema usaremos las letras $C_1, C_2, \dots$ para denotar constantes positivas independientes de h, λ y μ .

Confiabilidad (Cota Superior): Sean $(\mathbf{v}, q) \in H \times Q$ y $v_h \in H_h$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, q)) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_{0,K} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h), q)_{0,K} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (R_E(\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_{0,E} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,K} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \|q\|_{0,K} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,E}.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
& B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}, q)) \\
&= B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, q)) + B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) \\
&= B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, q)) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,K} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \|q\|_{0,K} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,E}.
\end{aligned}$$

Como esta desigualdad es válida para todo $\mathbf{v}_h \in H_h$, tomamos $\mathbf{v}_h := I_h \mathbf{v}$. Luego del Lema 2.11 sabemos que existen constantes C_3 y C_4 tales que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,K} &= \|\mathbf{v} - I_h \mathbf{v}\|_{0,K} \leq C_3 h_K |\mathbf{v}|_{1, \tilde{\omega}_K}, \\
\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,E} &= \|\mathbf{v} - I_h \mathbf{v}\|_{0,E} \leq C_4 h_E^{1/2} |\mathbf{v}|_{1, \tilde{\omega}_E}, \text{ entonces}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}, q)) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} C_3 h_K |\mathbf{v}|_{1, \tilde{\omega}_K} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \|q\|_{0,K} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E} C_4 h_E^{1/2} |\mathbf{v}|_{1, \tilde{\omega}_E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max\{C_3, C_4\} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\sqrt{24\mu}} \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \sqrt{24\mu} |\mathbf{v}|_{1,\tilde{\omega}_K} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \|q\|_{0,\Omega} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{h_E^{1/2}}{\sqrt{\mu}} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E} \sqrt{\mu} |\mathbf{v}|_{1,\tilde{\omega}_E} \right\} \\
&\leq C_5 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{24\mu} \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{h_E}{\mu} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}^2 \right\}^{1/2} \\
&\quad \cdot \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} 24\mu |\mathbf{v}|_{1,\tilde{\omega}_K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \mu |\mathbf{v}|_{1,\tilde{\omega}_E}^2 \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando la regularidad de la malla tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} 24\mu |\mathbf{v}|_{1,\tilde{\omega}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \mu |\mathbf{v}|_{1,\tilde{\omega}_E}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{0,K}^2 &\leq C_6 \left\{ \mu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 \right\} \\
&\leq C_6 \|(\mathbf{v}, q)\|.
\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}, q)) \leq C_7 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,K}^2 \right\}^{1/2} \|(\mathbf{v}, q)\|.$$

Pero del Teorema 5.2 sabemos que existe una constante C_8 tal que:

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\| \leq C_8 \sup_{\substack{(\mathbf{w}, r) \in H \times Q \\ (\mathbf{w}, r) \neq (\mathbf{0}, 0)}} \frac{B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{w}, r))}{\|(\mathbf{w}, r)\|}.$$

Por lo tanto, existe una constante positiva C_1 , independiente de h y λ tal que

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\| \leq C_1 \eta_R.$$

Eficiencia (Cota Inferior): Para $K \in \mathcal{T}_h$ y $E \in \mathcal{E}_\Omega$, sean b_K y b_E las funciones burbujas tradicionales del elemento y del lado, respectivamente. Procederemos acotando cada uno de los términos de $\eta_{R,K}$.

- Para $R_{K,1}$: Sea $K \in \mathcal{T}_h$, definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_K &:= b_K R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h) \\ &= b_K (\mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h))|_K \in H_0^1(K)^d, \quad d = 2, 3. \end{aligned}$$

Luego, de la definición de $\mathbf{v}_K$, usando el hecho que $0 \leq b_K \leq 1$ y por el Lema 2.7, existe una constante C_9 tal que

$$C_9 \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 \leq (R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v}_K)_{0,K} \leq \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2. \quad (5.16)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v}_K)_{0,K} &= \sum_{K' \in \mathcal{T}_h} (R_{K',1}(\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v}_K)_{0,K'} \\ &= B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}_K, 0)) \\ &= 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_K))_{0,K} - (p - p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_K)_{0,K} \\ &\leq 2\mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_K)\|_{0,K} + \|p - p_h\|_{0,K} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_K\|_{0,K} \\ &\leq C_{10} \mu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,K} \|\mathbf{v}_K\|_{1,K} + \|p - p_h\|_{0,K} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_K\|_{0,K} \\ &\leq C_{11} \left[\sqrt{\mu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,K} \sqrt{\mu} |\mathbf{v}_K|_{1,K} + \|p - p_h\|_{0,K} |\mathbf{v}_K|_{1,K} \right] \\ &\leq C_{12} \left\{ \mu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,K}^2 + \|p - p_h\|_{0,K}^2 \right\}^{1/2} \sqrt{1 + \mu} |\mathbf{v}_K|_{1,K} \\ &\leq C_{12} \sqrt{\frac{1 + \mu}{\mu}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K \sqrt{\mu} |\mathbf{v}_K|_{1,K}. \end{aligned}$$

Combinando este resultado con (5.16) y por el Teorema 2.7, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 &\leq C_{13} \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K \sqrt{24\mu} |\mathbf{v}_K|_{1,K} \\
&\leq C_{14} \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K \sqrt{24\mu} h_K^{-1} \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} \\
&= C_{14} \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K \tau_K^{-1/2} \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}.
\end{aligned}$$

Así, existe una constante C_{15} tal que

$$\tau_K \|R_{K,1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 \leq C_{15} \left(\frac{1+\mu}{\mu} \right) \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K^2. \quad (5.17)$$

- Para $R_{K,2}$: Sea $K \in \mathcal{T}_h$, como $\mathbf{u} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d$, $d = 2, 3$, se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$, entonces definimos

$$\begin{aligned}
q_K &:= b_K R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h) \\
&= b_K (\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \epsilon p_h)|_K.
\end{aligned}$$

Luego, de la definición de q_K , usando el hecho que $0 \leq b_K \leq 1$ y del Teorema 2.7, existe una constante C_{16} tal que

$$C_{16} \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2 \leq (R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h), q_K)_{0,K} \leq \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K}^2. \quad (5.18)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h), q_K)_{0,K} &= \sum_{K' \in \mathcal{T}_h} (R_{K',2}(\mathbf{u}_h, p_h), q_K)_{0,K'} \\
&= B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{0}, q_K)) \\
&= -(\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), q_K)_{0,K} - \epsilon(p - p_h, q_K)_{0,K} \\
&\leq C_{17} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,K} \|q_K\|_{0,K} + \epsilon \|p - p_h\|_{0,K} \|q_K\|_{0,K} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h), q_K)_{0,K} &\leq C_{18} \left\{ \mu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,K}^2 + \epsilon \| (p - p_h) \|_{0,K}^2 \right\}^{1/2} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \|q_K\|_{0,K}^2 + \epsilon \|q_K\|_{0,K}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq C_{18} \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{1}{\mu} + \epsilon} \right\} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K \|q_K\|_{0,K} .
\end{aligned}$$

Combinado este resultado con (5.18) y usando que $0 \leq b_k \leq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|^2 &\leq C_{19} \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{1}{\mu} + \epsilon} \right\} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K \|q_K\|_{0,K} \\
&\leq C_{20} \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{1}{\mu} + \epsilon} \right\} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K \|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,K} .
\end{aligned}$$

Así, existe una constante C_{21} , tal que

$$\|R_{K,2}(\mathbf{u}_h, p_h)\|^2 \leq C_{21} \max \left\{ 1, \frac{1}{\mu} + \epsilon \right\} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_K^2 . \quad (5.19)$$

- Sea $E \in \mathcal{E}(K)$. Usando el hecho que $0 \leq b_E \leq 1$ y del Teorema 2.7, existe una constante C_{22} tal que:

$$C_{22} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}^2 \leq (R_E(\mathbf{u}_h, p_h), b_E R_E(\mathbf{u}_h, p_h))_{0,E} \leq \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}^2 ,$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}^2 &\leq C_{22}^{-1} (R_E(\mathbf{u}_h, p_h), b_E R_E(\mathbf{u}_h, p_h))_{0,E} \\
&\leq C_{23} \left\{ \sum_{\tilde{K} \subset \omega_E} (R_{\tilde{K},1}(\mathbf{u}_h, p_h), b_E \mathbf{P}(R_E(\mathbf{u}_h, p_h)))_{0,\tilde{K}} \right. \\
&\quad \left. - B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (b_E \mathbf{P}(R_E(\mathbf{u}_h, p_h)), 0)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{24} \left\{ \sum_{\tilde{K} \subset \omega_E} \|R_{\tilde{K},1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,\tilde{K}} \|b_E \mathbf{P}_E(R_E(\mathbf{u}_h, p_h))\|_{0,\tilde{K}} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \mu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_E}^2 + \|p - p_h\|_{0,\omega_E}^2 \right\}^{1/2} \sqrt{\mu + 1} |b_E \mathbf{P}_E(R_E(\mathbf{u}_h, p_h))|_{1,\omega_E} \right\}.
\end{aligned}$$

Pero del Teorema 2.7, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|b_E \mathbf{P}_E(R_E(\mathbf{u}_h, p_h))\|_{0,\tilde{K}} &\leq C_{25} h_{\tilde{K}} |b_E \mathbf{P}_E(R_E(\mathbf{u}_h, p_h))|_{1,\tilde{K}}, \\
|b_E \mathbf{P}_E(R_E(\mathbf{u}_h, p_h))|_{1,\omega_E} &\leq C_{26} h_E^{-1/2} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}.
\end{aligned}$$

Así, usando (5.17):

$$\begin{aligned}
&\|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}^2 \\
&\leq C_{27} \left\{ \sum_{\tilde{K} \subset \omega_E} \frac{h_{\tilde{K}}}{\sqrt{\mu}} \|R_{\tilde{K},1}(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,\tilde{K}} + \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{\omega_E} \right\} \\
&\quad \cdot \sqrt{1 + \mu} |b_E \mathbf{P}_E(R_E(\mathbf{u}_h, p_h))|_{1,\omega_E} \\
&\leq C_{28} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \mu}{\mu}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{\omega_E} + \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{\omega_E} \right\} \\
&\quad \cdot \sqrt{1 + \mu} |b_E \mathbf{P}_E(R_E(\mathbf{u}_h, p_h))|_{1,\omega_E} \\
&\leq C_{28} \frac{1 + \mu}{\mu} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{1,\omega_E} \sqrt{\mu} h_E^{-1/2} \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\tau_E \|R_E(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{0,E}^2 \leq C_{29} \left(\frac{1 + \mu}{\mu} \right)^2 \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{\omega_K}^2. \quad (5.20)$$

De (5.17), (5.19) y (5.20) queda demostrada la cota inferior. $\square$

Observación 9. *Las demostraciones anteriores se hicieron suponiendo que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones polinomiales a trozos sobre la triangulación. En caso que no lo sean, definimos*

$$\mathbf{f}_K := \Pi_K \mathbf{f} = \frac{\int_K \mathbf{f} \, dx}{|K|}$$

$$\mathbf{g}_F := \Pi_F \mathbf{g} = \frac{\int_F \mathbf{g} \, dS}{|F|}$$

las proyecciones de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ sobre las constantes. En este caso se procede de forma análoga al anterior haciendo $\mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_K - \mathbf{f}_K$ y $\mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{g}_F - \mathbf{g}_F$, así aparecerán múltiplos de los términos $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_K\|_{0,K}$ y $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_F\|_{0,F}$, los cuales agregamos al estimador y no alteran el resultado puesto que son términos de orden superior si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son suaves.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

En este capítulo presentaremos ejemplos numéricos que validarán nuestro estimador de error a posteriori. Para efectos de programación consideraremos el caso particular de $m = l = 1$, esto es

$$\begin{aligned} H_h &:= \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})^d : \mathbf{v}_{h|_K} \in \mathbb{P}_1^d(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^d \\ Q_h &:= \{ q_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : q_{h|_K} \in \mathbb{P}_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \cap L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = F_\tau(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in H_h \times Q_h, \quad (6.1)$$

donde en este caso particular B_τ y F_τ estan dadas por:

$$\begin{aligned} B_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))_{0,\Omega} - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} - (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_{0,\Omega} - \epsilon(p_h, q_h)_{0,\Omega} \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\nabla p_h, \nabla q_h)_{0,K} \end{aligned}$$

$$F_\tau(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} + (\mathbf{g}, \mathbf{v}_h)_{0,\Gamma_N} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\mathbf{f}, \nabla q_h)_{0,K}$$

Puesto que contamos con un estimador a posteriori local, sobre cada triángulo (tetrahedro), podemos mejorar la solución refinando las mallas donde el estimador tiene valores mayores.

El procedimiento de adaptación de las mallas está dado por:

1. Resolvemos 6.1 para una malla inicial $\mathcal{T}_h$.
2. Calculamos $\eta_{R,K}$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$.
3. Si $\eta_{R,K} > \delta \max_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,K}$, donde $0 < \delta < 1$, entonces K se subdivide en cuatro. En nuestro caso escogimos $\delta = \frac{1}{2}$.

6.1. Implementación

Para la implementación del problema de elasticidad lineal y del estimador de error a posteriori utilizaremos las siguientes definiciones y resultados. Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación de $\overline{\Omega}$.

Si $d = 2$ dado un triángulo $K \in \mathcal{T}_h$ de dicha triangulación, denotamos sus vértices por

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

Y denotaremos por $\hat{K}$ al triángulo de referencia, es decir, el triángulo de vértices

$$\hat{\mathbf{a}}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

También denotaremos por $\mathbf{x}$ y por $\hat{\mathbf{x}}$ a los sistemas de coordenadas dados por:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

Consideremos la transformación afín invertible $\mathcal{F} : \hat{K} \rightarrow K$ tal que $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{a}}_i) = \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3$. Es claro que

$$\mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{x}$$

donde la matriz $\mathbf{B}$ y el vector $\mathbf{b}$ están definidos por

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} x^2 - x^1 & x^3 - x^1 \\ y^2 - y^1 & y^3 - y^1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix}.$$

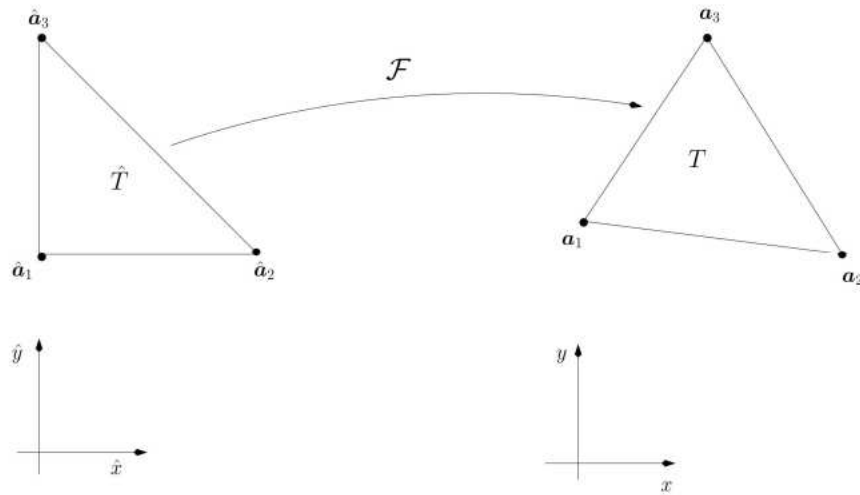


Figura 6.1: Transformación afín $\mathcal{F}$ para $d = 2$.

Observación 10. $\mathcal{F}$ es invertible y $\mathcal{F}^{-1} : K \rightarrow \hat{K}$ está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}.$$

Además

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}} = \mathbf{B}$$

$$|\mathcal{J}_{\mathcal{F}}| = \det(\mathbf{B}) = 2|K|$$

Sea $u : T \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\hat{\mathbf{u}} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\hat{u} = u \circ \mathcal{F},$$

usando la regla de la cadena se obtiene que

$$\hat{\nabla} \hat{u} = \mathbf{B}^T \nabla u,$$

de donde

$$\nabla u = \mathbf{B}^{-T} \hat{\nabla} \hat{u}.$$

También tenemos la siguiente fórmula de integración

$$\int_T u d\mathbf{x} = |\mathcal{J}_{\mathcal{F}}| \int_{\hat{K}} \hat{u} d\hat{x}.$$

Si $d = 3$ dado un tetrahedro $K \in \mathcal{T}_h$ de dicha triangulación, denotamos sus vértices por

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_4 := \begin{pmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{pmatrix}.$$

Y denotaremos por $\hat{K}$ al tetrahedro de referencia, es decir, el tetraedro de vértices

$$\hat{\mathbf{a}}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{a}}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

También denotaremos por $\mathbf{x}$ y por $\hat{\mathbf{x}}$ a los sistemas de coordenadas dados por:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}.$$

Consideremos la transformación afin invertible $\mathcal{F} : \hat{K} \rightarrow K$ tal que $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{a}}_i) = \mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Es claro que

$$\mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \mathbf{x}$$

donde la matriz $\mathbf{B}$ y el vector $\mathbf{b}$ están definidos por

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} x^2 - x^1 & x^3 - x^1 & x^4 - x^1 \\ y^2 - y^1 & y^3 - y^1 & y^4 - y^1 \\ z^2 - z^1 & z^3 - z^1 & z^4 - z^1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}.$$

Observación 11. Al igual que antes $\mathcal{F}$ es invertible y $\mathcal{F}^{-1} : K \rightarrow \hat{K}$ está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}.$$

y en este caso $|\mathcal{J}_{\mathcal{F}}| = \det(\mathbf{B}) = 6|K|$.

6.1.1. Esquema Matricial

Dado un elemento K de la triangulación $\mathcal{T}_h$, veremos como calcular su matriz de rigidez elemental y el vector elemental del lado derecho. Sólo indicaremos las matrices para el caso en que $d = 2$. Si estamos en $\mathbb{R}^3$, las definiciones son análogas.

Sean p_i , $i = 1, 2, 3$ las funciones de base de H_h sobre cada triángulo K y denotemos por ∂_1 , ∂_2 a las derivadas con respecto a cada variable. Entonces usaremos las siguientes notaciones:

$$[P] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} [P] & \Theta \\ \Theta & [P] \end{bmatrix}$$

$$[DP] = \begin{bmatrix} \partial_1 p_1 & \partial_1 p_2 & \partial_1 p_3 \\ \partial_2 p_1 & \partial_2 p_2 & \partial_2 p_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{DP}] = \begin{bmatrix} [DP] & \Theta \\ \Theta & [DP] \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} u_1(a_1) \\ u_1(a_2) \\ u_1(a_3) \\ u_2(a_1) \\ u_2(a_2) \\ u_2(a_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_2] \end{bmatrix}, \quad [p] = \begin{bmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ p(a_3) \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{u}|_T = [\mathbf{P}][\mathbf{u}] \quad p|_T = [P][p] \quad \nabla \mathbf{u}|_T = [\mathbf{DP}][\mathbf{u}].$$

Para el triángulo de referencia sabemos que las funciones de base son:

$$[\hat{P}] = \begin{bmatrix} 1 - \hat{x} - \hat{y} & \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix}, \quad [\hat{\mathbf{P}}] = \begin{bmatrix} \hat{P} & \Theta \\ \Theta & \hat{P} \end{bmatrix},$$

$$[\hat{D}\hat{P}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}] = \begin{bmatrix} [\hat{D}\hat{P}] & \Theta \\ \Theta & [\hat{D}\hat{P}] \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [B]^{-t} & \Theta \\ \Theta & [B]^{-t} \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad [Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos calcular las matrices locales de la siguiente forma:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{0,K} = [\mathbf{v}]^t \underbrace{\int_K [\mathbf{D}\mathbf{P}]^t [\mathbf{A}]^t [\mathbf{A}] [\mathbf{D}\mathbf{P}] d\mathbf{x}}_{K_1} [\mathbf{u}]$$

$$(p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{0,K} = [\mathbf{v}]^t \underbrace{\int_K [\mathbf{D}\mathbf{P}]^t [\mathbf{Z}]^t [\mathbf{P}] d\mathbf{x}}_{K_2} [p]$$

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u})_{0,K} = [q]^t \underbrace{\int_K [\mathbf{P}]^t [\mathbf{Z}] [\mathbf{D}\mathbf{P}]^t d\mathbf{x}}_{K_3} [\mathbf{u}]$$

$$(p, q)_{0,K} = [q]^t \underbrace{\int_K [\mathbf{P}]^t [\mathbf{P}] d\mathbf{x}}_{K_4} [p]$$

$$(\nabla p, \nabla q)_{0,K} = [q]^t \underbrace{\int_K [\mathbf{D}\mathbf{P}]^t [\mathbf{D}\mathbf{P}] d\mathbf{x}}_{K_5} [p].$$

Así la matriz de rigidez elemental K_T está dada por:

$$\mathbf{K}_K := \begin{bmatrix} 2\mu K_1 & -K_2 \\ -K_3 & -\varepsilon K_4 - \tau_K K_5 \end{bmatrix}$$

Para el vector de fuerza elemental F_K necesitamos:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0,K} = [\mathbf{v}]^t \underbrace{\int_K [\mathbf{P}]^t [\mathbf{P}] [\mathbf{f}] d\mathbf{x}}_{F_1}$$

$$(\mathbf{f}, \nabla q)_{0,K} = [q]^t \underbrace{\int_K [\mathbf{D}\mathbf{P}]^t [\mathbf{P}] [\mathbf{f}] d\mathbf{x}}_{F_2} [p]$$

Así el vector elemental del lado derecho está dado por:

$$F_K := \begin{bmatrix} F_1 \\ -\tau_K F_2 \end{bmatrix}.$$

6.2. Experimentos Numéricos

En esta sección presentamos seis ejemplos que validarán la calidad del estimador a posteriori. Los malladores utilizados fueron Triangle y TetGen. El problema se programó en Fortran.

6.2.1. Caso analítico

Para este caso test, el dominio es el cuadrado $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y los coeficientes de Lamé son $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$. Consideramos la función $\mathbf{f} = (-4\mu - 2\lambda \ 0)^T$ y las condiciones de borde de modo que la solución exacta del problema de elasticidad es

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = -2\lambda x.$$

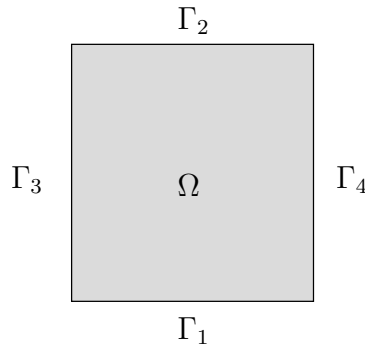


Figura 6.2: Dominio Ejemplo 1.

Las fronteras Γ_1, Γ_2 presentan condiciones de fronteras de tipo Neumann:
 $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_i$ sobre Γ_i , $i = 1, 2$, con $\mathbf{g}_1 = (0 \ -2\lambda x)^T$ y $\mathbf{g}_2 = (0 \ 2\lambda x)^T$.

Las fronteras Γ_3, Γ_4 presentan condiciones de fronteras Dirichlet: $\mathbf{u}_D = (0 \ 0)^T$ sobre Γ_3 y $\mathbf{u}_D = (1 \ 0)^T$ sobre Γ_4 .

En las Figuras 6.3 y 6.4 podemos ver los gráficos del comportamiento de los errores, tanto para la velocidad como para la presión. En ambos casos, los resultados muestran el orden de convergencia esperado.

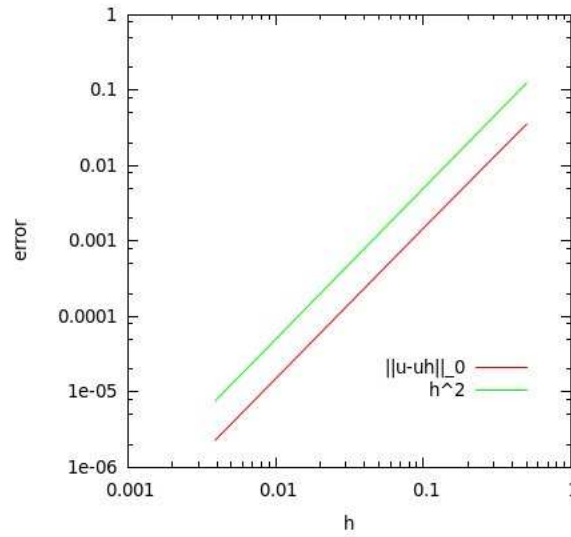


Figura 6.3: Convergencia de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}$ para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$.

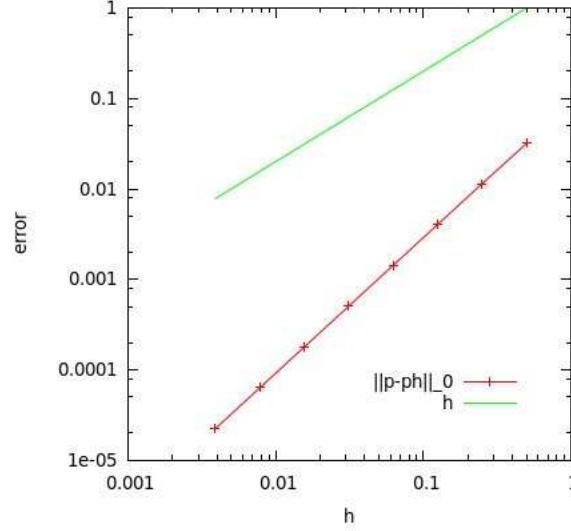


Figura 6.4: Convergencia de $\|p - p_h\|_{0,\Omega}$ para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$.

Definamos ahora la siguiente norma, que llamaremos norma de la energía

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_E := \left\{ \mu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + (1 + \varepsilon) \|p_h\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.2)$$

Una medida de la calidad del estimador de error a posteriori está dada por el índice de efectividad global

$$\theta := \frac{\eta}{\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_E}. \quad (6.3)$$

Este índice nos indica la calidad con que aproxima el estimador al error. En la práctica se espera que θ se mantenga acotado cuando h tiende a 0.

En la Figura 6.5 se muestran los resultados de convergencia del estimador y del error, donde tanto el estimador como el error tienen el mismo comportamiento asintótico.

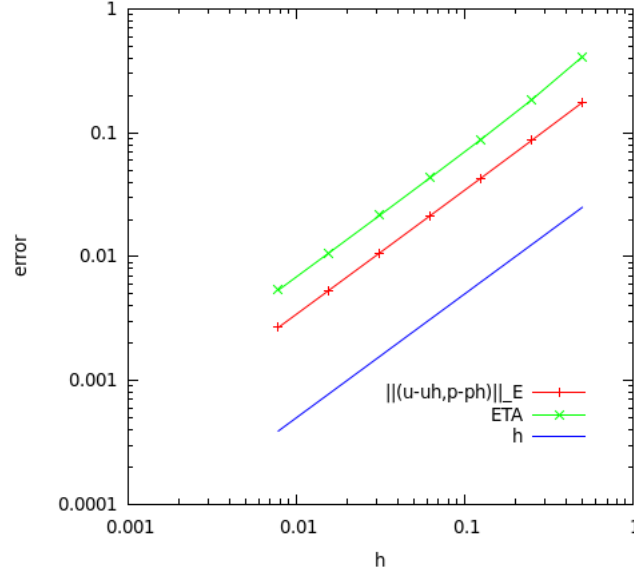


Figura 6.5: Convergencia de $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_E$ y de η para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$.

En el cuadro (6.2) mostramos la efectividad del estimador cuando $h \rightarrow 0$ y podemos notar que el índice de efectividad se mantiene acotado.

h	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	$\ p - p_h\ _0$	$\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\ _E$
0.5000	3.5576E-002	3.1825E-002	0.1756
0.2500	9.0826E-003	1.1401E-002	8.6755E-002
0.1250	2.3026E-003	4.0399E-003	4.3094E-002
6.2500E-002	5.8035E-004	1.4300E-003	2.1476E-002
3.1250E-002	1.4575E-004	5.0590E-004	1.0720E-002
1.56250E-002	3.6533E-005	1.7891E-004	5.3541E-003
7.81250E-003	9.1463E-006	6.3268E-005	2.6767E-003
3.90625E-003	2.2883E-006	2.2370E-005	1.3380E-003

Cuadro 6.1: Error del método para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$.

h	$\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\ _E$	η	θ
0.5000	0.1756	0.4112	2.3409
0.2500	8.6755E-002	0.1846	2.1282
0.1250	4.3095E-002	8.8454E-002	2.0526
6.2500E-002	2.1476E-002	4.3450E-002	2.0232
3.1250E-002	1.0720E-002	2.1556E-002	2.0108
1.56250E-002	5.3555E-003	1.0739E-002	2.0052
7.81250E-003	2.6767E-003	5.3601E-003	2.0024
3.90625E-003	1.3380E-003	2.6778E-003	2.0013

Cuadro 6.2: Índice de efectividad para $\lambda = 1$ y $\mu = 0,5$ cuando $h \rightarrow 0$.

Consideremos ahora el caso en el que el material es casi incompresible y veamos la efectividad del estimador considerando $\lambda = 10^5$. Podemos notar que si bien el índice de efectividad no se mantiene tan constante como antes, este aún se mantiene acotado.

h	$\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\ _E$	η	θ
0.5000	0.1895	0.7948	4.1936
0.2500	9.0174E-002	0.4620	5.1238
0.1250	4.3976E-002	0.2457	5.5873
6.2500E-002	2.1700E-002	0.1264	5.8256
3.1250E-002	1.0777E-002	6.4087E-002	5.9469
1.56250E-002	5.3697E-003	3.2062E-002	5.9709

Cuadro 6.3: Índice de efectividad para $\lambda = 10^5$ y $\mu = 0,5$ cuando $h \rightarrow 0$.

6.2.2. Ejemplo 2: Cavidad

Consideremos el dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. $\mathbf{f} = (0 \ 0)^T$. Para este ejemplo consideraremos dos casos, el primero cuando $\lambda = \mu = 1$ y el segundo caso es el incompresible, es decir cuando $\lambda \rightarrow \infty$. No se presentan fronteras con condiciones Neumann, y el desplazamiento sobre la frontera es $\mathbf{u}_D = (0 \ 0)^T$ sobre Γ_1 y $\mathbf{u}_D = (1 \ 0)^T$ sobre Γ_2 .

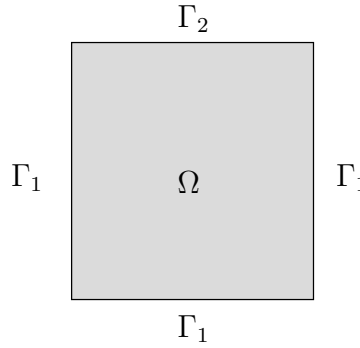


Figura 6.6: Dominio Ejemplo 2.

Consideremos primero el caso en que $\lambda = \mu = 1$. En la Figura 6.7 se muestran la malla inicial y una malla adaptada utilizando nuestra estimación de error. En este ejemplo surgen dos singularidades en las esquinas superiores debido al cambio en la condición de frontera.

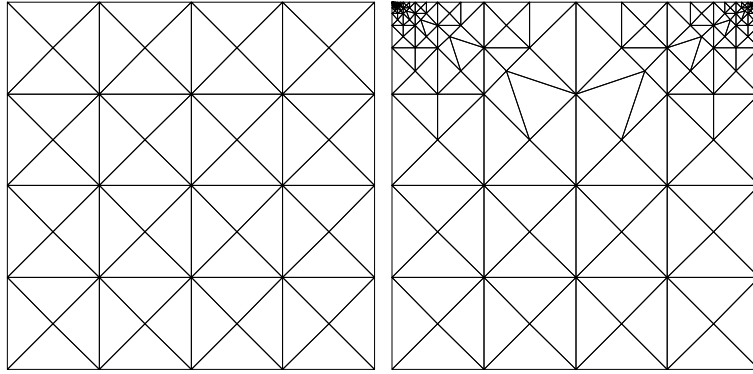


Figura 6.7: Malla inicial, 64 elementos. Malla adaptada, 368 elementos.

En la Figura 6.8 representamos el campo de presión discreta obtenido utilizando la mallas inicial y la malla adaptada. Podemos notar la mejora en la calidad de la solución computarizada ya que la naturaleza singular de la presión se captura mejor en la malla adaptada.

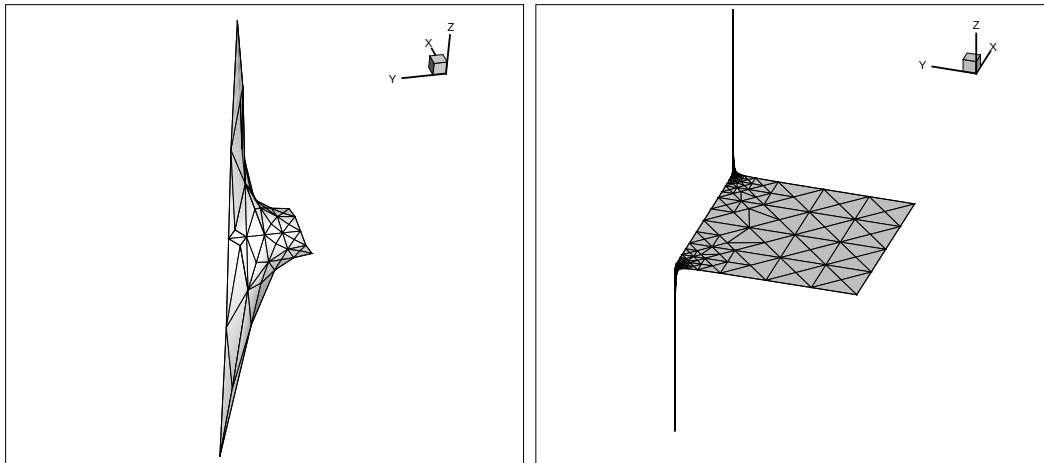


Figura 6.8: Presión en la malla inicial y la malla adaptada para $\lambda = \mu = 1$.

Consideremos ahora el caso en que el material es incompresible, en este caso $\lambda \rightarrow \infty$, por lo que $\epsilon = 0$, $\mu = 1$. Notar que para estos casos, la ecuación de elasticidad se reduce a la ecuación de Stokes de un fluido. En este caso $\nu := 2\mu$ denota la viscosidad cinemática y $\mathbf{u}$ representa la velocidad del fluido.

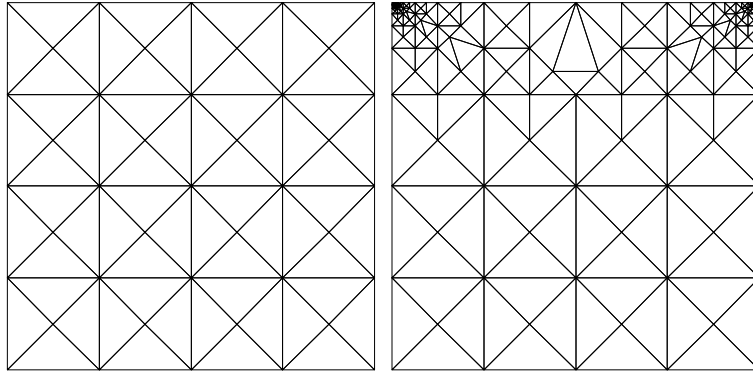


Figura 6.9: Malla inicial, 64 elementos. Malla adaptadas, 300 elementos.

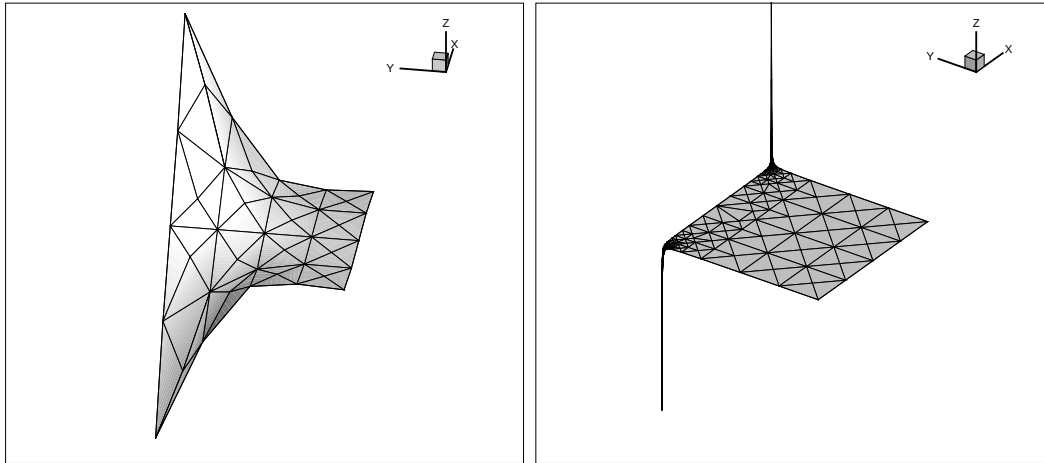


Figura 6.10: Presión en la malla inicial y la malla adaptada con $\lambda \rightarrow \infty$.

6.2.3. Ejemplo 3

Consideremos el dominio Ω presentado en la Figura 6.11. Los coeficientes de Lamé son $\lambda = 0.577$ y $\mu = 0.3846$.

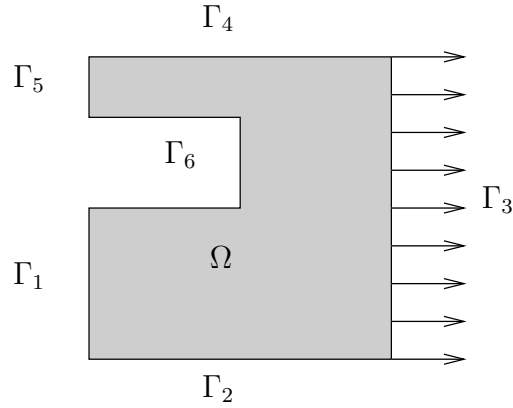


Figura 6.11: Dominio Ejemplo 3.

Aquí $\mathbf{f} = (0 \ 0)^T$. Las fronteras Γ_1, Γ_2 y Γ_5 presentan condiciones del tipo Dirichlet: $\mathbf{u}_D = (0 \ 0)^T$.

Las fronteras $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_6$ presentan condiciones de tipo Neumann: $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (1 \ 0)^T$, sobre Γ_3 y $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (0 \ 0)^T$, sobre Γ_4 y Γ_6 .

En este caso notamos capas límite, tanto en Γ_3 como en Γ_6 , lo que es visible por el mayor refinamiento en dichas zonas.

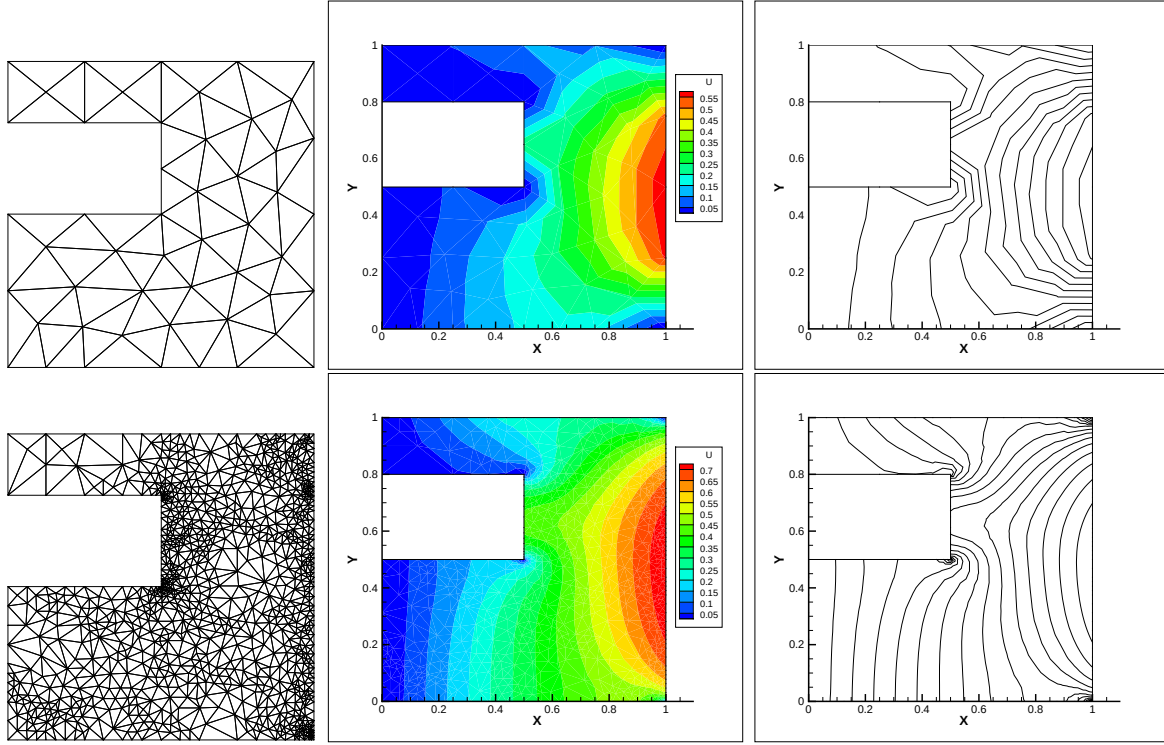


Figura 6.12: Malla inicial, 75 elementos. Malla adaptada 1526 elementos. Solución e isovalores de la primera componente de la velocidad.

6.2.4. Ejemplo 4

Consideremos el dominio Ω presentado en la Figura 6.13, correspondiente al rectángulo $[0, 2] \times [0, 1]$ al que se le ha retirado el círculo de centro $(1, 0.5)$ y radio 0.1 . Consideraremos como módulo de Young $E = 206900$ y de Poisson $\nu = 0.29$. Entonces los coeficientes de Lamé son $\lambda = 110743,81$ y $\mu = 80193,79$.

$\mathbf{f} = (0 \ 0)^T$; $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (0 \ 0)^T$, sobre $\mathbf{u} \in \Gamma_1$; $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (0 \ -10)^T$, sobre $\mathbf{u} \in \Gamma_2$ y $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (0 \ 10)^T$, sobre $\mathbf{u} \in \Gamma_3$.

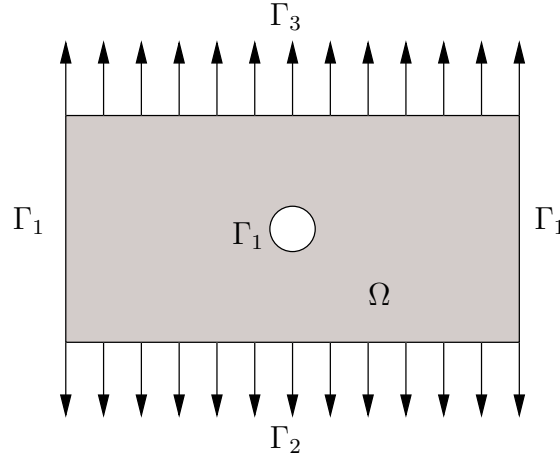


Figura 6.13: Dominio Ejemplo 4.

Como este ejemplo no posee fronteras con condiciones del tipo Dirichlet, el problema no tendrá solución para funciones arbitrarias $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$. Para que exista solución, las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ deben estar relacionadas de manera especial mediante una condición de compatibilidad. Esta condición de compatibilidad de los datos, puede derivarse de la formulación variacional (3.4).

Tomado $\mathbf{v} \in \{(0 \ 1)^T, (1 \ 0)^T, (-y \ x)^T\}$ sobre la primera ecuación de (3.4), nos queda precisamente la condición de compatibilidad que los datos $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ deben satisfacer para que el problema Neumann puro tenga solución.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2) dx + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{g}^1 + \mathbf{g}^2) ds = 0,$$

donde $\mathbf{f} = (\mathbf{f}^1 \ \mathbf{f}^2)^T$ y $\mathbf{g} = (\mathbf{g}^1 \ \mathbf{g}^2)^T$.

Como en nuestro caso $|\Gamma_2| = |\Gamma_3|$, la condición de compatibilidad se satisface y entonces el problema está bien propuesto. En este ejemplo, se espera la existencia de capas límite en el borde del círculo, lo cual es corroborado por la adaptación de la malla realizada con el estimador.

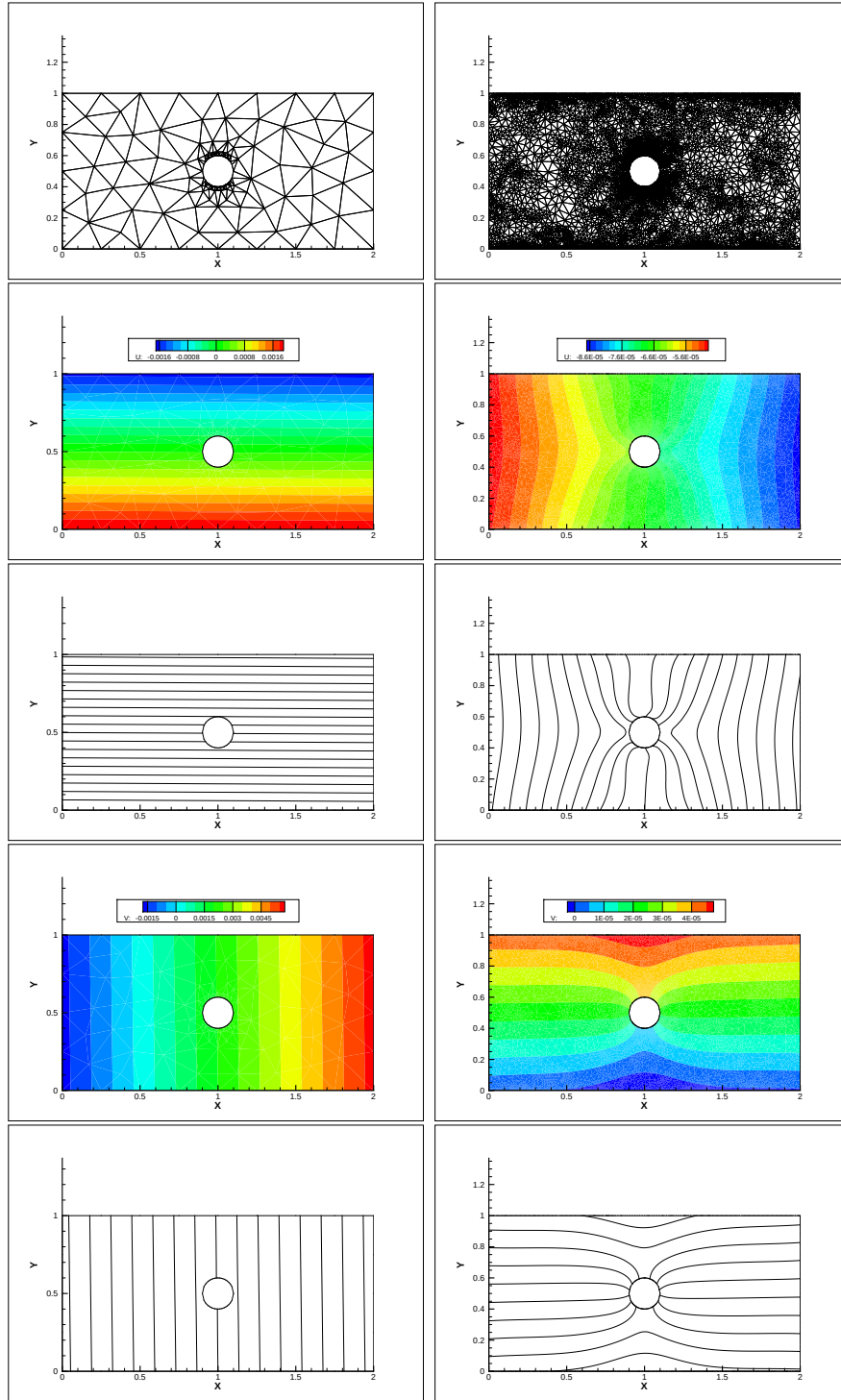


Figura 6.14: Malla inicial, 220 elementos. Malla adaptada, 15709 elementos. Solución e isovalores de las componentes de la velocidad.

6.2.5. Ejemplo 5

Consideremos el dominio Ω presentado en la Figura 6.15, que representa una represa.

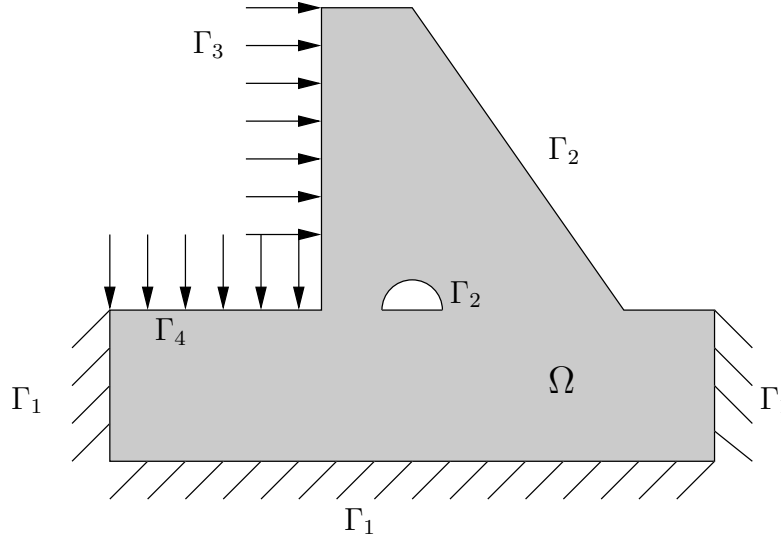


Figura 6.15: Dominio Ejemplo 5.

La frontera Γ_1 presenta condiciones del tipo Dirichlet, con desplazamiento nulo. Las fronteras Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 tienen condiciones del tipo Neuman: $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (0 \ 0)^T$, sobre Γ_2 ; $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (10 \ 0)^T$, sobre Γ_3 ; $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (0 \ -10)^T$, sobre Γ_4 .

$$\mathbf{f} = (0 \ 0)^T.$$

En este caso usaremos el coeficiente de Young y Poisson correspondientes al hormigón, $E = 270000$ y $\nu = 0.20$. Los coeficientes de Lamé son $\lambda = 75000$ y $\mu = 112500$.

En este caso, al refinar la malla, la mayor concentración de elementos se encuentra en la zona de interés.

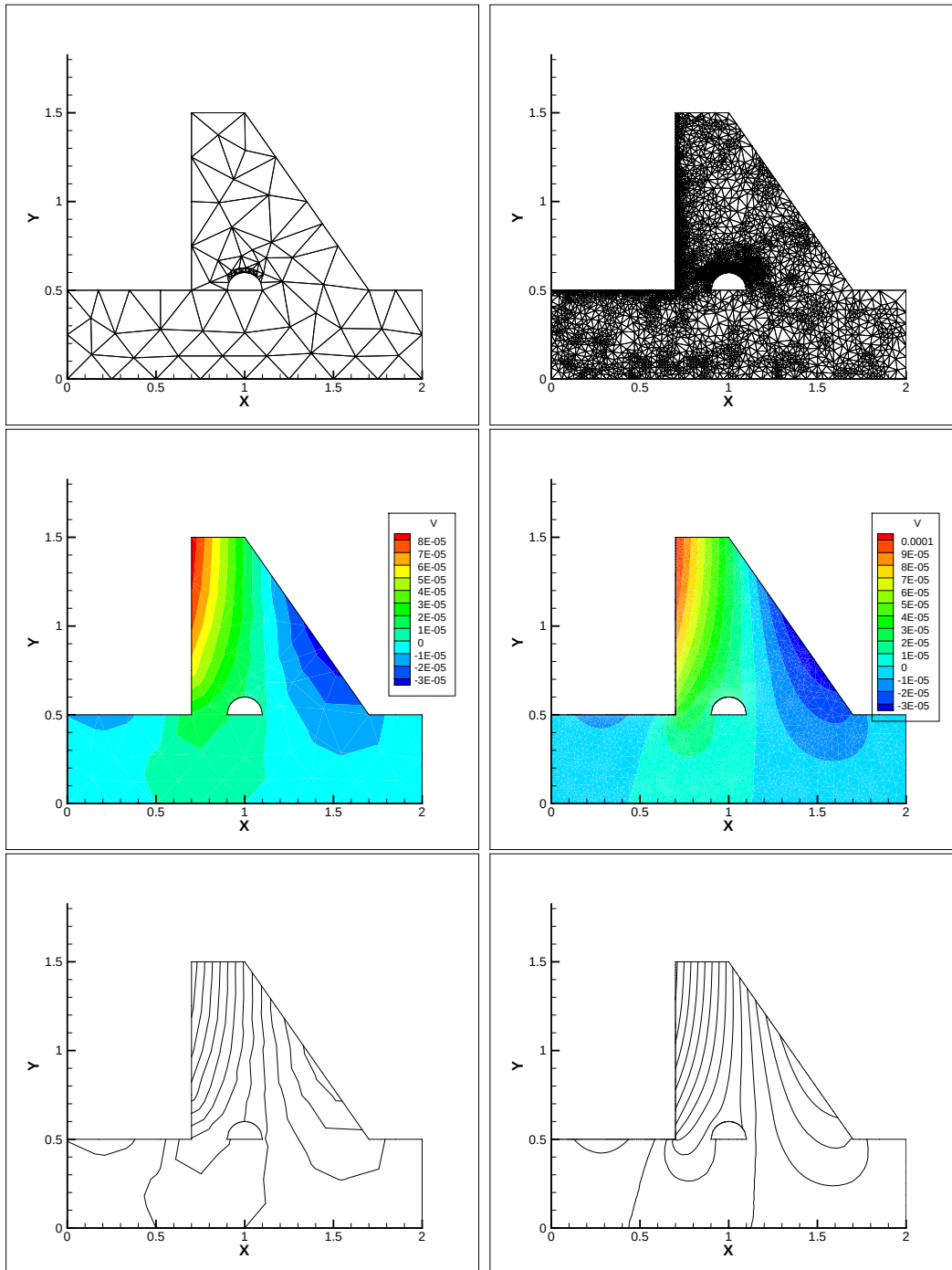


Figura 6.16: Malla inicial, 139 elementos. Malla adaptada, 9162 elementos.

6.2.6. Ejemplo 3D

Consideremos el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ presentado en la Figura 6.17, correspondiente al prisma rectangular $[0, 1] \times [0, 3] \times [0, 1]$ al que se le ha retirado el cilindro de radio $r = 0,2$ y largo 1.

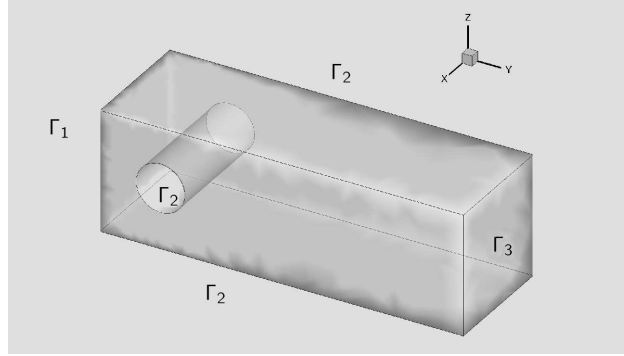


Figura 6.17: Dominio Ejemplo 3D.

La fronteras Γ_1 y Γ_2 presentan condiciones del tipo Dirichlet, sobre Γ_1 el desplazamiento es nulo y sobre Γ_2 $\mathbf{u}_D = (0 \ 1 \ 0)^T$. La frontera Γ_3 presenta condiciones del tipo Neuman: $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (0 \ 0 \ 0)^T$.

$$\mathbf{f} = (0 \ 0)^T.$$

En este caso los coeficientes de Lamé son $\lambda = \infty$ y $\mu = 1$.

En este ejemplo, es natural esperar la existencia de capas límites en el borde del cilindro, lo que se ve en la Figura 6.18 en la malla adaptada.

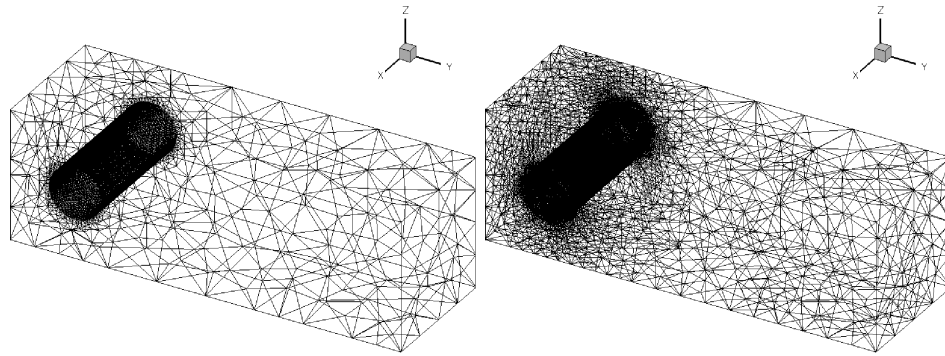


Figura 6.18: Malla inicial, 54.112 elementos. Malla adaptada, 2.754.402 elementos.

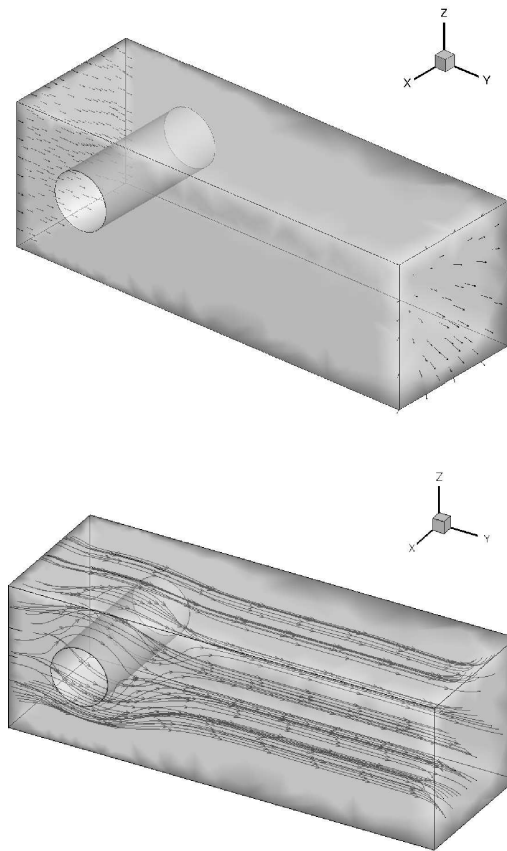


Figura 6.19: Vectores y Líneas de corriente para la primera componente de la velocidad.

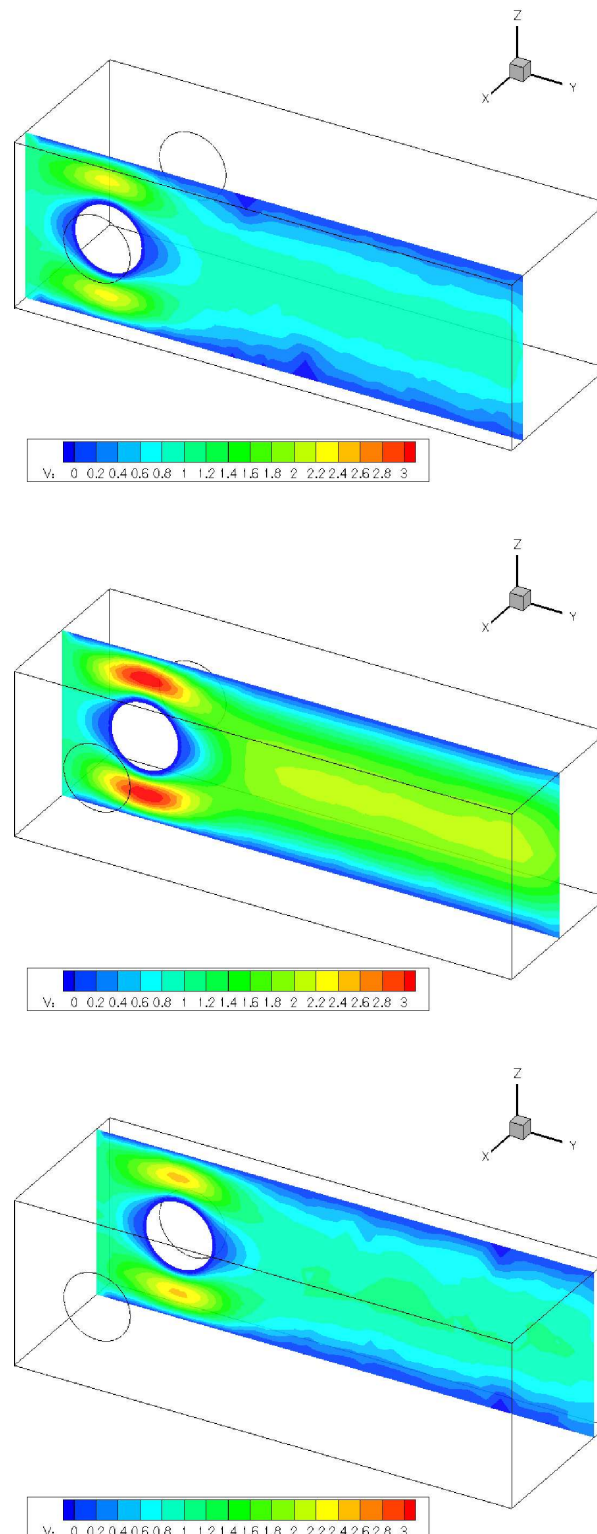


Figura 6.20: Cortes para la primera componente de la velocidad.

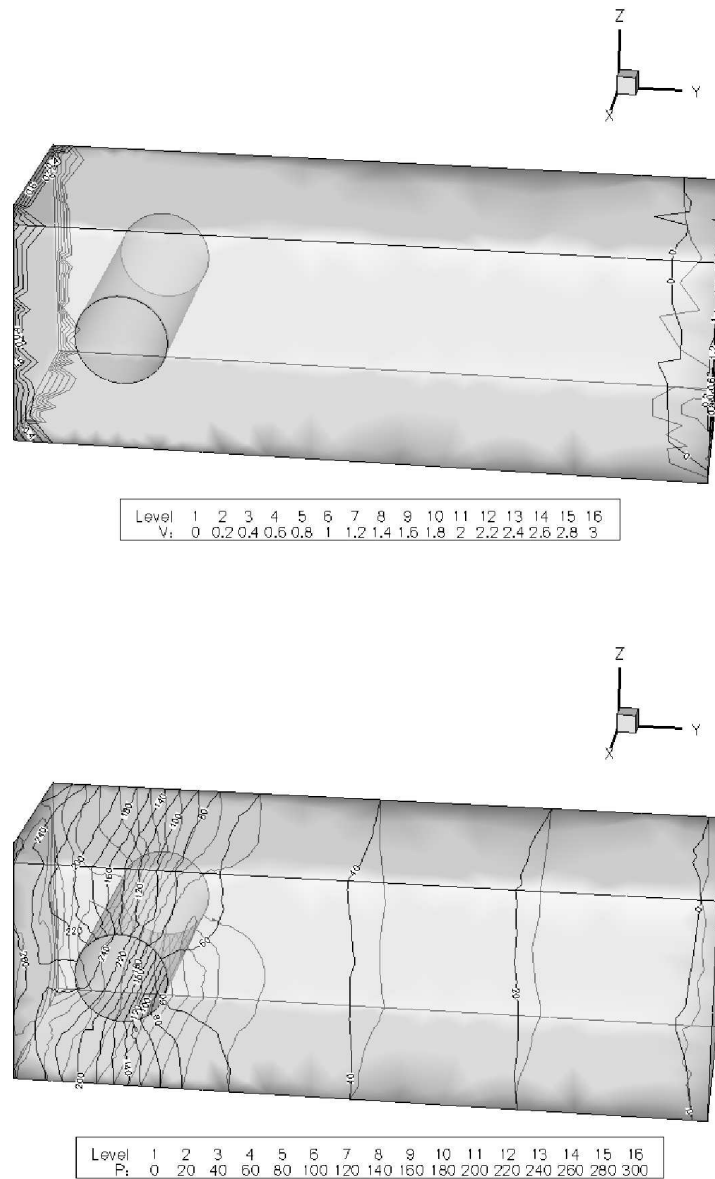


Figura 6.21: Isovalores de la primera componente de la velocidad y de la presión.

Bibliografía

- [1] A. Ern y J. Guermond. *Theory and practice of finite elements*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 2004.
- [2] R. Araya, G. R. Barrenechea, y A. Poza. An adaptive stabilized finite element method for the generalized Stokes problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214:457–479, 2008.
- [3] G. R. Barrenechea y F. Valentin. An unusual stabilized finite element method for a generalized stokes problem. *Numerische Mathematik*, 92:653–677, 2002.
- [4] F. Brezzi y M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, tomo 15 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [5] A.N. Brooks y T.J.R. Hughes. Streamline upwind Petrov–Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, 32:199–259, 1982.
- [6] Ph. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. 1978.
- [7] L.P. Franca y R. Stenberg. Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations. *SIAM Journal in Numerical Analysis*, 28(6):1680–1697, 1991.
- [8] V. Girault y P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms*, tomo 5 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

-
- [9] S. Korotov J. Brandts y M. Křížek. On the equivalence of regularity criteria for triangular and tetrahedral finite element partitions. *Comput Math Appl*, 55:2227–2233, 2008.
 - [10] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the stokes problem. *Numerische Mathematik*, 55:309–325, 1989.
 - [11] R. Verfürth. A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(4):419–440, 1999.